¿Se puede hacer el proyecto?

- Tenemos un proyecto complejo dividido en varias tareas
- Algunas tareas tienen como requisito otras tareas

¿Cómo sabemos si es posible realizar el proyecto completo?

Requisitos inconsistentes

Si la tarea B tiene como requisito la tarea A, entonces escribimos

$$A \to B$$

Si existe alguna secuencia “circular” de requisitos:

$$X \to R \to \cdots \to K \to X,$$

… entonces no es posible realizar el proyecto

¿Es la única condición?

¿Cómo lo verificamos en el computador?

Si recibimos la lista de tareas y de requisitos

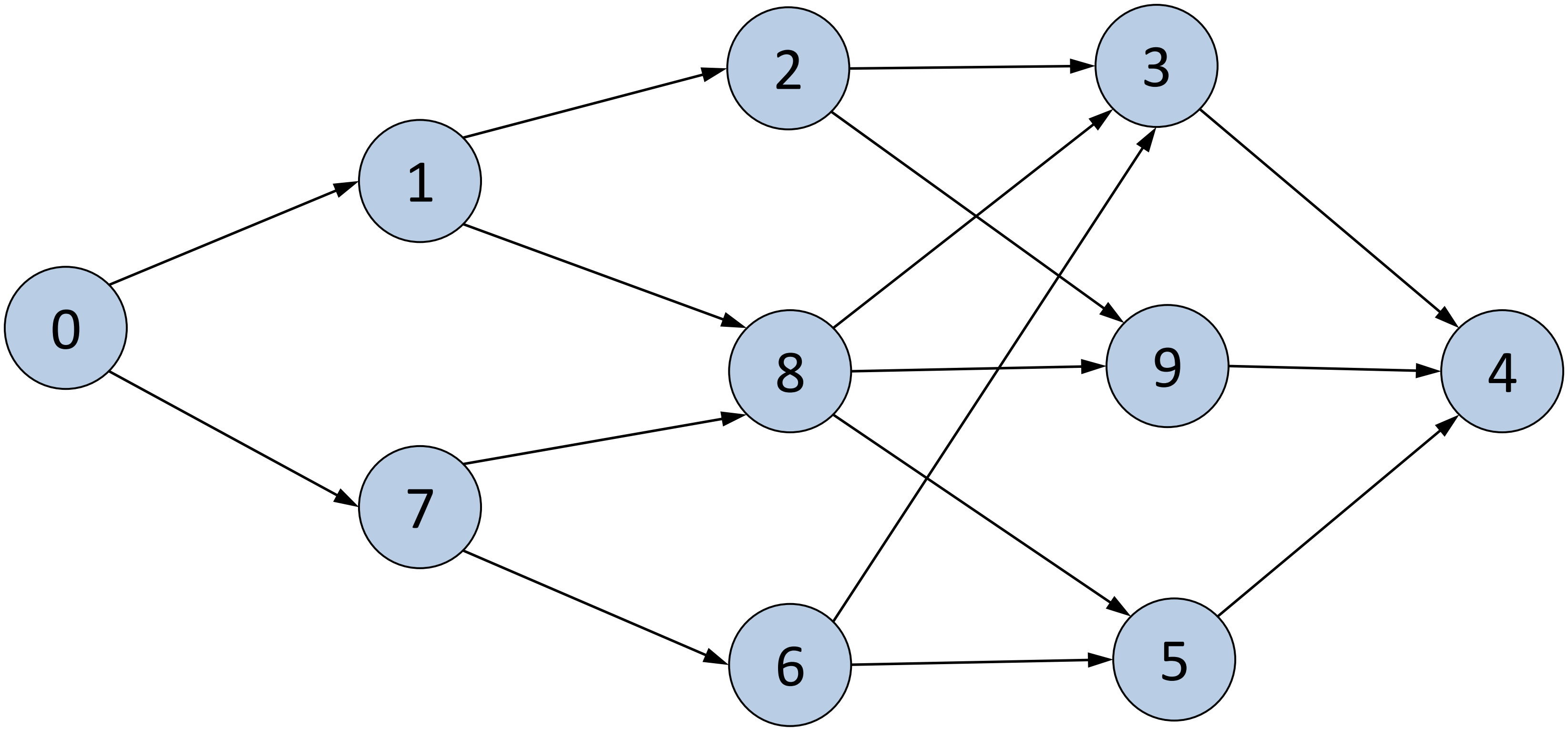
… ¿cómo hacemos un programa que revise esto?

¿Cuál será la forma más eficiente de hacerlo?

¿Qué datos recibo?

0:				—*la tarea 0 no tiene prerrequsitos*
1:	**0**			—*la tarea 1 tiene como prerrequisito la tarea 0*
2:	**1**			—*la tarea 2 tiene como prerrequisito la tarea 1*
3:	**2**	**6**	**8**	—*la tarea 3 tiene como prerrequisitos las tareas 2, 6 y 8*
4:	**3**	**5**	**9**	—*… y así sucesivamente*
5:	**6**	**8**		
6:	**7**			
7:	**0**			
8:	**1**	**7**		
9:	**2**	**8**		

¿Cómo represento los datos visualmente?



La representación visual anterior se conoce como **grafo**

La representación visual anterior se conoce como **grafo**:

- un conjunto *V* de **vértices**, o nodos
- … + un conjunto *E* de **aristas**, o arcos

La complejidad de un algoritmo tiene ahora dos pará-metros incluidos en una misma expresión matemática: $|V|$ y $|E|$

P.ej., O($|V|+|E|$), que escribimos O($V+E$)

O($|E| \log |V|$), que escribimos O($E \log V$)

Hay dos tipos principales de grafos

1. **Direccionales** (como el del ejemplo):

   cada arista tiene una *dirección* —va *de un vértice al otro*

2. **No direccionales:**

   las aristas no tienen dirección —van, o están*, entre vértices*

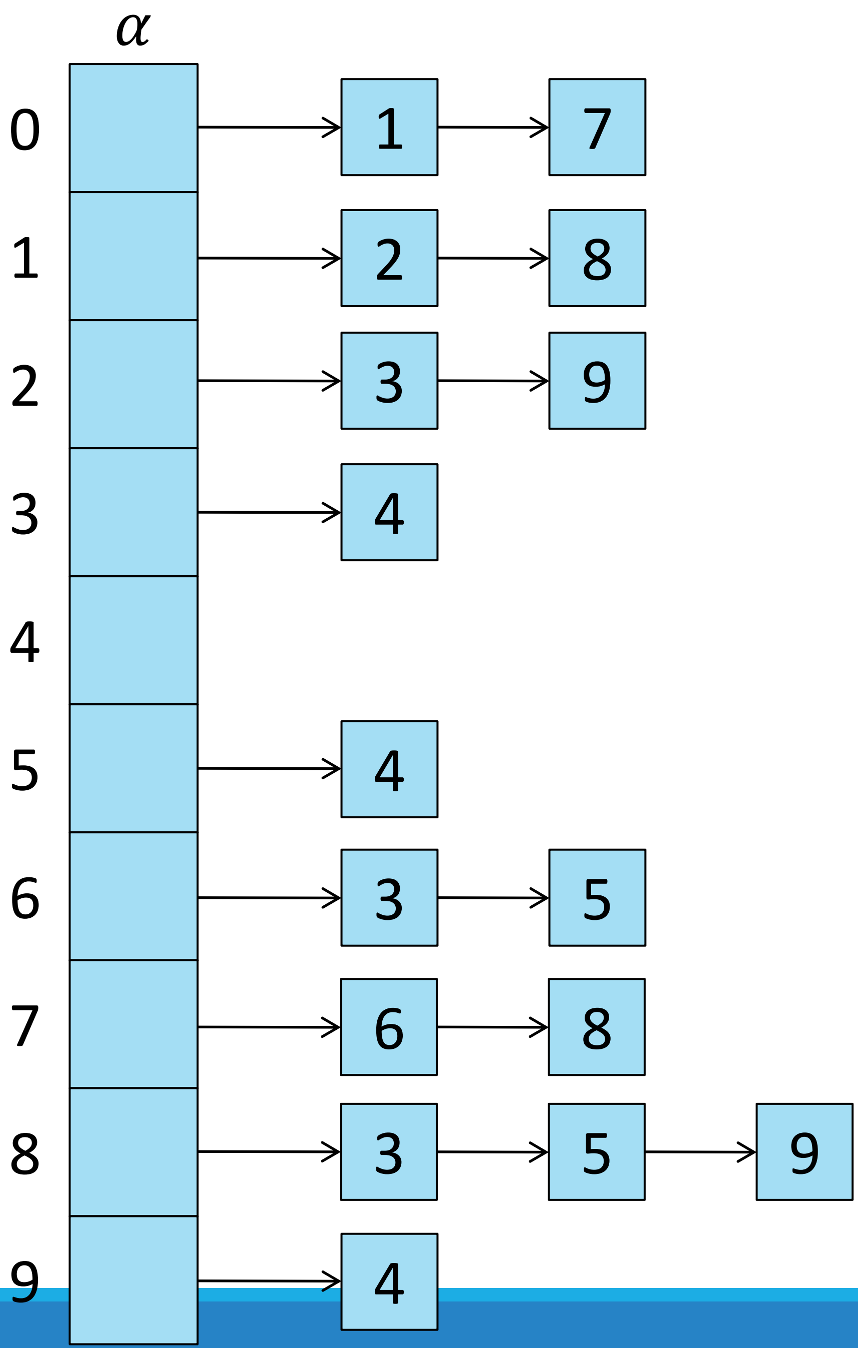
Hay dos formas de representar un grafo en la memoria del computador

1. **Listas de adyacencias**

   Cada nodo tiene una lista de los nodos a los que tiene una arista

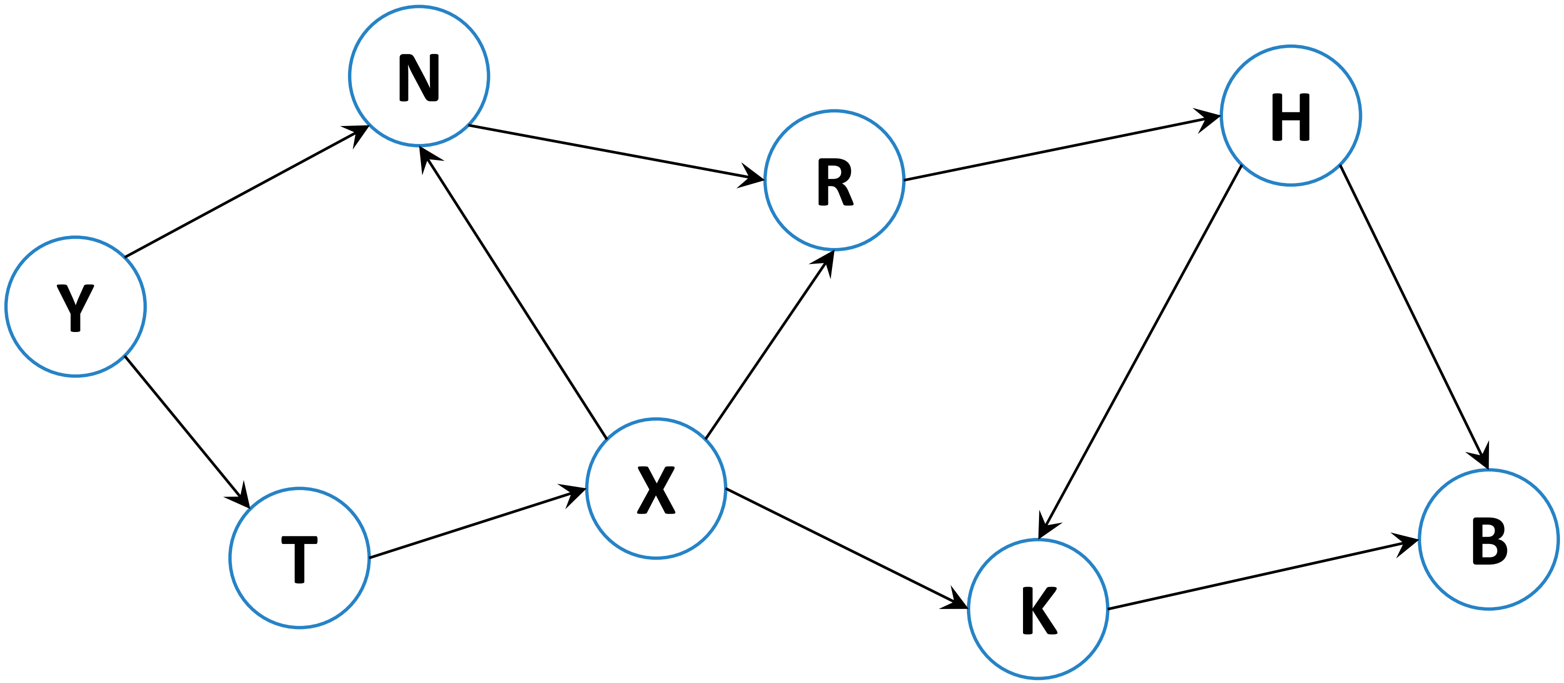
2. **Matriz de adyacencias**

   La coordenada x, y de la matriz indica si la arista (x, y) está en el grafo



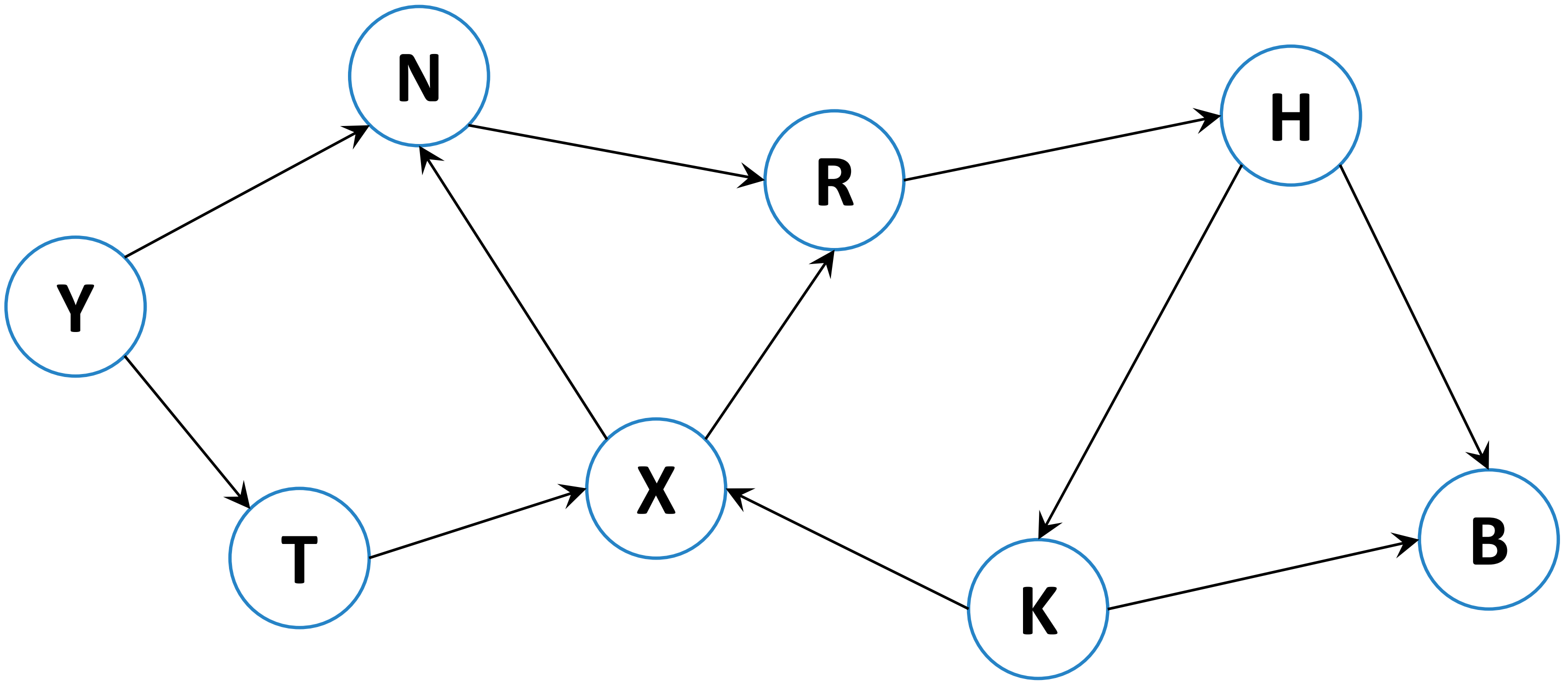
El grafo direccional anterior representado por 10 listas de adyacencias, $\alpha[i]$

Dibujemos el grafo de un proyecto



¿Algún problema con este proyecto?

¿Qué pasa en este caso?



¿Algún problema con este proyecto?

Los grafos direccionales pueden contener **ciclos**

Si el grafo direccional que representa a un proyecto tiene un **ciclo**, entonces el proyecto no puede llevarse a cabo

¿Cómo podemos buscar ciclos en un grafo de manera eficiente?

Definimos la relación *es posterior a*

Diremos que una tarea Y **es posterior a** una tarea X si:

$$X \rightarrow Y$$

o

Existe una tarea Z tal que $X \rightarrow Z$, y Y **es posterior a** Z

Significa que X debe realizarse antes que Y

¿Qué pasa si una tarea es posterior a sí misma?

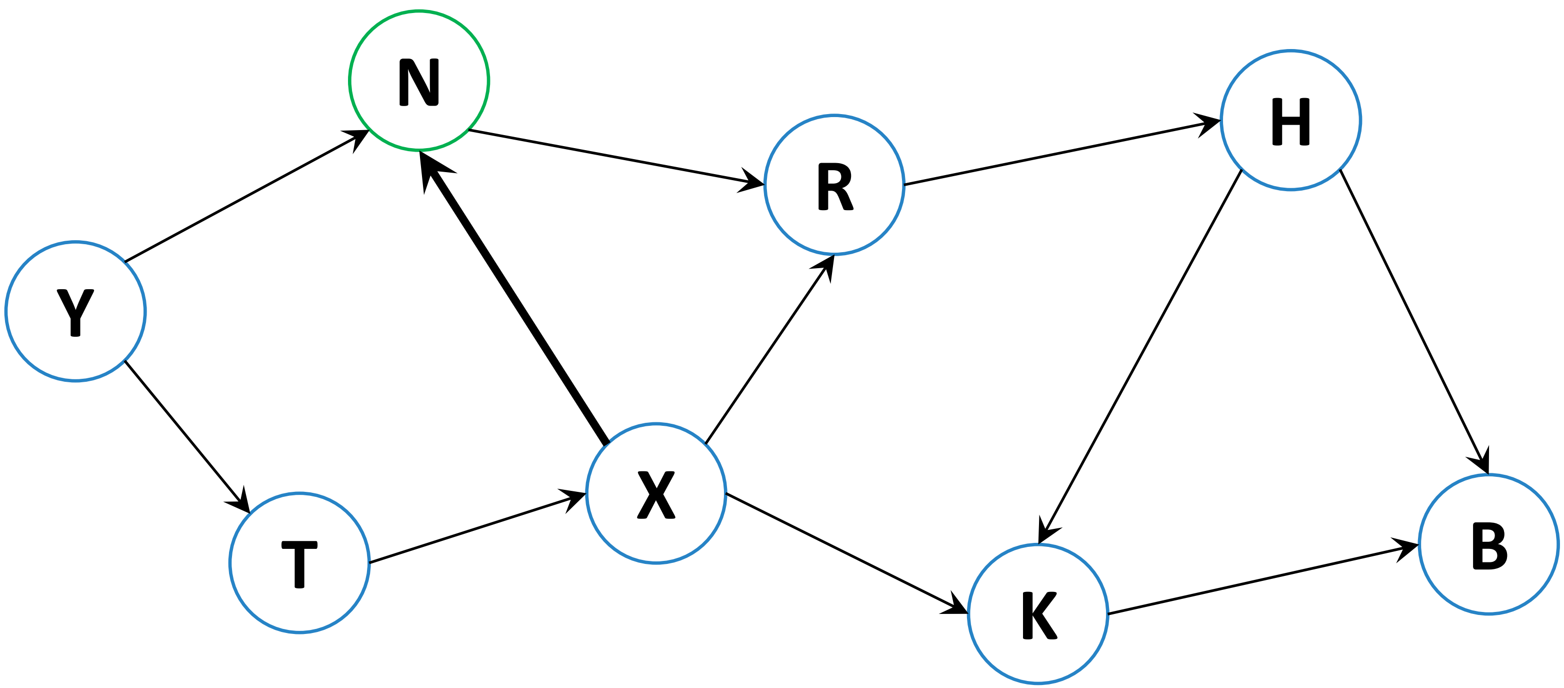
Si una tarea **es posterior a** sí misma, entonces forma parte de un **ciclo**

¿Cómo podemos identificar las tareas posteriores a una tarea?

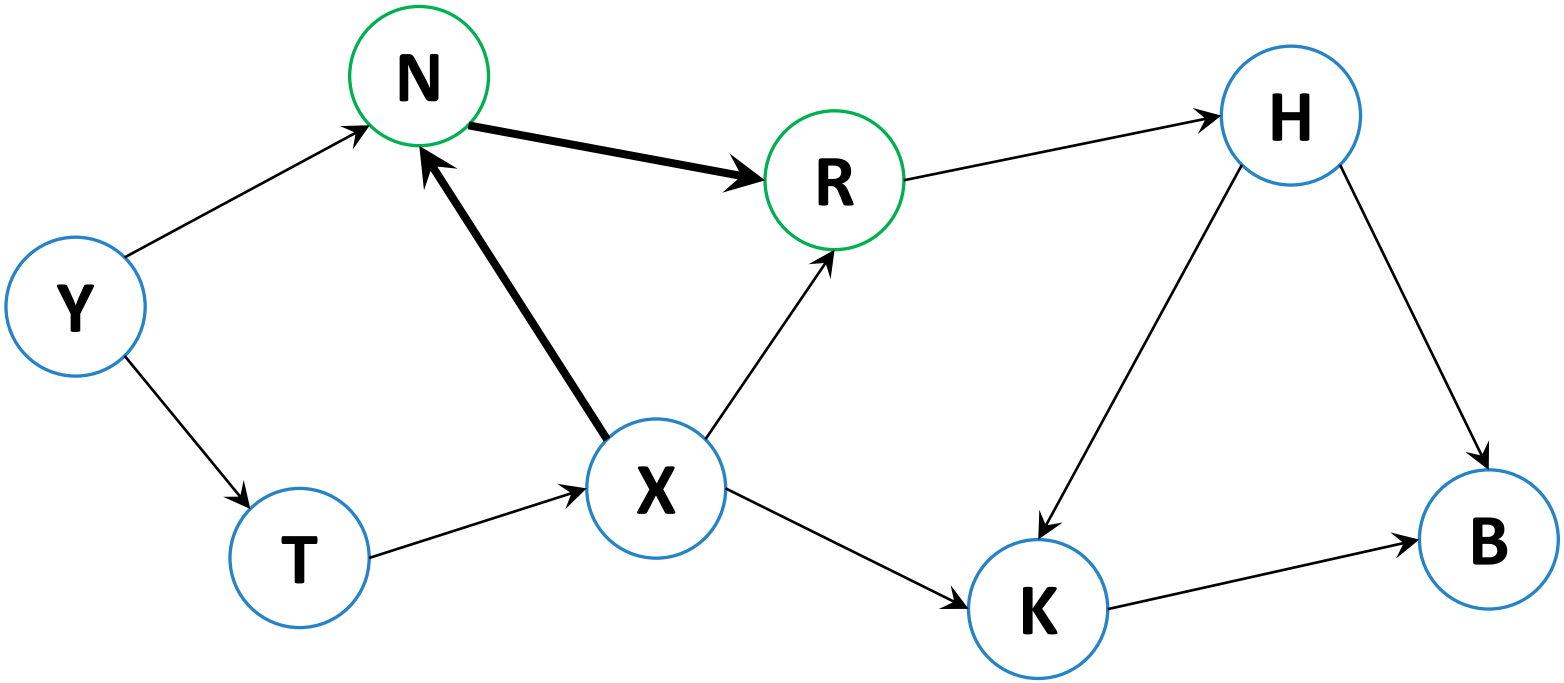
Pensemos en la definición de la propiedad

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{posteriores}(\boldsymbol{X}):\\
&\qquad \boldsymbol{P} \leftarrow \emptyset\\
&\qquad \boldsymbol{for}\ \boldsymbol{Y} \text{ tal que } \boldsymbol{X} \rightarrow \boldsymbol{Y}:\\
&\qquad\qquad \boldsymbol{P} \leftarrow \boldsymbol{P} \cup \{\boldsymbol{Y}\}\\
&\qquad\qquad \boldsymbol{P} \leftarrow \boldsymbol{P} \cup \boldsymbol{posteriores}(\boldsymbol{Y})\\
&\qquad \boldsymbol{return}\ \boldsymbol{P}
\end{aligned}
$$

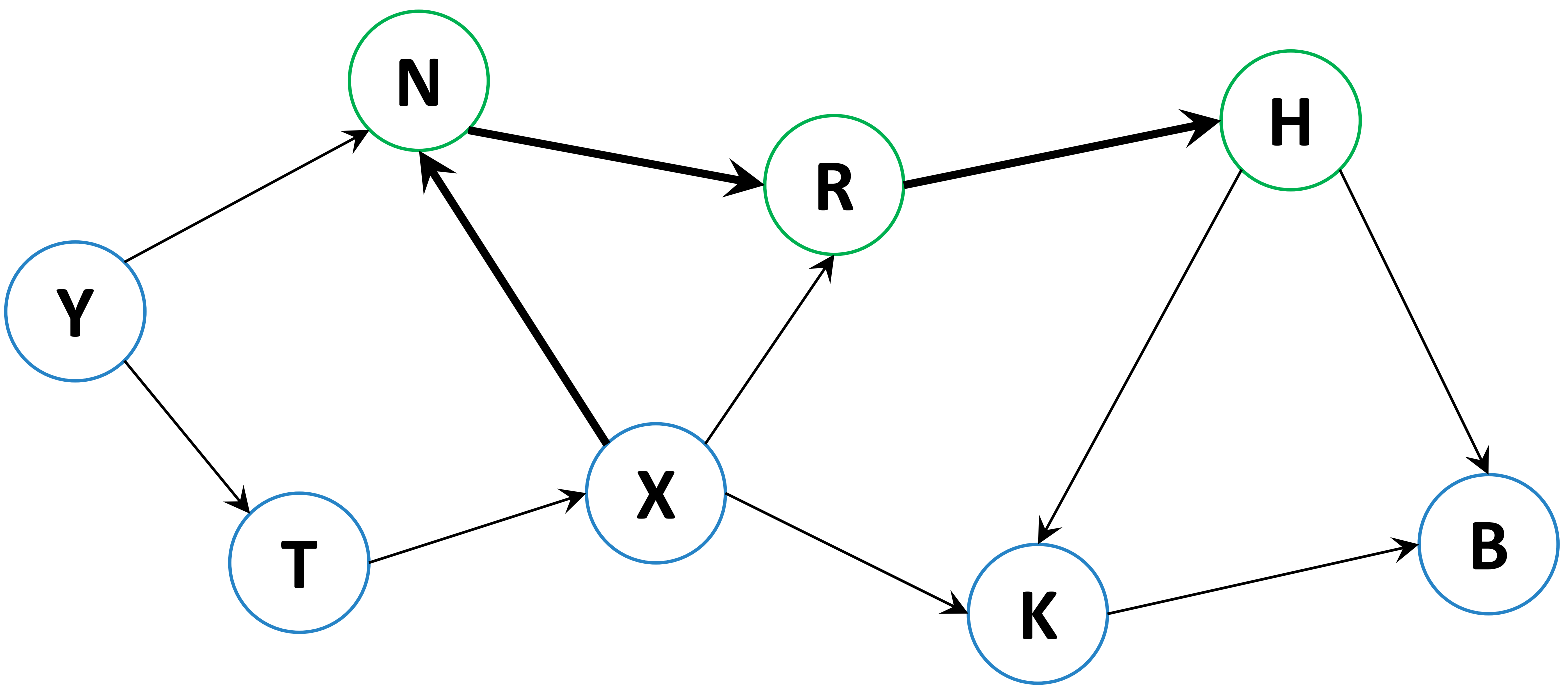
¿Cuáles tareas, o nodos, son posteriores a *X*?



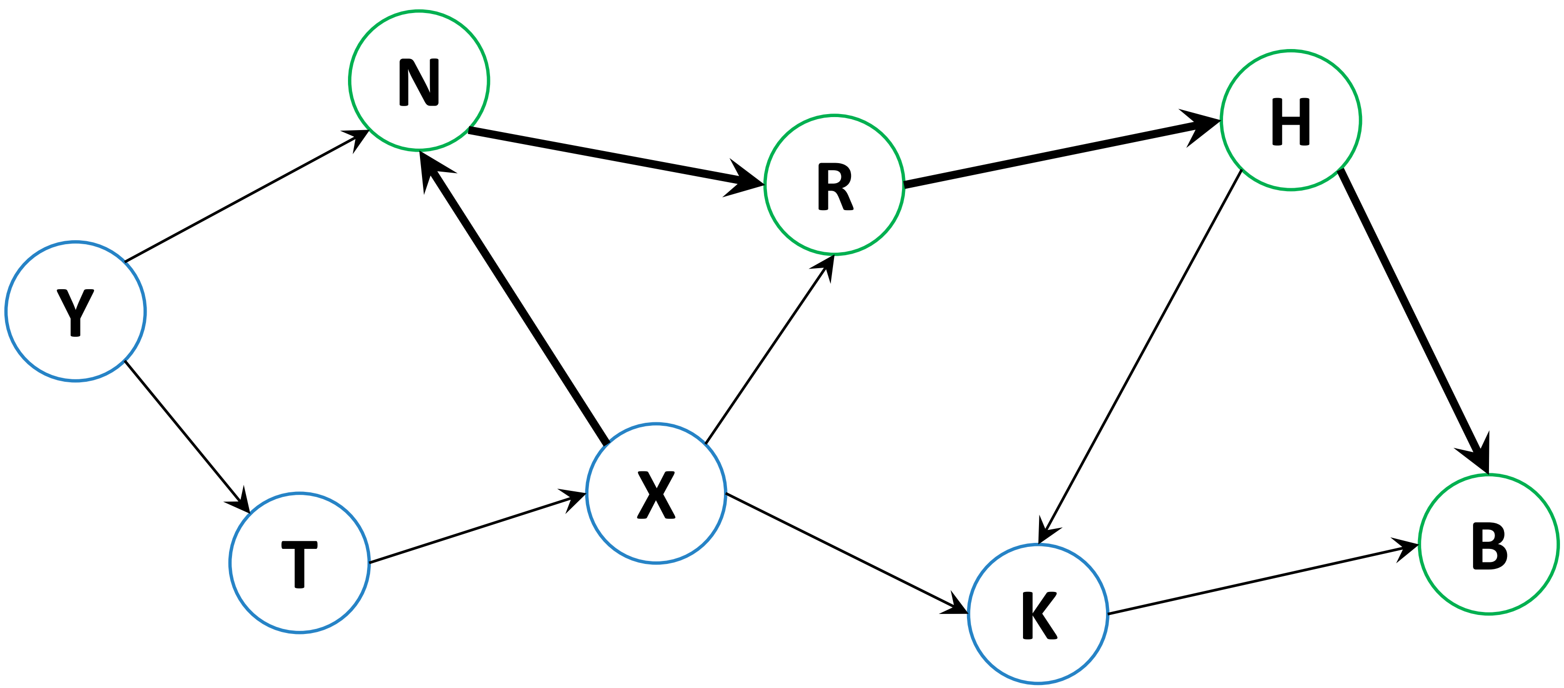
¿Cuáles nodos son posteriores a *N*?



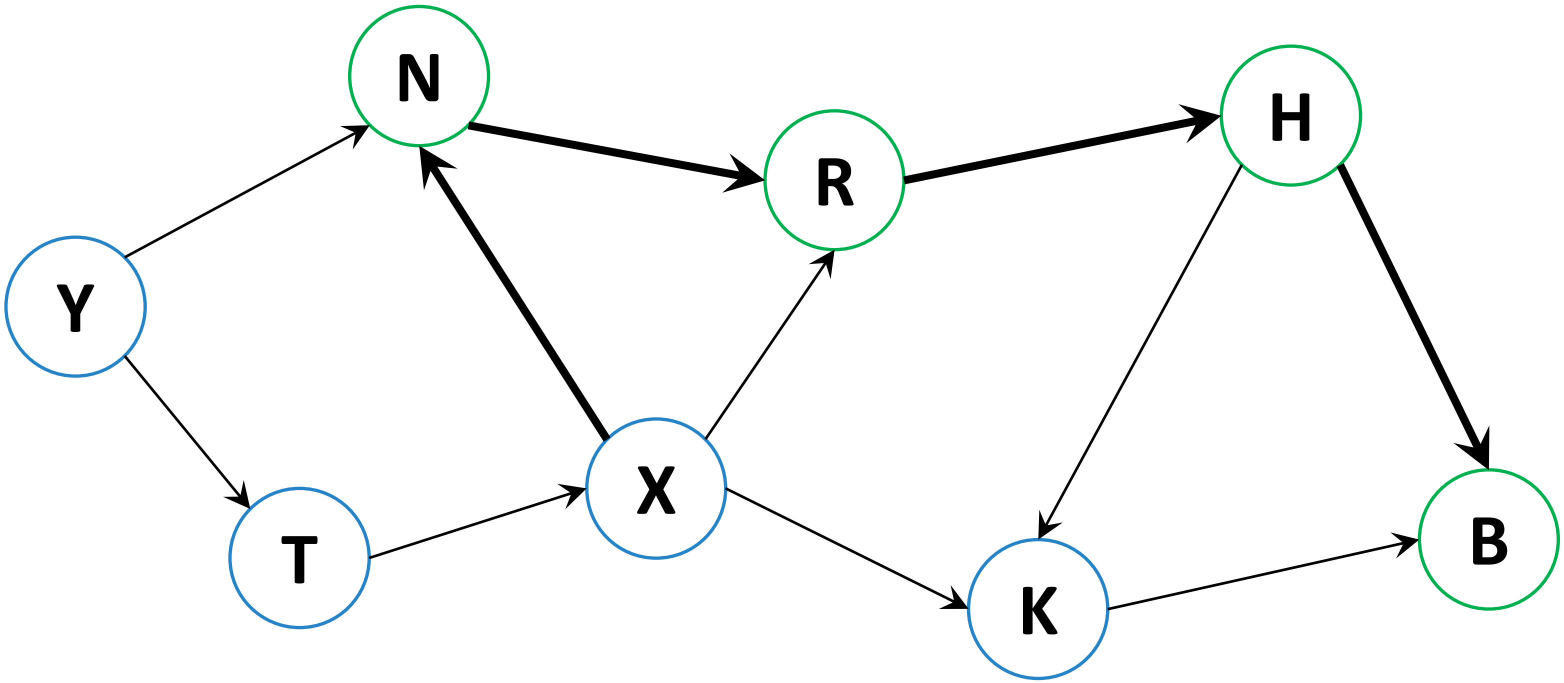
¿Cuáles nodos son posteriores a *R*?



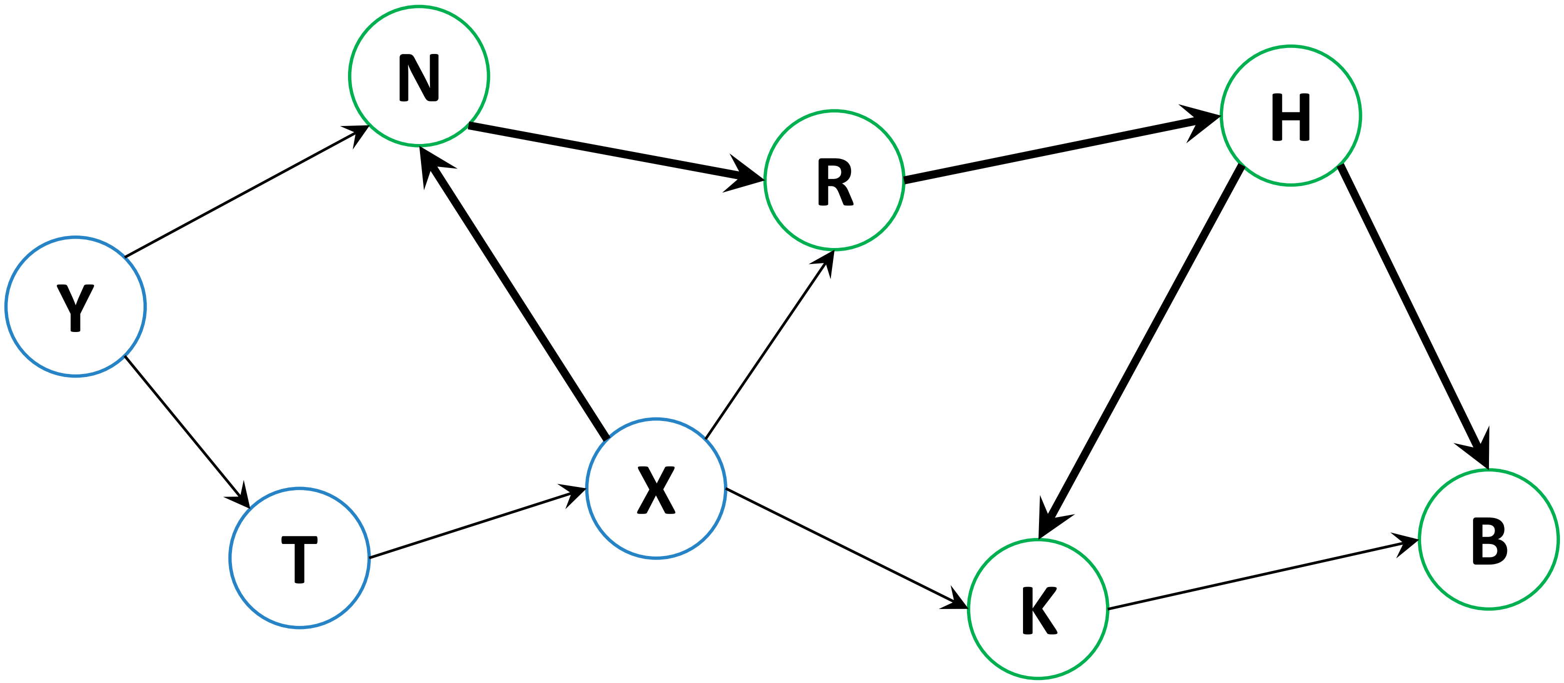
¿Cuáles nodos son posteriores a *H*?



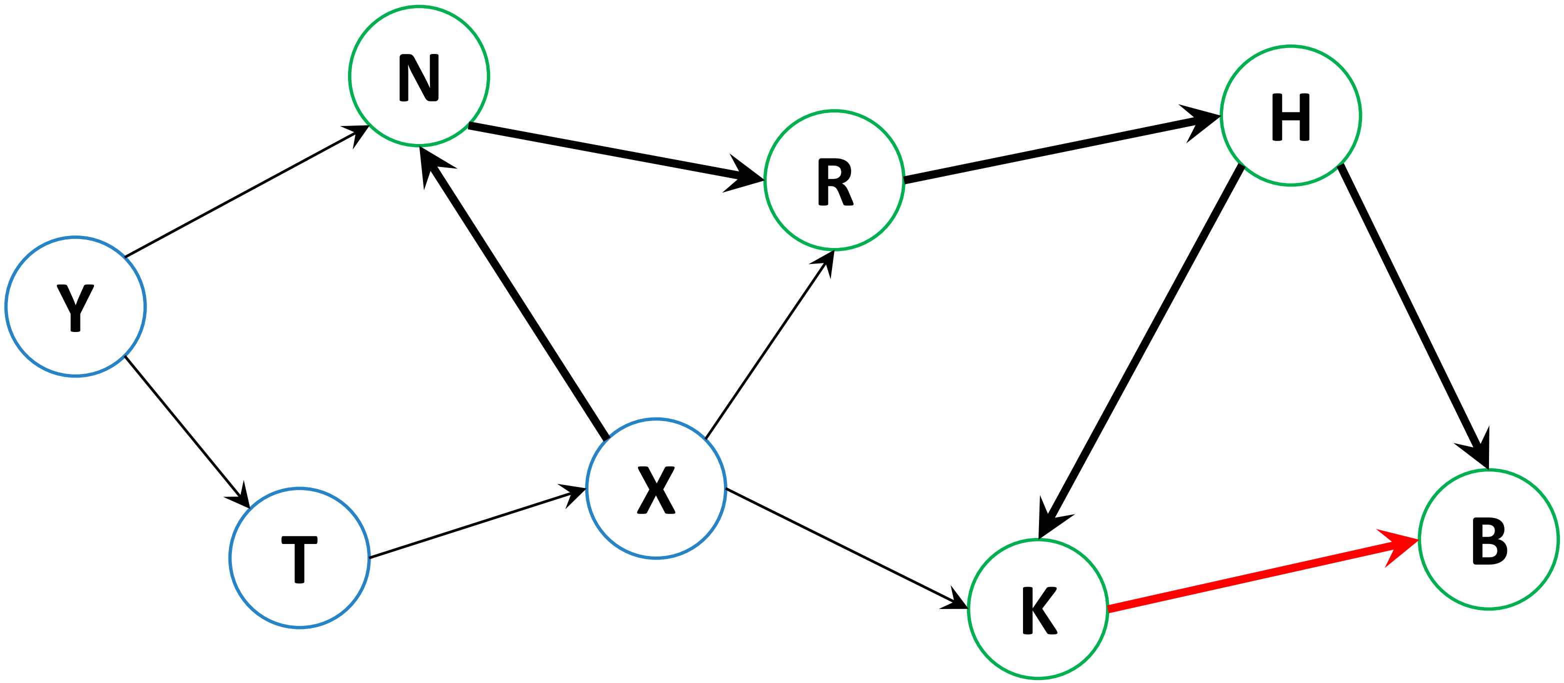
¿Cuáles nodos son posteriores a *B*?



¿Cuáles nodos son posteriores a *K*?



¿Cuáles nodos son posteriores a *B*?



Espera … ya preguntamos por los nodos posteriores a *B*

Nodos por los que ya pasamos

Estamos haciendo llamadas a $\boldsymbol{posteriores}(\ )$ repetidas: con el mismo nodo como parámetro

Es más, si el nodo forma parte de un ciclo, entonces el algoritmo no termina

¿Cómo se soluciona esto?

$posteriores(\boldsymbol{X})$:

$\quad if\ \boldsymbol{X}$ está pintado: $return\ \emptyset$

$\quad$ pintar $\boldsymbol{X}$

$\quad \boldsymbol{P} \leftarrow \emptyset$

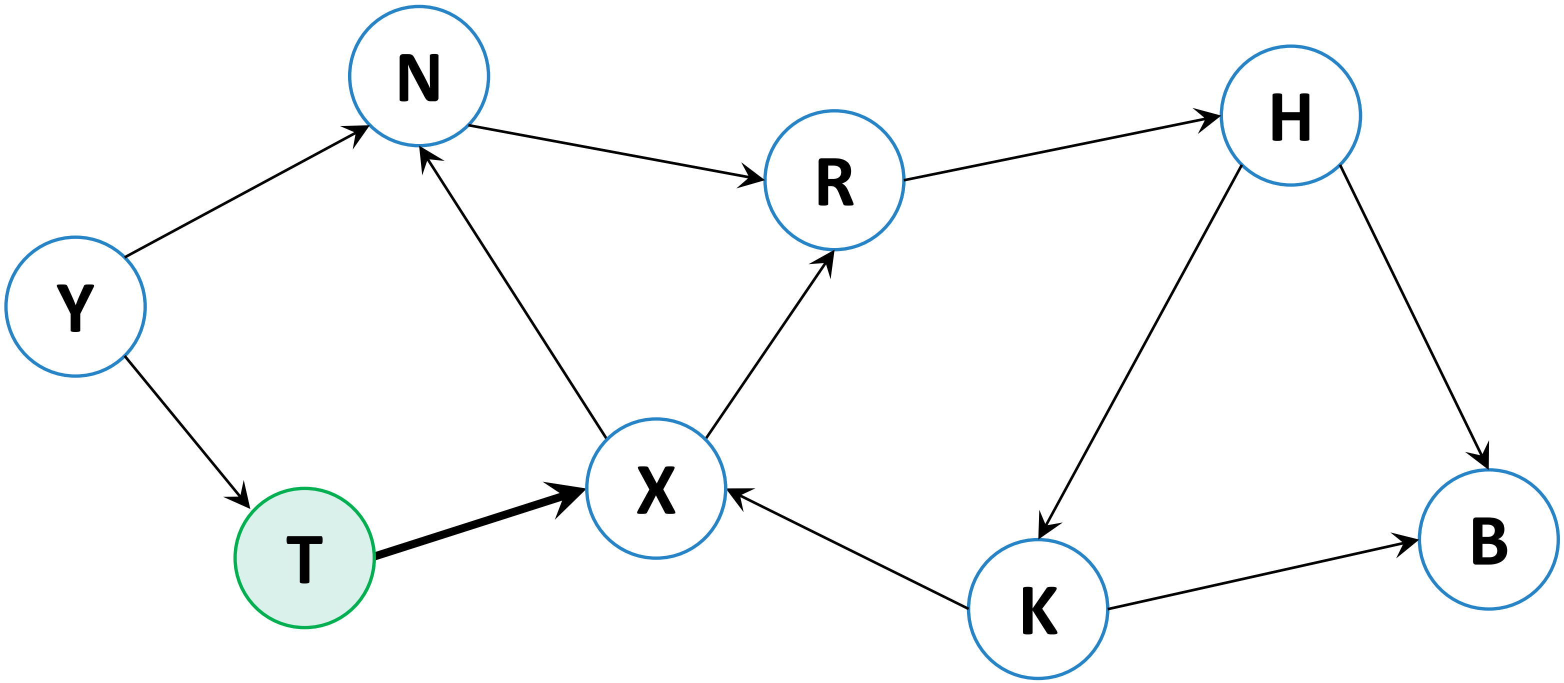
$\quad for\ \boldsymbol{Y}$ tal que $\boldsymbol{X} \rightarrow \boldsymbol{Y}$:

$\quad\quad \boldsymbol{P} \leftarrow \boldsymbol{P} \cup \{\boldsymbol{Y}\}$

$\quad\quad \boldsymbol{P} \leftarrow \boldsymbol{P} \cup posteriores(\boldsymbol{Y})$

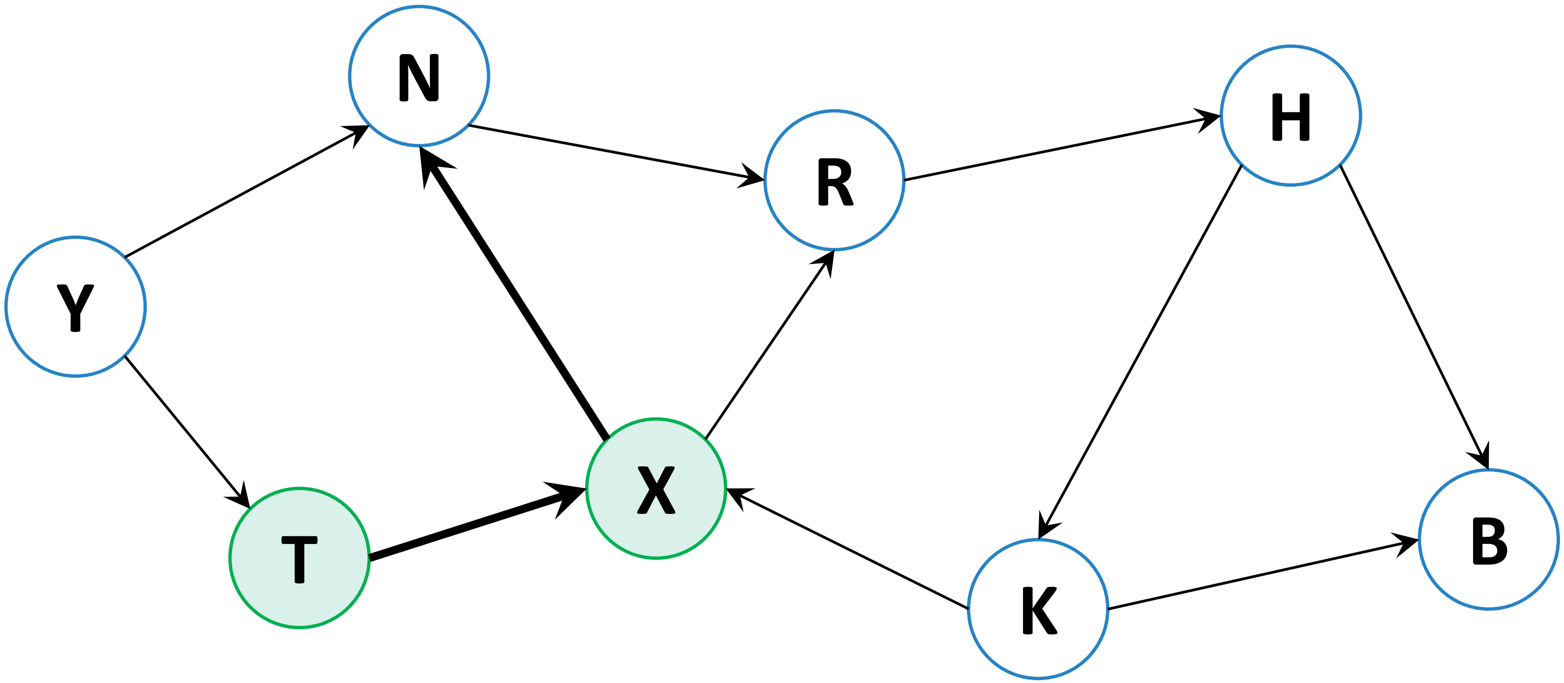
$\quad return\ \boldsymbol{P}$

Veamos ahora:
¿cuáles son los nodos posteriores a *T*?



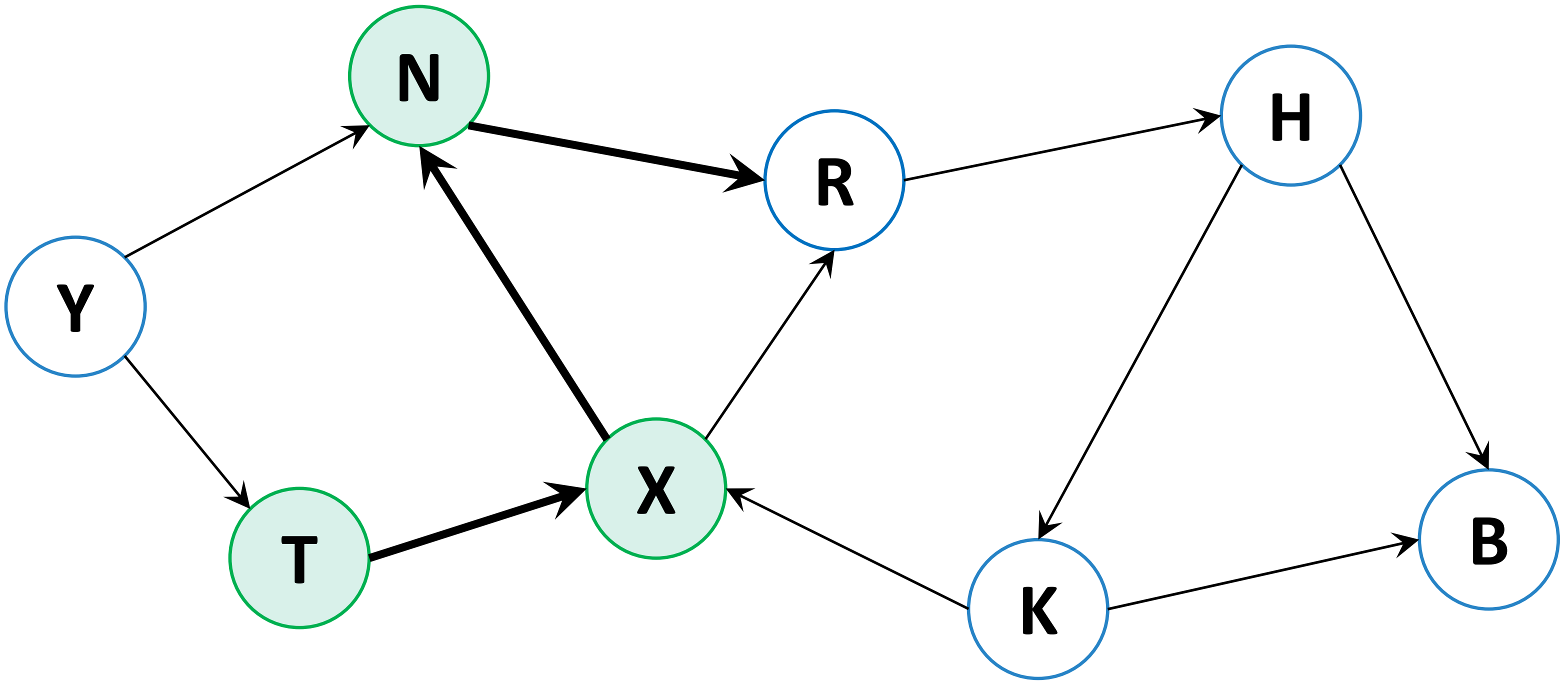
T no está pintado, lo pintamos;
hay una sola arista que sale de *T*,
la que va a *X* … sigámosla

Pintamos *X*, y buscamos los nodos posteriores a *X*



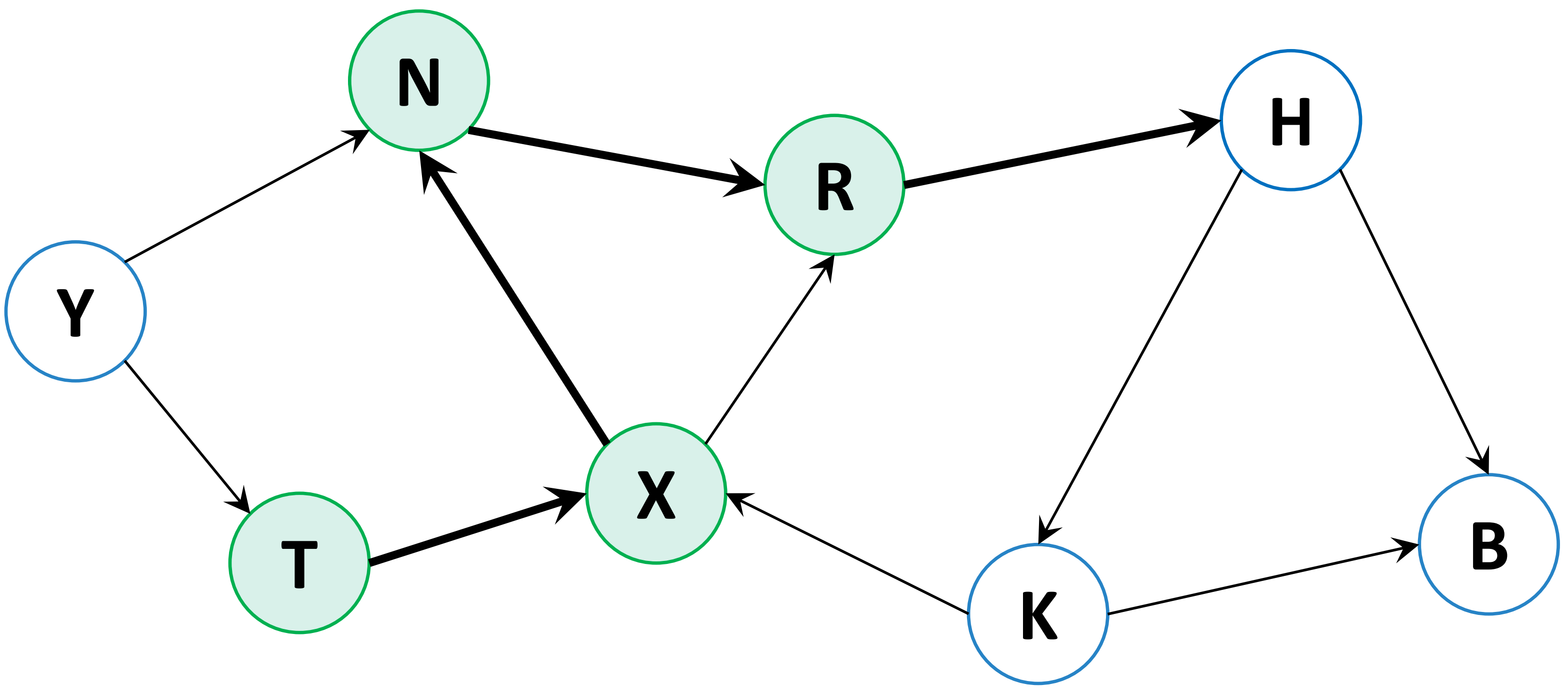
Hay dos aristas que salen de *X*; seguimos la que va a *N* … y dejamos pendiente la que va a *R*

Pintamos *N*, y buscamos los nodos posteriores a *N*



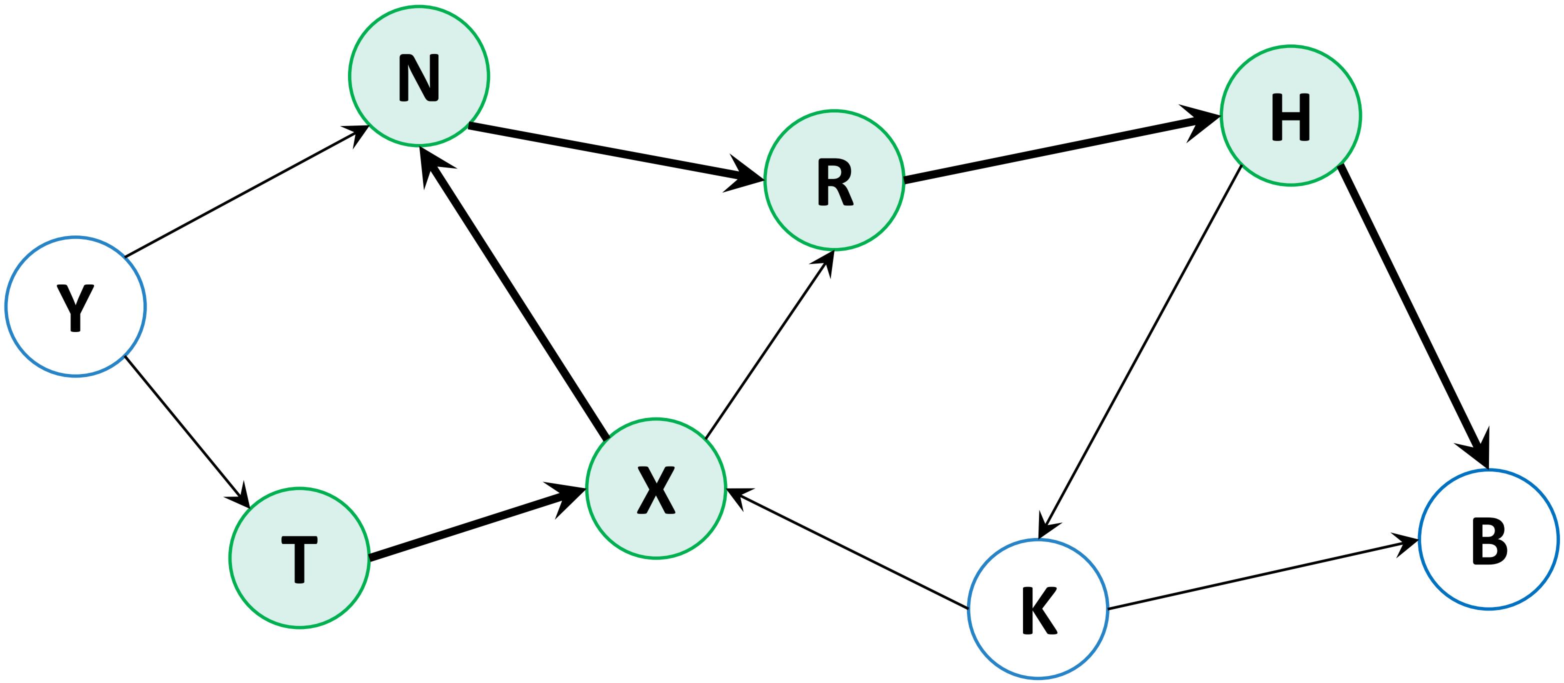
Hay una sola arista que sale de *N*; la seguimos

Pintamos *R*, y buscamos los nodos posteriores a *R*



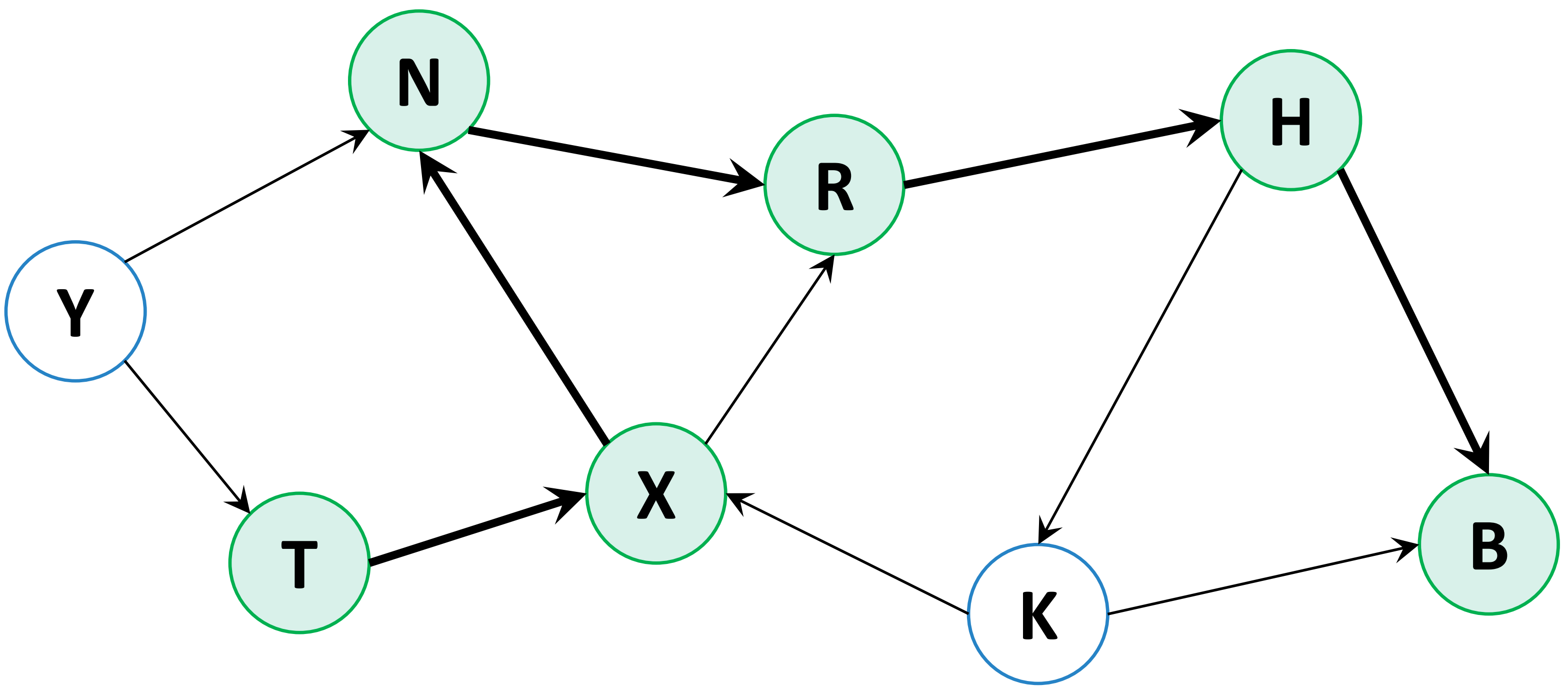
Hay una sola arista que sale de *R*;
la seguimos

Pintamos *H*, y buscamos los nodos posteriores a *H*



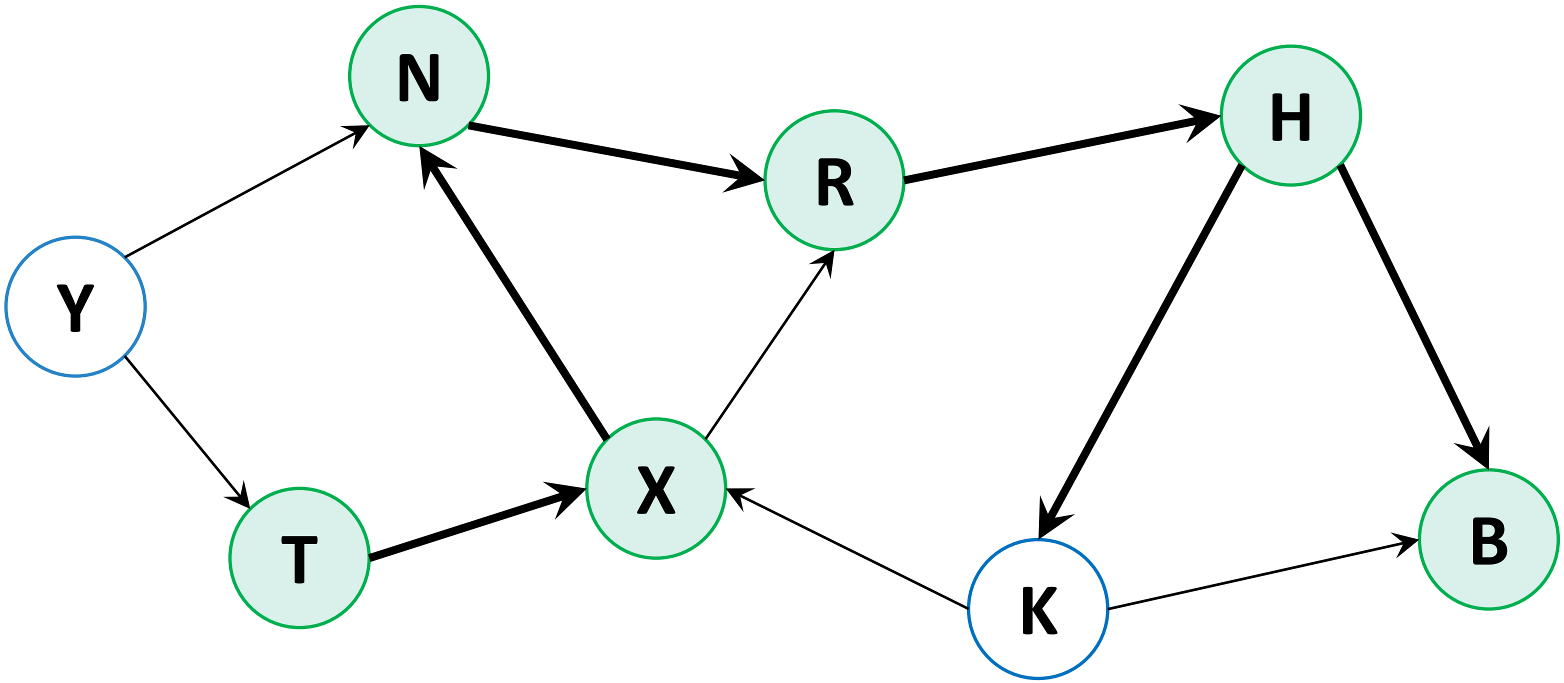
Hay dos aristas que salen de *H*; seguimos la que va a *B* … y dejamos pendiente la que va a *K*

Pintamos *B*, y buscamos los nodos posteriores a *B*



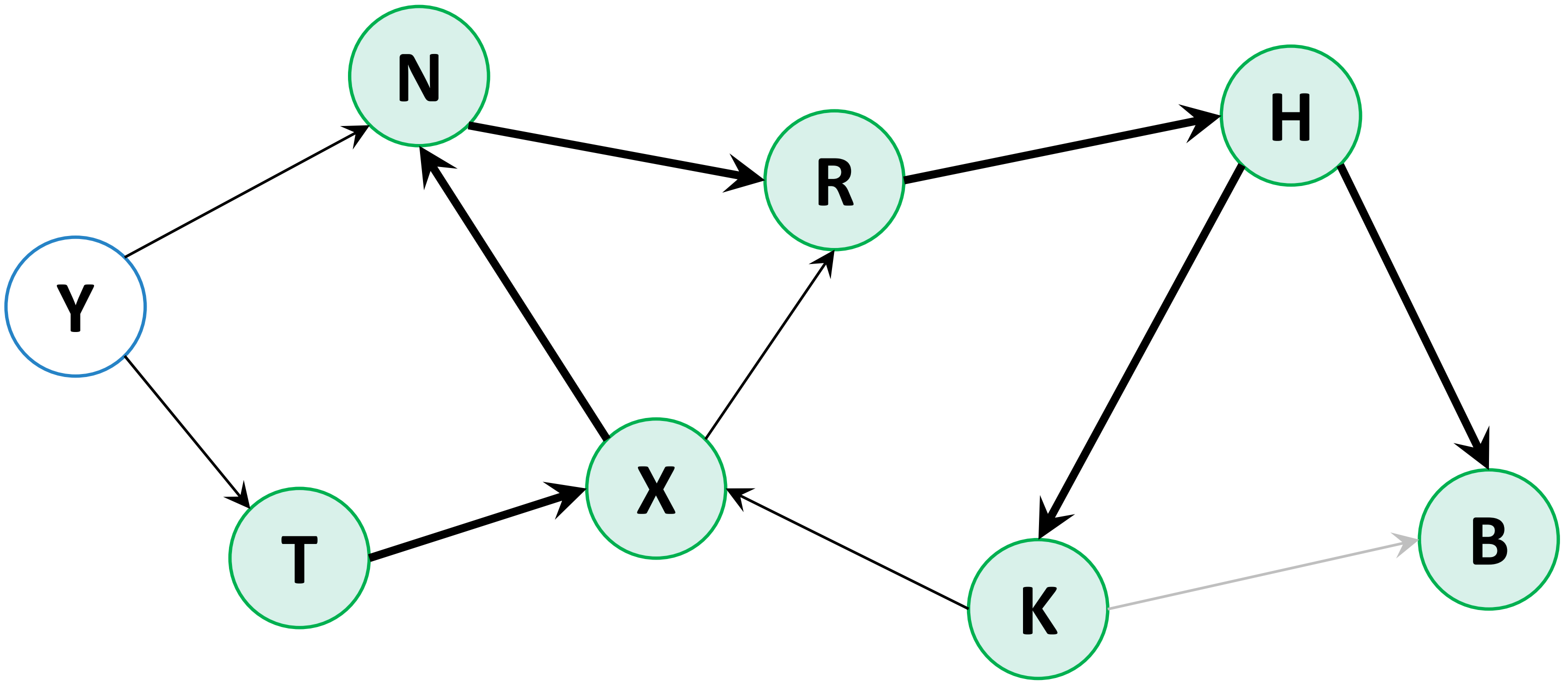
No hay aristas que salgan de *B*;
volvemos a *H*

Seguimos buscando nodos posteriores a *H*



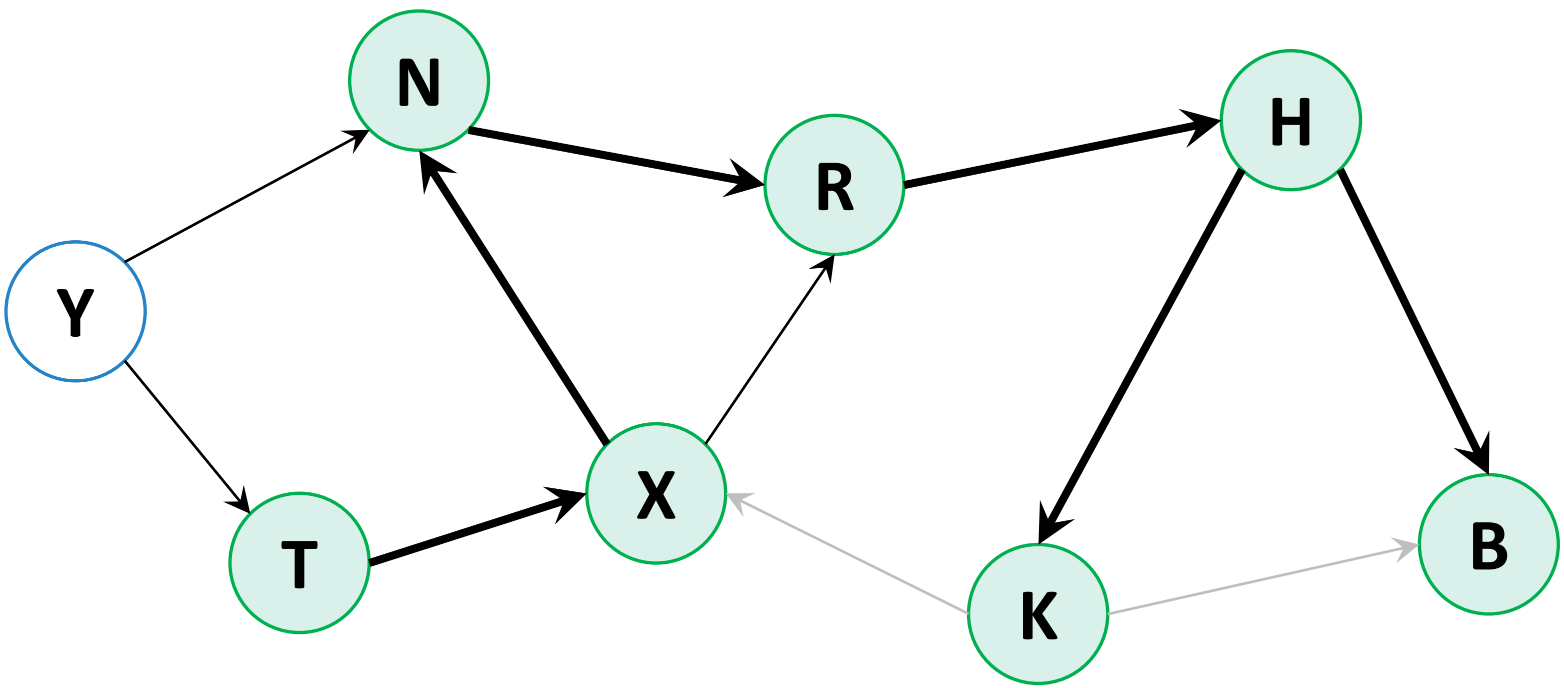
Seguimos la segunda arista que sale de *H*; la que va a *K*

Pintamos *K*, y buscamos los nodos posteriores a *K*



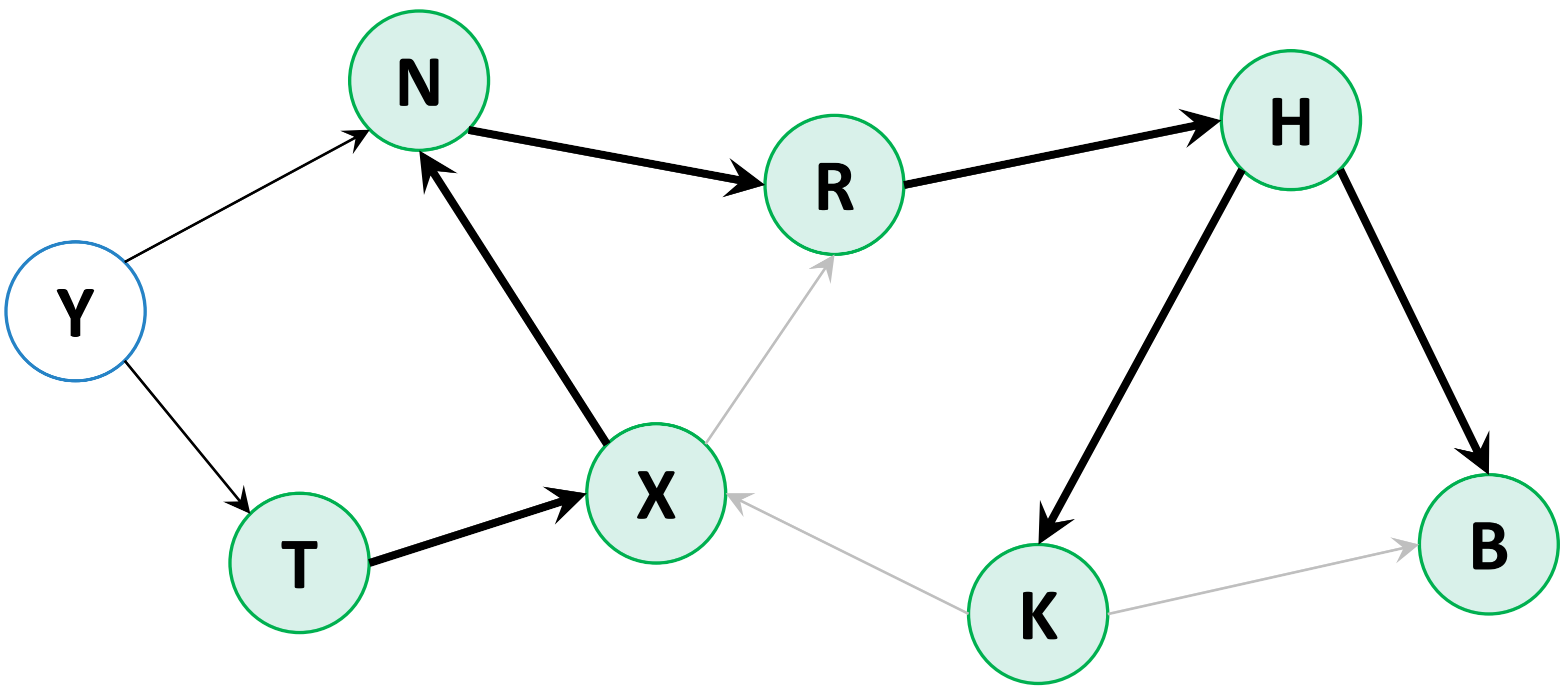
Hay dos aristas que salen de *K*;
tratamos de seguir la que va a *B*, pero
notamos que *B* ya fue visitado … volvemos a *K*

Seguimos buscando nodos posteriores a *K*



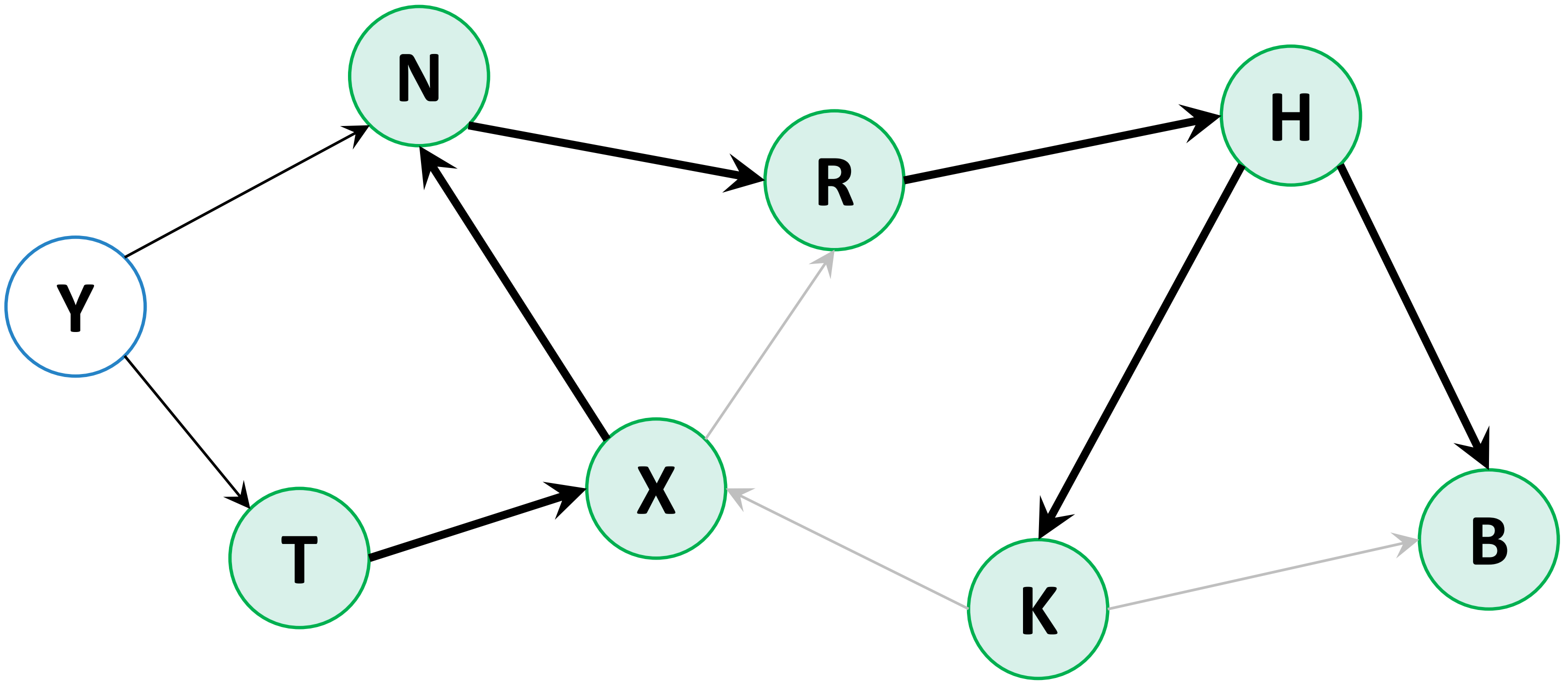
Ahora tratamos de seguir la que va a *X*, pero notamos que *X* ya fue visitado … volvemos a *K*, y de ahí a *H*, a *R*, a *N*, y a *X*

Seguimos buscando nodos posteriores a *X*



En *X*, habíamos dejado pendiente la arista que va a *R*; ahora tratamos de seguirla, pero notamos que *R* ya fue visitado … volvemos a *T*

¡ Listo !



Desde *T* no hay nada más que hacer
… terminamos

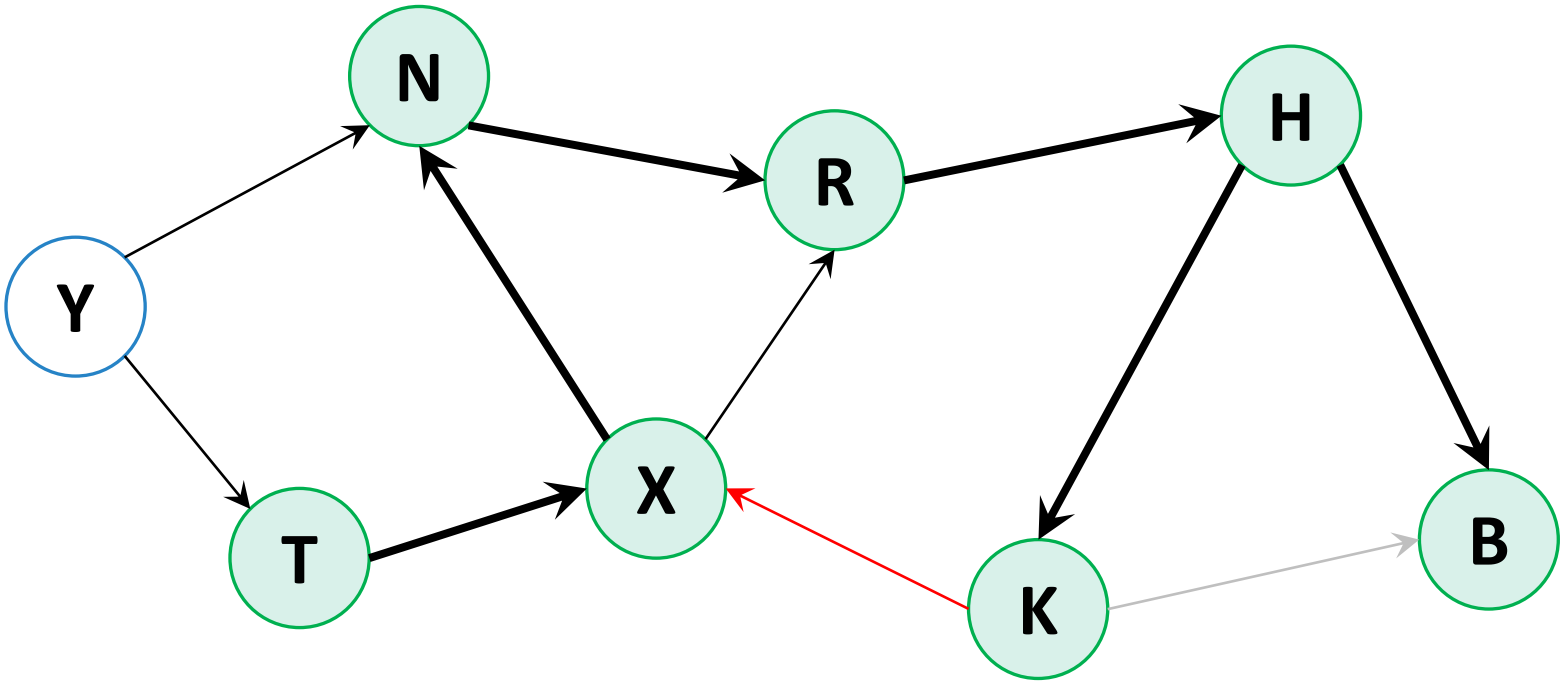
¿Cómo identificamos ciclos?

Ok, podemos identificar las tareas posteriores a una tarea

Ahora, viendo este algoritmo, ¿se nos ocurre algo?

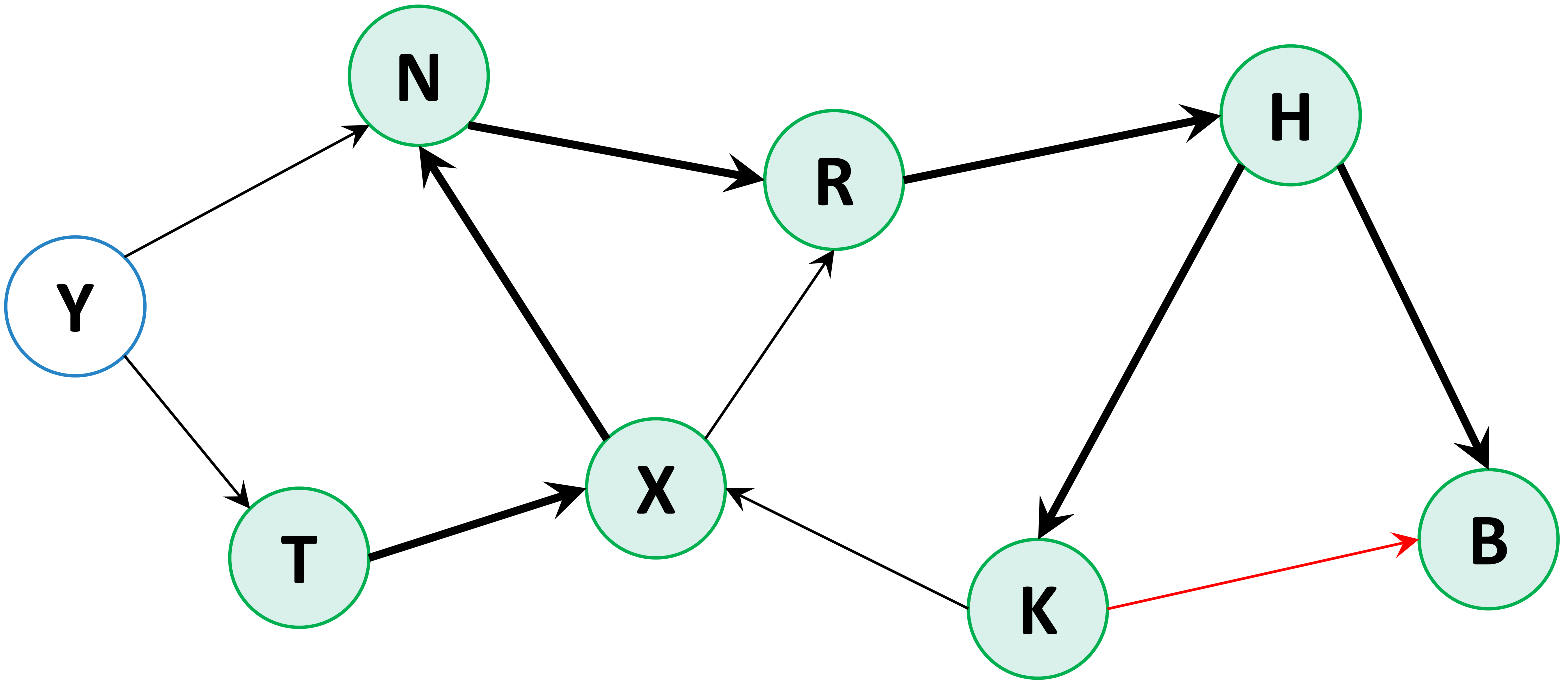
¿Podemos usar este enfoque para identificar ciclos?

Algo así como esto



¡Algoritmo, date cuenta de que esto es un ciclo!

… ¿y como esto?



¡Y que esto otro, no!

Regla de los ciclos

Si el nodo que vamos a visitar, Y, está pintado, entonces (no lo visitamos y) hay dos posibilidades:

- si estamos en un nodo posterior a Y, entonces **hay un ciclo**
- si no estamos en un nodo posterior a Y, entonces no hay un ciclo (al menos por ahora)

Hasta que $\boldsymbol{posteriores}(X)$ retorne, todos los nodos visitados (que van siendo pintados) son posteriores a X

$\boldsymbol{hay\ ciclo\ luego\ de}(\boldsymbol{X})$:

$\boldsymbol{if}$ $\boldsymbol{X}$ está pintado de gris: $\boldsymbol{return\ true}$

$\boldsymbol{if}$ $\boldsymbol{X}$ está pintado de negro: $\boldsymbol{return\ false}$

Pintar $\boldsymbol{X}$ de gris

$\boldsymbol{for}$ $\boldsymbol{Y}$ tal que $\boldsymbol{X} \rightarrow \boldsymbol{Y}$:

$\boldsymbol{if}$ $\boldsymbol{hay\ ciclo\ luego\ de}(\boldsymbol{Y})$, $\boldsymbol{return\ true}$

Pintar $\boldsymbol{X}$ de negro

$\boldsymbol{return\ false}$

$\boldsymbol{hay\ ciclo\ en}\left(\boldsymbol{G}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})\right)$:

$\boldsymbol{for}\ \boldsymbol{X} \in \boldsymbol{V}$:

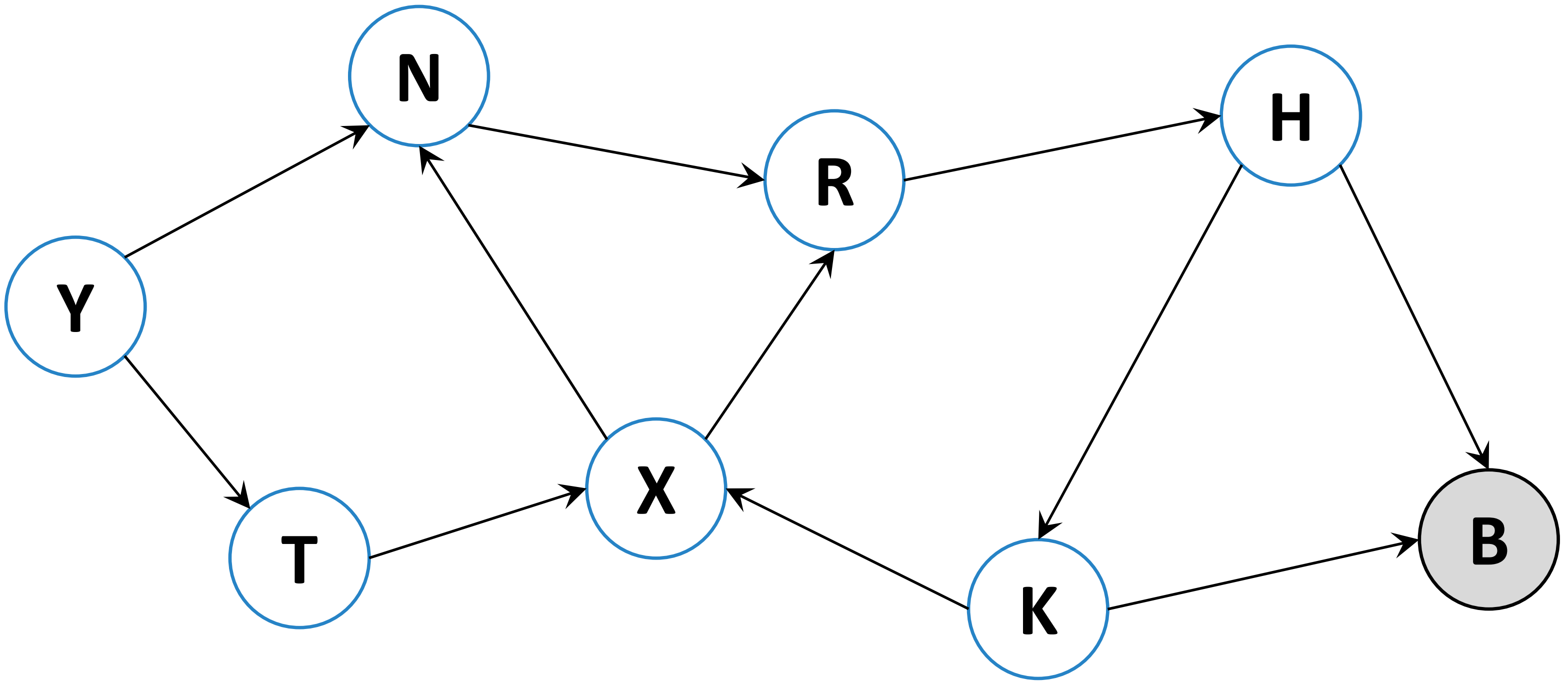
$\boldsymbol{if}\ \boldsymbol{X}$ está pintado, $\boldsymbol{continue}$

$\boldsymbol{if}\ \boldsymbol{hay\ ciclo\ luego\ de}\ (\boldsymbol{X})$:

$\boldsymbol{return\ true}$

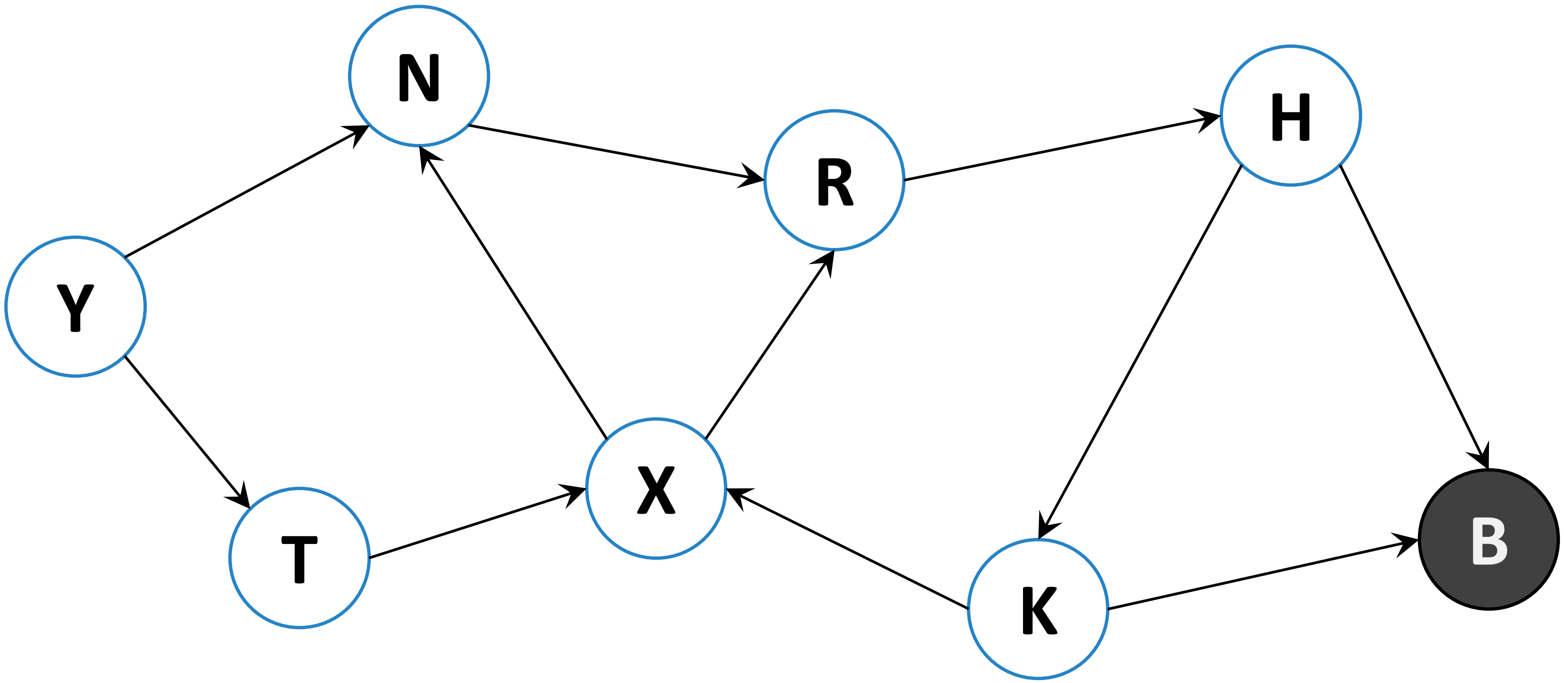
$\boldsymbol{return\ false}$

El algoritmo *hay ciclo en* en acción



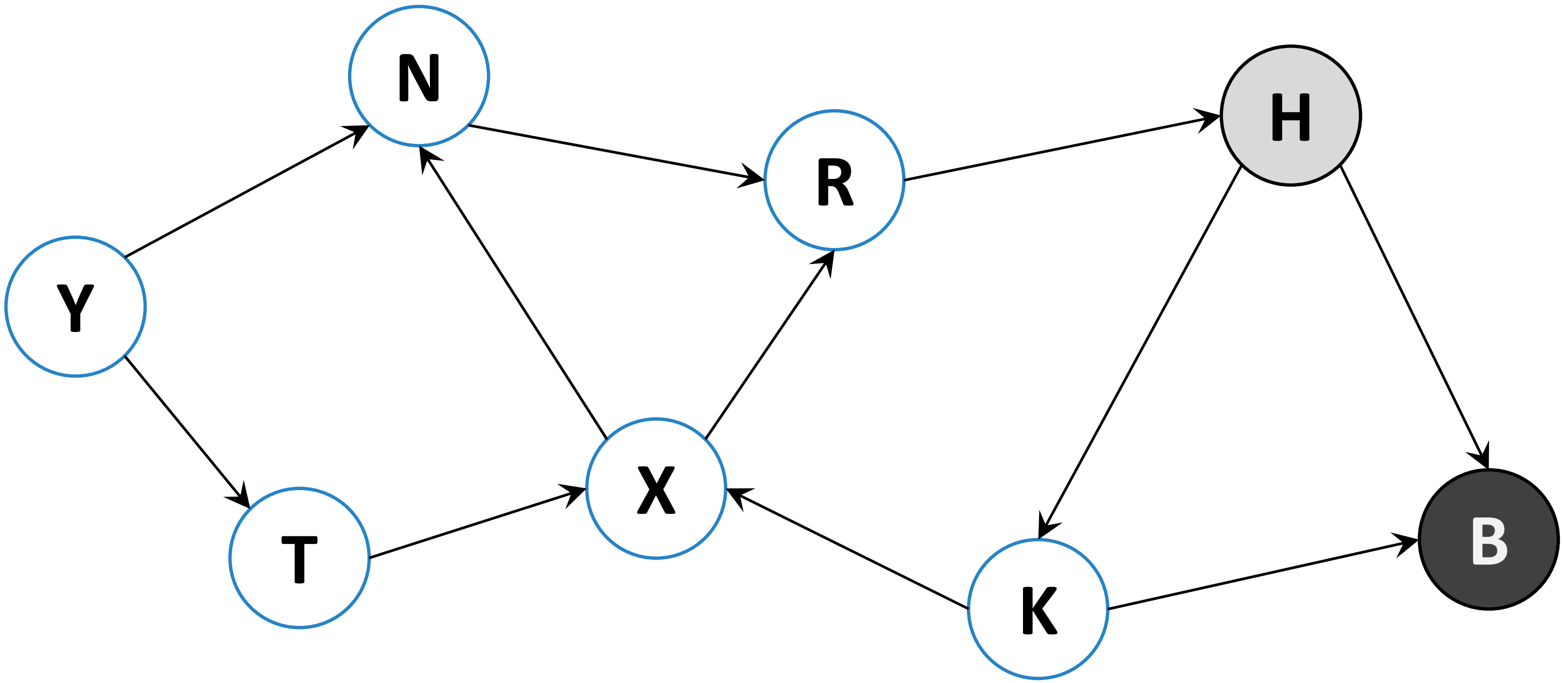
¿Hay un ciclo luego de **B**?

El algoritmo en acción



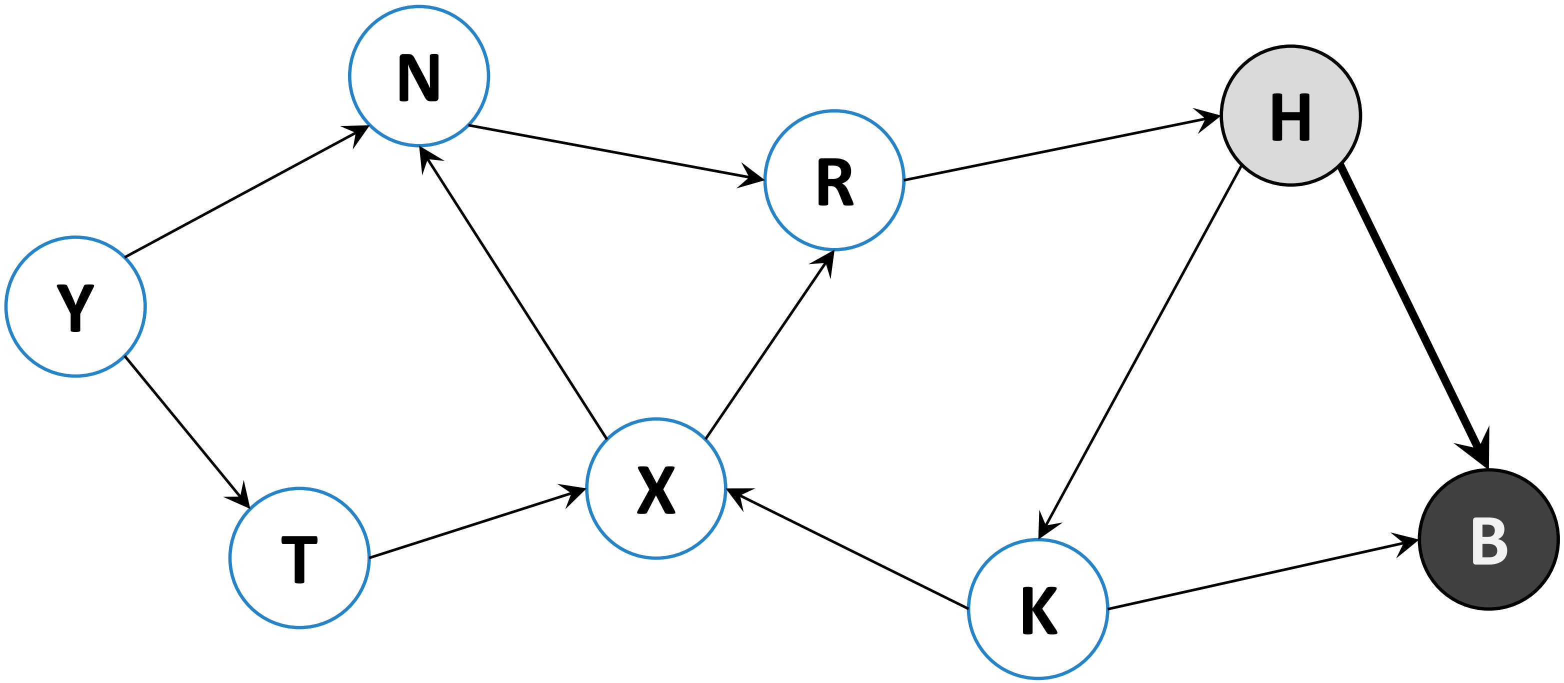
No

El algoritmo en acción



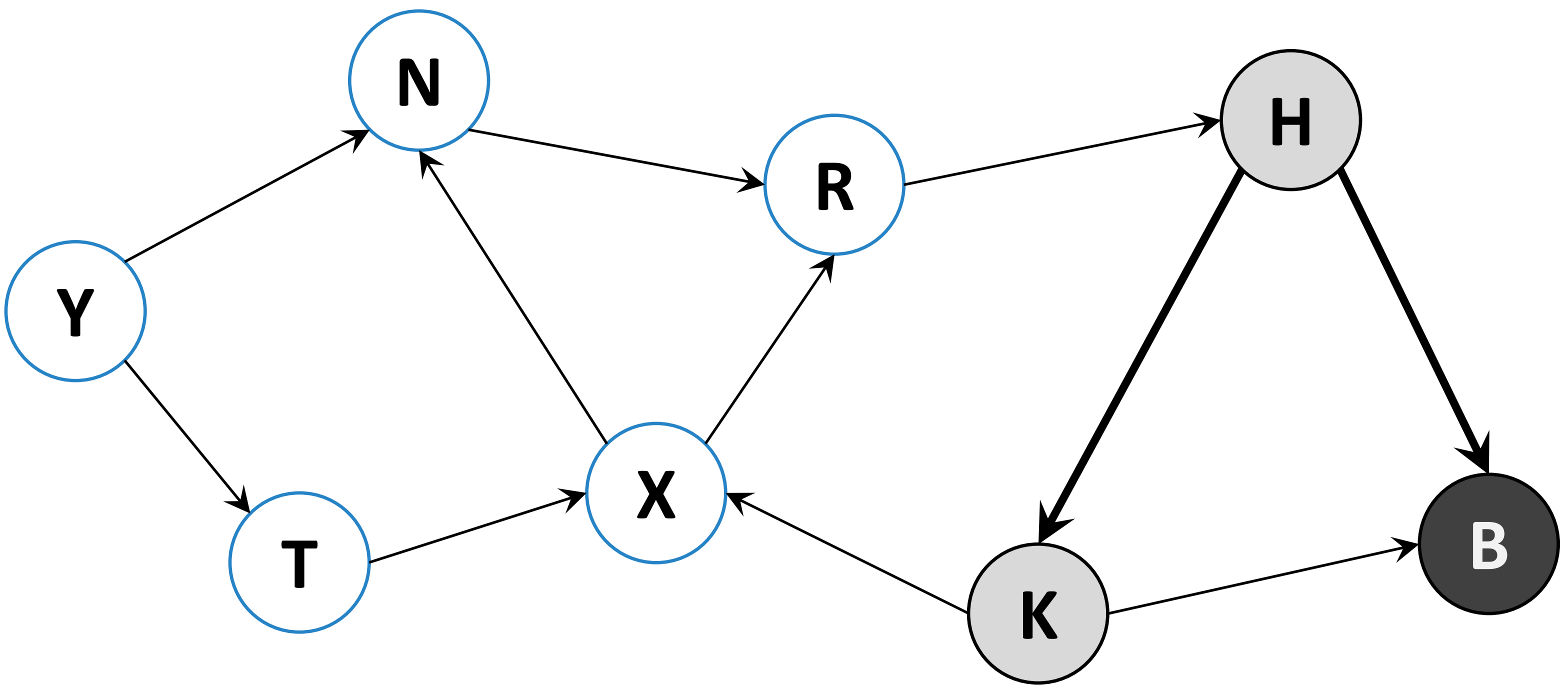
OK, ¿hay un ciclo luego de **H**?

El algoritmo en acción



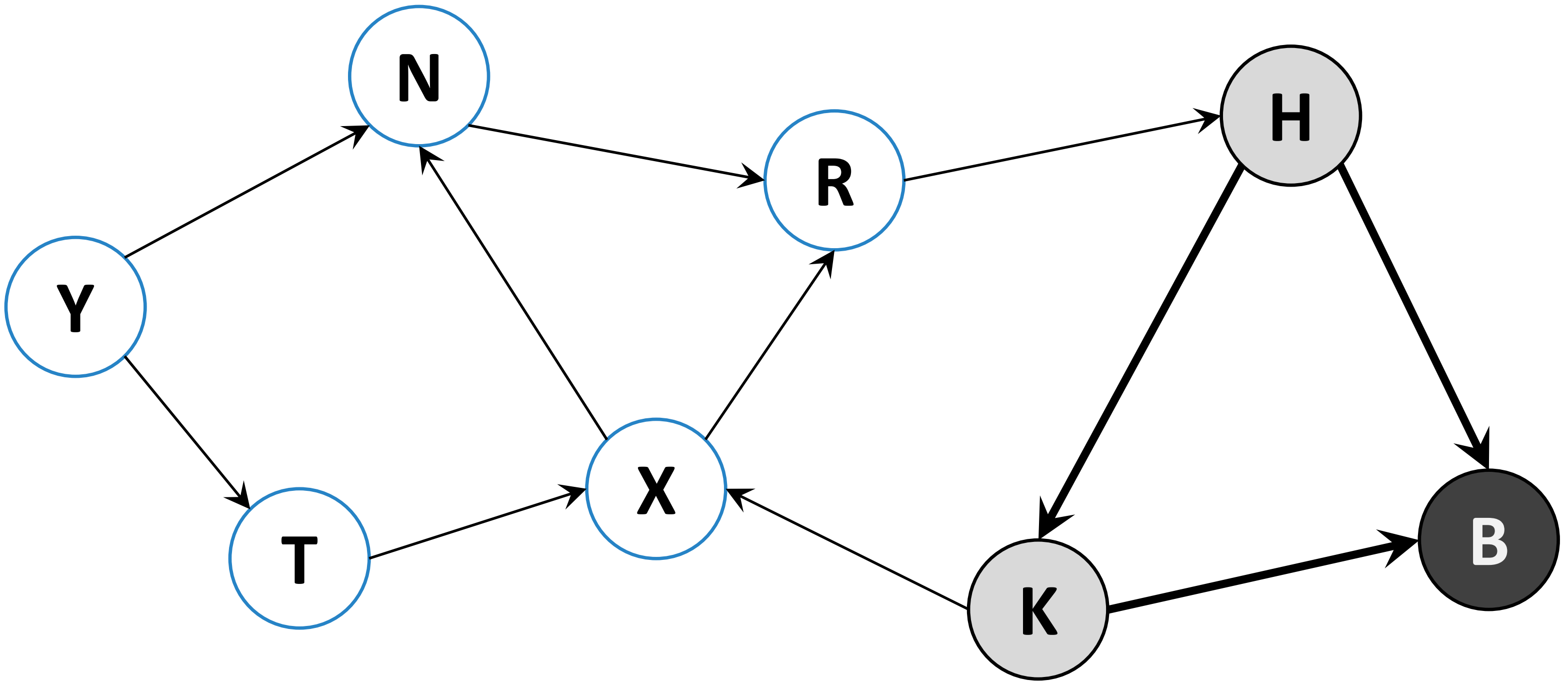
¿Hay un ciclo luego de **H**?

El algoritmo en acción



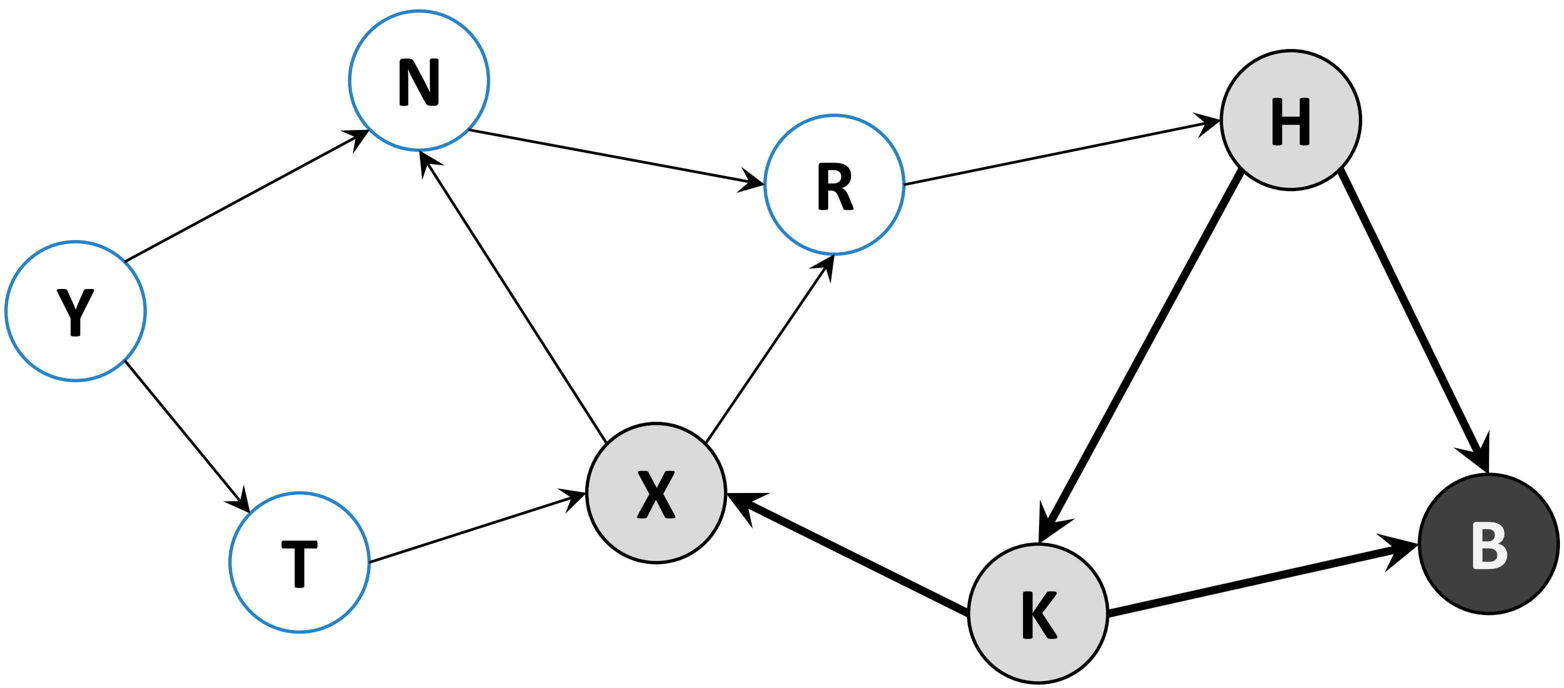
¿Hay un ciclo luego de **K**?

El algoritmo en acción



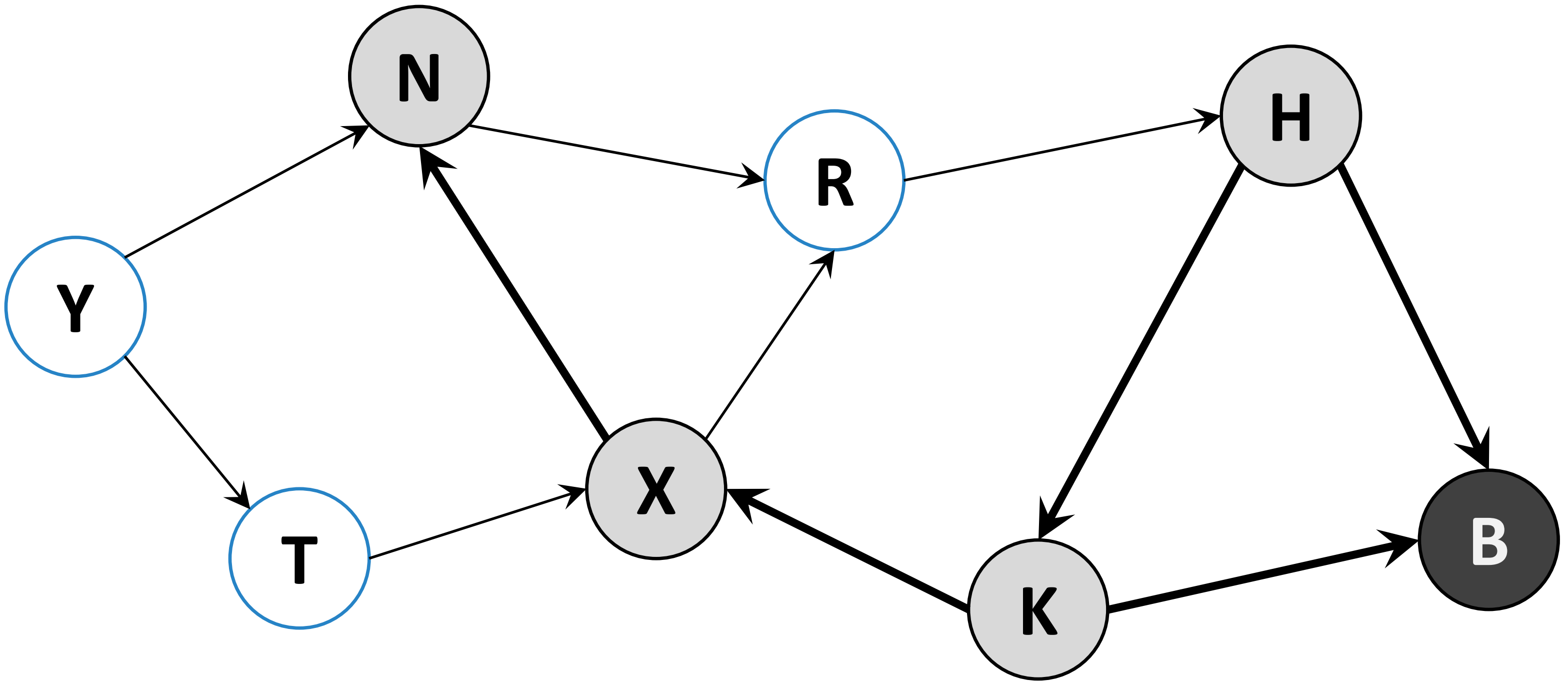
¿Hay un ciclo luego de **K**?

El algoritmo en acción



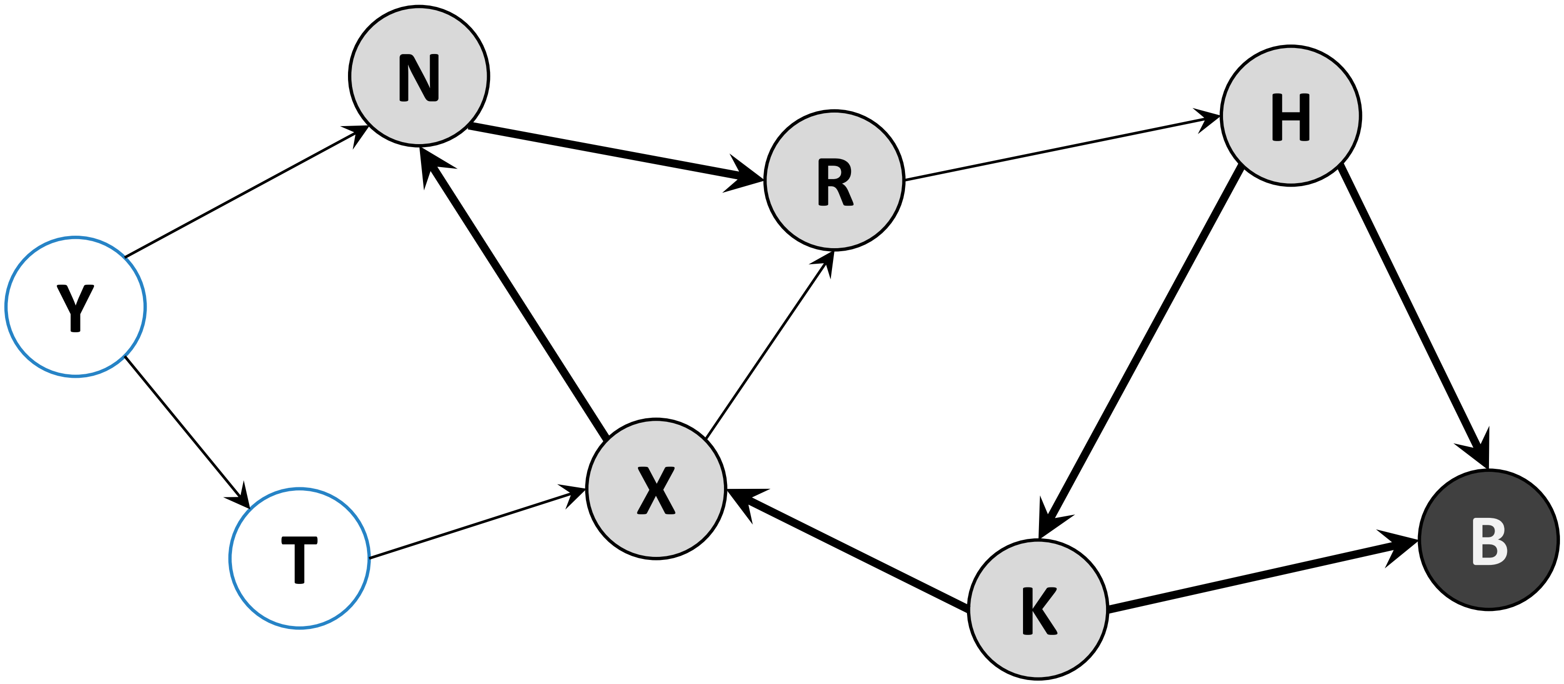
¿Hay un ciclo luego de **X**?

El algoritmo en acción



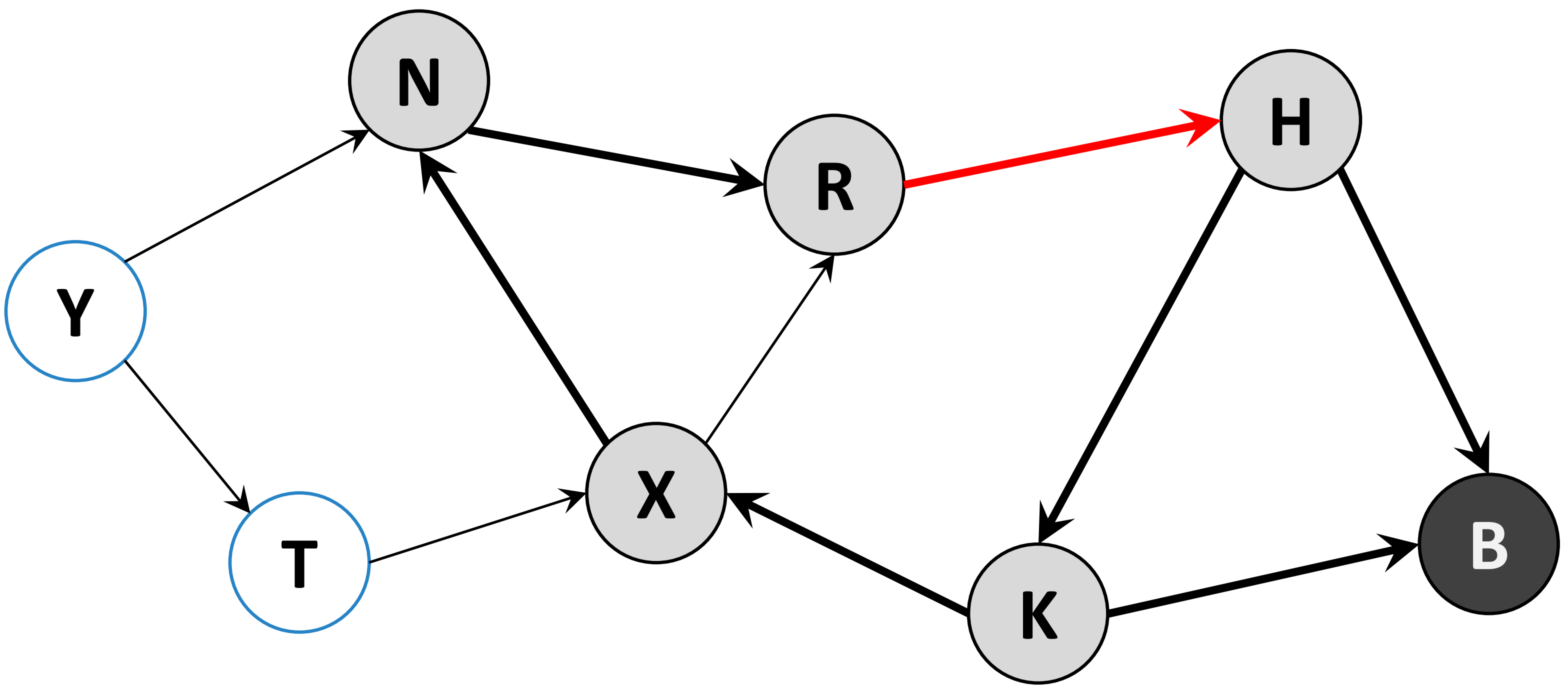
¿Hay un ciclo luego de **N**?

El algoritmo en acción



¿Hay un ciclo luego de **R**?

El algoritmo en acción



!!!

Algortimos de este tipo se llaman de "búsqueda en profundidad"

Los algoritmos de **búsqueda en profundidad** (o ***DFS***) llegan hasta el final de una "rama" (una secuencia de aristas) antes de empezar a explorar otra

¿Cuál es la complejidad de estos algoritmos?