Árboles Rojo Negro

Un árbol rojo-negro es un ABB que cumple cuatro propiedades:

1) Cada nodo es ya sea **rojo** o **negro**

2) La raíz del árbol es **negra**

3) Si un nodo es **rojo**, sus hijos deben ser **negros**

4) La cantidad de nodos **negros** camino a cada hoja debe ser la misma

Pregunta a

Justifica que la rama más larga del árbol tiene a lo más el doble de nodos que la rama más corta. Se entiende por rama, la ruta de la raíz a una hoja.

Pregunta a

- La cantidad de nodos negros camino a cada hoja debe ser la misma (propiedad 4)
- Rama más corta y más larga tienen la misma cantidad (**n**) de nodos negros
- Rama más corta solo tendrá nodos negros (**n**)
- Rama más larga tendrá **n + r** nodos

Solución

- Tomamos en cuenta las propiedades 2 y 3
- Tenemos raiz negra
- Nodo rojo nivel por medio
- Hoja roja

¿Cuantos nodos rojos y cuantos negros tenemos en esta rama?

$r = n$

Por lo tanto la rama mas larga será

$r + n = 2n$

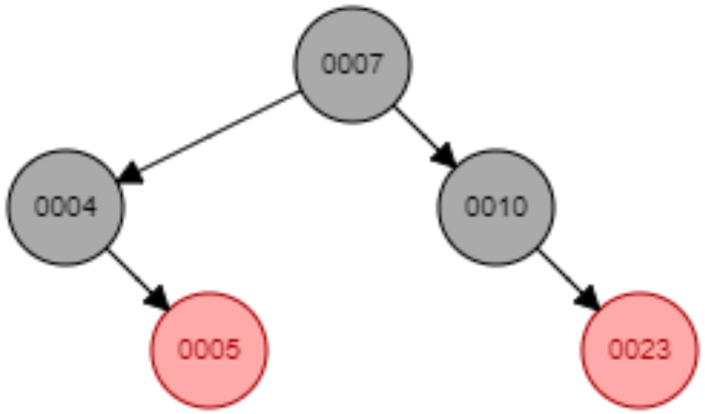
Y la más corta

n

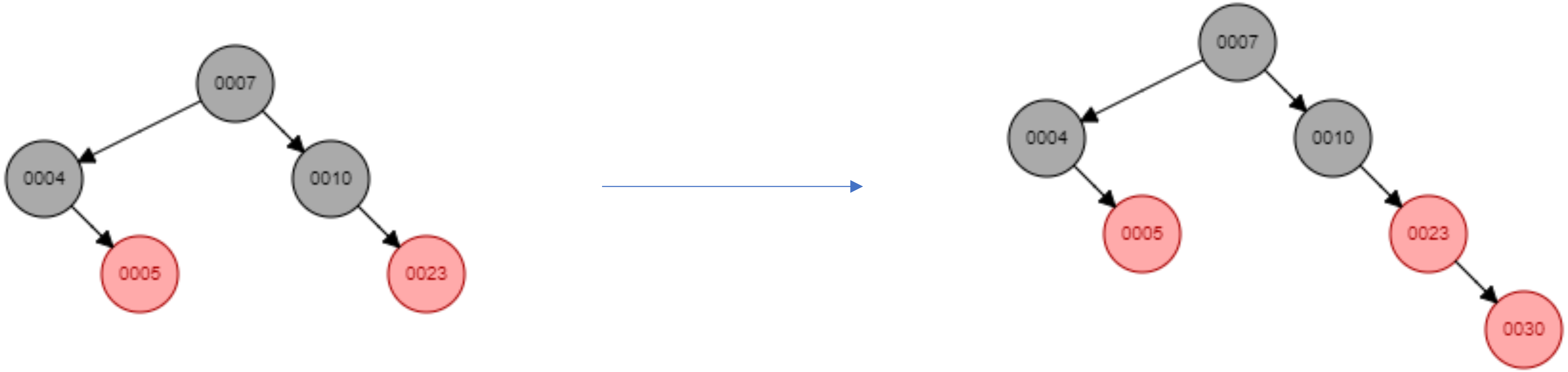
Pregunta b

Supón que insertamos un nodo x, y luego lo eliminamos inmediatamente. ¿Es el árbol resultante el mismo que el inicial? Justifica.

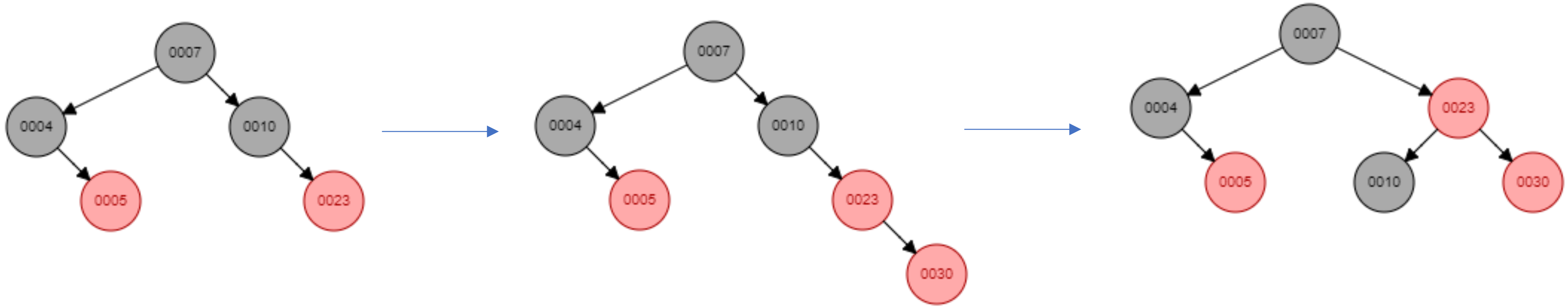
Pregunta b



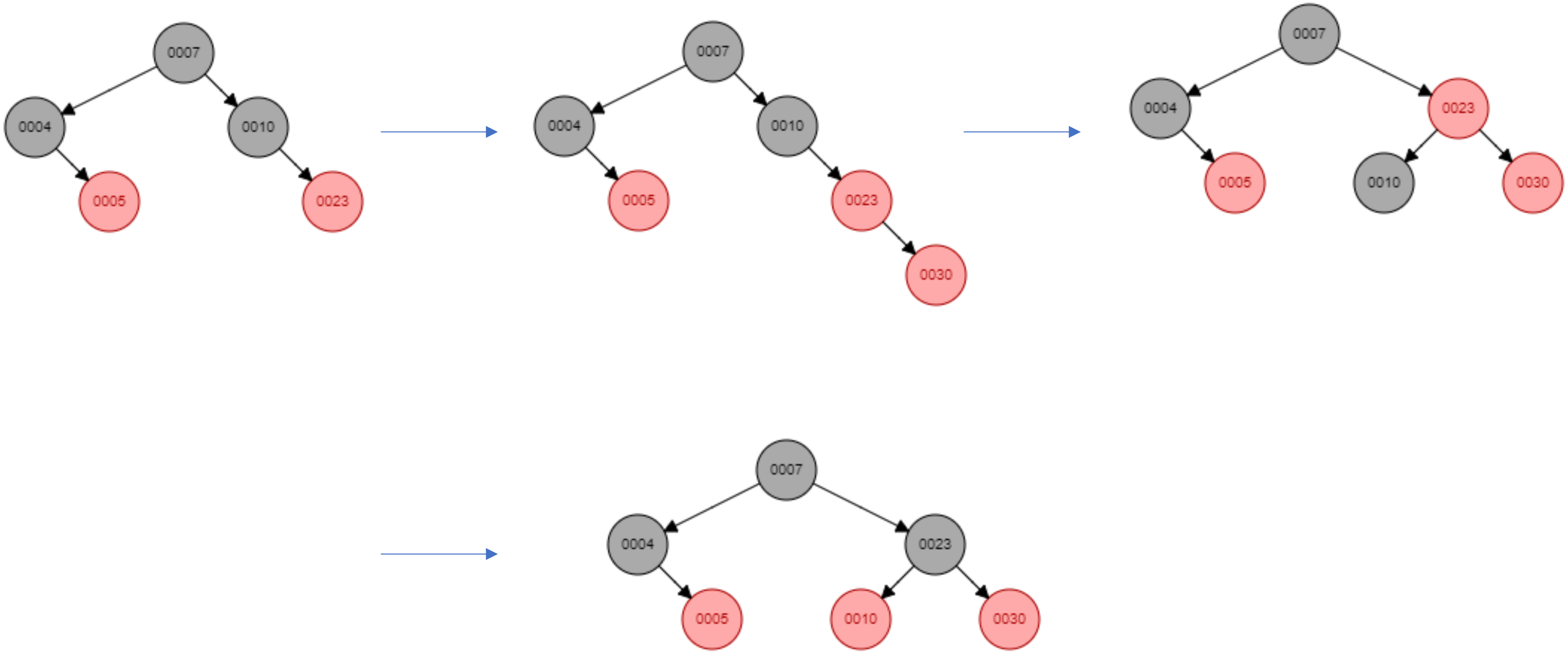
Pregunta b



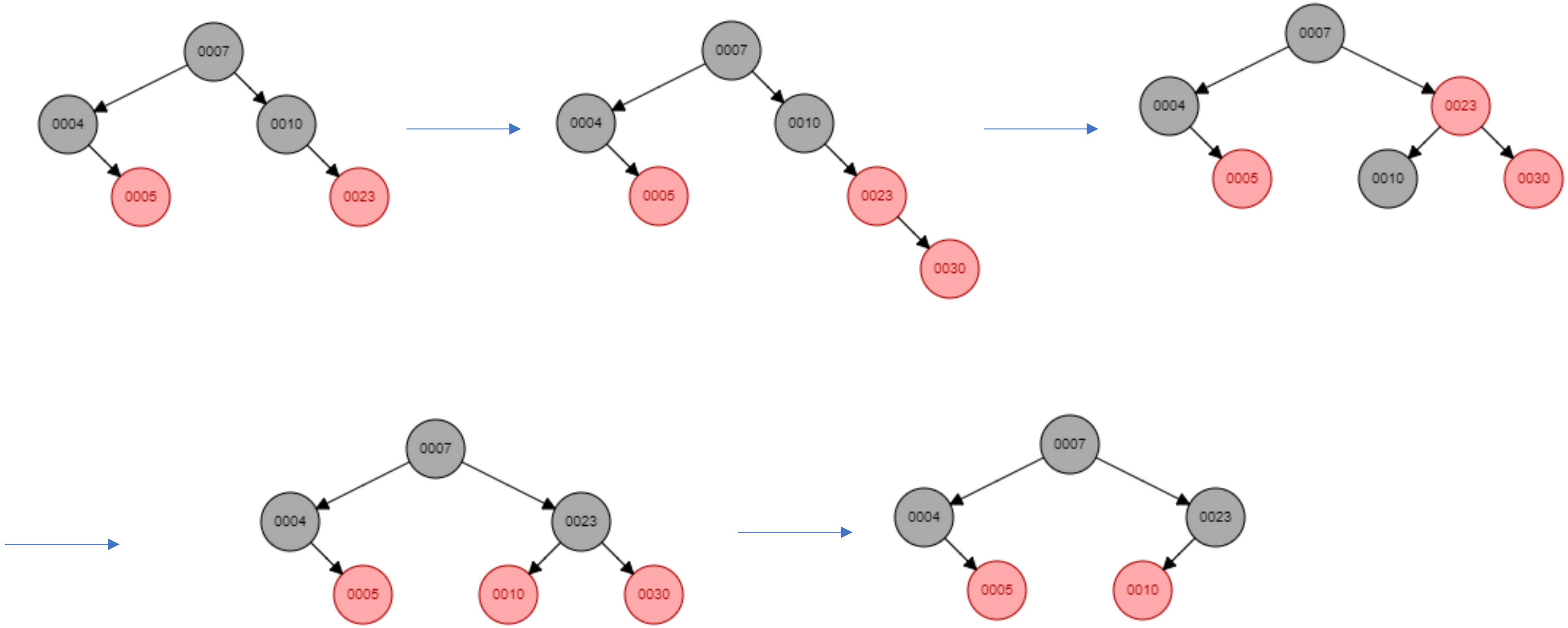
Pregunta b


0007
0004
0010
0005
0023
0007
0004
0010
0005
0023
0030
0007
0004
0023
0005
0010
0030

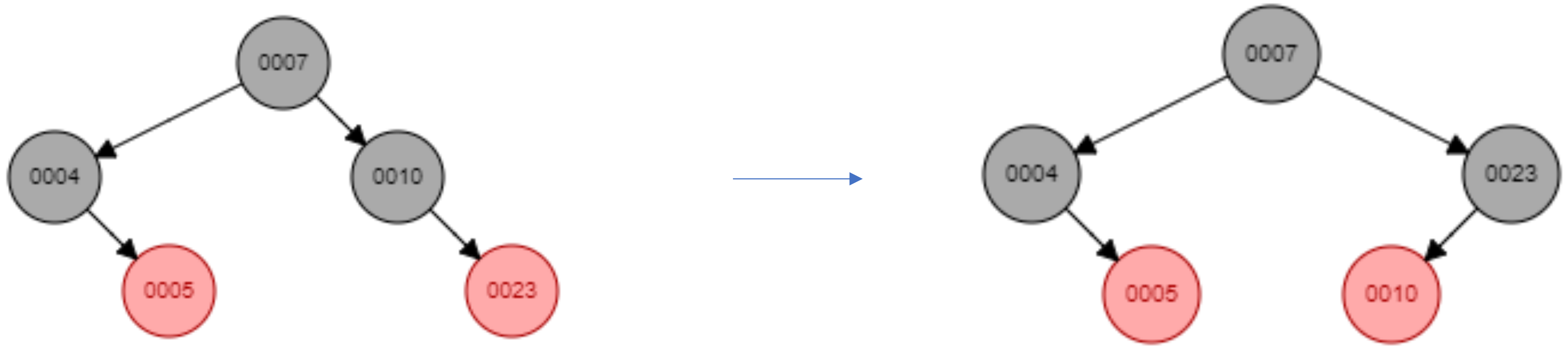
Pregunta b


0007
0004
0010
0005
0023
0007
0004
0010
0005
0023
0030
0007
0004
0023
0005
0010
0030
0007
0004
0023
0005
0010
0030

Pregunta b


0007
0004
0010
0005
0023
0007
0004
0010
0005
0023
0030
0007
0004
0023
0005
0010
0030
0007
0004
0023
0005
0010
0030
0007
0004
0023
0005
0010

Pregunta b



Pregunta c

Considera un árbol rojo-negro formado mediante n inserciones.
Justifica que si $n > 1$, entonces el árbol tiene al menos un nodo rojo.

Pregunta c

- Recordemos que siempre que se agrega un nodo inicialmente es rojo (luego puede cambiar)

- Caso 1: árbol ya tiene un nodo rojo
- Caso 2: árbol no tiene ningún nodo rojo

Árboles 2 - 3

En un árbol 2-3, hay dos tipos de nodos:

- *nodo 2*, con una clave y, si no es una hoja, exactamente 2 hijos
- *nodo 3*, con dos claves distintas y ordenadas y, si no es una hoja, exactamente 3 hijos

Como veremos, esto permite que todas las hojas estén a la misma profundidad, y que esa profundidad sea $O(\log n)$, si el árbol almacena n claves:

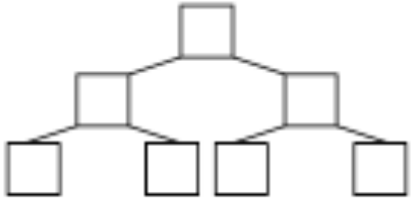
Pregunta a

¿Cuál es la altura máxima que puede tener un árbol 2-3 con n elementos? ¿Y la mínima? ¿Cómo es la estructura del árbol cuando ocurre cada uno de estos casos?

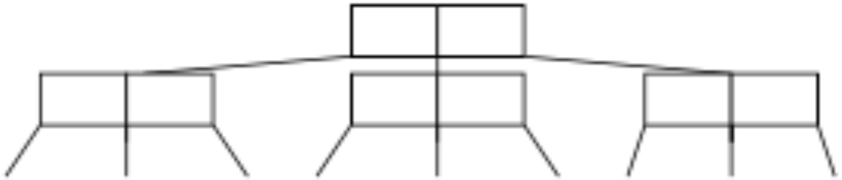
Pregunta a

*Serie geométrica: $\sum_{k=0}^{n} ar^k = a\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$

(a) Sólo nodos 2



(b) Sólo nodos 3



Nivel k tiene 2^{k-1}

Acumulado $2^k - 1$

Nivel k tiene $2 \cdot 3^{k-1}$

Acumulado $3^k - 1$

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k = a\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

$$\sum_{i=1}^{h} 2^{i-1}$$

$a = 2^{-1}$

$r = 2$

$n = h$

$$2^{-1}\frac{1-2^{h+1}}{1-2} = 2^{h+1-1} - 2^{-1}$$

$$= 2^h - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= 2^h - 1$$

Solución

- Despejamos la altura (h) en cada caso

Casos donde el árbol esta lleno

- Altura máxima $h = \log_2(n+1)$
- Altura mínima $h = \log_3(n+1)$

Inserción

La inserción siempre se hace —inicialmente— en una hoja

Si un nodo está lleno (ya tiene dos claves) y debe recibir una tercera clave,

… entonces se hace subir la clave que habría quedado al medio —la clave mediana— al nodo padre

¡ El árbol sólo aumenta de altura cuando la raíz está llena y debe recibir una clave desde un hijo !

Pregunta b

Queremos insertar una clave x en un árbol 2-3 T de altura h, que tiene n claves.

¿Qué debe cumplirse para que esta inserción aumente la altura de T?

¿Para qué valores de n está garantizado que sí aumentará la altura?

¿Para qué valores de n está garantizado que no aumentará la altura?

Pregunta b

- ”camino” = nodos a recorrer desde una hoja hasta la raíz
- Para que se provoque un cambio de altura **todos** los nodos del camino deben ser tipo 3

Garantía de que aumenta la altura

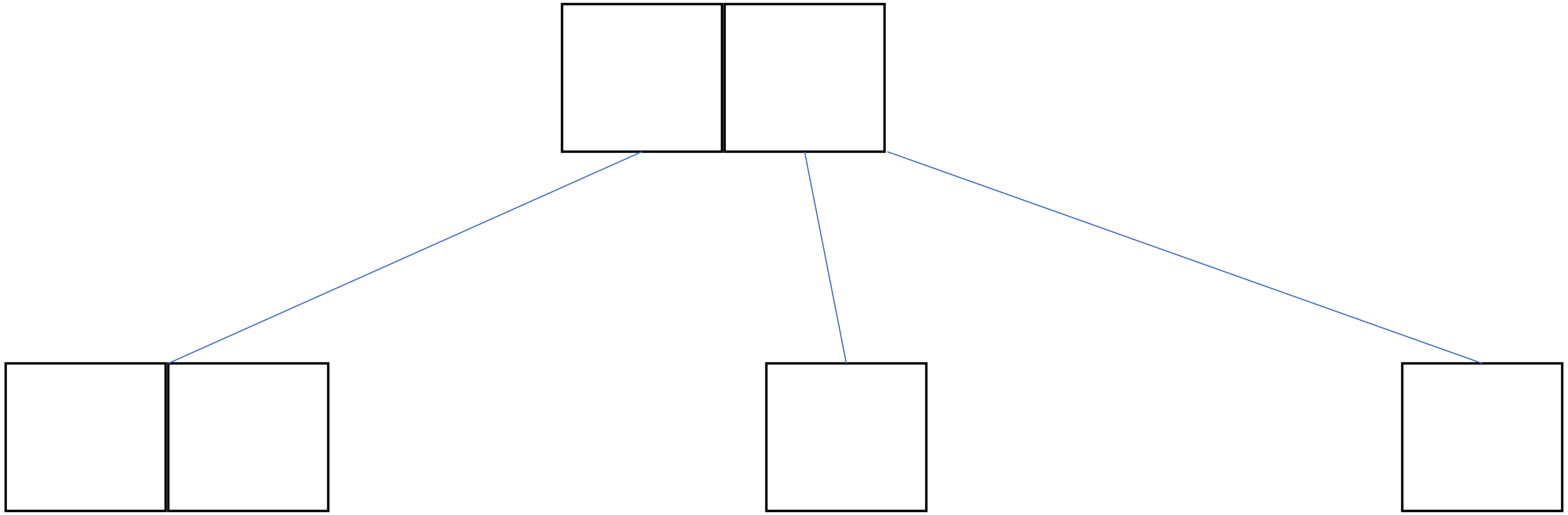
- Todos los nodos deben ser tipo 3
- $n = 3^k - 1$

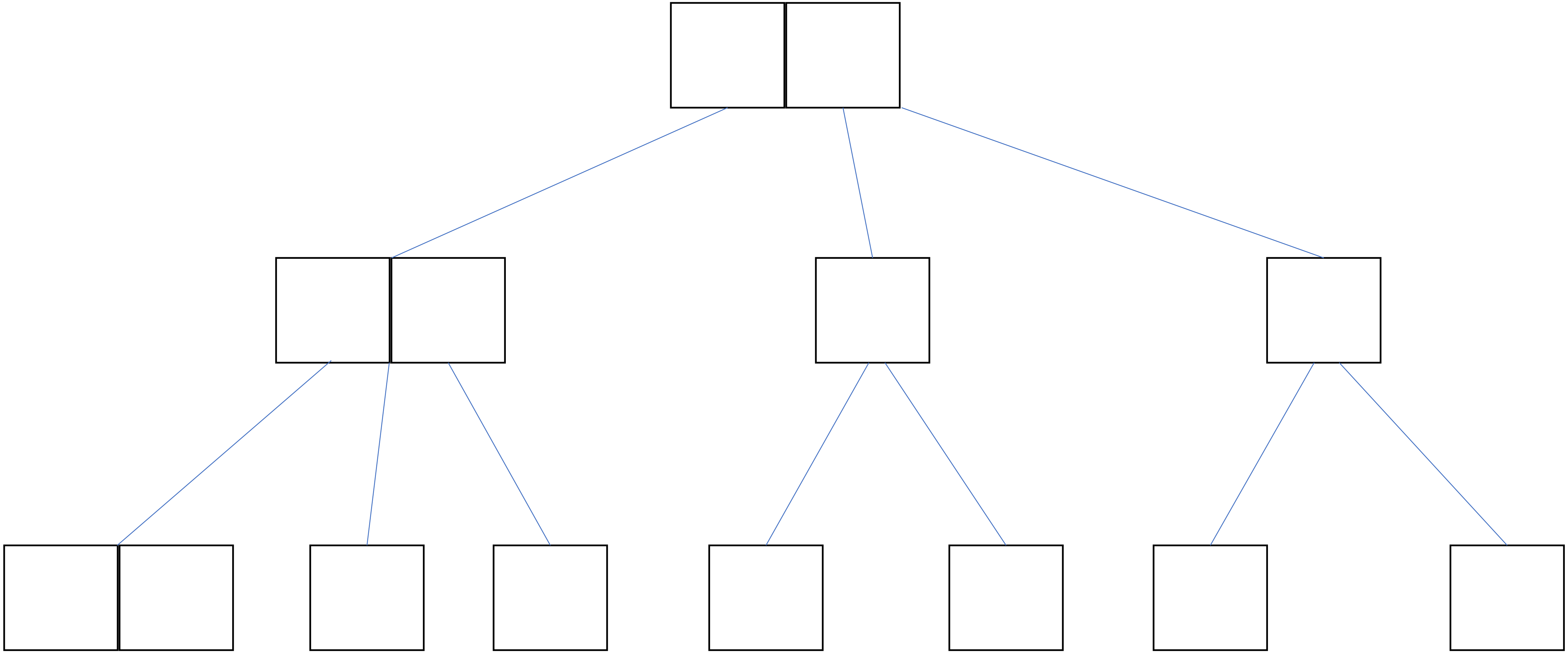
Garantía de que no aumente la altura

- No puede haber un camino que solo tenga nodos tipo 3

- Puede haber a lo más 1 nodo tipo 3 por cantidad de pisos menos 1
  - Nivel 1 → 2 claves (nodo 3)
  - Nivel 2 → 4 claves (nodo 3 + 2 nodos 2)
  - Nivel 3 → 8 claves (nodo 3 + 6 nodos 2)

  - Nivel h → 2^h claves (nodo 3 + (2^h – 2) nodos 2)





Garantía de que no aumente la altura

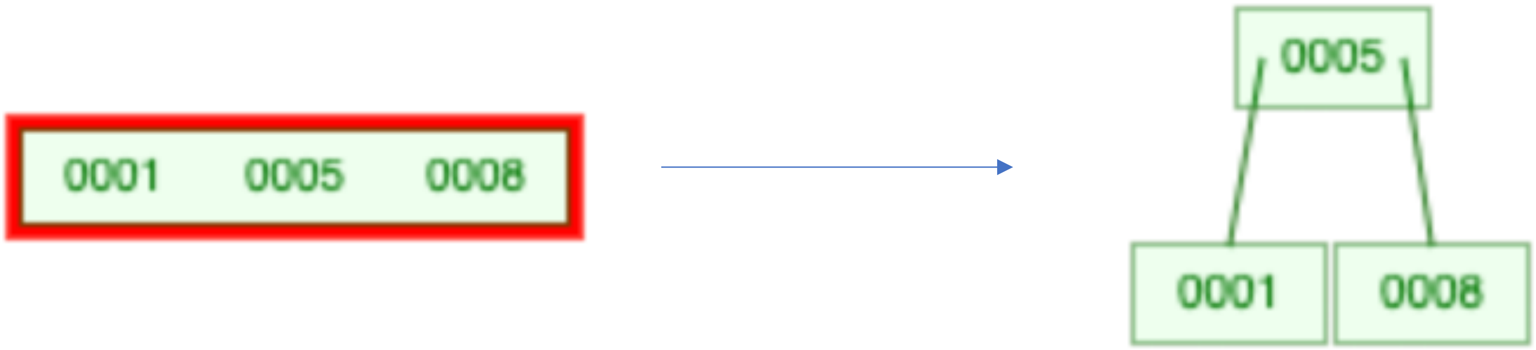
- No puede haber un camino que solo tenga nodos tipo 3
- Puede haber a lo más 1 nodo tipo 3 por cantidad de pisos menos 1
  - Nivel 1 → 2 claves (nodo 3)
  - Nivel 2 → 4 claves (nodo 3 + 2 nodos 2)
  - Nivel 3 → 8 claves (nodo 3 + 6 nodos 2)

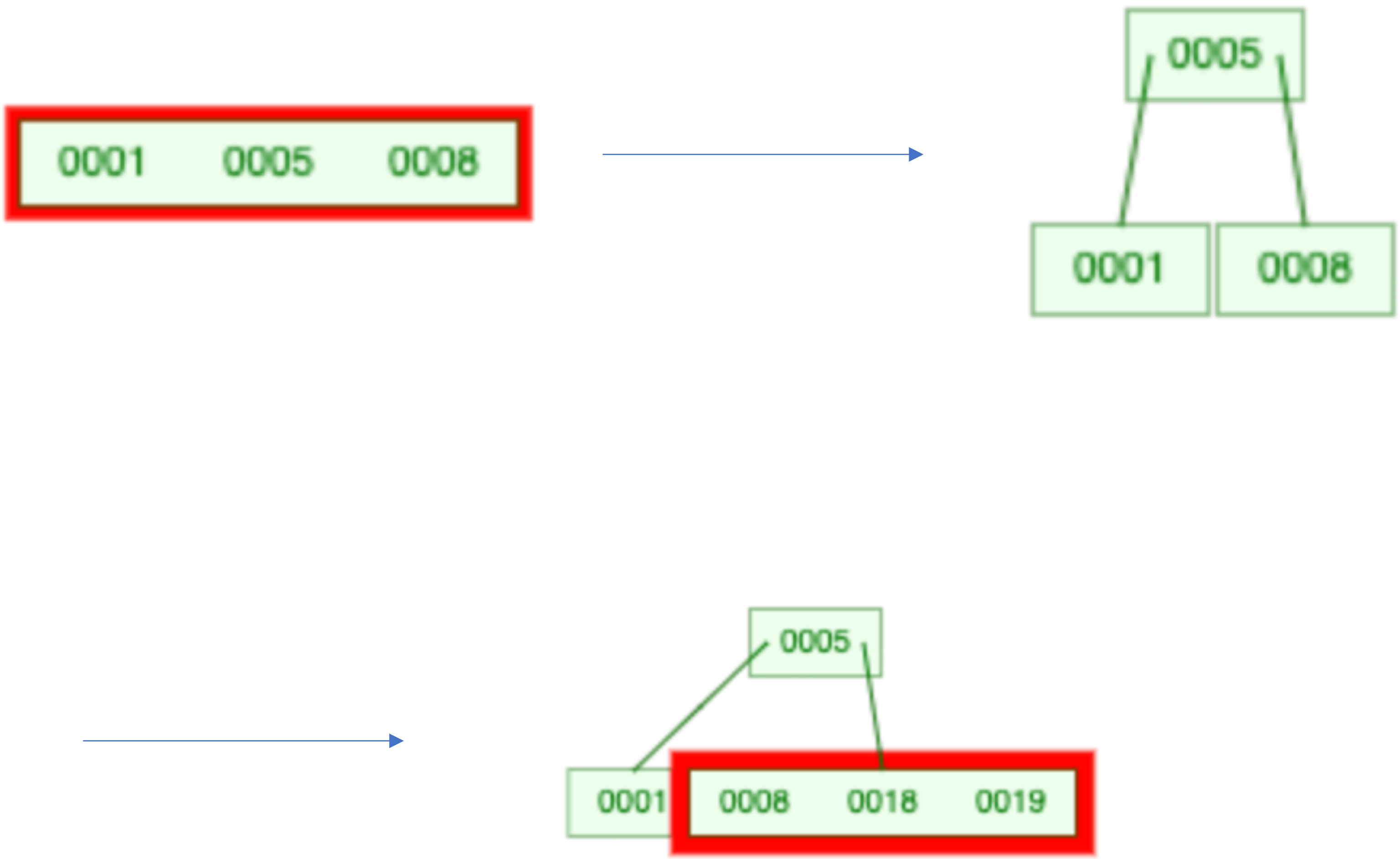
  - Nivel h → 2^h claves (nodo 3 + (2^h – 2) nodos 2)
- Haciendo la sumatoria llegamos a que tenemos $2^{h+1} - 2$ claves

$$n < 2^{h+1} - 2$$

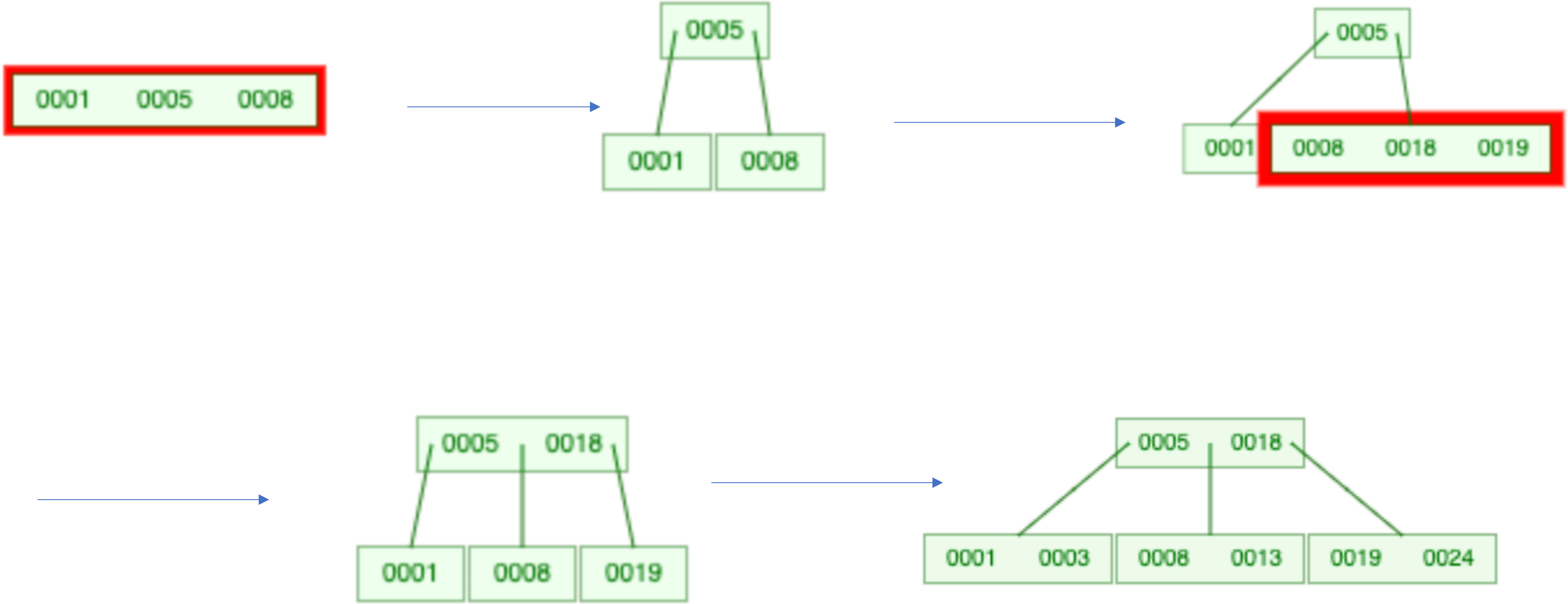
Pregunta c

0001	0005	0008


0001 0005 0008
0005
0001
0008


0001 0005 0008
0005
0001
0008
0005
0001
0008 0018 0019


0001 0005 0008
0005
0001
0008
0005
0001
0008 0018 0019
0005 0018
0001
0008
0019


0001 0005 0008
0005
0001
0008
0005
0001
0008 0018 0019
0005 0018
0001
0008
0019
0005 0018
0001 0003
0008 0013
0019 0024