Hashing y tablas de *hash*

Estructuras de Datos y Algoritmos

2-2020

Yadran Eterovic

Un **diccionario** es una estructura de datos con las siguientes operaciones

Asociar un **valor** (p.ej., un archivo con la solución de la tarea 1) a una **clave** (p.ej., un rut o número de alumno)

… o **actualizar** el valor asociado a la clave (p.ej., cambiar el archivo)

Obtener el **valor** asociado a una **clave**

(… y en ciertos casos)

Eliminar del diccionario una **clave** y su **valor** asociado

Así, la idea de un diccionario es ...

… si me dan el rut (la clave), entonces yo quiero encontrar el archivo

…. si me dan el rut y me doy cuenta de que ese rut no está en mis registros (el diccionario), entonces ingresar el rut a mis registros

… si me dan el rut y me doy cuenta de que no hay un archivo asociado, entonces asociar un archivo al rut

… si me dan el rut y me doy cuenta de que tiene un archivo asociado, entonces cambiar el archivo por uno más actual

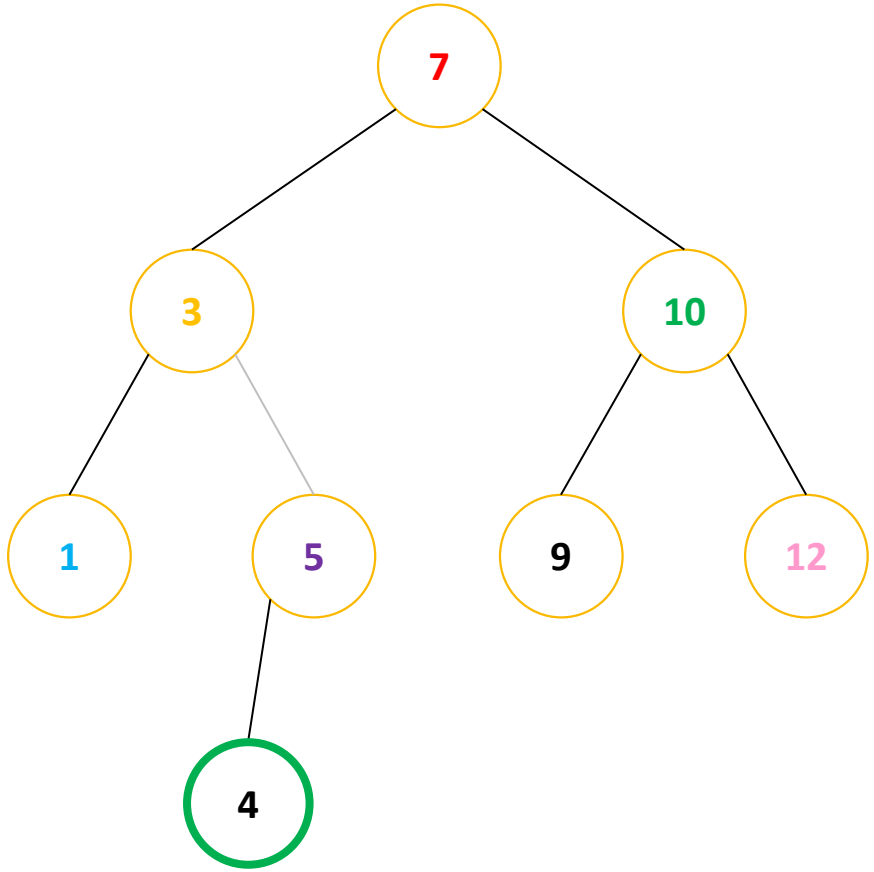
La búsqueda es lo primero ... y, si lo buscado no está, entonces (posiblemente) la inserción es lo segundo

O sea, a partir de la clave, lo primero es buscarla (eficiente-mente) en el diccionario

Si la encontramos, entonces ahora tenemos acceso a la información asociada a la clave

… si no la encontramos, entonces, tal vez, queremos ingresarla al diccionario junto al resto de la información correspondiente

Implementa-mos un diccionario como un ABB



Los nodos del árbol contienen esencialmente las claves

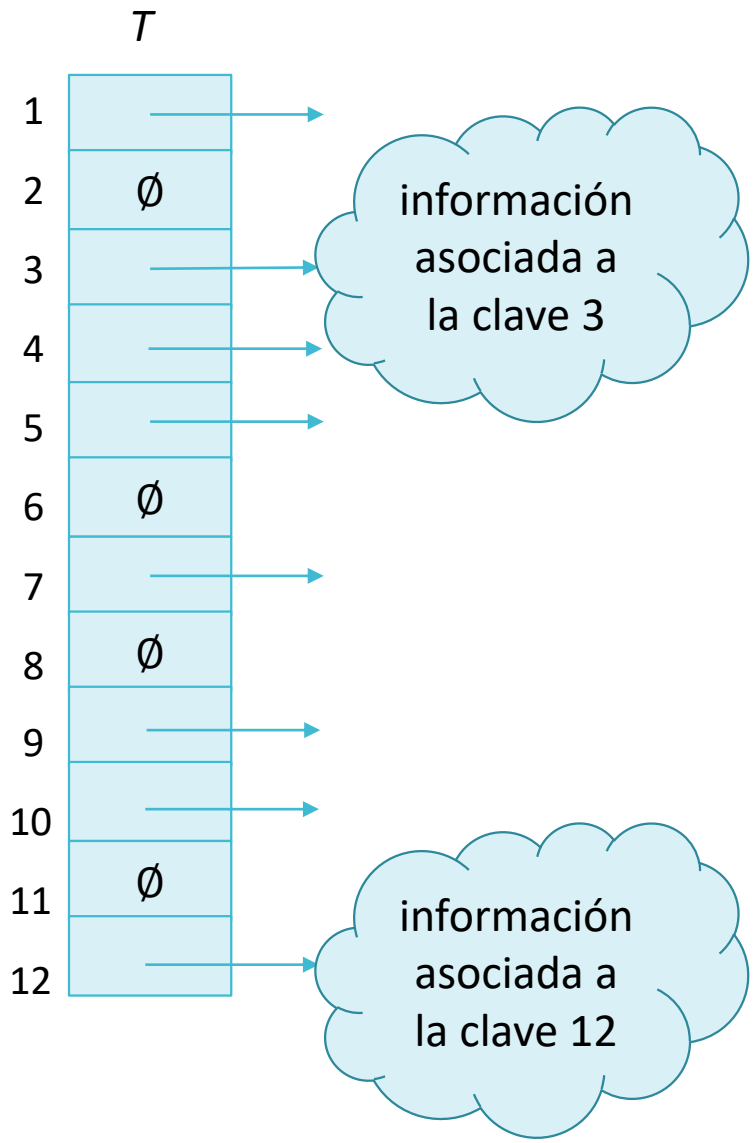
… que están totalmente ordenadas

(además, contienen punteros

… tanto para mantener el árbol unido y poder recorrerlo —al buscar—

… como para tener acceso a la información asociada a la clave **)**

Si las claves realmente fueran los números del 1 al 12, podría-mos usar un arreglo *T* (de punteros)



La búsqueda de (el objeto con) la clave *k* es ahora muy rápida:

- $T[k] = \emptyset \Rightarrow$ el objeto no está
- $T[k] \neq \emptyset \Rightarrow$ el objeto está

En principio, no es necesario almacenar las claves:

- son los índices del arreglo

… y no es necesario almacenar punteros a los hijos o al padre:

- sólo a la información asociada a la clave
- para recorrer el arreglo sólo hace falta cambiar el valor del índice

La realidad de las claves hace que usar las claves directamente como índice del arreglo no sea práctico

Incluso si las claves fueran números enteros mucho más grandes que 12, pero todavía en un rango razonable (p.ej., 0 a 65,535, es decir, 16 bits) podríamos usar un arreglo

Pero ¿qué pasa si las claves son los rut's de las personas?

P.ej., en el caso de los estudiantes de la universidad:

- el rango abarca hasta el número 25,000,000 (aprox.)

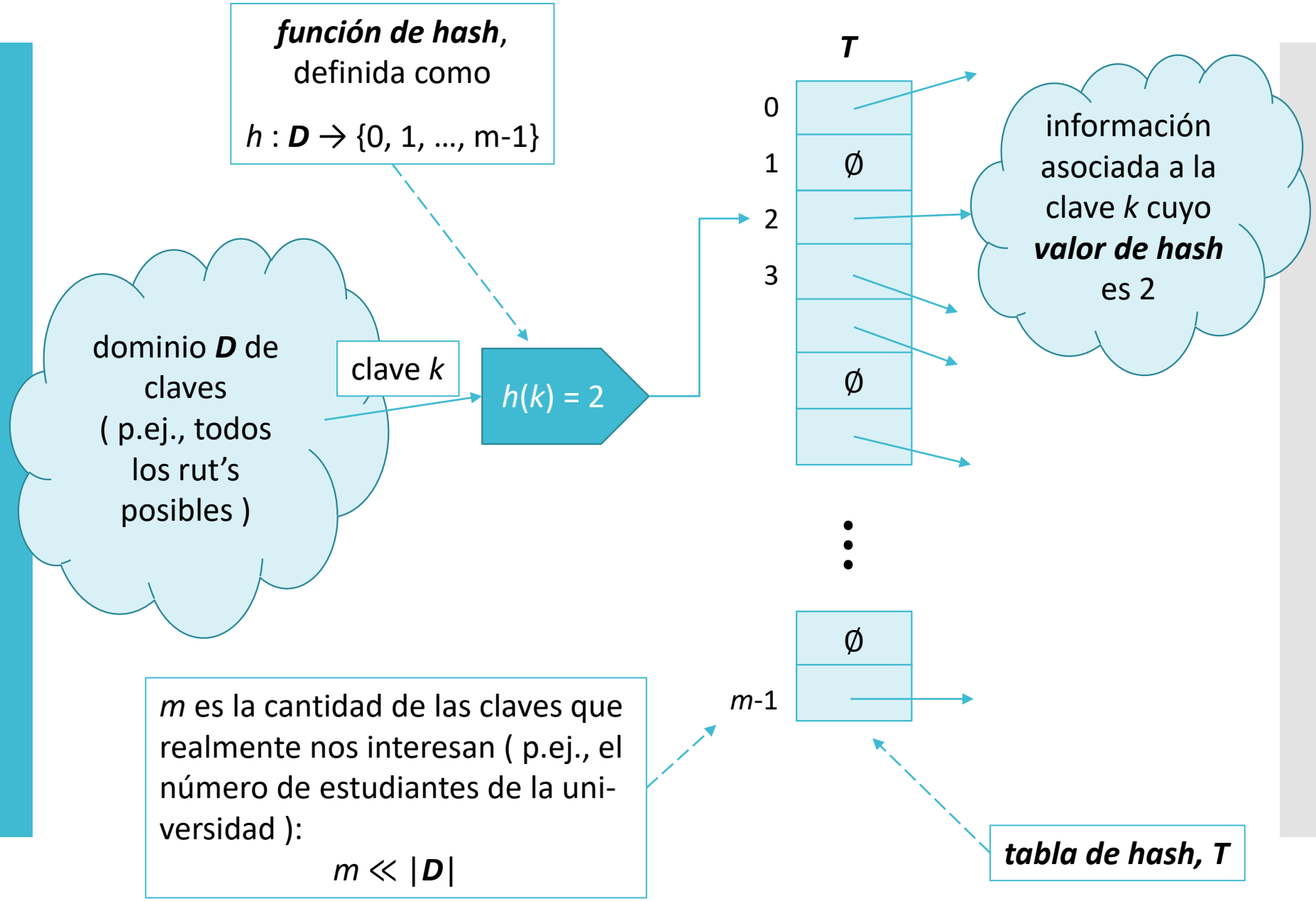
  … pero la universidad sólo tiene unos 25,000 estudiantes

  … en promedio, sólo una de cada 1,000 casillas estaría ocupada

¿Y si las claves son los números de los teléfonos celulares?

Según la naturaleza de los datos, las claves pueden pertenecer a dominios muy variados y de cardinalidades muy grandes en comparación a la cantidad de datos que nos interesan

La solución es usar ***hashing***:
- la clave no se usa directamente como índice
- el índice **se calcula** a partir de la clave



Algunas propiedades de hashing

Hashing se comporta “casi” como un arreglo:

- en un arreglo, buscar el dato con clave *k* consiste simplemente en mirar *T*[*k*] → es O(1) (ver diap. # 6)
- en hashing, buscar el dato con clave *k* consiste en mirar *T*[*h*(*k*)] → es O(1) pero sólo **en promedio**, como vamos a ver

En hashing el orden relativo de las claves **no importa**:

- comparar claves entre ellas (para determinar cuál es mayor)

  … o, dada una clave, encontrar la clave predecesora

  … **no son** operaciones de diccionario (ver diap. # 2)

(En este sentido, los ABBs son en realidad diccionarios con operaciones adicionales:

- ABB = diccionario + cola de prioridades **)**

Una típica función de hash:

$h(k) = k \bmod m$

hashing modular

… es decir, **el resto de la división (entera) de *k* por *m***

… que efectivamente es un valor entre 0 y $m-1$

En el ej. a la derecha, el dominio son los números entre 000 y 999

… y se muestran los valores de hash para algunas claves cuando $m = 100$ y cuando $m = 97$

k	$h(k)$ m=100	$h(k)$ m=97
212	12	18
618	18	36
302	2	11
940	40	67
702	2	23
704	4	25
612	12	30
606	6	24
772	72	93
304	4	13
423	23	35
650	50	68
317	17	26
907	7	34
507	7	22

Si $k_1 \neq k_2$, pero $h(k_1) = h(k_2)$, entonces tenemos una **colisión** (en la tabla de hash)

Como vemos en el ej. anterior, en particular en la columna para $m = 100$, en hashing pueden ocurrir **colisiones**:

$h(212) = 12$ y $h(612) = 12$

$h(907) = 7$ y $h(507) = 7$

Es decir, para datos con distintas claves, su ubicación en la tabla es la misma:

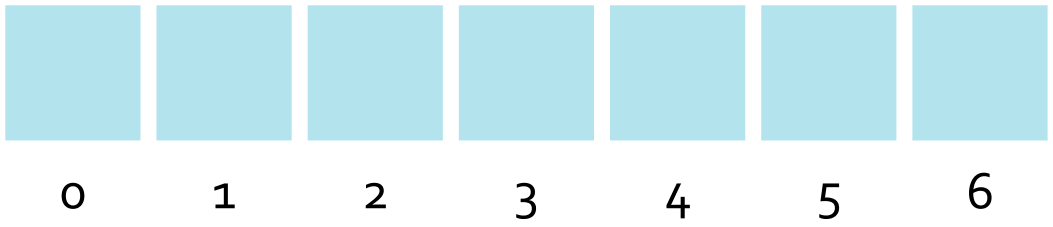
- ¿cómo podemos guardar ambos datos en la tabla?
- nos interesa poder buscarlos en el futuro

Como la cardinalidad del dominio, $|\boldsymbol{D}|$, es mucho mayor que el tamaño m de la tabla, las colisiones potenciales son inevitables

En los ejemplos que siguen:
- las claves son números enteros < 100
- la tabla tiene *m* = 7 casillas (con índices 0 a 6)

Insertemos la clave 15:

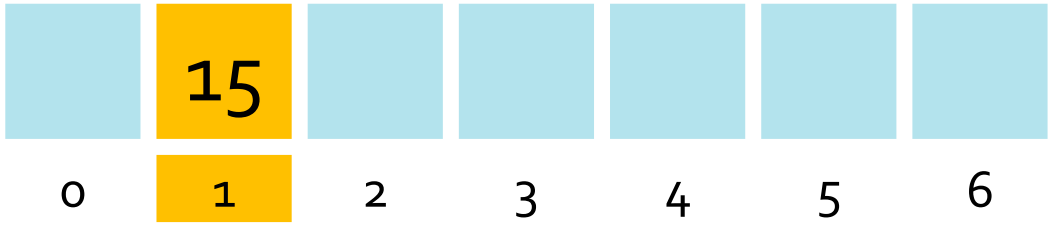
$$h(15) = 15 \bmod 7 = 1$$



(el dato con) la clave 15 queda en la casilla con índice 1

Insertemos la clave 15:

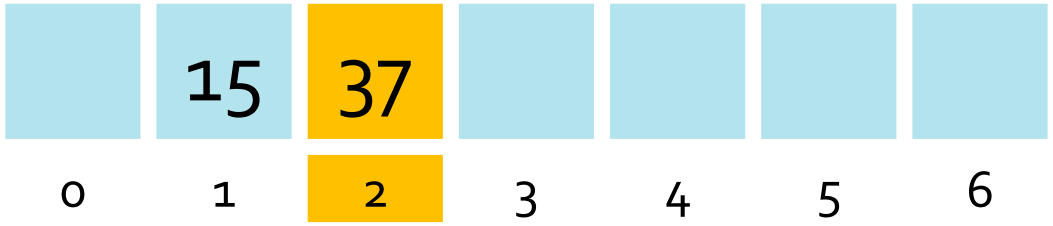
$$h(15) = 15 \bmod 7 = 1$$



Similarmente para la clave 37 y la casilla con índice 2

Insertemos la clave 37:

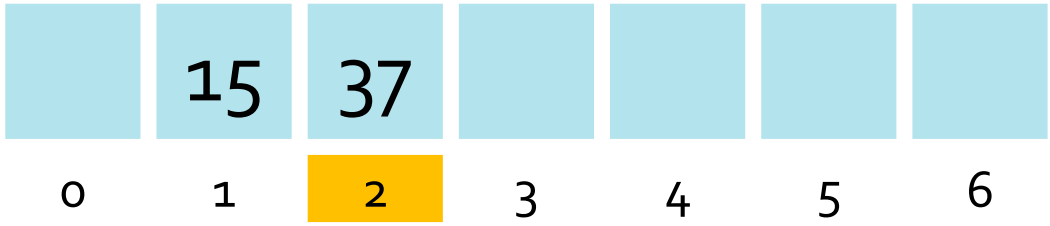
$$h(37) = 37 \bmod 7 \ = 2$$



¿Qué hacemos si una nueva clave debería quedar en una casilla que ya está ocupada?
→**Colisión**: dos posibilidades

Insertemos la clave 51:

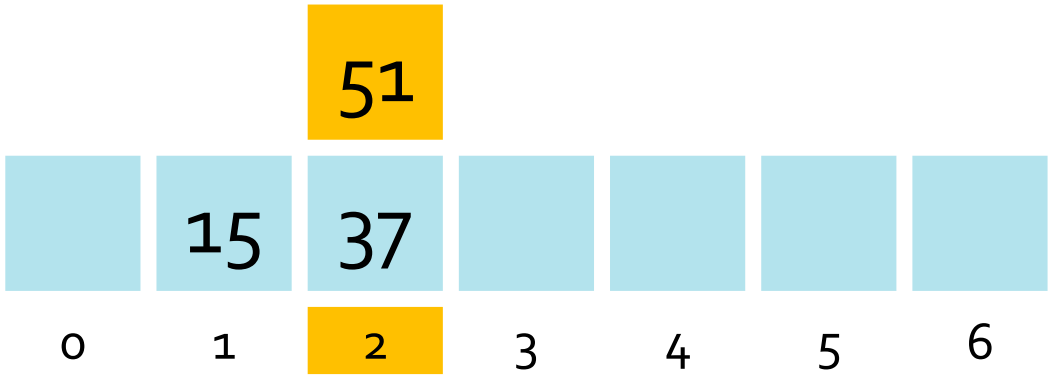
$$h(51) = 51 \bmod 7 \ = 2$$



Una posibilidad es usar **encadenamiento**: hacer una lista con las claves que van a una misma casilla

Insertemos la clave 51:

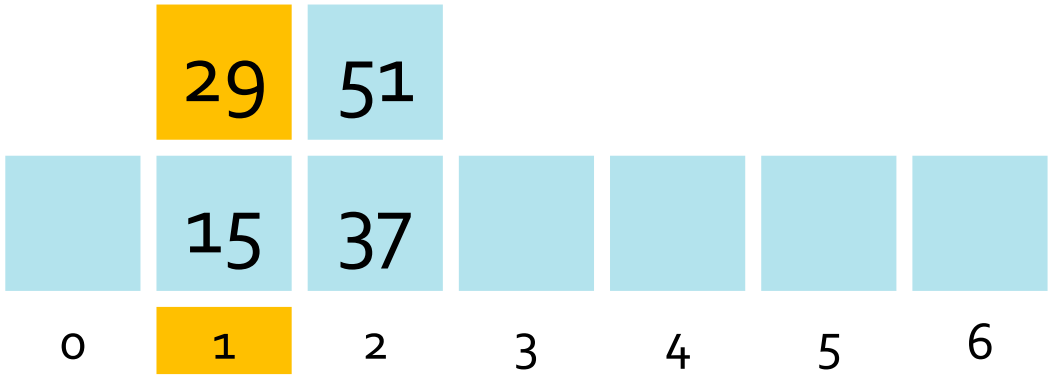
$$h(51) = 51 \bmod 7 = 2$$



Similarmente para la clave 29 y la casilla con índice 1

Insertemos la clave 29:

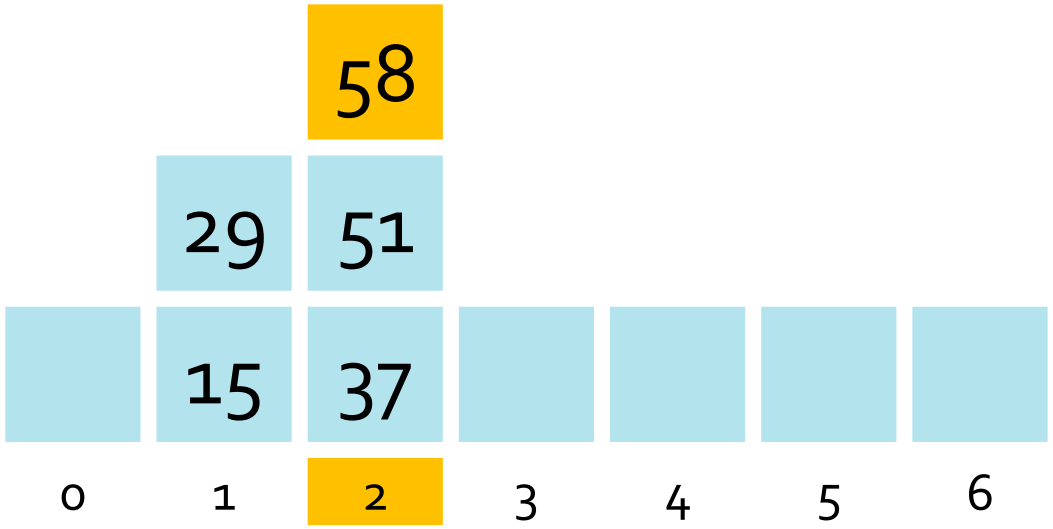
$$h(29) = 29 \bmod 7 \ = 1$$



Y similarmente para la clave 58 y nuevamente la casilla con índice 2

Insertemos la clave 58:

$$h(58) = 58 \bmod 7 \ = 2$$



¿Cómo buscamos y cómo eliminamos en una tabla de hash con encadenamiento?

Para buscar (el dato con) la clave k, primero calculamos el valor de hash $h(k)$ y miramos la casilla $\boldsymbol{T}[h(k)]$:

- si $\boldsymbol{T}[h(k)]$ está vacía, entonces la clave k no está en $\boldsymbol{T}$
- si $\boldsymbol{T}[h(k)]$ no está vacía, entonces apunta a una lista ligada de una o más claves, todas distintas entre ellas, pero que tienen el mismo valor de hash que la clave k

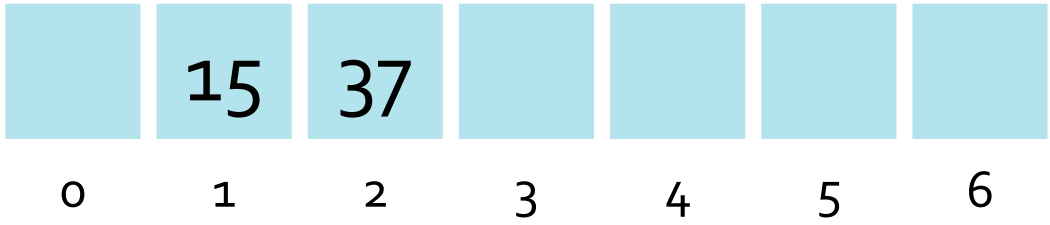
  … buscamos k en esta lista, p.ej., secuencialmente (k podría estar o no en la lista)

Para eliminar la clave k —suponiendo que la buscamos y la encontramos— simplemente la sacamos de la lista ligada en la que se encuentra

Otra forma de manejar colisiones es **direccionamiento abierto:** buscar sistemáticamente una casilla vacía

Insertemos las claves 15 y 37:

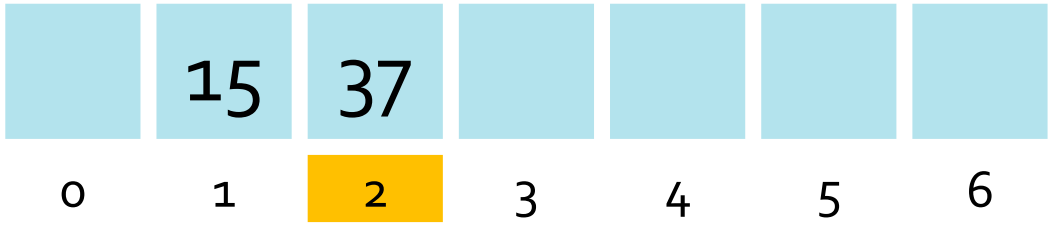
$$h(15) = 15 \bmod 7 = 1$$
$$h(37) = 37 \bmod 7 = 2$$



La clave 51 debería ir a parar a la casilla con índice 2, que ya está ocupada

Insertemos la clave 51:

$$h(51) = 51 \bmod 7 \ = 2$$



... entonces la ponemos en la *primera casilla desocupada a la derecha*: ***sondeo lineal***

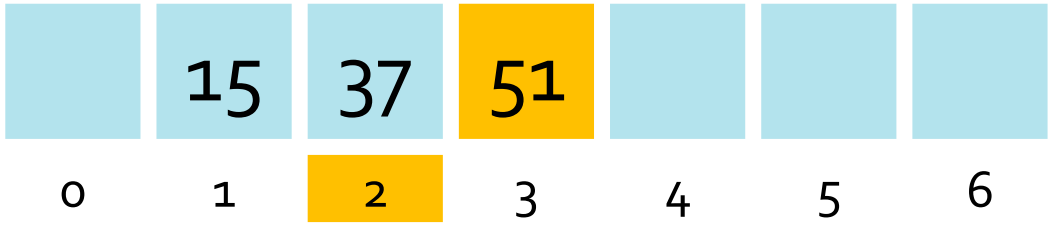
Insertemos la clave 51:

$$h(51) = 51 \bmod 7 \ = 2$$

Sondeo lineal significa que a partir de la casilla identificada por el valor de hash de la clave (en este ej., la casilla 2)

… vamos mirando una por una las casillas a la derecha

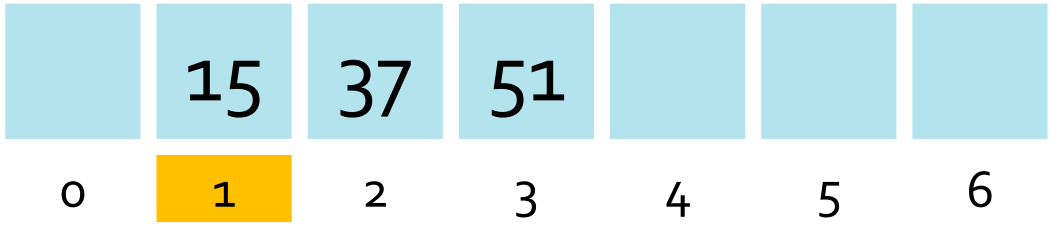
… hasta que encontremos la primera casilla desocupada, y ahí ponemos la clave (en este ej., la casilla 3)



Ahora, la clave 29 debería ir a la casilla con índice 1, que también ya está ocupada

Insertemos la clave 29:

$$h(29) = 29 \bmod 7 \ = 1$$



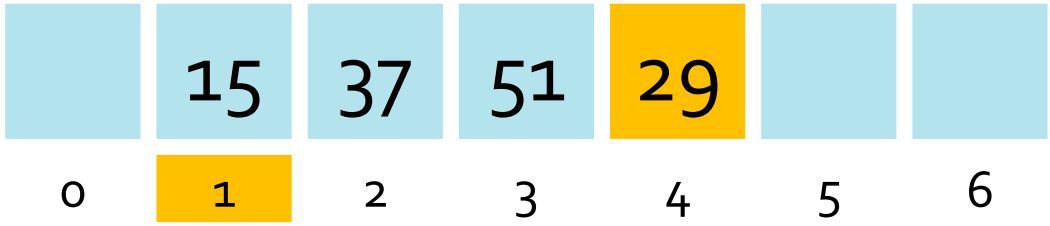
… empleando sondeo lineal, ponemos la clave 29 en la primera casilla desocupada a la derecha

Insertemos la clave 29:

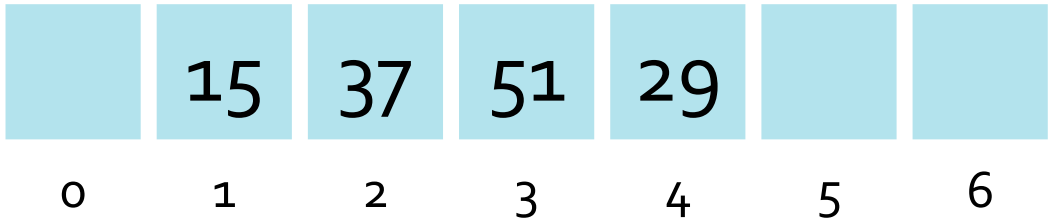
$$h(29) = 29 \bmod 7 \ = 1$$

Empleando sondeo lineal, después de mirar la casilla 1, que está ocupada, miramos las casillas 2, que también está ocupada, y 3, lo mismo

… así que llegamos hasta la casilla 4, que está vacía, y ponemos ahí la clave 29



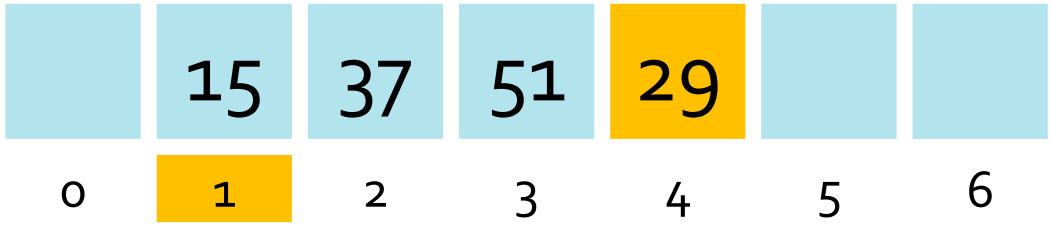
La búsqueda bajo sondeo lineal sigue la misma secuencia de comparaciones que al insertar



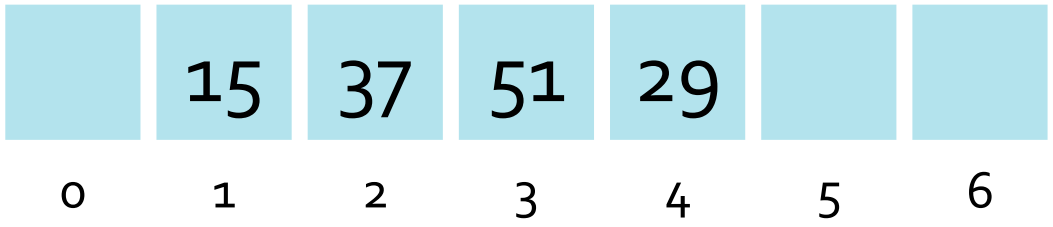
Buscamos la clave 29:

$$h(29) = 29 \bmod 7 = 1$$

Por lo tanto, miramos primero la casilla 1, y de ahí hacia la derecha las casilla 2, 3 y 4, donde finalmente encontramos la clave 29



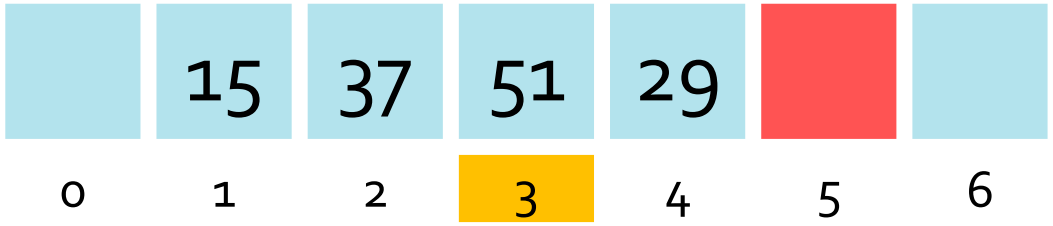
Si durante una búsqueda llegamos a una casilla vacía, significa que la clave que buscamos no está en la tabla



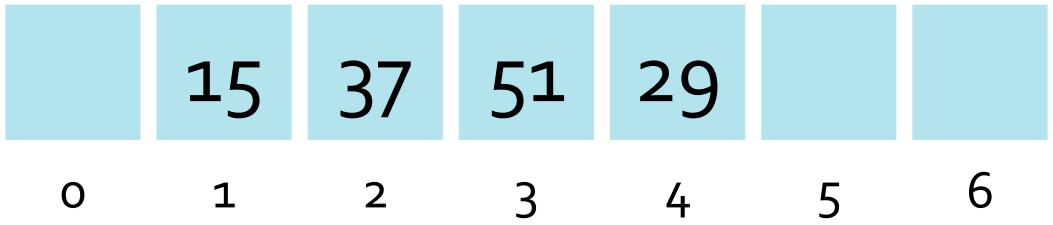
Buscamos la clave 10:

$$h(10) = 10 \bmod 7 = 3$$

Por lo tanto, miramos primero la casilla 3, y de ahí hacia la derecha las casillas 4 y 5; como la casilla 5 está vacía, deducimos que la clave 10 **no está almacenada** en la tabla, porque de lo contrario, tendría que haber estado en esta casilla



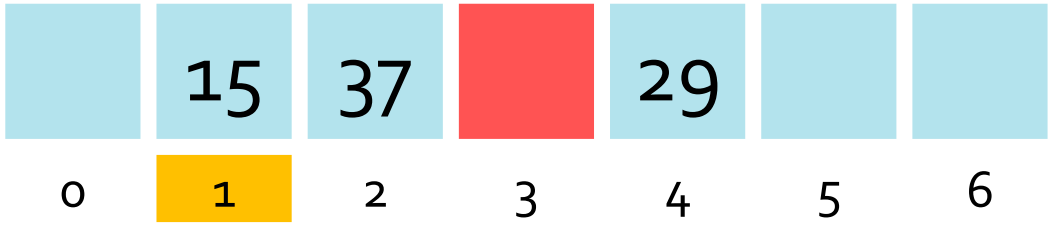
La eliminación es problemática: si es necesario poder eliminar claves, es mejor emplear encadenamiento



Eliminamos primero la clave 51
… y buscamos luego la clave 29:

$$h(29) = 29 \bmod 7 \ = 1$$

Miramos primero la casilla 1, y luego las casillas 2 y 3; como la casilla 3 está ahora vacía, deducimos **erróneamente** que la clave 29 no está almacenada en la tabla



Con direcciona-miento abierto, podemos emplear otras políticas de sondeo

Sondeo lineal (el que vimos recién): si $h(k) = H$, entonces

- buscamos en H, $H + 1$, $H + 2$, $H + 3$, …

Sondeo cuadrático: si $h(k) = H$, entonces

- buscamos en H, $H + 1$, $H + 4$, $H + 9$, …

Doble hashing:

- ocupamos dos funciones de hash, $h_1()$ y $h_2()$
- buscamos en $h_1(k)$, $h_1(k) + h_2(k)$, $h_1(k) + 2h_2(k)$, $h_1(k) + 3h_2(k)$, …

En cualquiera de estos casos, el problema al eliminar claves se manifiesta igual

¿Qué tan llena está la tabla?

Si una tabla de *m* casillas tiene almacenados *n* datos, entonces definimos el **factor de carga** λ como

$$\lambda = \frac{n}{m}$$

- con encadenamiento, es aceptable $\lambda \approx 1$
- con direccionamiento abierto, $\lambda > 0.5$ resulta en inserciones y búsquedas muy lentas

Rehashing

Cuando la tabla se empieza a llenar demasiado —las búsquedas e inserciones se empiezan a demorar más de lo aceptable—

… hay que construir otra tabla —aproximadamente el doble de grande— y definir una nueva función de hash para esta tabla

… y pasar todos los datos de la tabla original a la nueva tabla —calculando el nuevo valor de hash para cada uno

Esta es una operación cara —O(n)— pero infrecuente:

- tienen que haber habido O(n) inserciones en la tabla original

  … por lo que en esencia estamos agregando un costo constante a cada inserción (por eso la nueva tabla es el doble de grande)

La función de hash debe ser fácil de calcular y debe distribuir las claves uniformemente en la tabla

Si las claves *k* son número enteros, entonces

$$h(k) = k \bmod m$$

—llamado *hashing modular*— en que *m* es el tamaño de la tabla, es generalmente una función razonable:

- es conveniente que *m* sea un número primo

Si las claves son (idealmente) números aleatorios

… entonces esta función no sólo es simple de calcular

… sino que también distribuye las claves uniformemente a lo largo de la tabla

Otra posibilidad: el método de la multiplicación

Sea A un número entre 0 y 1:

$$h(k) = \lfloor m \cdot (A \cdot k \bmod 1) \rfloor$$

Es decir, multiplicamos *k* por *A* y extraemos la parte fraccional del producto

… éste valor lo multiplicamos por *m* y finalmente tomamos el piso del resultado

El valor de *m* no es crítico (como en el caso anterior) y una forma de simplificar el cálculo es que sea una potencia de 2

Precaución: la intuición nos puede jugar malas pasadas

Si las claves son números reales entre 0 y 1, intuitivamente podríamos multiplicar la clave por *m* y redondear al entero más cercano para obtener un índice entre 0 y *m*–1:

- $h(k) = \lfloor km \rfloor$
- el problema es que esto da más peso a los dígitos más significativos de la clave

  … los dígitos menos significativos (los que están más a la derecha) no influyen

Para resolver esto, podemos usar hashing modular sobre la representación binaria de la clave:

- (bit de signo &) 8 bits de exponente & 23 bits de fracción

Las claves no siempre son números enteros

Si las claves son strings *s*, entonces primero hay que convertir *s* a un número entero *k* y luego ajustar *k* al tamaño *m* de la tabla

Si $s = ch_0ch_1\ldots ch_p$, entonces una forma común de convertirlo a un número *k* (llamado *el valor de hash de s*) es

$$k = \#(ch_p) + \#(ch_{p-1})\times R + \#(ch_{p-2})\times R^2 + \ldots + \#(ch_0)\times R^p$$

en que #(ch) es el valor ASCII del carácter *ch* y *R* es 31 o 37:

- interpretamos *s* como un número entero de *p*+1 dígitos en base *R*

Finalmente, hay que convertir *k* a un índice *i* válido para la tabla, es decir, un número entre 0 y *m*–1: $i = k \bmod m$

Otros temas, que no vamos a ver

hashing universal

hashing perfecto