Demostración que BFS entrega los caminos más cortos

Recordemos el funcionamiento de BFS que comienza desde un nodo de inicio s (llamaremos BFS(s)). Si un nodo u descubre un nodo v, entonces $d[v]$ se le asigna el valor $d[u]+1$. Inicialmente, $d[s]$, el nodo de inicio, se marca como 0. Por lo tanto, $d[v]$ es el largo del camino por el cual BFS "descubre" al nodo v, comenzando desde el nodo s. Sea también $\delta(s,v)$ el largo del camino maś corto de s a v.

Lema 1: Si u entra en la cola antes que v durante la ejecución de BFS(s), entonces $d[u] \leq d[v]$

Por inducción:

PD: en cualquier momento, dada una cola $Q = (v_1, v_2, ..., v_n)$, entonces $d[v_1] \leq d[v_2], ..., \leq d[v_n] \leq d[v_1]+1$.

Caso base: La cola consiste sólamente de s. Por lo tanto, se cumple.

Hipótesis inductiva: Se cumple en la $k-$ésima iteración, que en una cola $Q = (v_1, ..., v_n)$, se cumple que $d[v_1] \leq ... \leq d[v_n] \leq d[v_1]+1$.

Paso inductivo: En la iteración siguiente se elimina el primer elemento de la cola (v_1), y se agregan al final de la cola los hijos de v_1. Al eliminar v_1, la cola se mantiene como $(v_2, ..., v_n)$, por lo que, por la **HI**, $d[v_1] \leq d[v_2]$, y por lo tanto $d[v_1]+1 \leq d[v_2]+1$, por lo que, $d[v_2] \leq ... \leq d[v_n] \leq d[v_1]+1 \leq d[v_2]+1$, por lo que la propiedad se mantiene.

Al agregar los hijos de v_1, (sea u_i un hijo de v), tenemos que, por **HI**, $d[v_n] \leq d[v_1]+1$, y por otro lado, por la misma ejecución del algoritmo, $d[u_i] = d[v_1]+1$. Por lo tanto, al agregar u_i al final de la cola, se mantiene que $d[v_2] \leq ... \leq d[v_n] \leq d[v_1]+1 = d[u_i] \leq d[v_2]+1$, por lo que la propiedad se cumple.

Lema 2: Luego de la ejecución de BFS(s), para todo nodo v, $d[v] \geq \delta(s,v)$

La demostración de este lema es directa. Luego de la ejecución de BFS(s), $d[v]$ corresponderá al largo de *algún camino* de s a v, mediante el cuál, se descubre v, comenzando desde s. Por la definición de $\delta(s,v)$, no existe un camino más corto, ya que justamente lo definimos como tal. Por lo tanto, $d[v] \geq \delta(s,v)$

Teorema: Luego de la ejecución de BFS(s), para cualquier nodo v, $d[v] = \delta(s,v)$

Por contradicción: Suponga que para algún nodo x, $d[x] \neq \delta(s,v)$. Sea v, el nodo **más cercano** a s que cumpla esa propiedad. (Nótese que $v \neq s$, ya que $d[s] = 0 = \delta(s,s)$). Por el **Lema 2**, $d[v] > \delta(s,v)$.

Considere el camino más corto de s a v (pueden ser varios, considere uno solo). Sea (u,v) la última arista en este camino más corto.

Nótese que el largo de este camino debe ser necesariamente $\delta(s,v)$ (por la definición de $\delta(s,v)$), y por lo tanto, necesariamente $\delta(s,v) = \delta(s,u)+1$. Debido a que v es el nodo más cercano que cumplía con la propiedad $d[x] \neq \delta(s,v)$, necesariamente $d[u] = \delta(s,u)$.

Juntando lo anterior, se obtiene que $d[v] > \delta(s,v) = \delta(s,u)+1 = d[u]+1$.

Esto es, $d[v] > d[u]+1$ (*).
Ahora se obtendrá una contradicción con (*). Para esto, considere el estado de v en el momento que el nodo u fue recién descubierto por BFS(s) (Evaluar justamente cuando u entra a la cola). Existen tres posibles escenarios:

1. **v aún no es descubierto**

   En este caso, v es descubierto *durante* la exploración de u, y, por lo tanto, $d[v] = d[u]+1$, lo que es una contradicción con (*).

2. **v ya fue descubierto y explorado**

   En este caso, v entró a la cola (y fue removido) antes que u entrara a la cola. Por el **Lema 1**, $d[v] \leq d[u]$, lo que es una contradicción con (*)

3. v **fue descubierto, pero aún no ha sido explorado**.

   Sea w el nodo que *descubre* a v. Este descubrimiento ocurrió antes de a exploración de u (La exploración de u implicaría el descubrimiento de v). Por lo tanto, w fue explorado antes que u fuese explorado. Por lo tanto, w entró a la cola antes de que u entrara a la cola. Por lo tanto, por el **Lema 1**, $d[w] \leq d[u]$. Esto implica que $d[w] + 1 \leq d[u] + 1$ (sumando 1 a cada lado). Como v fue descubierto por w, $d[v] = d[w] + 1$. Reemplazando en la expresión anterior, obtenemos $d[v] \leq d[u] + 1$, lo que es una contradicción con (*)