Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
IN3702 - Investigación de Operaciones

Tarea 1: Programación Dinámica Estocástica

Fecha de Entrega: Jueves 21 de abril del 2016

Auxiliares: Mauricio Zavalla
Diego Bernstein
Ignacio Úbeda
Magdalena Muñoz

Ayudantes: Camila Montaña
Cristián Aguayo
Francisco Suarez
María José Vásquez

Profesores: Denis Sauré
Rafael Epstein
José Correa

Integrantes: Christian Guerra
Martín Escudero
Felipe Valencia

- Resumen Ejecutivo

En el curso Investigación de Operaciones (IN-3702), bajo el contexto de resolución de Problema de Programación Dinámica (PPD), se pide ayudar en la problemática de una Viña ficticia, que debe asignar precio a un producto de su catálogo para varios períodos y bajo ciertas condiciones restrictivas y probabilísticas. Esto, con el fin de llevar la teoría de los PPD a un programa computacional que permita resolver el problema en un tiempo considerablemente menor que el que tomaría a través de cálculos humanos.

En una primera instancia, el problema es modelado con un modelo Estocástico, y luego programado para obtener los resultados. El software de programación que se utiliza es *Python*. Elegido debido a las libertades de programación que entrega frente a los otros dos softwares recomendados por el cuerpo docente (MatLab y Visual Basic).

Los resultados mas interesantes de este estudio, radican en el análisis de sensibilidad de variables, sección en la que se prueban ciertos cambios de algunos parámetros del problema y se comparan con los resultados previamente obtenidos para estudiar cómo responde el resultado a esos cambios. Por ejemplo, la variación del número de períodos del problema, y también del *stock* que dispone la Viña durante la comercialización de su producto.

- Índice

Portada..1
Resumen Ejecutivo..2
Índice..3
Introducción (Marco Teórico)...4
Descripción del problema..5
Resultados esperados..5
Desarrollo de las preguntas...6
Análisis de resultados..10
Conclusiones..12
Bibliografía..13
Anexos..13

Introducción (Marco Teórico)

Día a día, las personas se enfrentan a situaciones en las que desean maximizar su utilidad (o bien, minimizar costos). Gran parte de estas decisiones son mas complejas que analizar distintos casos y buscar qué genera mas utilidad, ya que constan de varias etapas. Para este tipo de problemas, se utiliza como método de resolución la Programación Dinámica (PD). En particular, cuando se trabaja sobre un ambiente que contempla variables de carácter aleatorio, hablamos de Programación Dinámica Estocástica (PDE).

Cabe destacar que para obtener el óptimo del problema, este se resuelve en forma iterativa desde la última etapa hasta la primera, optimizando cada una de ellas. Esto es válido debido a que los Problemas de Programación Dinámica (PPD) cumplen el Principio de Optimalidad de Bellman: "Dada una secuencia óptima de decisiones, toda subsecuencia de ella es, a su vez, óptima".

Para poder resolver el problema propuesto, es necesario plantear:

- Sub-problemas (etapas) a resolver, que serán resueltos en forma recursiva.
- Variables de decisión, que representan las acciones a tomar en cada etapa por parte de la persona tomadora de decisiones.
- Variables estocásticas, que representan las acciones que "toma" la *Naturaleza.*
- Variables de estado, que representan los posibles estados en los que puede encontrarse el sistema, al comenzar un periodo o etapa.
- Utilidad de una etapa, dados las posibles acciones de la *naturaleza,* acciones tomadas por el tomador de decisiones y estados en que se encuentra el sistema.
- Recurrencia que se presenta en el estado de cada período, dadas las decisiones tomadas o eventos aleatorios ocurridos en relación al período adyacente.

Si bien, al resolver un PPD se encuentra un óptimo, este no es mas que una secuencia de decisiones que entrega el mejor resultado, pero en el caso donde se tiene un problema con variables aleatorias, se encuentra una secuencia de decisiones que lleva a maximizar (minimizar) la utilidad (costo) esperado(a) dadas las distribuciones de probabilidad del problema.

- ## Descripción del Problema

En el problema se pide encontrar la política óptima de fijación de precios para el lanzamiento del nuevo vino de la Viña *Corcho y Lomo*. Para esto se tienen algunos parámetros y/o restricciones del problema: Se cuenta con un stock de 50 botellas que se deben vender a lo largo de 6 meses a un precio que se debe definir mensualmente. Si al final de este período aún quedan vinos por vender, estos serán rematados a un precio g = $15.

Naturalmente, la Viña busca maximizar sus utilidades dadas las restricciones propuestas anteriormente, para esto debemos tomar la decisión de qué precio elegir para cada mes. Las opciones posibles son: P_1= $50, P_2= $60, P_3= $70, P_4= $80 y P_5= $90

- ## Resultados Esperados

A priori, al tratarse de un problema de optimización, es esperable que nuestra utilidad esperada sea cercana (o idealmente mayor) al promedio esperado sin las condiciones probabilísticas. Es decir, dado que el precio promedio que puede tener cada botella es P_3= $70 (promedio de precios), es esperable que la ganancia total sea cercana a $U = 50 * P_3 = 50 * \$70 = \$3.500$. A pesar de esto, se debe notar que no son incluidos los precios de publicidad, que promedian %15. Además las condiciones de no-satisfacción de demanda incurren en costos, y también el remate final genera utilidad menor que la venta dentro del período estipulado. Es por esto, que es esperable como promedio de utilidad, un %80 de la utilidad antes mencionada (aproximadamente). Este número es $2.800.

Para el caso en el que se aumentan los períodos, dado que la demanda esperada es menor que el *stock*, se espera que con un aumento ligero del período, se pueda aumentar la utilidad. Pero con un aumento mucho mayor (i.e. mas del doble del período incial de prueba), la cantidad demanda será mayor, y se tendría que incurrir en multas por no-satisfacción de demanda, y por ende, la utilidad disminuya.

Si se aumenta considerablemente el *stock*, la demanda será siempre satisfecha, pero es esperable que el aumento de utilidad no sea considerable, dado que la utilidad marginal comienza a ser de $10 por botella, dado que sólo se rematarán (la demana ya está sobre cubierta).

Al disminuir el *stock* por debajo de la demanda esperada, genera que no se disponga de restos de botellas al final del último período para rematar, pero que no se satisfaga la totalidad de las demandas. Como el costo de no vender una botella es mayor que el beneficio de rematar una (c<g), es natural pensar que la utilidad decrecerá rápidamente.

• Desarrollo de las Preguntas

1. El problema puede ser modelado mediante Programación Dinámica Estocástica, ya que existen diferentes etapas, la decisión a tomar entre cada una de estas no depende de la anterior y la transición entre los estados no es determinista.

2. Se modela el problema de la siguiente forma:

- *Etapas:*
  - $T = 1, 2, 3, 4, 5, 6$
- *Variable de Estado:*
  - $g_t = Cantidad\ de\ Stock\ en\ el\ mes\ t$
- *Variable de Decisión:*
  - $x_t = Precio\ a\ fijar\ en\ el\ mes\ t$
- *Variable Aleatoria:*
  - $e_t = Exposición\ en\ el\ mes\ t$
  - $D_t = Demanda\ en\ t$
- *Recurrencia:*
  - $q_{t+1} = q_t - min\{D_t, q_t\}$
- *Utilidad:*
  - $V_t(x_t, q_t) = x_t\, min\left\{q_t, \sum_{i=1}^{3}(E(p(x_t, e)|\mathrm{e = i}) * P(e = i))\right\} - F_t(x_t)x_t min\left\{q_t, \sum_{i=1}^{3}(E(p(x_t, e)|\mathrm{e = i}) * P(e = i))\right\} - g\, max\left\{0, \sum_{i=1}^{3}(E(p(x_t, e)|\mathrm{e = i}) * P(e = i)) - q_t\right\} + V_{t+1}^{*}(q_{t+1})$

  $*\, Donde\ e = 1\ es\ exposición\ Alta, e = 2\ es\ exposición\ Media\ y\ e = 3\ es\ exposición\ Baja$

Donde:

- $F(x_t) = \begin{cases} 0{,}1 & si\ x_t = P_1 \vee P_2 \\ 0{,}2 & si\ x_t = P_3 \\ 0{,}3 & si\ x_t = P_5 \vee P_4 \end{cases}$
- $V_t^{*} = max_{x_t}\{V(x_t, q_t)\}$

3. Para resolver el problema se ejecuta el programa TareaIO.py y se observa la hoja de resultados.

```
utilidad esperada=3242.0
Mes=1
Precio a fijar(asignacion optima): X=70
Mes=2
Precio a fijar(asignacion optima): X=50
Mes=3
Precio a fijar(asignacion optima): X=90
Mes=4
Precio a fijar(asignacion optima): X=50
Mes=5
Precio a fijar(asignacion optima): X=50
Mes=6
Precio a fijar(asignacion optima): X=60
Tiempo de resolucion en %s segundos ---0.569000005722
```

Es posible observar que la secuencia de decisiones óptimas es:

$$x_1 = P_3$$

$$x_2 = P_1$$

$$x_3 = P_5$$

$$x_4 = P_1$$

$$x_5 = P_1$$

$$x_6 = P_2$$

Que finalmente entrega una utilidad de 3242.

Cabe recordar que como el problema es estocástico (la demanda depende del nivel de exposición) con nuestro modelo/programa los resultados de la utilidad van cambiando en cada ejecución, sin embargo, las variaciones son leves. Por esta razón se ejecuta el problema 5 veces más para obtener un promedio de la utilidad esperada. Se muestran los resultados en la Tabla 1.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	**V***
Ejecución 1	70	90	60	50	60	50	**3226**
Ejecución 2	70	70	50	60	50	70	**3240**
Ejecución 3	90	60	70	70	50	60	**3302**
Ejecución 4	60	90	50	60	60	60	**3286**
Ejecución 5	60	60	70	70	60	60	**3214**

Tabla 1 – Varias ejecuciones del programa

A lo largo de todo el programa se utilizarán promedios de varias ejecuciones, con el fin de acercar lo máximo posible los resultados a las utilidades esperadas

4. En el Análisis de Sensibilidad, se estudiarán las variables de stock de botellas y el costo de la publicidad.

<u>Stock:</u> Dadas las condiciones de exposición y respectivas probabilidades, en promedio se venderán 36 botellas. Se cambia el *stock* para acercarse a este número y analizar qué pasa para números que se alejan de este "promedio". Es por esto, que se analizarán distintas cantidades, Q=[20,30,36,40,50,60,70,90,100,130,200] con sus respectivas utilidades esperadas (promedio). Los resultados se pueden ver en la Figura 1.

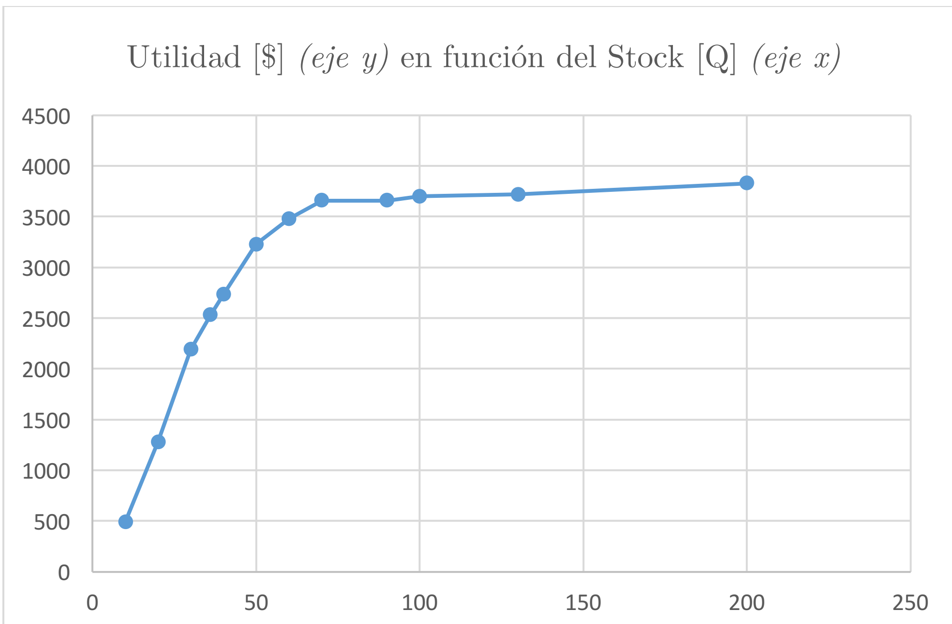

Fig. 1 – Comparación de cómo varía la utilidad al variar el stock

Se puede notar a través del gráfico, que la función de utilidad con variable de stock, es claramente cóncava.

<u>Costo publicidad:</u> Se analizará la influencia de este factor en la toma de desiciones para 3 casos.

Caso 1:

De esa forma si el precio de venta es P1 o P2 el costo por publicidad es el 30 % del precio por cada unidad vendida. De igual forma si el precio es P3 el costo por publicidad es el 20 % del precio por cada unidad vendida, mientras que si se escoge P4 o P5 el costo es del 10 % del precio por cada unidad vendida.

- $F(x_t) = \begin{cases} 0{,}3 & si\ x_t = P_1 \vee P_2 \\ 0{,}2 & si\ x_t = P_3 \\ 0{,}1 & si\ x_t = P_5 \vee P_4 \end{cases}$

  Naturalmente, ahora existe menos costo asociado a la elección de un precio mayor, por ende la utilidad esperada debería ser mayor que en el caso principal. Se obtiene: $3.240

Otro caso interesante sería,

Caso 2:

- $F(x_t) = \begin{cases} 0{,}15 & si\ x_t = P_1 \vee P_2 \\ 0{,}15 & si\ x_t = P_3 \\ 0{,}15 & si\ x_t = P_5 \vee P_4 \end{cases}$

  Ahora, la viña es indiferente en cuando a costo de publicidad, de elegir el precio de su producto, por ende, es deseable que la utilidad aumente levemente con respecto al caso anterior. Se obtiene: $3.441

Por último,

Caso 3:

- $F(x_t) = \begin{cases} 0{,}1 & si\ x_t = P_1 \vee P_2 \\ 0{,}3 & si\ x_t = P_3 \\ 0{,}5 & si\ x_t = P_5 \vee P_4 \end{cases}$

En este último caso, se puede ver un cobro *exagerado* de publicidad con respecto al del enunciado. Se elige para evidenciar el contraste con los dos primeros casos, esperando que la utilidad se vea considerablemente disminuida. Se obtiene: $3.101

Suponiendo ahora que es posible tener probabilidad 1 de exposición alta, esto simplifica el problema, en el que siempre se tendrá una utilidad de $3.324. Además, el promedio esperado para el caso regular es de $3.255, esto entrega que el máximo a pagar por la certeza de tener exposición alta es de $69.

5. Al cambiar el número de etapas se obtienen las tablas 2, 3 y 4 adjuntas en el *Anexo.*

Se revisan los cambios de Períodos,

T = 12:

Notando que es preferible tomar la decisión de cobrar lo más caro posible, esto es porque se dispone de más periodos para vender nuestro stock. Se puede ver también que la utilidad esperada aumenta en aproximadamente $200 si se compara con los resultados obtenidos en la Pregunta 1.

T = 18:

Nuevamente conviene tomar el precio máximo en todos los períodos, ya que hay tiempo en exceso para vender el stock. Por esta misma razón la utilidad disminuye aproximadamente en 50 unidades.

T = 24:

Se puede ver la misma tendencia que en los dos casos anteriores, además es de importancia notar que la utilidad esperada disminuyó aún más, lo que refuerza la idea de que son demasiados períodos para vender un stock tan pequeño.

Finalmente se observa que el tiempo de procesamiento es creciente con los períodos. Esto quiere decir que entre más periodos tengamos, mayor será el tiempo de procesamiento.

Los resultados de estos estudios se encuentran en tablas 2, 3 y 4 en *Anexo.*

- ## Análisis de Resultados

De la Pregunta 3, se observa que el tiempo de procesamiento es de 0,57 segundos aproximadamente, esto permite escalar el programa de una buena forma, facilitando el desarrollo de las próximas preguntas. Además, vale mencionar que la utilidad promedio esperada es cercana a 3250.

Para el análisis de sensibilidad (Pregunta 4), se logra evidenciar lo esperado para la variación de la utilidad en función del *stock*. Esto es sumamente esperable (y lógico) dado que el tener mas *stock* sólo significará poder tener un remate mayor al final de los períodos, y como este valor es mucho mas bajo que el del precio de venta regular, el aumento marginal por unidad de *stock* es muy bajo (en promedio solo c=$10). Además, una disminución drástica del *stock,* obliga a no poder cumplir la demanda e incurrir en multas mayores al costo de rematar (caso en que no se suple demanda), por ende el beneficio se ve considerablemente disminuido.

El análisis de los costos de publicidad es menos evidente, ya que para el caso 3 debería ser clara una disminución del beneficio esperado y se cumple, pero para los casos 1 y 2, el aumento esperado pretendía ser similar, sin embargo, no lo es. Es posible notar que el caso 2 genera un gran aumento del beneficio esperado, lo que puede ser interpretado como una mayor indiferencia entre qué precio elegir y en consecuencia, una mayor libertad para elegir precios por parte de la Viña.

De la Pregunta 5, se puede ver que al aumentar el número de períodos, el tiempo de procesamiento aumenta en aproximadamente 0.4 segundos por incremento de número de etapas. Esto no es una demora significativa, mas aún, evidencia un código eficiente.

Se observa también que hay un número de períodos para vender todo el stock que es mejor que 6 meses, pero luego al aumentar más la cantidad de etapas la utilidad final disminuye. Lo anterior es lógico, dado que al aumentar los períodos, se tiene mas demanda y esta no puede ser cubierta totalmente, generando multas (g=$15).

La idea central del análisis se relaciona con la cantidad óptima de períodos para vender el stock. Si se decide tomar una cantidad muy pequeña, se va a tender a vender a precios más baratos para poder satisfacer la demanda en esa cantidad de periodos. Por el contrario, en una cantidad demasiado grande de etapas, el precio va a subir lo máximo posible, ya que hay más períodos para vender el stock.

- Conclusiones

Los resultados obtenidos guardan relación con los resultados esperados, mostrando que la intuición y análisis cualitativo del problema fueron acertados. Sin embargo, la obtención de resultados ayuda a cuantificar lo esperado en mas detalle (números mas exactos).

Entender el rol que toman los distintos parámetros del problema al calcular el beneficio, es fundamental para poder interpretar la secuencia de desiciones óptimas que entrega el resultado óptimo.

Es de suma importancia el gráfico de la Figura 1. Esto, dado que muestra en forma clara, la utilidad marginal en variaciones de *stock*. A partir de sto, parecería interesante que junto a la variación de stock, se realicen mas prueba con cambios en el valor de la multa (g=$15), disminuyendo esta a un valor menor que el precio de remate (c=$10) (o al revés), para así estudiar la *nueva* utilidad marginal. En particular, para rangos de stock menores al promedio, o bien, mucho mayores.

Naturalmente, se evidencia que las herramientas computacionales ayudan de gran manera en la resolución de PPD, debido a que la ejecución de extensos cálculos que tomarían horas al ser realizados a mano, no toman mas de 1 segundo gracias al programa computacional creado.

- # Bibliografía

Documentación de comandos de Python: http://www.pythonforbeginners.com/

- # Anexos

Tabla 2. T=12

```
utilidad esperada=3563.0
Mes=1
Precio a fijar(asignacion optima): X=90
Mes=2
Precio a fijar(asignacion optima): X=90
Mes=3
Precio a fijar(asignacion optima): X=90
Mes=4
Precio a fijar(asignacion optima): X=90
Mes=5
Precio a fijar(asignacion optima): X=90
Mes=6
Precio a fijar(asignacion optima): X=90
Mes=7
Precio a fijar(asignacion optima): X=90
Mes=8
Precio a fijar(asignacion optima): X=70
Mes=9
Precio a fijar(asignacion optima): X=90
Mes=10
Precio a fijar(asignacion optima): X=90
Mes=11
Precio a fijar(asignacion optima): X=90
Mes=12
Precio a fijar(asignacion optima): X=90
Tiempo de resolucion en %s segundos ---0.926000118256
```

Tabla 3. T=24

```
utilidad esperada=2790.0
Mes=1
Precio a fijar(asignacion optima): X=90
Mes=2
Precio a fijar(asignacion optima): X=90
Mes=3
Precio a fijar(asignacion optima): X=90
Mes=4
Precio a fijar(asignacion optima): X=90
Mes=5
Precio a fijar(asignacion optima): X=90
Mes=6
Precio a fijar(asignacion optima): X=90
Mes=7
Precio a fijar(asignacion optima): X=90
Mes=8
Precio a fijar(asignacion optima): X=90
Mes=9
Precio a fijar(asignacion optima): X=90
Mes=10
Precio a fijar(asignacion optima): X=90
Mes=11
Precio a fijar(asignacion optima): X=90
Mes=12
Precio a fijar(asignacion optima): X=90
Mes=13
Precio a fijar(asignacion optima): X=90
Mes=14
Precio a fijar(asignacion optima): X=80
Mes=15
Precio a fijar(asignacion optima): X=90
Mes=16
Precio a fijar(asignacion optima): X=70
Mes=17
Precio a fijar(asignacion optima): X=90
Mes=18
Precio a fijar(asignacion optima): X=70
Mes=19
Precio a fijar(asignacion optima): X=90
Mes=20
Precio a fijar(asignacion optima): X=90
Mes=21
Precio a fijar(asignacion optima): X=90
Mes=22
Precio a fijar(asignacion optima): X=90
Mes=23
Precio a fijar(asignacion optima): X=90
Mes=24
Precio a fijar(asignacion optima): X=90
Tiempo de resolucion en %s segundos ---1.67300009727
```

Tabla 4. T=28

```
utilidad esperada=3165.0
Mes=1
Precio a fijar(asignacion optima): X=90
Mes=2
Precio a fijar(asignacion optima): X=90
Mes=3
Precio a fijar(asignacion optima): X=90
Mes=4
Precio a fijar(asignacion optima): X=90
Mes=5
Precio a fijar(asignacion optima): X=90
Mes=6
Precio a fijar(asignacion optima): X=90
Mes=7
Precio a fijar(asignacion optima): X=90
Mes=8
Precio a fijar(asignacion optima): X=90
Mes=9
Precio a fijar(asignacion optima): X=90
Mes=10
Precio a fijar(asignacion optima): X=90
Mes=11
Precio a fijar(asignacion optima): X=90
Mes=12
Precio a fijar(asignacion optima): X=90
Mes=13
Precio a fijar(asignacion optima): X=90
Mes=14
Precio a fijar(asignacion optima): X=90
Mes=15
Precio a fijar(asignacion optima): X=90
Mes=16
Precio a fijar(asignacion optima): X=90
Mes=17
Precio a fijar(asignacion optima): X=90
Mes=18
Precio a fijar(asignacion optima): X=90
Tiempo de resolucion en %s segundos ---1.3180000782
```