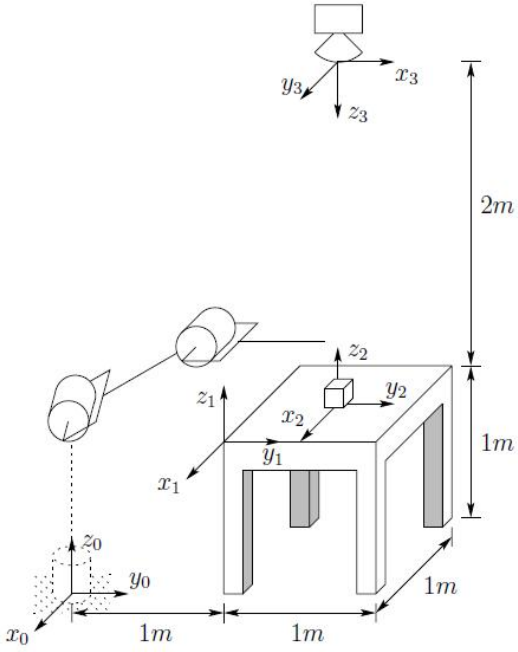
In [1]:
```
import numpy as np
```

Questão 1 (peso 0,10):

Considere a figura abaixo. Um robô é colocado a 1 metro de uma mesa cuja duas de suas pernas estão sobre o eixo y 0 , como mostrado. O topo da mesa está a 1 metro de altura da base do robô, e tem 1 metro quadrado. Um sistema de coordenadas **o1x1y1z1** é fixado na intersecção de suas arestas da mesa, como mostrado. Um cubo medindo 20cm de lado é colocado no centro da mesa, com um sistema de coordenadas **o2x2y2z2** estabelecido no seu centro, como mostrado. Uma câmera é posicionada a 2 metros acima do topo da mesa, com um sistema de coordenadas **o3x3y3z3** . Ache as transformações homogêneas relacionando cada um desses sistemas ao sistema da base o **0x0y0z0** . Ache a transformação homogênea relacionando o sistema **o2x2y2z2** ao sistema **o3x3y3z3**.



Resposta

para **0x0y0z0** e **o1x1y1z1** temos somente a translação em y e em z, portanto a matriz de transformação será R = I (identidade) * t

In [2]:
```
np.array([
    [1,0,0,0], # translação em x = 0
    [0,1,0,1], # translação em y = 1
    [0,0,1,1], # translação em z = 1
    [0,0,0,1]  # dimensão extra da matriz homogênea
])
```

Out[2]:
```
array([[1, 0, 0, 0],
       [0, 1, 0, 1],
       [0, 0, 1, 1],
       [0, 0, 0, 1]])
```

para **0x0y0z0** e **o2x2y2z2**, também não temos rotação, portanto a parte de rotação da matriz seguirá sendo a identidade

In [3]:
```
np.array([
    [1,0,0,-0.5], # translação em x = -0.5m
    [0,1,0, 1.5], # translação em y = 1 + 0.5m (distancia ate a mesa + 50cm até o centro da m
    [0,0,1, 1.1], # translação em z = 1m + 0.1m (distancia até a altura da mesa + distancia a
    [0,0,0, 1. ]  # dimensão extra da matriz homogênea
])
```

Out[3]:
```
array([[ 1. ,  0. ,  0. , -0.5],
       [ 0. ,  1. ,  0. ,  1.5],
       [ 0. ,  0. ,  1. ,  1.1],
       [ 0. ,  0. ,  0. ,  1. ]])
```

para **0x0y0z0** e **o3x3y3z3**, teremos a rotação e a translação a seguir:

In [4]:
```
rot_o3x3y3z3 = np.array([
   # colunas
   # x,y,z
    [0,1, 0], # eixo y novo aponta para x do sistema anterior
    [1,0, 0], # eixo x novo aponta para y do sistema anterior
    [0,0,-1], # eixo z novo aponta para -z do sistema anterior
    [0,0, 0]  # dimensão extra da matriz homogenea
])

trans_o3x3y3z3 = np.array([
    [-0.5], # translação em x = -0.5m
    [ 1.5], # translação em y = 1m + 0.5m
    [ 3. ], # translação em z = 3m
    [ 1. ]  # dimensão extra da matriz homogenea
])

np.concatenate((rot_o3x3y3z3, trans_o3x3y3z3), axis=1)
```

Out[4]:
```
array([[ 0. ,  1. ,  0. , -0.5],
       [ 1. ,  0. ,  0. ,  1.5],
       [ 0. ,  0. , -1. ,  3. ],
       [ 0. ,  0. ,  0. ,  1. ]])
```

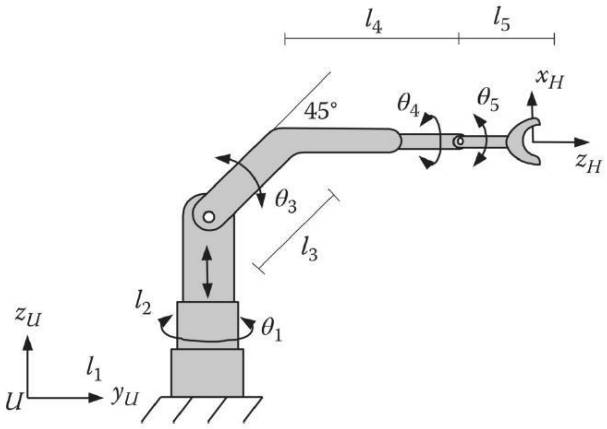
Finalmente, para a transformação homogênea relacionando o sistema **o2x2y2z2** ao sistema **o3x3y3z3**, temos a mesma rotação entre o0 e o3, pois os eixos te o0 e o2 estão alinhados.

In [5]:
```
rot2_para_3 = np.array([
   # colunas
   # x,y,z
    [0,1, 0], # eixo y novo aponta para x do sistema anterior
    [1,0, 0], # eixo x novo aponta para y do sistema anterior
    [0,0,-1], # eixo z novo aponta para  -z do sistema anterior
    [0,0, 0]  # dimensão extra da matriz homogenea
])

trans2_para_3 = np.array([
    [0. ], # translação em x = 0m
    [0. ], # translação em y = 0m
    [1.9], # translação em z = 1.9m, pois precisamos considerar os 10 cm da superficie da mes
           # por essa razão, ao invés de 2m, ficariam 2m - 10cm, 1.9m
    [1. ]  # dimensão extra da matriz homogenea
])

np.concatenate((rot2_para_3, trans2_para_3), axis=1)
```

Out[5]:
```
array([[ 0. ,  1. ,  0. ,  0. ],
       [ 1. ,  0. ,  0. ,  0. ],
       [ 0. ,  0. , -1. ,  1.9],
       [ 0. ,  0. ,  0. ,  1. ]])
```

Questão 2 (peso 0,15):

Considere o manipulador de 5 graus de liberdade mostrado em sua posição zero. Derive as equações da sua cinemática direta, utilizando, para tanto, a convenção de Denavit-Hartenberg clássica. Não é preciso escrever a matriz geral do manipulador, basta desenvolver as matrizes que relacionam os elos. Derive as equações que resolvem cada um dos ângulos de orientação em X-Y-Z da ferramenta em função das variáveis de junta, na expressão mais simples possível.



Resposta

A especificação da matriz A é feita seguindo-se a ordem de transformações homogêneas de translação e rotação que reposicionam o sistema i – 1 ao i:

- rotação em torno do eixo Z_{i-1} do ângulo θ_i entre os elos;
- translação ao longo do eixo Z_{i-1} da distância d_i entre os elos;
- translação ao longo do eixo X_i (eixo X_{i-1} atual) do comprimento do elo (L_i);
- rotação em torno do eixo X_i do ângulo (α_i).

= Rot(Z, θ_i) . Trans (0, 0, d_i) . Trans(L_i, 0, 0). Rot(X, α_i)

In [6]:
```
%%html
<style>
table {float:left}
</style>
```

Parâmetros de elos:

Elo	rot_z	trans_z	trans_x	rot_x
1	θ_1	l2	0	-90
2	θ_3 + 45	0	l3	90
3	θ_4	l4	0	0
4	θ_5	l5	0	0

In [7]:
```
text = """
translação inicial entre u e 0:

        [1, 0, 0, 0 ]
        [0, 1, 0, l1]
        [0, 0, 1, 0 ]
        [0, 0, 0, 1 ]
"""
print(text)
```

```
translação inicial entre u e 0:

        [1, 0, 0, 0 ]
        [0, 1, 0, l1]
        [0, 0, 1, 0 ]
        [0, 0, 0, 1 ]
```

In [8]:
```
print("""Matriz A, elo 1:

rotação de theta1 em Z

        [cos(theta1), -sen(theta1), 0, 0]
        [sen(theta1),  cos(theta1), 0, 0]
        [0          , 0           , 1, 0]
        [0          , 0           , 0, 1]

translação de l2 em Z

        [1, 0, 0, 0 ]
        [0, 1, 0, 0 ]
        [0, 0, 1, l2]
        [0, 0, 0, 1 ]

rotação de -90º em X

        [1, 0       , 0          , 0]
        [0, cos(90) , -sen(90)   , 0]
        [0, sin(90) , cos(90)    , 0]
        [0, 0       , 0          , 1]

Matriz final (produto das 3)

        [cos(theta1), -sen(theta1)*cos(90), sen(theta1)*sen(90) , 0]
        [sen(theta1), cos(theta1)*cos(90) , -cos(theta1)*sen(90), 0]
        [0          , sen(-90)            , cos(-90)            ,l2]
        [0          , 0                   , 0                   , 1]

ou (substituindo senos e cossenos de 90)

        [cos(theta1), 0 , sen(theta1) , 0]
        [sen(theta1), 0 , -cos(theta1), 0]
        [0          , 1 , 0           ,l2]
        [0          , 0 , 0           , 1]
""")
```

```
Matriz A, elo 1:

rotação de theta1 em Z

        [cos(theta1), -sen(theta1), 0, 0]
        [sen(theta1),  cos(theta1), 0, 0]
        [0          , 0           , 1, 0]
        [0          , 0           , 0, 1]

translação de l2 em Z

        [1, 0, 0, 0 ]
        [0, 1, 0, 0 ]
        [0, 0, 1, l2]
        [0, 0, 0, 1 ]

rotação de -90º em X

        [1, 0       , 0          , 0]
        [0, cos(90) , -sen(90)   , 0]
        [0, sin(90) , cos(90)    , 0]
        [0, 0       , 0          , 1]

Matriz final (produto das 3)

        [cos(theta1), -sen(theta1)*cos(90), sen(theta1)*sen(90) , 0]
        [sen(theta1), cos(theta1)*cos(90) , -cos(theta1)*sen(90), 0]
        [0          , sen(-90)            , cos(-90)            ,l2]
        [0          , 0                   , 0                   , 1]

ou (substituindo senos e cossenos de 90)

        [cos(theta1), 0 , sen(theta1) , 0]
        [sen(theta1), 0 , -cos(theta1), 0]
        [0          , 1 , 0           ,l2]
        [0          , 0 , 0           , 1]
```

In [9]:
```
print("""Matriz A, elo 2:

rotação de theta2 + 45º em Z

        [cos(theta2+45), -sen(theta2+45), 0, 0]
        [sen(theta2+45),  cos(theta2+45), 0, 0]
        [0              , 0              , 1, 0]
        [0              , 0              , 0, 1]

translação de l3 em X

        [1, 0, 0, l3]
        [0, 1, 0, 0 ]
        [0, 0, 1, 0 ]
        [0, 0, 0, 1 ]

rotação de 90º em X

        [1, 0       , 0          , 0]
        [0, cos(90) , -sen(90)   , 0]
        [0, sin(90) , cos(90)    , 0]
        [0, 0       , 0          , 1]

Matriz A geral (produto das 3)

        [cos(theta2+45), -sen(theta2+45)*cos(90), sen(theta2+45)*sen(90) , l3*cos(theta2+45)]
        [sen(theta2+45), cos(theta2+45)*cos(90) , -cos(theta2+45)*sen(90), l3*sen(theta2+45)]
        [0              , sen(90)                , cos(90)                , 0                ]
        [0              , 0                      , 0                      , 1                ]

ou (substituindo senos e cossenos de 90)

        [cos(theta2+45), 0 , sen(theta2+45) , l3*cos(theta2+45)]
        [sen(theta2+45), 0 , -cos(theta2+45), l3*sen(theta2+45)]
        [0              , 1 , 0              , 0               ]
        [0              , 0 , 0              , 1               ]

""")
```

Matriz A, elo 2:

rotação de theta2 + 45º em Z

```
[cos(theta2+45), -sen(theta2+45), 0, 0]
[sen(theta2+45),  cos(theta2+45), 0, 0]
[0             , 0              , 1, 0]
[0             , 0              , 0, 1]
```

translação de l3 em X

```
[1, 0, 0, l3]
[0, 1, 0, 0 ]
[0, 0, 1, 0 ]
[0, 0, 0, 1 ]
```

rotação de 90º em X

```
[1, 0       , 0          , 0]
[0, cos(90) , -sen(90)   , 0]
[0, sin(90) , cos(90)    , 0]
[0, 0       , 0          , 1]
```

Matriz A geral (produto das 3)

```
[cos(theta2+45), -sen(theta2+45)*cos(90), sen(theta2+45)*sen(90) , l3*cos(theta2+4
5)]
[sen(theta2+45), cos(theta2+45)*cos(90) , -cos(theta2+45)*sen(90), l3*sen(theta2+4
5)]
[0             , sen(90)               , cos(90)               , 0
]
[0             , 0                     , 0                     , 1
]
```

ou (substituindo senos e cossenos de 90)

```
[cos(theta2+45), 0 , sen(theta2+45) , l3*cos(theta2+45)]
[sen(theta2+45), 0 , -cos(theta2+45), l3*sen(theta2+45)]
[0             , 1 , 0              , 0                ]
[0             , 0 , 0              , 1                ]
```

In [10]:
```
print("""Matriz A, elo 3:

rotação de theta4 em Z

        [cos(theta4), -sen(theta4), 0, 0]
        [sen(theta4),  cos(theta4), 0, 0]
        [0          , 0           , 1, 0]
        [0          , 0           , 0, 1]

translação de l4 em Z

        [1, 0, 0, 0 ]
        [0, 1, 0, 0 ]
        [0, 0, 1, l4]
        [0, 0, 0, 1 ]

rotação de 0º em X

        [1, 0       , 0          , 0]
        [0, cos(0)  , -sen(0)    , 0]
        [0, sin(0)  , cos(0)     , 0]
        [0, 0       , 0          , 1]

Matriz A geral (produto das 3)

        [cos(theta4), -sen(theta4)*cos(0), sen(theta4)*sen(0) , 0]
        [sen(theta4), cos(theta4)*cos(0) , -cos(theta4)*sen(0), 0]
        [0          , sen(0)             , cos(0)             ,l4]
        [0          , 0                  , 0                  , 1]

ou (substituindo senos e cossenos de 90)

        [cos(theta4), -sen(theta4), 0 , 0]
        [sen(theta4), cos(theta4) , 0 , 0]
        [0          , 0           , 1 ,l4]
        [0          , 0           , 0 , 1]

""")
```

Matriz A, elo 3:

rotação de theta4 em Z

```
[cos(theta4), -sen(theta4), 0, 0]
[sen(theta4),  cos(theta4), 0, 0]
[0          , 0           , 1, 0]
[0          , 0           , 0, 1]
```

translação de l4 em Z

```
[1, 0, 0, 0 ]
[0, 1, 0, 0 ]
[0, 0, 1, l4]
[0, 0, 0, 1 ]
```

rotação de 0º em X

```
[1, 0       , 0          , 0]
[0, cos(0)  , -sen(0)    , 0]
[0, sin(0)  , cos(0)     , 0]
[0, 0       , 0          , 1]
```

Matriz A geral (produto das 3)

```
[cos(theta4), -sen(theta4)*cos(0), sen(theta4)*sen(0) , 0]
[sen(theta4), cos(theta4)*cos(0) , -cos(theta4)*sen(0), 0]
[0          , sen(0)             , cos(0)             ,l4]
[0          , 0                  , 0                  , 1]
```

ou (substituindo senos e cossenos de 90)

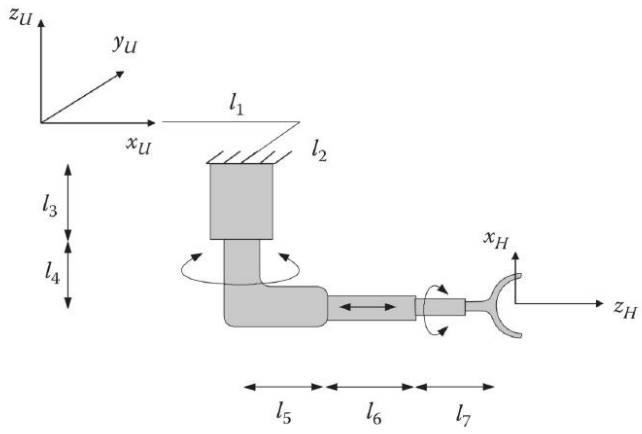
```
[cos(theta4), -sen(theta4), 0 , 0]
[sen(theta4), cos(theta4) , 0 , 0]
[0          , 0           , 1 ,l4]
[0          , 0           , 0 , 1]
```

In [11]:
```
print("""Matriz A, elo 4:

rotação de theta5 em Z

        [cos(theta5), -sen(theta5), 0, 0]
        [sen(theta5),  cos(theta5), 0, 0]
        [0          , 0           , 1, 0]
        [0          , 0           , 0, 1]

translação de l5 em Z

        [1, 0, 0, 0 ]
        [0, 1, 0, 0 ]
        [0, 0, 1, l5]
        [0, 0, 0, 1 ]

rotação de 0º em X

        [1, 0       , 0          , 0]
        [0, cos(0)  , -sen(0)    , 0]
        [0, sin(0)  , cos(0)     , 0]
        [0, 0       , 0          , 1]

Matriz A geral (produto das 3)

        [cos(theta5), -sen(theta5)*cos(0), sen(theta5)*sen(0) , 0]
        [sen(theta5), cos(theta5)*cos(0) , -cos(theta5)*sen(0), 0]
        [0          , sen(0)             , cos(0)             ,l5]
        [0          , 0                  , 0                  , 1]

ou (substituindo senos e cossenos de 90)

        [cos(theta5), -sen(theta5), 0 , 0]
        [sen(theta5), cos(theta5) , 0 , 0]
        [0          , 0           , 1 ,l5]
        [0          , 0           , 0 , 1]

""")
```

```
Matriz A, elo 4:

rotação de theta5 em Z

        [cos(theta5), -sen(theta5), 0, 0]
        [sen(theta5),  cos(theta5), 0, 0]
        [0          , 0           , 1, 0]
        [0          , 0           , 0, 1]

translação de l5 em Z

        [1, 0, 0, 0 ]
        [0, 1, 0, 0 ]
        [0, 0, 1, l5]
        [0, 0, 0, 1 ]

rotação de 0º em X

        [1, 0       , 0          , 0]
        [0, cos(0)  , -sen(0)    , 0]
        [0, sin(0)  , cos(0)     , 0]
        [0, 0       , 0          , 1]

Matriz A geral (produto das 3)

        [cos(theta5), -sen(theta5)*cos(0), sen(theta5)*sen(0) , 0]
        [sen(theta5), cos(theta5)*cos(0) , -cos(theta5)*sen(0), 0]
        [0          , sen(0)             , cos(0)             ,l5]
        [0          , 0                  , 0                  , 1]

ou (substituindo senos e cossenos de 90)

        [cos(theta5), -sen(theta5), 0 , 0]
        [sen(theta5), cos(theta5) , 0 , 0]
        [0          , 0           , 1 ,l5]
        [0          , 0           , 0 , 1]
```

Questão 3 (peso 0,10):

Resolva a cinemática inversa da posição para o manipulador mostrado na figura abaixo.



Resposta Para essa resposta vamos tentar o método geométrico.

- Passo 1: obter as matrizes A e cinemática direta, usando a convenção de Denavit-Hartenberg
- Passo 2: usar a solução geométrica do braço direito

Parâmetros de elos:

Elo	rot_z	trans_z	trans_x	rot_x
1	θ_1	-l3-l4	l5+l6	90
2	θ_2+180	l7	0	0

In [12]:
```
text = """
translação inicial entre a origem e a base:

        [1, 0, 0, l1 ]
        [0, 1, 0, -l2]
        [0, 0, 1, 0  ]
        [0, 0, 0, 1  ]
"""
print(text)
```

```
translação inicial entre a origem e a base:

        [1, 0, 0, l1 ]
        [0, 1, 0, -l2]
        [0, 0, 1, 0  ]
        [0, 0, 0, 1  ]
```

In [13]:
```
print("""Matriz A, elo 1:

rotação de theta1 em Z

        [cos(theta1), -sen(theta1), 0, 0]
        [sen(theta1),  cos(theta1), 0, 0]
        [0          , 0           , 1, 0]
        [0          , 0           , 0, 1]

translação de -l3 e -l4 em Z
translação de +l5 e +l6 em X

        [1, 0, 0, l5+l6 ]
        [0, 1, 0, 0     ]
        [0, 0, 1, -l3-l4]
        [0, 0, 0, 1     ]

rotação de 90º em X

        [1, 0       , 0          , 0]
        [0, cos(90) , -sen(90)   , 0]
        [0, sin(90) , cos(90)    , 0]
        [0, 0       , 0          , 1]

Matriz A geral (produto das 3)

        [cos(theta1), -sen(theta1)*cos(90), sen(theta1)*sen(90) , (l5+l6)*cos(theta1)]
        [sen(theta1), cos(theta1)*cos(90) , -cos(theta1)*sen(90), (l5+l6)*sen(theta1)]
        [0          , sen(90)             , cos(90)             , -l3-l4             ]
        [0          , 0                   , 0                   , 1                  ]

ou (substituindo senos e cossenos de 90)

        [cos(theta1), 0 , sen(theta1) , (l5+l6)*cos(theta1)]
        [sen(theta1), 0 , -cos(theta1), (l5+l6)*sen(theta1)]
        [0          , 1 , 0           , -l3-l4             ]
        [0          , 0 , 0           , 1                  ]
""")
```

Matriz A, elo 1:

rotação de theta1 em Z

```
[cos(theta1), -sen(theta1), 0, 0]
[sen(theta1),  cos(theta1), 0, 0]
[0          , 0           , 1, 0]
[0          , 0           , 0, 1]
```

translação de -l3 e -l4 em Z
translação de +l5 e +l6 em X

```
[1, 0, 0, l5+l6 ]
[0, 1, 0, 0     ]
[0, 0, 1, -l3-l4]
[0, 0, 0, 1     ]
```

rotação de 90º em X

```
[1, 0       , 0          , 0]
[0, cos(90) , -sen(90)   , 0]
[0, sin(90) , cos(90)    , 0]
[0, 0       , 0          , 1]
```

Matriz A geral (produto das 3)

```
[cos(theta1), -sen(theta1)*cos(90), sen(theta1)*sen(90) , (l5+l6)*cos(theta1)]
[sen(theta1), cos(theta1)*cos(90) , -cos(theta1)*sen(90), (l5+l6)*sen(theta1)]
[0          , sen(90)             , cos(90)             , -l3-l4             ]
[0          , 0                   , 0                   , 1                  ]
```

ou (substituindo senos e cossenos de 90)

```
[cos(theta1), 0 , sen(theta1) , (l5+l6)*cos(theta1)]
[sen(theta1), 0 , -cos(theta1), (l5+l6)*sen(theta1)]
[0          , 1 , 0           , -l3-l4             ]
[0          , 0 , 0           , 1                  ]
```

In [14]:
```
print("""Matriz A, elo 2:

rotação de theta2 + 180 em Z (dessa forma, o eixo X ficará apontando para cima)

        [cos(theta2+180), -sen(theta2+180), 0, 0]
        [sen(theta2+180),  cos(theta2+180), 0, 0]
        [0              , 0               , 1, 0]
        [0              , 0               , 0, 1]

translação de l7 em Z

        [1, 0, 0, 0  ]
        [0, 1, 0, 0  ]
        [0, 0, 1, l7 ]
        [0, 0, 0, 1  ]

rotação de 0 em X

        [1, 0 , 0 , 0]
        [0, 1 , 0 , 0]
        [0, 0 , 1 , 0]
        [0, 0 , 0 , 1]

Matriz A geral (produto das 3)

        [cos(theta2+180), -sen(theta2+180) , sen(theta2+180)  , 0 ]
        [sen(theta2+180), cos(theta2+180)  , -cos(theta2+180) , 0 ]
        [0              , 0                , 1                , l7]
        [0              , 0                , 0                , 1 ]

""")
```

```
Matriz A, elo 2:

rotação de theta2 + 180 em Z (dessa forma, o eixo X ficará apontando para cima)

        [cos(theta2+180), -sen(theta2+180), 0, 0]
        [sen(theta2+180),  cos(theta2+180), 0, 0]
        [0              , 0               , 1, 0]
        [0              , 0               , 0, 1]

translação de l7 em Z

        [1, 0, 0, 0  ]
        [0, 1, 0, 0  ]
        [0, 0, 1, l7 ]
        [0, 0, 0, 1  ]

rotação de 0 em X

        [1, 0 , 0 , 0]
        [0, 1 , 0 , 0]
        [0, 0 , 1 , 0]
        [0, 0 , 0 , 1]

Matriz A geral (produto das 3)

        [cos(theta2+180), -sen(theta2+180) , sen(theta2+180)  , 0 ]
        [sen(theta2+180), cos(theta2+180)  , -cos(theta2+180) , 0 ]
        [0              , 0                , 1                , l7]
        [0              , 0                , 0                , 1 ]
```

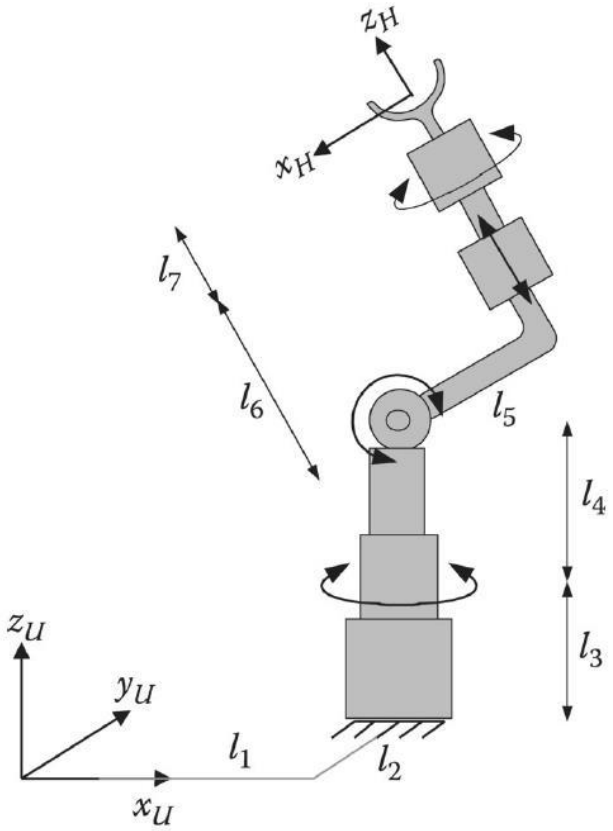
In [15]:

```
text = """

        [Xx, Yx, Zx, px ]
        [Xy, Yy, Zy, py ]  =
        [Xz, Yz, Zz, pz ]
        [0 , 0 , 0 , 1  ]

        [cos(theta1), 0 , sen(theta1) , (l5+l6)*cos(theta1)]
        [sen(theta1), 0 , -cos(theta1), (l5+l6)*sen(theta1)]
        [0          , 1 , 0           , -l3-l4             ]
        [0          , 0 , 0           , 1                  ]

                                .

        [cos(theta2+180), -sen(theta2+180) , sen(theta2+180)  , 0 ]
        [sen(theta2+180), cos(theta2+180)  , -cos(theta2+180) , 0 ]
        [0              , 0                , 1                , l7]
        [0              , 0                , 0                , 1 ]

                                =
A1.A2 =

[cos(theta1).cos(theta2+180), cos(theta1).-sen(theta2+180), cos(theta1).sen(theta2+180) + ser
[sen(theta1).cos(theta2+180), sen(theta1).-sen(theta2+180), sen(theta1).sen(theta2+180) -cos(
[sen(theta2+180)            , cos(theta2+180)             , -cos(theta2+180) -l3-l4
[0                          , 0                           , 0

Usando método algébrico:

theta1 = arctan(py/px) = arctan(0,0)... não consegui encontrar

Xz = sen(theta2+180)
Yz = cos(theta2+180)
theta2 = arctan2(Xz,Yz)

px = 0 ... não consegui encontrar


"""
print(text)
```

```
        [Xx, Yx, Zx, px ]
        [Xy, Yy, Zy, py ]  =
        [Xz, Yz, Zz, pz ]
        [0 , 0 , 0 , 1  ]

        [cos(theta1), 0 , sen(theta1) , (l5+l6)*cos(theta1)]
        [sen(theta1), 0 , -cos(theta1), (l5+l6)*sen(theta1)]
        [0          , 1 , 0           , -l3-l4             ]
        [0          , 0 , 0           , 1                  ]

                              .

        [cos(theta2+180), -sen(theta2+180) , sen(theta2+180)  , 0 ]
        [sen(theta2+180), cos(theta2+180)  , -cos(theta2+180) , 0 ]
        [0              , 0                , 1                , l7]
        [0              , 0                , 0                , 1 ]

                              =
A1.A2 =

[cos(theta1).cos(theta2+180), cos(theta1).-sen(theta2+180), cos(theta1).sen(theta2+180) + s
en(theta1), sen(theta1).l7 + (l5+l6)*cos(theta1) ]
[sen(theta1).cos(theta2+180), sen(theta1).-sen(theta2+180), sen(theta1).sen(theta2+180) -co
s(theta1) , -cos(theta1).l7 + (l5+l6)*sen(theta1)]
[sen(theta2+180)            , cos(theta2+180)             , -cos(theta2+180) -l3-l4
, -l3-l4                                 ]
[0                          , 0                           , 0
, 1                                      ]

Usando método algébrico:

theta1 = arctan(py/px) = arctan(0,0)... não consegui encontrar

Xz = sen(theta2+180)
Yz = cos(theta2+180)
theta2 = arctan2(Xz,Yz)

px = 0 ... não consegui encontrar
```

Questão 4 (peso 0,15):

Resolva a cinemática inversa da posição para o manipulador cartesiano abaixo.



Resposta

Parâmetros de elos:

Elo	rot_z	trans_z	trans_x	rot_x
1	θ_1	l3+l4	0	90
2	θ_2	0	l5	-90
3	$\theta_3 + 180$	l6+l7	0	0

In [16]:
```
text = """
translação inicial entre u e 0:

        [1, 0, 0, l1]
        [0, 1, 0, l2]
        [0, 0, 1, 0 ]
        [0, 0, 0, 1 ]
"""
print(text)
```

```
translação inicial entre u e 0:

        [1, 0, 0, l1]
        [0, 1, 0, l2]
        [0, 0, 1, 0 ]
        [0, 0, 0, 1 ]
```

In [17]:
```
print("""Matriz A, elo 1:

rotação de theta1 em Z

        [cos(theta1), -sen(theta1), 0, 0]
        [sen(theta1),  cos(theta1), 0, 0]
        [0          , 0           , 1, 0]
        [0          , 0           , 0, 1]

translação de l3 e l4 em Z

        [1, 0, 0, 0    ]
        [0, 1, 0, 0    ]
        [0, 0, 1, l3+l4]
        [0, 0, 0, 1    ]

rotação de 90º em X

        [1, 0       , 0          , 0]
        [0, cos(90) , -sen(90)   , 0]
        [0, sin(90) , cos(90)    , 0]
        [0, 0       , 0          , 1]

Matriz A geral (produto das 3)

        [cos(theta1), -sen(theta1)*cos(90), sen(theta1)*sen(90) , 0     ]
        [sen(theta1), cos(theta1)*cos(90) , -cos(theta1)*sen(90), 0     ]
        [0          , sen(90)             , cos(90)             , l3+l4 ]
        [0          , 0                   , 0                   , 1     ]

ou (substituindo senos e cossenos de 90)

        [cos(theta1), 0 , sen(theta1) , 0     ]
        [sen(theta1), 0 , -cos(theta1), 0     ]
        [0          , 1 , 0           , l3+l4 ]
        [0          , 0 , 0           , 1     ]
""")
```

```
Matriz A, elo 1:

rotação de theta1 em Z

        [cos(theta1), -sen(theta1), 0, 0]
        [sen(theta1),  cos(theta1), 0, 0]
        [0          , 0           , 1, 0]
        [0          , 0           , 0, 1]

translação de l3 e l4 em Z

        [1, 0, 0, 0    ]
        [0, 1, 0, 0    ]
        [0, 0, 1, l3+l4]
        [0, 0, 0, 1    ]

rotação de 90º em X

        [1, 0       , 0          , 0]
        [0, cos(90) , -sen(90)   , 0]
        [0, sin(90) , cos(90)    , 0]
        [0, 0       , 0          , 1]

Matriz A geral (produto das 3)

        [cos(theta1), -sen(theta1)*cos(90), sen(theta1)*sen(90) , 0     ]
        [sen(theta1), cos(theta1)*cos(90) , -cos(theta1)*sen(90), 0     ]
        [0          , sen(90)             , cos(90)             , l3+l4 ]
        [0          , 0                   , 0                   , 1     ]

ou (substituindo senos e cossenos de 90)

        [cos(theta1), 0 , sen(theta1) , 0     ]
        [sen(theta1), 0 , -cos(theta1), 0     ]
        [0          , 1 , 0           , l3+l4 ]
        [0          , 0 , 0           , 1     ]
```

In [18]:
```
print("""Matriz A, elo 2:

rotação de theta2 em Z

        [cos(theta2), -sen(theta2), 0, 0]
        [sen(theta2),  cos(theta2), 0, 0]
        [0             , 0        , 1, 0]
        [0             , 0        , 0, 1]

translação de l5 em X

        [1, 0, 0, l5]
        [0, 1, 0, 0 ]
        [0, 0, 1, 0 ]
        [0, 0, 0, 1 ]

rotação de -90º em X

        [1, 0       , 0          , 0]
        [0, cos(-90) , -sen(-90) , 0]
        [0, sin(-90) , cos(-90)  , 0]
        [0, 0       , 0          , 1]

Matriz A geral (produto das 3)

        [cos(theta2), 0 , -sen(theta2) , l5*cos(theta2)]
        [sen(theta2), 0 , cos(theta2)  , l5*sen(theta2)]
        [0          , -1, 0            , 0             ]
        [0          , 0 , 0            , 1             ]

""")
```

```
Matriz A, elo 2:

rotação de theta2 em Z

        [cos(theta2), -sen(theta2), 0, 0]
        [sen(theta2),  cos(theta2), 0, 0]
        [0             , 0        , 1, 0]
        [0             , 0        , 0, 1]

translação de l5 em X

        [1, 0, 0, l5]
        [0, 1, 0, 0 ]
        [0, 0, 1, 0 ]
        [0, 0, 0, 1 ]

rotação de -90º em X

        [1, 0       , 0          , 0]
        [0, cos(-90) , -sen(-90) , 0]
        [0, sin(-90) , cos(-90)  , 0]
        [0, 0       , 0          , 1]

Matriz A geral (produto das 3)

        [cos(theta2), 0 , -sen(theta2) , l5*cos(theta2)]
        [sen(theta2), 0 , cos(theta2)  , l5*sen(theta2)]
        [0          , -1, 0            , 0             ]
        [0          , 0 , 0            , 1             ]
```

In [19]:
```
print("""Matriz A, elo 3:

rotação de theta1 em Z

        [cos(theta3+180), -sen(theta+180), 0, 0]
        [sen(theta3+180), cos(theta3+180), 0, 0]
        [0              , 0              , 1, 0]
        [0              , 0              , 0, 1]

translação de l6 e l7 em Z

        [1, 0, 0, 0    ]
        [0, 1, 0, 0    ]
        [0, 0, 1, l6+l7]
        [0, 0, 0, 1    ]

rotação de 0º em X

        [1, 0 , 0 , 0]
        [0, 1 , 0 , 0]
        [0, 0 , 1 , 0]
        [0, 0 , 0 , 1]

Matriz A geral (produto das 3. valores invertem de sinal em razão dos 180 graus de giro)

        [-cos(theta3+180), sen(theta3+180)  , 0 , 0     ]
        [-sen(theta3+180), -cos(theta3+180) , 0 , 0     ]
        [0               , 0                , 1 , l6+l7 ]
        [0               , 0                , 0 , 1     ]

""")
```

```
Matriz A, elo 3:

rotação de theta1 em Z

        [cos(theta3+180), -sen(theta+180), 0, 0]
        [sen(theta3+180), cos(theta3+180), 0, 0]
        [0              , 0              , 1, 0]
        [0              , 0              , 0, 1]

translação de l6 e l7 em Z

        [1, 0, 0, 0    ]
        [0, 1, 0, 0    ]
        [0, 0, 1, l6+l7]
        [0, 0, 0, 1    ]

rotação de 0º em X

        [1, 0 , 0 , 0]
        [0, 1 , 0 , 0]
        [0, 0 , 1 , 0]
        [0, 0 , 0 , 1]

Matriz A geral (produto das 3. valores invertem de sinal em razão dos 180 graus de giro)

        [-cos(theta3+180), sen(theta3+180)  , 0 , 0     ]
        [-sen(theta3+180), -cos(theta3+180) , 0 , 0     ]
        [0               , 0                , 1 , l6+l7 ]
        [0               , 0                , 0 , 1     ]
```

Matriz do manipulador = ${}^{R}T_{H} = A_1.A_2.A_3$

$A_1^{-1}.{}^{R}T_{H} = A_2.A_3$

$A_1^{-1} = A_1^{T}$

In [20]:
```
text = """
    [cos(theta1), sen(theta1) , 0 , 0     ]
    [0          , 0           , 1 , -l3-l4]
    [sen(theta1), -cos(theta1), 0 , 0     ]
    [0          , 0           , 0 , 1     ]

                    .

    [Xx, Yx, Zx, px ]
    [Xy, Yy, Zy, py ]
    [Xz, Yz, Zz, pz ]
    [0 , 0 , 0 , 1  ]

                    =

    [cos(theta2), 0 , -sen(theta2) , l5*cos(theta2)]
    [sen(theta2), 0 , cos(theta2)  , l5*sen(theta2)]
    [0          , -1, 0            , 0             ]
    [0          , 0 , 0            , 1             ]

                    .

    [-cos(theta3+180), sen(theta3+180)  , 0 , 0     ]
    [-sen(theta3+180), -cos(theta3+180) , 0 , 0     ]
    [0                , 0               , 1 , l6+l7 ]
    [0                , 0               , 0 , 1     ]

"""
print(text)
```

```
    [cos(theta1), sen(theta1) , 0 , 0     ]
    [0          , 0           , 1 , -l3-l4]
    [sen(theta1), -cos(theta1), 0 , 0     ]
    [0          , 0           , 0 , 1     ]

                    .

    [Xx, Yx, Zx, px ]
    [Xy, Yy, Zy, py ]
    [Xz, Yz, Zz, pz ]
    [0 , 0 , 0 , 1  ]

                    =

    [cos(theta2), 0 , -sen(theta2) , l5*cos(theta2)]
    [sen(theta2), 0 , cos(theta2)  , l5*sen(theta2)]
    [0          , -1, 0            , 0             ]
    [0          , 0 , 0            , 1             ]

                    .

    [-cos(theta3+180), sen(theta3+180)  , 0 , 0     ]
    [-sen(theta3+180), -cos(theta3+180) , 0 , 0     ]
    [0                , 0               , 1 , l6+l7 ]
    [0                , 0               , 0 , 1     ]
```

In [21]:
```
text ="""
[cos(theta1).Xx + sen(theta1).Xy, cos(theta1).Yx + sen(theta1).Yy, cos(theta1).Zx + sen(theta
[Xz                             , Yz                             , Zz
[sen(theta1).Xx - cos(theta1).Xy, sen(theta1).Yx - cos(theta1).Yy, sen(theta1).Zx - cos(theta
[ 0                             , 0                              , 0

                                                =

(por favor assumir que theta3 = theta3+180 caso contrário a matriz ficará muito grande)
[cos(theta2).-cos(theta3), cos(theta2).sen(theta3), -sen(theta2), -sen(theta2).(l6+l7) + l5*c
[sen(theta2).-cos(theta3), sen(theta2).sen(theta3), cos(theta2) ,  cos(theta2).(l6+l7) + l5*s
[sen(theta3)             , cos(theta3)            , 0           ,  0
[0                       , 0                      , 0           ,  1


"""
print(text)
```

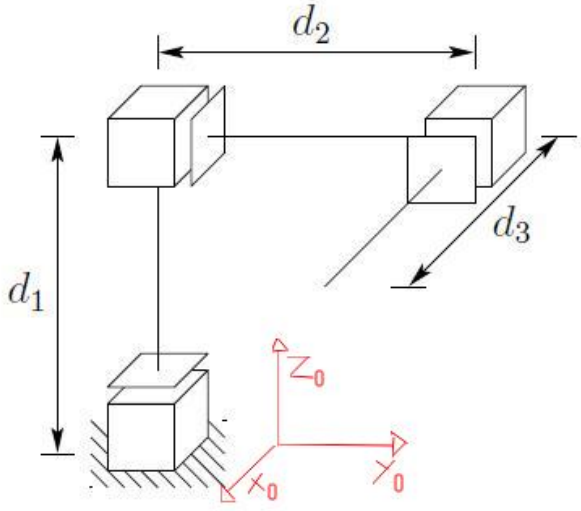
```
[cos(theta1).Xx + sen(theta1).Xy, cos(theta1).Yx + sen(theta1).Yy, cos(theta1).Zx + sen(the
ta1).Zy, cos(theta1).px + sen(theta1).py]
[Xz                             , Yz                             , Zz
, pz - l3 -l4                    ]
[sen(theta1).Xx - cos(theta1).Xy, sen(theta1).Yx - cos(theta1).Yy, sen(theta1).Zx - cos(the
ta1).Zy, sen(theta1).px - cos(theta1).py]
[ 0                             , 0                              , 0
, 1                              ]

                                                =

(por favor assumir que theta3 = theta3+180 caso contrário a matriz ficará muito grande)
[cos(theta2).-cos(theta3), cos(theta2).sen(theta3), -sen(theta2), -sen(theta2).(l6+l7) + l5
*cos(theta2)]
[sen(theta2).-cos(theta3), sen(theta2).sen(theta3), cos(theta2) ,  cos(theta2).(l6+l7) + l5
*sen(theta2)]
[sen(theta3)             , cos(theta3)            , 0           ,  0
]
[0                       , 0                      , 0           ,  1
]
```

In [22]:
```
print("""

igualando as 2 matrizes temos que:

sen(theta1).Zx - cos(theta1).Zy = 0 (linha 3, coluna 3)

theta1 = cotan(Zy/Zx)


sen(theta2) = -(cos(theta1).Zx + sen(theta1).Zy) (linha 1, coluna 3)
cos(theta2) = Zz (linha 2, coluna 3)

theta2 = arctan2(-cos(theta1).Zx - sen(theta1).Zy, Zz)


sen(theta3) = sen(theta1).Xx - cos(theta1).Xy (linha 3, coluna 1)
cos(theta3) = sen(theta1).Yx - cos(theta1).Yy (linha 3, coluna 2)

theta3 = arctan2(sen(theta1).Xx - cos(theta1).Xy, sen(theta1).Yx - cos(theta1).Yy)

""")
```

```
igualando as 2 matrizes temos que:

sen(theta1).Zx - cos(theta1).Zy = 0 (linha 3, coluna 3)

theta1 = cotan(Zy/Zx)


sen(theta2) = -(cos(theta1).Zx + sen(theta1).Zy) (linha 1, coluna 3)
cos(theta2) = Zz (linha 2, coluna 3)

theta2 = arctan2(-cos(theta1).Zx - sen(theta1).Zy, Zz)


sen(theta3) = sen(theta1).Xx - cos(theta1).Xy (linha 3, coluna 1)
cos(theta3) = sen(theta1).Yx - cos(theta1).Yy (linha 3, coluna 2)

theta3 = arctan2(sen(theta1).Xx - cos(theta1).Xy, sen(theta1).Yx - cos(theta1).Yy)
```

Questão 5 (peso 0,10):

Resolva a cinemática inversa da posição para o manipulador cartesiano abaixo.



Considerando que nessa questão não há mudança de orientação do sistemas de coordenadas, temos que:

Parâmetros de elos:

** no elo 2 há uma translação de d2 em y, mas os parametros de denavich hartenberg não capturam isso

Elo	rot_z	trans_z	trans_x	rot_x
1	0	d1	0	0
2	0	0	0	0
3	0	0	d3	0

In [23]:
```
print("""Matriz A, elo 1:

rotação de 0 em Z

        [1, 0, 0, 0]
        [0, 1, 0, 0]
        [0, 0, 1, 0]
        [0, 0, 0, 1]

translação de d1 em Z

        [1, 0, 0, 0 ]
        [0, 1, 0, 0 ]
        [0, 0, 1, d1]
        [0, 0, 0, 1 ]

rotação de 0º em X

        [1, 0 , 0 , 0]
        [0, 1 , 0 , 0]
        [0, 0 , 1 , 0]
        [0, 0 , 0 , 1]

Matriz final (produto das 3)

        [1, 0, 0, 0 ]
        [0, 1, 0, 0 ]
        [0, 0, 1, d1]
        [0, 0, 0, 1 ]

""")
```

```
Matriz A, elo 1:

rotação de 0 em Z

        [1, 0, 0, 0]
        [0, 1, 0, 0]
        [0, 0, 1, 0]
        [0, 0, 0, 1]

translação de d1 em Z

        [1, 0, 0, 0 ]
        [0, 1, 0, 0 ]
        [0, 0, 1, d1]
        [0, 0, 0, 1 ]

rotação de 0º em X

        [1, 0 , 0 , 0]
        [0, 1 , 0 , 0]
        [0, 0 , 1 , 0]
        [0, 0 , 0 , 1]

Matriz final (produto das 3)

        [1, 0, 0, 0 ]
        [0, 1, 0, 0 ]
        [0, 0, 1, d1]
        [0, 0, 0, 1 ]
```

In [24]:
```
print("""Matriz A, elo 2:

rotação de 0 em Z

        [1, 0, 0, 0]
        [0, 1, 0, 0]
        [0, 0, 1, 0]
        [0, 0, 0, 1]

translação de d2 em Y

        [1, 0, 0, 0 ]
        [0, 1, 0, d2]
        [0, 0, 1, 0 ]
        [0, 0, 0, 1 ]

rotação de 0º em X

        [1, 0, 0, 0]
        [0, 1, 0, 0]
        [0, 0, 1, 0]
        [0, 0, 0, 1]

Matriz final (produto das 3)

        [1, 0, 0, 0 ]
        [0, 1, 0, d2]
        [0, 0, 1, 0 ]
        [0, 0, 0, 1 ]

""")
```

```
Matriz A, elo 2:

rotação de 0 em Z

        [1, 0, 0, 0]
        [0, 1, 0, 0]
        [0, 0, 1, 0]
        [0, 0, 0, 1]

translação de d2 em Y

        [1, 0, 0, 0 ]
        [0, 1, 0, d2]
        [0, 0, 1, 0 ]
        [0, 0, 0, 1 ]

rotação de 0º em X

        [1, 0, 0, 0]
        [0, 1, 0, 0]
        [0, 0, 1, 0]
        [0, 0, 0, 1]

Matriz final (produto das 3)

        [1, 0, 0, 0 ]
        [0, 1, 0, d2]
        [0, 0, 1, 0 ]
        [0, 0, 0, 1 ]
```

In [25]:
```
print("""Matriz A, elo 3:

rotação de 0 em Z

        [1, 0, 0, 0]
        [0, 1, 0, 0]
        [0, 0, 1, 0]
        [0, 0, 0, 1]

translação de d3 em X

        [1, 0, 0, d3]
        [0, 1, 0, 0 ]
        [0, 0, 1, 0 ]
        [0, 0, 0, 1 ]

rotação de 0 em X

        [1, 0, 0, 0]
        [0, 1, 0, 0]
        [0, 0, 1, 0]
        [0, 0, 0, 1]

Matriz final (produto das 3)

        [1, 0, 0, d3]
        [0, 1, 0, 0 ]
        [0, 0, 1, 0 ]
        [0, 0, 0, 1 ]

""")
```

```
Matriz A, elo 3:

rotação de 0 em Z

        [1, 0, 0, 0]
        [0, 1, 0, 0]
        [0, 0, 1, 0]
        [0, 0, 0, 1]

translação de d3 em X

        [1, 0, 0, d3]
        [0, 1, 0, 0 ]
        [0, 0, 1, 0 ]
        [0, 0, 0, 1 ]

rotação de 0 em X

        [1, 0, 0, 0]
        [0, 1, 0, 0]
        [0, 0, 1, 0]
        [0, 0, 0, 1]

Matriz final (produto das 3)

        [1, 0, 0, d3]
        [0, 1, 0, 0 ]
        [0, 0, 1, 0 ]
        [0, 0, 0, 1 ]
```

Matriz do manipulador = ${}^{R}T_{H} = A_1.A_2.A_3$

$A_1^{-1}.{}^{R}T_{H} = A_2.A_3$

$A_1^{-1} = A_1^{T}$

In [26]:
```
text = """
                .
RTH:
        [Xx, Yx, Zx, px ]
        [Xy, Yy, Zy, py ]
        [Xz, Yz, Zz, pz ]
        [0 , 0 , 0 , 1  ]

                =

        [1, 0, 0, d3]
        [0, 1, 0, d2]
        [0, 0, 1, d1]
        [0, 0, 0, 1 ]


"""
print(text)
```

```
                .
RTH:
        [Xx, Yx, Zx, px ]
        [Xy, Yy, Zy, py ]
        [Xz, Yz, Zz, pz ]
        [0 , 0 , 0 , 1  ]

                =

        [1, 0, 0, d3]
        [0, 1, 0, d2]
        [0, 0, 1, d1]
        [0, 0, 0, 1 ]
```

Dessa forma, a cinemática inversa torna-se simples:

para um ponto desejado, desloca-se as juntas prismaticas na mesma proporção, por exemplo:

para x1,y1,z1=1,2,3 basta deslocar d3,d2,d1=1,2,3

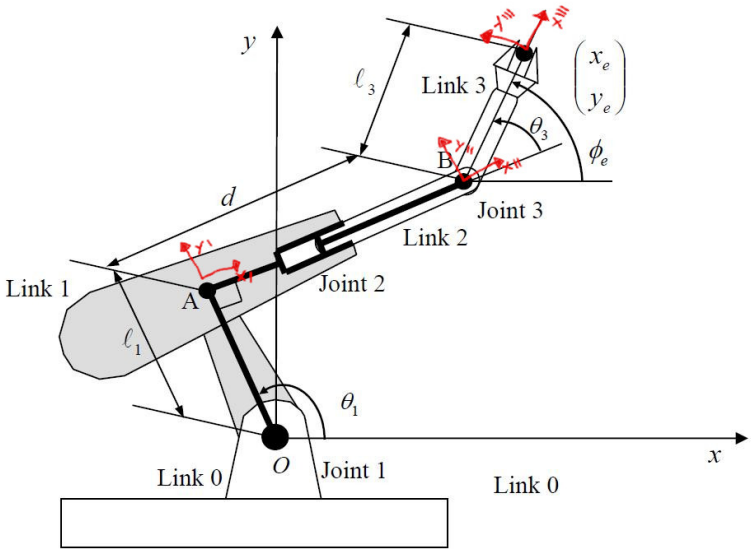
d1=pz, d2=py, d3=px

Questão 6 (peso 0,20):

Está mostrada abaixo a construção de um robô que tem duas juntas rotativas e uma prismática. Observe que a junta prismática tem um desvio de l_1 a partir da primeira junta até a origem O. A distância entre A e O, l_1, é constante e o ângulo entre AO e AB é de 90 graus, também constante.

A junta 2 é prismática e tem um deslocamento d, variável. Usando os parâmetros geométricos e os deslocamentos de juntas mostrados na figura, responda as seguintes questões:

- a) Obtenha as equações cinemáticas relacionando a posição e orientação do elemento terminal em função dos deslocamentos das juntas;
- b) A junta 1 pode girar 45 graus e 135 graus, e a junta 3 pode girar de -90 graus a +90 graus, enquanto a junta 2 pode se mover de l_1 a $2l_1$. Esboce o espaço de trabalho do elemento terminal E dentro do plano XY.
- c) Resolva o problema da cinemática inversa e ache os deslocamentos de juntas que levem o elemento terminal à posição e orientação desejadas: xe, ye, φe.



a) posição e orientação do elemento terminal:

In [27]:
```
print("""Matriz A, elo 1:

rotação de theta1 em Z

        [cos(theta1), -sen(theta1), 0, 0]
        [sen(theta1),  cos(theta1), 0, 0]
        [0          , 0           , 1, 0]
        [0          , 0           , 0, 1]

translação constante de l1 em Y

        [1, 0, 0, 0 ]
        [0, 1, 0, l1]
        [0, 0, 1, 0 ]
        [0, 0, 0, 1 ]


Matriz final (produto das 2)

        [cos(theta1), -sen(theta1), 0, -sen(theta1)*l1]
        [sen(theta1),  cos(theta1), 0, cos(theta1)*l1 ]
        [0          , 0           , 1, 0              ]
        [0          , 0           , 0, 1              ]

""")
```

```
Matriz A, elo 1:

rotação de theta1 em Z

        [cos(theta1), -sen(theta1), 0, 0]
        [sen(theta1),  cos(theta1), 0, 0]
        [0          , 0           , 1, 0]
        [0          , 0           , 0, 1]

translação constante de l1 em Y

        [1, 0, 0, 0 ]
        [0, 1, 0, l1]
        [0, 0, 1, 0 ]
        [0, 0, 0, 1 ]


Matriz final (produto das 2)

        [cos(theta1), -sen(theta1), 0, -sen(theta1)*l1]
        [sen(theta1),  cos(theta1), 0, cos(theta1)*l1 ]
        [0          , 0           , 1, 0              ]
        [0          , 0           , 0, 1              ]
```

In [28]:
```
print("""Matriz A, elo 2:

translação variável de d em X

        [1, 0, 0, d ]
        [0, 1, 0, 0 ]
        [0, 0, 1, 0 ]
        [0, 0, 0, 1 ]

""")
```

```
Matriz A, elo 2:

translação variável de d em X

        [1, 0, 0, d ]
        [0, 1, 0, 0 ]
        [0, 0, 1, 0 ]
        [0, 0, 0, 1 ]
```

In [29]:
```
print("""Matriz A, elo 3:

rotação de theta3 em Z

        [cos(theta3), -sen(theta3), 0, 0]
        [sen(theta3),  cos(theta3), 0, 0]
        [0          , 0           , 1, 0]
        [0          , 0           , 0, 1]

translação constante de l3 em X

        [1, 0, 0, l3]
        [0, 1, 0, 0 ]
        [0, 0, 1, 0 ]
        [0, 0, 0, 1 ]

Matriz final (produto das 2)

        [cos(theta3), -sen(theta3), 0, cos(theta3)*l3 ]
        [sen(theta3),  cos(theta3), 0, sen(theta3)*l3 ]
        [0          , 0           , 1, 0              ]
        [0          , 0           , 0, 1              ]

""")
```

```
Matriz A, elo 3:

rotação de theta3 em Z

        [cos(theta3), -sen(theta3), 0, 0]
        [sen(theta3),  cos(theta3), 0, 0]
        [0          , 0           , 1, 0]
        [0          , 0           , 0, 1]

translação constante de l3 em X

        [1, 0, 0, l3]
        [0, 1, 0, 0 ]
        [0, 0, 1, 0 ]
        [0, 0, 0, 1 ]

Matriz final (produto das 2)

        [cos(theta3), -sen(theta3), 0, cos(theta3)*l3 ]
        [sen(theta3),  cos(theta3), 0, sen(theta3)*l3 ]
        [0          , 0           , 1, 0              ]
        [0          , 0           , 0, 1              ]
```

In [30]:
```
print("""Matriz do manipulador RTH:

        [cos(theta1), -sen(theta1), 0, -sen(theta1)*l1]
        [sen(theta1),  cos(theta1), 0, cos(theta1)*l1 ]
        [0          , 0           , 1, 0              ]
        [0          , 0           , 0, 1              ]

                            *


        [1, 0, 0, d ]
        [0, 1, 0, 0 ]
        [0, 0, 1, 0 ]
        [0, 0, 0, 1 ]

                            *


        [cos(theta3), -sen(theta3), 0, cos(theta3)*l3 ]
        [sen(theta3),  cos(theta3), 0, sen(theta3)*l3 ]
        [0          , 0           , 1, 0              ]
        [0          , 0           , 0, 1              ]

""")
```

```
Matriz do manipulador RTH:

        [cos(theta1), -sen(theta1), 0, -sen(theta1)*l1]
        [sen(theta1),  cos(theta1), 0, cos(theta1)*l1 ]
        [0          , 0           , 1, 0              ]
        [0          , 0           , 0, 1              ]

                            *


        [1, 0, 0, d ]
        [0, 1, 0, 0 ]
        [0, 0, 1, 0 ]
        [0, 0, 0, 1 ]

                            *


        [cos(theta3), -sen(theta3), 0, cos(theta3)*l3 ]
        [sen(theta3),  cos(theta3), 0, sen(theta3)*l3 ]
        [0          , 0           , 1, 0              ]
        [0          , 0           , 0, 1              ]
```

In [31]:
```
print("""

        [cos(theta1), -sen(theta1), 0, cos(theta1)*d -sen(theta1)*l1 ]
        [sen(theta1),  cos(theta1), 0, sen(theta1)*d +cos(theta1)*l1 ]
        [0          , 0           , 1, 0                             ]
        [0          , 0           , 0, 1                             ]

                              *

        [cos(theta3), -sen(theta3), 0, cos(theta3)*l3 ]
        [sen(theta3),  cos(theta3), 0, sen(theta3)*l3 ]
        [0          , 0           , 1, 0              ]
        [0          , 0           , 0, 1              ]

""")
```

```
        [cos(theta1), -sen(theta1), 0, cos(theta1)*d -sen(theta1)*l1 ]
        [sen(theta1),  cos(theta1), 0, sen(theta1)*d +cos(theta1)*l1 ]
        [0          , 0           , 1, 0                             ]
        [0          , 0           , 0, 1                             ]

                              *

        [cos(theta3), -sen(theta3), 0, cos(theta3)*l3 ]
        [sen(theta3),  cos(theta3), 0, sen(theta3)*l3 ]
        [0          , 0           , 1, 0              ]
        [0          , 0           , 0, 1              ]
```

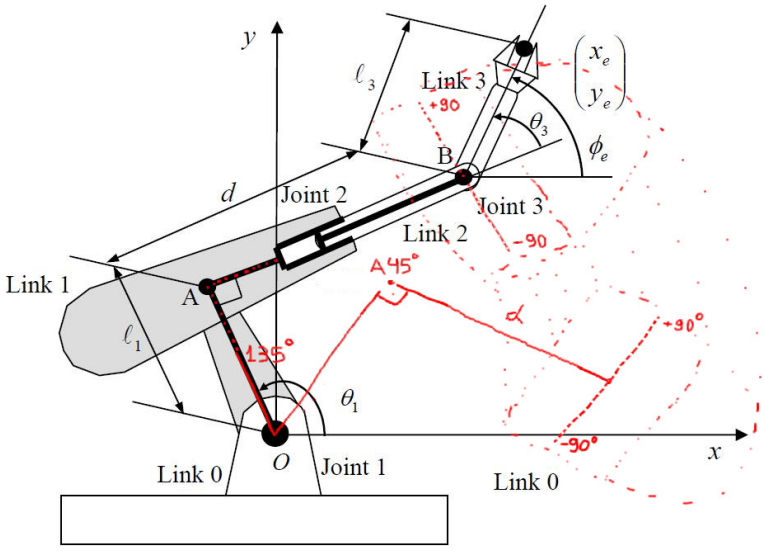
In [32]:
```
print("""
Matriz RTH:

        [cos(theta1)*cos(theta3) -sen(theta1)*sen(theta3), -cos(theta1)*sen(theta1) - sen(the
        cos(theta1)*cos(theta3)*l3 - sen(theta1) * sen(theta3)*l3 + cos(theta1)*d -sen(theta1
        [sen(theta1)*cos(theta3) + cos(theta1)*sen(theta3), -sen(theta1)*sen(theta3) + cos(th
        sen(theta1)*cos(theta3)*l3 + cos(theta1) * sen(theta3)*l3 + sen(theta1)*d +cos(theta1
        [0          , 0           , 1, 0                              ]
        [0          , 0           , 0, 1                              ]

da matriz RTH, podemos obter tanto a orientação quanto a posição:

        [Xx, Yx, Zx, px ]
        [Xy, Yy, Zy, py ]
        [Xz, Yz, Zz, pz ]
        [0 , 0 , 0 , 1  ]

posições em função das juntas:

posição X = cos(theta1)*cos(theta3)*l3 - sen(theta1) * sen(theta3)*l3 + cos(theta1)*d -sen(th
posição Y = sen(theta1)*cos(theta3)*l3 + cos(theta1) * sen(theta3)*l3 + sen(theta1)*d +cos(th
Posição Z = constante

""")
```

```
Matriz RTH:

        [cos(theta1)*cos(theta3) -sen(theta1)*sen(theta3), -cos(theta1)*sen(theta1) - sen(t
heta1)*cos(theta3), 0,
        cos(theta1)*cos(theta3)*l3 - sen(theta1) * sen(theta3)*l3 + cos(theta1)*d -sen(thet
a1)*l1]
        [sen(theta1)*cos(theta3) + cos(theta1)*sen(theta3), -sen(theta1)*sen(theta3) + cos
(theta1)*cos(theta3), 0,
        sen(theta1)*cos(theta3)*l3 + cos(theta1) * sen(theta3)*l3 + sen(theta1)*d +cos(thet
a1)*l1]
        [0          , 0           , 1, 0                              ]
        [0          , 0           , 0, 1                              ]

da matriz RTH, podemos obter tanto a orientação quanto a posição:

        [Xx, Yx, Zx, px ]
        [Xy, Yy, Zy, py ]
        [Xz, Yz, Zz, pz ]
        [0 , 0 , 0 , 1  ]

posições em função das juntas:

posição X = cos(theta1)*cos(theta3)*l3 - sen(theta1) * sen(theta3)*l3 + cos(theta1)*d -sen
(theta1)*l1
posição Y = sen(theta1)*cos(theta3)*l3 + cos(theta1) * sen(theta3)*l3 + sen(theta1)*d +cos
(theta1)*l1
Posição Z = constante
```

In [33]:
```
print("""
    Orientações em função das juntas (constante em relação ao eixo z):

    [cos(theta1)*cos(theta3) -sen(theta1)*sen(theta3), -cos(theta1)*sen(theta1) - sen(theta1)
    [sen(theta1)*cos(theta3) +cos(theta1)*sen(theta3), -sen(theta1)*sen(theta3) + cos(theta1)
    [0                                                , 0

""")
```

```
    Orientações em função das juntas (constante em relação ao eixo z):

    [cos(theta1)*cos(theta3) -sen(theta1)*sen(theta3), -cos(theta1)*sen(theta1) - sen(theta
1)*cos(theta3), 0 ]
    [sen(theta1)*cos(theta3) +cos(theta1)*sen(theta3), -sen(theta1)*sen(theta3) + cos(theta
1)*cos(theta3), 0 ]
    [0                                                , 0
, 1]
```

b) interpretando que θ1 se move entre 45º e 135º, o espaço de trabalho está pontilhado em vermelho:



c) cinemática inversa, xe, ye, φe.

In [ ]:
```
```

Questão 7 (peso 0,15):

Uma caixa foi girada de 30° em torno de um eixo colinear ao eixo 2. $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$. Depois foi girada de 68° em torno de um outro eixo colinear a $\hat{i} + 3.\ \hat{j} - 2.\ \hat{k}$.

Ambos os eixos de rotação estão representados no sistema fixo de coordenadas. Você deseja retornar a caixa à sua posição e orientação original fazendo a caixa girar em torno de um único eixo. Determine qual a orientação deste eixo e de qual ângulo em torno dele a caixa deveria girar.

Obs.: Os valores positivos dos ângulos têm um significado. Use teoria de quaternions para resolver o problema.

Resposta:

In [34]:
```
eixo_1 = np.array([0,2,1,1])
theta1 = np.radians(30)

eixo_2 = np.array([0,1,3,-2])
theta2 = np.radians(68)
```

Aplicamos os giros aos eixos da questão:

In [35]:
```
# normaliza
norm_1 = np.sqrt(np.sum(eixo_1*eixo_1))
norm_2 = np.sqrt(np.sum(eixo_2*eixo_2))

eixo_1_normalizado = eixo_1/norm_1
eixo_2_normalizado = eixo_2/norm_2

#ordem errada?
#eixo_1_girado = (np.cos(angulo_1/2) + np.sin(angulo_1/2)) * eixo_1_normalizado
#eixo_2_girado = (np.cos(angulo_1/2) + np.sin(angulo_1/2)) * eixo_2_normalizado

## realizando os giros, aqui eu uso um
## gato para adicionar cos(theta/2) na posição 0 do vetor
eixo_1_girado = np.array([np.cos(theta1/2),0,0,0]) + (np.sin(theta1/2) * eixo_1_normalizado)
eixo_2_girado = np.array([np.cos(theta2/2),0,0,0]) + (np.sin(theta2/2) * eixo_2_normalizado)
```

$$\boldsymbol{q} = \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{\boldsymbol{w}} \quad , \qquad q0 = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

In [36]:
```
#checa os valores da transformação para os 2 ângulos
print("sen e cos de theta1/2:")
print(np.sin(theta1/2), np.cos(theta1/2))
print("sen e cos de theta2/2:")
print(np.sin(theta2/2), np.cos(theta2/2))
```

```
sen e cos de theta1/2:
0.25881904510252074 0.9659258262890683
sen e cos de theta2/2:
0.5591929034707469 0.8290375725550416
```

Eixo 1 girado:

In [37]:
```
eixo_1_girado
```

Out[37]:
```
array([0.96592583, 0.21132487, 0.10566243, 0.10566243])
```

Eixo 2 girado:

In [38]:
```
eixo_2_girado
```

Out[38]:
```
array([ 0.82903757,  0.14945059,  0.44835177, -0.29890118])
```

In [39]:
```
# usando biblioteca nympy-quartenion pra facilitar a multiplicação
import quaternion
q1 = np.quaternion(eixo_1_girado[0],eixo_1_girado[1],eixo_1_girado[2],eixo_1_girado[3])
q2 = np.quaternion(eixo_2_girado[0],eixo_2_girado[1],eixo_2_girado[2],eixo_2_girado[3])
q1
```

Out[39]:
```
quaternion(0.965925826289068, 0.211324865405187, 0.105662432702594, 0.105662432702594)
```

Criamos um novo quaternion, que é o produto dos 2 primeiros giros:

In [40]:
```
#novo quaternion
#q3 = q1 * q2
# mudando a ordem da operação, no produto de quaternions isso muda os resultados
q3 = q2 * q1
q3
```

Out[40]:
```
quaternion(0.753414863617681, 0.398511002388538, 0.441716115727314, -0.280074806724931)
```

Descobrimos o giro de retorno através do arco cosseno:

In [41]:
```
# q3[0] escalar
escalar_q3 = 0.753414863617681
angulo = np.degrees(np.arccos(escalar_q3))*2
angulo
```

Out[41]:
```
82.2258876952747
```

In [42]:
```
angulo_rad = np.radians(angulo/2)
angulo_rad
```

Out[42]:
```
0.7175562353288176
```

In [43]:
```
np.sin(angulo_rad)
```

Out[43]:
```
0.6575454686027052
```

Descobrimos o novo eixo através da decomposição do eixo girado pelo seno do ângulo, porém falta corrigir a parte escalar abaixo:

In [44]:
```
q3 = q3/np.sin(angulo_rad)
q3
```

Out[44]:
```
quaternion(1.14579888326004, 0.606058472633657, 0.671765127765185, -0.425939832450058)
```

In [45]:
```
q3 = quaternion.as_float_array(q3)
q3[0] = 0
print(f"ângulo para voltar à posição original: {-angulo}\n")
print(f"novo eixo de rotação:{q3}")
```

```
ângulo para voltar à posição original: -82.2258876952747

novo eixo de rotação:[ 0.          0.60605847  0.67176513 -0.42593983]
```

In [ ]:
```

```