

V47

Temperaturabhängigkeit der Molwärme von Festkörpern

Katharina Popp
katharina.popp@tu-dortmund.de

Nicolai Weitkemper
nicolai.weitkemper@tu-dortmund.de

Durchführung: 08.06.2022

Abgabe: 10.06.2022

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theorie	3
2.1 Das Einstein-Modell	5
2.2 Das Debye-Modell	5
3 Durchführung	7
4 Auswertung	9
4.1 Temperaturabhängige Wärmekapazität	9
4.2 Experimentelle Bestimmung der Debye-Temperatur	10
4.3 Bestimmung der Debye-Temperatur aus der Schallgeschwindigkeit	10
5 Diskussion	14
5.1 Abweichungen	14
5.2 Mögliche Fehlerquellen	14
Literatur	15

1 Zielsetzung

In diesem Versuch wird die Wärmeleitung in homogenen Metallen, in diesem Fall speziell Kupfer, untersucht. Mithilfe dessen soll die material-spezifische Debye-Temperatur Θ_D bestimmt werden. Dazu wird die spezifische Wärmekapazität c_p gemessen.

2 Theorie

Die Wärmekapazität eines Festkörpers bezeichnet die Wärmemenge ΔQ , die benötigt wird, um die Temperatur T dieses Festkörpers um 1 K zu erhöhen. Es gilt

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T} .$$

Die Wärmekapazität ist dabei materialspezifisch und wird deshalb oft in Bezug auf eine Stoffmenge, ein Volumen oder eine Masse angegeben. Dies wird als *spezifische Wärmekapazität* bezeichnet. Diese ergibt sich nach [1] entsprechend zu

$$c^{\text{mol}} = \frac{C}{\text{mol}} \qquad c^{\text{V}} = \frac{C}{V} \qquad c^{\text{mass}} = \frac{C}{m} .$$

Im Folgenden wird für die molare Wärmekapazität c^{mol} das Superskript weggelassen.

Mithilfe des ersten Hauptsatzes der Thermodynamik

$$dQ = dU - dW = dU + pdV \tag{1}$$

kann zwischen der Wärmekapazität bei konstantem Volumen C_V und konstantem Druck C_p unterschieden werden. Hierbei gilt

$$C_V = \left. \frac{\partial Q}{\partial T} \right|_V = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_V \tag{2}$$

$$C_p = \left. \frac{\partial Q}{\partial T} \right|_p = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_p . \tag{3}$$

Weiterhin ergibt sich die Differenz

$$C_p - C_V = 9\alpha^2 K V_0 T \tag{4}$$

mit dem Ausdehnungskoeffizienten α und dem Kompressionsmodul K . Diese Differenz ist im Allgemeinen ≥ 0 , da $C_p \geq C_V$ ist, was daran liegt, dass nach Gleichung 1 bei konstantem Druck mehr Energie auf die Ausdehnung des Volumens aufgewendet werden muss, sodass mehr Wärme benötigt wird, um die gleiche Temperatur zu erreichen. Aus diesem Grund ist die Differenz Gleichung 4 im Falle eines Festkörpers geringer als bei einem idealen Gas, da sich der Festkörper weniger stark ausdehnt, wenn er erwärmt wird.

Im Folgenden wird zwischen *klassischer* und *quantenmechanischer* Betrachtung unterschieden. Zusätzlich werden die Schwingungsmoden im Festkörper als harmonische Oszillatoren behandelt.

In der klassischen Betrachtung kann ein System, welches in Kontakt mit einem Wärmebad ist, bei jeder Temperatur angeregt werden, da der klassische harmonische Oszillator ein kontinuierliches Energiespektrum besitzt. Jede Schwingungsmode hat dabei eine mittlere Energie von $\frac{1}{2}k_{\text{B}}T$. Ein dreidimensionales System mit N Atomen, drei Ortsfreiheitsgraden und drei Impulsfreiheitsgraden hat demnach eine Energie von $3Nk_{\text{B}}T$ und demnach eine Wärmekapazität von $3Nk_{\text{B}}$. Dieser Zusammenhang wird als *Dulong-Petit-Gesetz* bezeichnet und stellt den Hochtemperaturgrenzfall der Wärmekapazität dar.

In der quantenmechanischen Betrachtung muss die Bedingung $\hbar\omega \ll k_{\text{B}}T$ erfüllt sein. Der Grund dafür besteht darin, dass der quantenmechanische harmonische Oszillator nur diskrete Energiewerte $\hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ besitzt. Die zugeführte Energie durch das Wärmebad muss dementsprechend größer als die Energiedifferenz sein, damit der Oszillator angeregt werden kann. Wenn die Temperatur kleiner ist, werden keine Moden mehr angeregt. Dies wird auch als *Ausfrieren der Moden* bezeichnet.

Im Folgenden sollen das *Einstein-* und das *Debye-Modell* vorgestellt werden, welche eine Näherung der Wärmekapazität für hohe und tiefe Temperaturen geben. Dabei wird vor allem auf die unterschiedliche Betrachtung der Moden im Festkörper eingegangen. Im Allgemeinen besitzt jeder Festkörper drei *optische* Moden und $3R - 3$ *akustische* Moden. Die Moden können auch über Quasiteilchen, sogenannte *Phononen*, beschrieben werden, welche die Gitterschwingungen darstellen. Die entsprechende Dispersionsrelation ist in Abbildung 1 dargestellt.

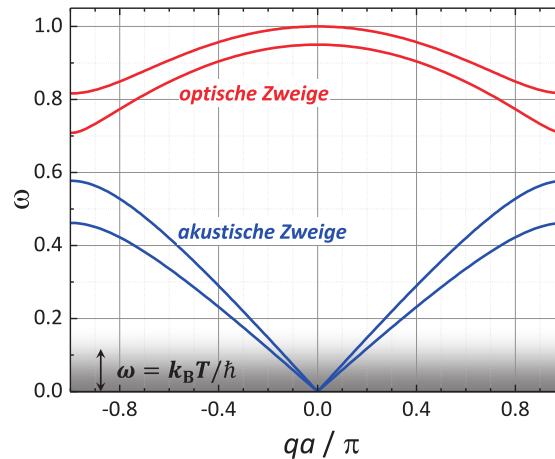


Abbildung 1: Darstellung der Dispersionsrelation in einem Festkörper. Es wird zwischen optischen und akustischen Moden unterschieden. [1]

2.1 Das Einstein-Modell

Das Einstein-Modell betrachtet $3N$ Eigenschwingungen mit der gleichen Frequenz ω_E . In Abbildung 1 würde dies einer Konstanten entsprechen, die auf Höhe der optischen Mode eingezeichnet würde. Es ergibt sich eine Einstein-Temperatur $\Theta_E = \hbar\omega_E/k_B$. Für die Wärmekapazität gilt damit

$$C_V^E = \begin{cases} 3Nk_B \left(\frac{\Theta_E}{T}\right)^2 \exp\left(\frac{-\Theta_E}{T}\right) & , T \ll \Theta_E \\ 3Nk_B & , T \gg \Theta_E \end{cases}.$$

Bei hohen Temperaturen erfüllt das Einstein-Modell die Erwartung von Dulong-Petit, allerdings ergibt sich bei tiefen Temperaturen nicht die beobachtete T^3 -Abhängigkeit. Dies liegt daran, dass in diesem Modell nur die optischen Moden betrachtet werden, welche den Verlauf der Wärmekapazität für tiefe Temperaturen nicht gut beschreiben.

2.2 Das Debye-Modell

Im Debye-Modell werden nun alle Moden durch drei Moden mit einer linearen Dispersionsrelation $\omega = v_i q$ angenähert. Mithilfe des Debye-Wellenvektors q_D und der Zustandsdichte

$$D(\omega) = \frac{V}{2\pi^2} \omega^3 v_i^3$$

ergibt sich die Debye-Frequenz

$$\omega_D = v_i \left(6\pi^2 \frac{N}{V}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad (5)$$

über das Integral

$$\int_0^{\omega_D} D(\omega) d\omega = 3N. \quad (6)$$

Die Schallgeschwindigkeit der jeweiligen Mode ist über v_i gegeben. Die gesamte Schallgeschwindigkeit kann zu

$$\frac{1}{v_s^3} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{v_i^3} \quad (7)$$

$$\Leftrightarrow v_s = \left(\frac{3}{\sum_{i=1}^3 \frac{1}{v_i^3}} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (8)$$

berechnet werden.

Die zugehörige Debye-Temperatur ist definiert als

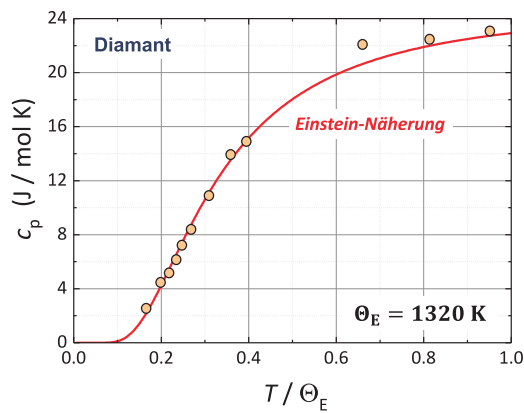
$$\Theta_D = \frac{\hbar\omega_D}{k_B}. \quad (9)$$

Für die Wärmekapazität folgt

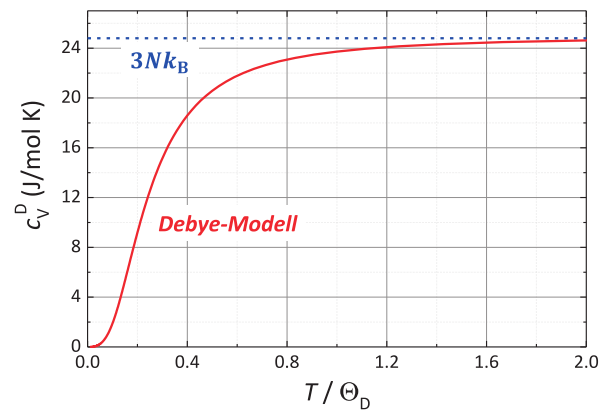
$$C_V^D = 9Nk_B \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^3 \int_0^{\Theta_D/T} \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2} dx = \begin{cases} \frac{12}{5} \pi^2 Nk_B \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^3, & T \ll \Theta_D \\ 3Nk_B, & T \gg \Theta_D \end{cases}$$

Für die Hochtemperaturnäherung ergibt sich wieder Dulong-Petit und für die Tieftemperaturnäherung die erwartete T^3 -Abhängigkeit. Die Debye-Temperatur kann auch als Übergang zwischen klassischer und quantenmechanischer Betrachtung angesehen werden. Im Fall $T > \Theta_D$ ergibt sich der klassische Fall, da alle Moden angeregt werden können. Für $T < \Theta_D$ gilt der quantenmechanische Fall, es befinden sich mehr – oder alle – Oszillatoren im Grundzustand und die Moden frieren aus.

Die Abbildung 2 zeigt den Verlauf der Wärmekapazität im Einstein- und im Debye-Modell.



(a) Wärmekapazität im Einstein-Modell.



(b) Wärmekapazität im Debye-Modell.

Abbildung 2: Verlauf der Wärmekapazität im Einstein- und im Debye-Modell. In beiden Fällen nähert sich der Wert für hohe Temperaturen dem klassischen Grenzfall von Dulong-Petit an. [1]

3 Durchführung

Es sollen nun erst der Aufbau der Messapparatur und anschließend das Messverfahren beschrieben werden.

Die Apparatur besteht aus einem Dewar-Gefäß, in dem sich ein Rezipient befindet, welcher die Kupfer-Probe der Masse 342 g enthält. Die Probe hat keinen Kontakt zum Gefäß, sodass der Effekt der Wärmeleitung minimiert wird. Sowohl Probe als auch das Gefäß sind mit Heizspulen umwickelt, durch die ein Strom geleitet wird. Abbildung 3 zeigt die Messapparatur.

Zu Beginn des Versuchs ist der Rezipient evakuiert. Es wird nun zuerst Helium in den Rezipienten gefüllt, welches dazu dient, die Probe schneller abzukühlen. Zusätzlich wird flüssiger Stickstoff in das Dewar-Gefäß gefüllt. Die Probe wird nun so lange gekühlt, bis der Pt-100-Widerstand der Probe einen Wert von etwa $22\ \Omega$ hat, was einer Temperatur von ungefähr 80 K entspricht. Der Zusammenhang von Temperatur T und Widerstand R ist über

$$\left(\frac{T}{^{\circ}\text{C}}\right) = 0,001\,34 \left(\frac{R}{\Omega}\right)^2 + 2,296 \left(\frac{R}{\Omega}\right) - 243,02 \quad (10)$$

gegeben, wobei der Widerstand in Ω eingegeben und die Temperatur in $^{\circ}\text{C}$ berechnet wird.

Wenn dieser Wert erreicht ist, wird das Helium wieder aus dem Rezipienten gepumpt, welcher anschließend evakuiert wird. Das Vakuum im Dewar-Gefäß dient dazu, weiteren Wärmetransport über Konvektion auszuschließen. Nun wird für die Heizspule der Probe ein Konstantstrom von 150 mA eingestellt. Der Widerstand, und damit die Temperatur der Probe und des Gefäßes, erhöht sich nun. Mithilfe der zweiten Heizspule um das Gefäß wird dafür gesorgt, dass Temperatur von Probe und Gefäß ungefähr gleich bleiben, um den Effekt der Wärmestrahlung zu kompensieren.

Es wird nun zu Beginn in Schritten von 120 s der Strom beider Spulen, sowie der Wert beider Widerstände gemessen. Zwischendurch wird das Messintervall auf 5 min erhöht. Wenn eine Temperatur von etwa 170 K erreicht ist, wird der Strom an der Heizspule der Probe auf 180 mA erhöht. Diese Messung wird so lange durchgeführt, bis eine Temperatur von 300 K, also ein Widerstand von etwa $111\ \Omega$, erreicht ist.

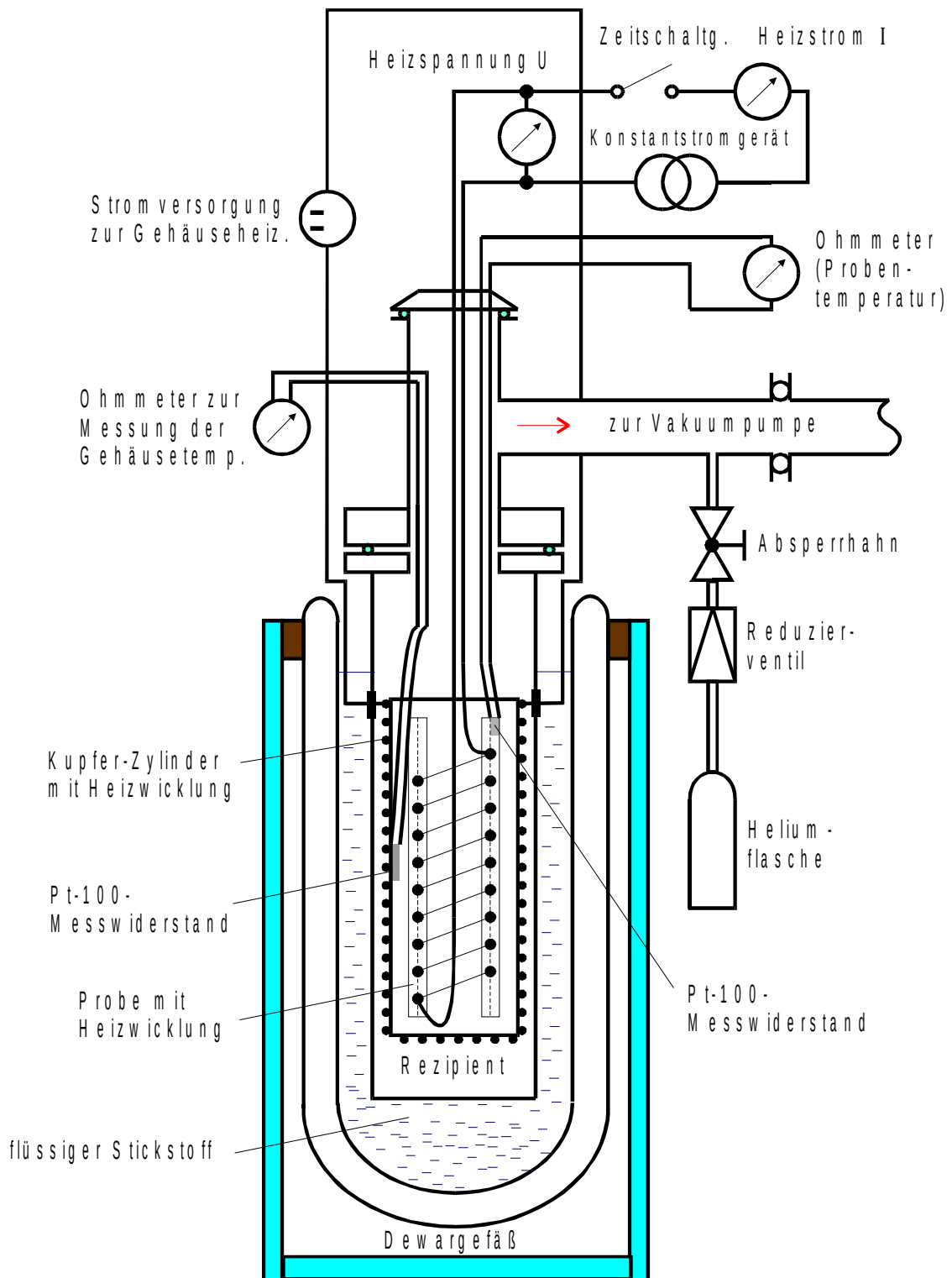


Abbildung 3: Aufbau der verwendeten Messapparatur. [3]

4 Auswertung

Zunächst wird eine Abschätzung der statistischen Unsicherheiten der Messwerte vorgenommen.

Die Unsicherheit in den Zeitdifferenzen Δt wird aufgrund der für das Ablesen benötigten Zeit als $\sigma_{\Delta t} = 5 \text{ s}$ angenommen. Die übrigen Werte werden an Segment-Displays abgelesen, bei welchen die Hälfte des kleinsten darstellbaren Werts eine obere Grenze für den Rundungsfehler ist. Angaben zur Eichung liegen nicht vor. Für die verwendeten Messgeräte ergeben sich daher folgende Unsicherheiten:

$$\begin{aligned}\sigma_U &= 0,005 \text{ V} \\ \sigma_I &= 0,05 \text{ mA} \\ \sigma_{R_{\text{Probe}}} &= 0,000\,05 \text{ k}\Omega = 0,05 \Omega \\ \sigma_{R_{\text{Zylinder}}} &= 0,000\,05 \text{ k}\Omega = 0,05 \Omega\end{aligned}$$

Die Propagation der Unsicherheiten übernimmt in den folgenden Berechnungen die Python-Bibliothek `uncertainties`. Dieser liegt die *Gauß'sche Fehlerfortpflanzung* zugrunde:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\delta f(x_1, \dots, x_n)}{\delta x_i} \right| \Delta x_i .$$

4.1 Temperaturabhängige Wärmekapazität

Um für jedes Messintervall die molare Wärmekapazität c_p zu bestimmen, wird die über die Heizspule auf die Probe übertragene Wärmeenergie gemäß Gleichung 3 ins Verhältnis zu der gemessenen Erhöhung der Temperatur gesetzt und auf die Stoffmenge normiert. Die Wärmeenergie ergibt sich dabei aus $\Delta E = UI\Delta t$. Die Temperatur wird über die Messung des Pt-100-Widerstandes gemäß Gleichung 10 ermittelt. Aus der Probenmasse $m = 342 \text{ g}$ [3] und der molaren Masse von Kupfer $M = 63,546 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}$ [2] folgt für die Stoffmenge $n = \frac{m}{M} = 5,38 \text{ mol}$.

Mittels Gleichung 4 kann schließlich von c_p auf c_V geschlossen werden. Dazu werden der (linear interpolierte) Ausdehnungskoeffizient aus [3, Tabelle 2], der Kompressionsmodul $K = 140 \text{ GPa}$ [2] und das Molvolumen $V_0 = 7,0922 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{mol}$ [2] eingesetzt.

In Abbildung 4 sind beide Wärmekapazitäten gegen T aufgetragen. Die zugrundeliegenden Messwerte sind in Tabelle 1, die daraus berechneten Wärmekapazitäten in Tabelle 2 aufgeführt.

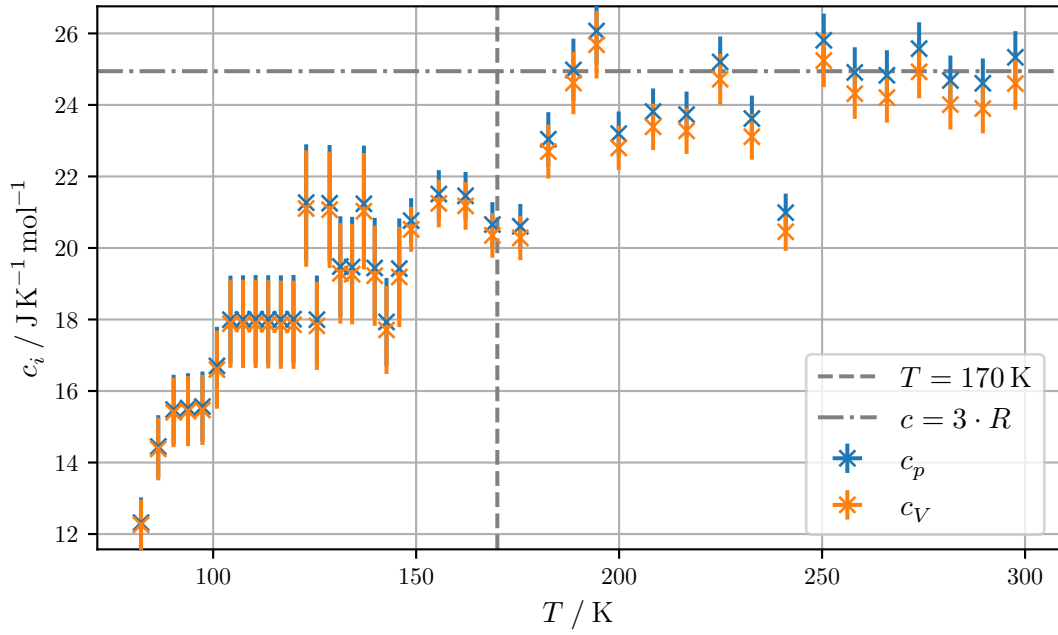


Abbildung 4: Gemessene Wärmekapazitäten c_p und daraus berechnete c_v in Abhängigkeit der Temperatur.

4.2 Experimentelle Bestimmung der Debye-Temperatur

Unter Zuhilfenahme der in [3, Tabelle 1] in der Form $f : \frac{\Theta_D}{T} \rightarrow c_V$ angegebenen Debye-Funktion kann die Debye-Temperatur bestimmt werden. Lineare Interpolation ermöglicht es, näherungsweise eine Umkehrfunktion $f^{-1} : c_V \rightarrow \frac{\Theta_D}{T}$ anzugeben. Somit ist

$$\Theta_D = f^{-1}(c_V) \cdot T$$

die Bestimmungsgleichung, um mit T und c_V aus Tabelle 2 die Debye-Temperatur zu bestimmen.

Bei Berücksichtigung der Messwerte mit $T \leq 170$ K (gestrichelte Linie in Abbildung 4) ergibt sich

$$\Theta_D = (317,81 \pm 0,06) \text{ K} .$$

4.3 Bestimmung der Debye-Temperatur aus der Schallgeschwindigkeit

Aus der Forderung in Gleichung 6 kann bei bekannter Schallgeschwindigkeit v_s die Debye-Temperatur T_D bestimmt werden.

Tabelle 1: Messwerte zur Heizspule der Probe sowie Widerstände und daraus berechnete Temperaturen. Unsicherheiten siehe Abschnitt 4

$\Delta t / \text{s}$	U / V	I / mA	$R_{\text{Probe}} / \Omega$	$T_{\text{Probe}} / \text{K}$	$R_{\text{Zylinder}} / \Omega$	$T_{\text{Zylinder}} / \text{K}$
120	15,4	152,3	22,4	82,2	22,0	81,3
120	16,0	153,0	24,2	86,5	23,3	84,4
120	16,1	153,4	25,8	90,3	25,4	89,3
120	16,1	153,7	27,3	93,8	27,6	94,5
120	16,1	154,0	28,8	97,4	29,4	98,8
120	16,2	154,2	30,3	100,9	30,5	101,4
120	16,2	154,3	31,7	104,3	31,2	103,1
120	16,2	154,4	33,0	107,4	32,1	105,2
120	16,2	154,5	34,3	110,5	33,6	108,8
120	16,2	154,6	35,6	113,6	35,4	113,1
120	16,3	154,7	36,9	116,7	37,1	117,2
120	16,3	154,8	38,2	119,8	38,4	120,3
120	16,3	154,8	39,5	122,9	39,4	122,7
120	16,3	154,9	40,6	125,6	40,1	124,4
120	16,3	154,9	41,9	128,7	41,0	126,5
120	16,3	155,0	43,0	131,3	42,1	129,2
120	16,3	155,0	44,2	134,2	43,6	132,8
120	16,3	155,1	45,4	137,1	45,4	137,1
120	16,3	155,1	46,5	139,8	47,4	142,0
120	16,4	155,1	47,7	142,7	49,3	146,6
120	16,4	155,2	49,0	145,9	50,8	150,2
300	16,4	155,2	50,2	148,8	52,0	153,1
300	16,4	155,3	53,0	155,6	53,2	156,1
300	16,4	155,3	55,7	162,2	55,0	160,5
300	16,4	155,4	58,4	168,8	59,7	172,0
300	16,4	155,4	61,2	175,7	63,4	181,1
300	16,4	155,5	64,0	182,6	64,9	184,8
300	16,4	155,5	66,5	188,7	64,0	182,6
300	16,4	155,5	68,8	194,4	65,5	186,3
300	19,3	182,8	71,0	199,9	70,0	197,4
300	19,3	182,8	74,4	208,4	79,4	220,9
300	19,3	182,7	77,7	216,6	77,3	215,6
300	19,3	182,8	81,0	224,9	79,4	220,9
300	19,3	182,9	84,1	232,7	82,8	229,4
300	19,3	182,9	87,4	241,0	90,4	248,6
300	19,3	183,0	91,1	250,4	90,6	249,1
300	19,3	183,1	94,1	258,0	93,7	257,0
300	19,3	183,1	97,2	266,0	96,5	264,2
300	19,3	183,1	100,3	273,9	99,9	272,9
300	19,3	183,2	103,3	281,6	102,8	280,3
300	19,3	183,2	106,4	289,6	106,4	289,6
300	19,3	183,2	109,5	297,6	109,2	296,8
300	19,3	183,3	112,5	305,4	112,4	305,1

Tabelle 2: Aus Tabelle 1 berechnete spezifische Wärmekapazitäten in Abhängigkeit der Temperatur(differenz).

$T_{\text{Probe}} / \text{K}$	$\Delta T_{\text{Probe}} / \text{K}$	$\Delta E_{\text{Probe}} / \text{J}$	$c_p / \text{J}/(\text{K mol})$	$c_V / \text{J}/(\text{K mol})$
82,2 ± 0,1	4,2 ± 0,2	281,5 ± 11,7	12,3 ± 0,7	12,3 ± 0,7
86,5 ± 0,1	3,8 ± 0,2	293,9 ± 12,2	14,4 ± 0,9	14,4 ± 0,9
90,3 ± 0,1	3,6 ± 0,2	295,8 ± 12,3	15,5 ± 1,0	15,4 ± 1,0
93,8 ± 0,1	3,6 ± 0,2	297,1 ± 12,4	15,5 ± 1,0	15,4 ± 1,0
97,4 ± 0,1	3,6 ± 0,2	298,5 ± 12,4	15,6 ± 1,0	15,5 ± 1,0
100,9 ± 0,1	3,3 ± 0,2	299,4 ± 12,5	16,7 ± 1,1	16,6 ± 1,1
104,3 ± 0,1	3,1 ± 0,2	300,0 ± 12,5	18,0 ± 1,2	17,9 ± 1,2
107,4 ± 0,1	3,1 ± 0,2	300,5 ± 12,5	18,0 ± 1,2	17,9 ± 1,2
110,5 ± 0,1	3,1 ± 0,2	301,1 ± 12,5	18,0 ± 1,2	17,9 ± 1,2
113,6 ± 0,1	3,1 ± 0,2	301,5 ± 12,6	18,0 ± 1,2	17,9 ± 1,2
116,7 ± 0,1	3,1 ± 0,2	301,9 ± 12,6	18,0 ± 1,2	17,9 ± 1,2
119,8 ± 0,1	3,1 ± 0,2	302,4 ± 12,6	18,0 ± 1,2	17,9 ± 1,2
122,9 ± 0,1	2,6 ± 0,2	302,6 ± 12,6	21,3 ± 1,6	21,1 ± 1,6
125,6 ± 0,1	3,1 ± 0,2	303,0 ± 12,6	18,0 ± 1,2	17,8 ± 1,2
128,7 ± 0,1	2,7 ± 0,2	303,2 ± 12,6	21,3 ± 1,6	21,1 ± 1,6
131,3 ± 0,1	2,9 ± 0,2	303,6 ± 12,6	19,5 ± 1,4	19,3 ± 1,4
134,2 ± 0,1	2,9 ± 0,2	303,7 ± 12,7	19,5 ± 1,4	19,3 ± 1,4
137,1 ± 0,1	2,7 ± 0,2	304,1 ± 12,7	21,2 ± 1,6	21,0 ± 1,6
139,8 ± 0,1	2,9 ± 0,2	304,1 ± 12,7	19,4 ± 1,4	19,2 ± 1,4
142,7 ± 0,1	3,2 ± 0,2	304,3 ± 12,7	17,9 ± 1,2	17,7 ± 1,2
145,9 ± 0,1	2,9 ± 0,2	304,7 ± 12,7	19,4 ± 1,4	19,2 ± 1,4
148,8 ± 0,1	6,8 ± 0,2	761,7 ± 12,7	20,8 ± 0,6	20,5 ± 0,6
155,6 ± 0,1	6,6 ± 0,2	763,1 ± 12,7	21,5 ± 0,7	21,2 ± 0,7
162,2 ± 0,1	6,6 ± 0,2	763,6 ± 12,7	21,5 ± 0,7	21,2 ± 0,7
168,8 ± 0,1	6,9 ± 0,2	764,6 ± 12,7	20,7 ± 0,6	20,4 ± 0,6
175,7 ± 0,1	6,9 ± 0,2	765,0 ± 12,8	20,6 ± 0,6	20,3 ± 0,6
182,6 ± 0,1	6,2 ± 0,2	766,0 ± 12,8	23,0 ± 0,8	22,7 ± 0,8
188,7 ± 0,1	5,7 ± 0,2	766,0 ± 12,8	25,0 ± 0,9	24,6 ± 0,9
194,4 ± 0,1	5,5 ± 0,2	766,5 ± 12,8	26,1 ± 0,9	25,7 ± 0,9
199,9 ± 0,1	8,5 ± 0,2	1057,3 ± 17,6	23,2 ± 0,6	22,8 ± 0,6
208,4 ± 0,1	8,2 ± 0,2	1057,3 ± 17,6	23,8 ± 0,6	23,4 ± 0,6
216,6 ± 0,1	8,3 ± 0,2	1057,3 ± 17,6	23,7 ± 0,6	23,3 ± 0,6
224,9 ± 0,1	7,8 ± 0,2	1058,4 ± 17,6	25,2 ± 0,7	24,7 ± 0,7
232,7 ± 0,1	8,3 ± 0,2	1059,5 ± 17,7	23,6 ± 0,6	23,1 ± 0,6
241,0 ± 0,1	9,4 ± 0,2	1059,5 ± 17,7	21,0 ± 0,5	20,5 ± 0,5
250,4 ± 0,1	7,6 ± 0,2	1060,1 ± 17,7	25,8 ± 0,7	25,2 ± 0,7
258,0 ± 0,1	7,9 ± 0,2	1060,7 ± 17,7	24,9 ± 0,7	24,3 ± 0,7
266,0 ± 0,1	7,9 ± 0,2	1060,7 ± 17,7	24,8 ± 0,7	24,2 ± 0,7
273,9 ± 0,1	7,7 ± 0,2	1060,7 ± 17,7	25,6 ± 0,7	24,9 ± 0,7
281,6 ± 0,1	8,0 ± 0,2	1061,3 ± 17,7	24,7 ± 0,7	24,0 ± 0,7
289,6 ± 0,1	8,0 ± 0,2	1061,3 ± 17,7	24,6 ± 0,7	23,9 ± 0,7
297,6 ± 0,1	7,8 ± 0,2	1060,7 ± 17,7	25,3 ± 0,7	24,6 ± 0,7

Zunächst wird die Debye-Frequenz berechnet, indem die Schallgeschwindigkeit aus Gleichung 8 in Gleichung 5 eingesetzt wird:

$$\begin{aligned}\omega_D &= \underbrace{\left(\frac{3}{\sum_{i=1}^3 \frac{1}{v_i^3}} \right)}_{v_s}^{\frac{1}{3}} \cdot \left(6\pi^2 \frac{N_A}{V_0} \right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \left(\frac{18\pi^2 \frac{N_A}{V_0}}{\frac{2}{v_{\text{trans}}} + \frac{1}{v_{\text{long}}}} \right)^{\frac{1}{3}}.\end{aligned}$$

Dabei ist N_A die Avogadro-Konstante und $V_0 = 7,0922 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{mol}$ [2] wie zuvor das Molvolumen.

Die Schallgeschwindigkeiten je Richtung sind gegeben [3] als

$$v_{\text{long}} = 4,7 \frac{\text{km}}{\text{s}} \qquad v_{\text{trans}} = 2,26 \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

Schließlich folgt mit Gleichung 9

$$\Theta_D = 332,49 \text{ K}.$$

5 Diskussion

5.1 Abweichungen

Der Literaturwert für die Debye-Temperatur lautet $\theta_D = 343 \text{ K}$ [1, Abbildung 6.9].

Der hier experimentell bestimmte Wert beträgt $(317,81 \pm 0,06) \text{ K}$. Das entspricht einer relativen Abweichung von 7,35 %.

Wird die Debye-Temperatur stattdessen aus der Schallgeschwindigkeit bestimmt, ergibt sich 332,49 K. Sie ist damit um 14,68 K (oder 4,62 %) größer als die experimentell bestimmte.

5.2 Mögliche Fehlerquellen

Die wesentliche Voraussetzung für den Erfolg des Experiments, dass die Probe einzig durch die Spule erhitzt und nicht abgekühlt wird, ist in der Realität nur näherungsweise erreichbar. Gründe hierfür sind unter anderem das nicht perfekte Vakuum (\rightarrow Konvektion), die Aufhängung der Probe (\rightarrow Wärmeleitung), und die Wärmestrahlung zwischen der Probe und dem umliegenden Kupfer-Gefäß, welche nicht optimal kompensiert ist, wenn nicht beide gleich warm sind.

Mithilfe einer zweiten Spannungsquelle wurde der Strom der Heizspule um das Gefäß geregelt. Der zugehörige Pt-100-Widerstand reagierte jedoch sehr träge, sodass eine Änderung erst nach einigen Minuten eintrat. Auf diese Weise war es schwierig, den Widerstand von Gefäß und Probe auf dem gleichen Wert zu halten. Im Durchschnitt betrug die Temperaturdifferenz zwischen Probe und Zylinder 2,34 K, maximal lag sie bei 12,51 K.

Das Ablesen von vier Werten je Messintervall erfolgte naturgemäß nicht genau gleichzeitig. Zusätzlich führten kleine Fluktuationen in den digitalen Anzeigen zu ebenso kleinen zusätzlichen Unsicherheiten in den Messwerten.

Eine weitere Unsicherheit liegt darin, dass sich der Wert des Konstantstroms mit der Zeit auch leicht veränderte, sodass der tatsächliche Heizstrom der Probe auch innerhalb eines Messintervalls nicht vollständig konstant war.

Literatur

- [1] Rudolf Gross und Achim Marx. *Festkörperphysik*. De Gruyter, 2018.
- [2] *Technical data for Copper*. Periodictable.com. URL: <https://periodictable.com/Elements/029/data.html> (besucht am 09.06.2022).
- [3] *Versuchsanleitung zum Versuch 47: Temperaturabhängigkeit der Molwärme von Festkörpern*. TU Dortmund.