Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Literatur

[1] Vdi-wärmeatlas : Fachlicher träger vdi-gesellschaft verfahrenstechnik und chemieingenieurwesen, 2019. URL `https://doi.org/10.1007/978-3-662-52989-8`.

[2] P. Böckh. Wärmeübertragung : Grundlagen und praxis, 2017. URL `http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-55480-7`.

[3] T. Kuppan. Heat Exchanger Design Handbook. Second edition, 2013. ISBN 978-1-4398-4213-3.

[4] O. Strelow. A general calculation method for heat exchanger networks/eine allgemeine berechnungsmethode für wärmeübertragerschaltungen. Forschung im Ingenieurwesen, 63(9):255, 1997. ISSN 0015-7899.

Formelzeichen und Indizes

Subscripts

i	Stoffstrom (i = 1,2)
j	Zelle/Apperat
p	vorherige Zelle des Stoffstroms 1
q	vorherige Zelle des Stoffstroms 2

Superscripts

i	am Entritt der Zelle/Apperats
o	am Austritt der Zelle/Apperats
I	Eintritt in das Netzwerk
O	Austritt aus dem Netzwerk

Tabelle 1: Indizes

Kurzzeichen	Einheit	Bedeutung
P	-	dimensionslose Temperaturänderung
ϑ	K,°C	Temperatur
T	-	dimensionslose Temperatur
n_c	-	Anzahl der Zellen/Apperate eines Wärmeübertragernetzwerks
n_i	-	Anzahl der in das Netzwerk ein bzw Austretenden Stoffströme

Tabelle 2: Formelzeichen

1 Zellenmethode

Die Zellenmethode ist eine Methode zur Aufteilung eines komplexen Wärmeübertragers in mehrere kleinere Teil-Wärmeübertrager, die als “Zellen“ oder “Aperate“ bezeichnet werden. Diese Zellen werden dann nacheinander von den Wärmeübertragungsmedien durchströmt. Jede Zelle wird als ein eigenständiger Wärmeübertrager betrachtet, und es werden individuelle Ein- und Austrittstemperaturen für die Medien in jeder Zelle angenommen. Das Ziel ist es, die Temperaturänderungen und den Wärmeaustausch in jeder Zelle zu berechnen.

1.1 Dimensionslose Kennzahlen

Um die Zellenmethode anwenden zu können, muss jeder Zelle eine möglichst realistische Stromführung zugeordnet, für die eine Betriebscharakteristik bekannt sein muss, werden. Damit können für jede Zelle die dimensoionslosen Kennzahlen berechnet bzw zugewiesen werden.

Die Dimensionslose Temperaturänderung der Stoffstörme oder auch Betriebscharakterik ist gegeben durch:

$$P_1 = \frac{\vartheta_1^i - \vartheta_1^o}{\vartheta_1^i - \vartheta_2^i} \tag{1a}$$

$$P_2 = \frac{\vartheta_2^o - \vartheta_2^i}{\vartheta_1^i - \vartheta_2^i} \tag{1b}$$

1.2 Zellenmethode

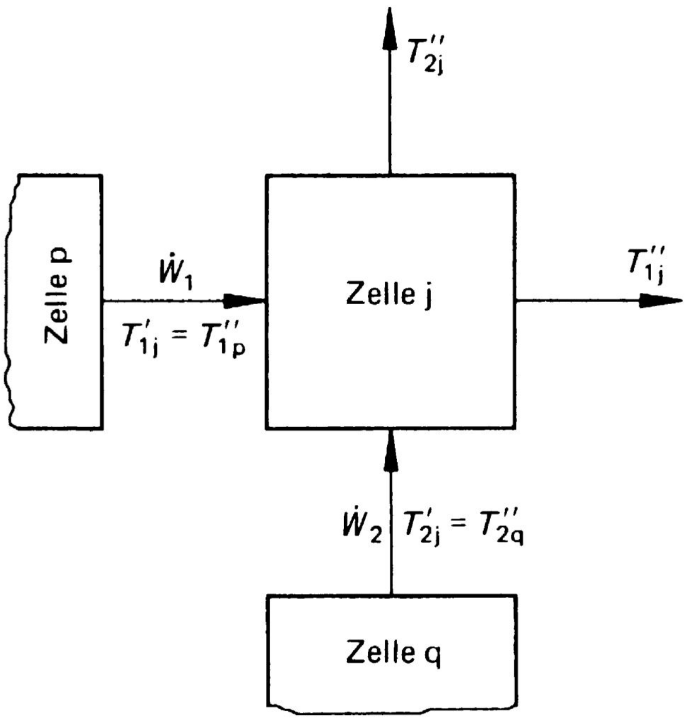

Abbildung 1: Cell

Zunächst können dimensionslose Temperaturen wie folgt definiert werden:

$$T_1 = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_1^i}{\vartheta_1^i - \vartheta_2^i} \tag{2a}$$

$$T_2 = \frac{\vartheta_2 - \vartheta_2^i}{\vartheta_1^i - \vartheta_2^i} \tag{2b}$$

Mit den dimensionslosen Temperaturänderungen der Zelle P_{1j} Gleichung 1a

$$P_{1j} = \frac{\vartheta_{1j}^i - \vartheta_{1j}^o}{\vartheta_{1j}^i - \vartheta_{2j}^i} \rightarrow P_{1j}(\vartheta_{1j}^i - \vartheta_{2j}^i) - \vartheta_{1j}^i + \vartheta_{1j}^o = 0$$

$$(1 - P_{1j})\vartheta_{1j}^i - \vartheta_{1j}^o + P_{1j}\vartheta_{2j}^i = 0$$

und den dimensionslosen Temperaturen

$$T_{1j} = \frac{\vartheta_{1j} - \vartheta_1^i}{\vartheta_1^i - \vartheta_2^i} \to \vartheta_{1j} = T_{1j}(\vartheta_1^i - \vartheta_2^i) + \vartheta_2^i$$
$$T_{2j} = \frac{\vartheta_{2j} - \vartheta_2^i}{\vartheta_1^i - \vartheta_2^i} \to \vartheta_{2j} = T_{2j}(\vartheta_1^i - \vartheta_2^i) + \vartheta_2^i$$

folgt

$$(1 - P_{1j})(T_{1j}^i(\vartheta_1^i - \vartheta_2^i) + \vartheta_2^i) - (T_{1j}^i(\vartheta_1^i - \vartheta_2^i) + \vartheta_2^i) + P_{1j}(T_{2j}^i(\vartheta_1^i - \vartheta_2^i) + \vartheta_2^i) = 0$$

Wie in Abb. 1 dargestellt gilt, dass $T_{1j}^i = T_{1p}^o$ und $T_{2j}^i = T_{2p}^o$, somit ergibt sich

$$(1 - P_{1j})T_{1p}^o - T_{1j}^o + P_{1j}T_{2q}^o + (\frac{\vartheta_2^i}{\vartheta_1^i - \vartheta_2^i})\underbrace{[(1 - P_{1j}) - 1 + P_{1j}]}_{0} = 0$$

und es folgt

$$(1 - P_{1j})T_{1p}^o - T_{1j}^o + P_{1j}T_{2q}^o = 0 \tag{3a}$$

sowie durch selbe Vorgehensweise mit P_{2j} Gleichung 1b

$$(1 - P_{2j})T_{2p}^o - T_{2j}^o + P_{2j}T_{1q}^o = 0 \tag{3b}$$

In Matrixschriebweise folgt daher

$$\begin{bmatrix} T_{1j}^o \\ T_{2j}^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - P_{1j} & P_{1j} \\ P_{2j} & 1 - P_{2j} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_{1j}^i \\ T_{2j}^i \end{bmatrix}$$
$$\underline{\mathrm{T_j^o}} = \underline{\underline{\Phi_j}} \cdot \underline{\mathrm{T_j^i}} \tag{4}$$

Für das gesamte Netzwerk mit n_c Apparaten kann somit folgender Zusammenhang zwischen Ein und Austritstemperatuen des aufgestellt werden.

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathrm{T_1^o}} \\ \underline{\mathrm{T_2^o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbb{I}}} - \underline{\underline{\Phi_1}} & \underline{\underline{\Phi_1}} \\ \underline{\underline{\Phi_2}} & \underline{\underline{\mathbb{I}}} - \underline{\underline{\Phi_2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{T_1^i} \\ \underline{T_2^i} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\mathrm{T^o}} = \underline{\underline{\Phi}} \cdot \underline{\mathrm{T^i}} \tag{5}$$

Die Funktionsmatrix $\underline{\underline{\Phi}}$ besteht aus 4 Untermatrizen mit den nxn dimensionalen Digonalmatrizen $\underline{\underline{\Phi_1}}$ und $\underline{\underline{\Phi_2}}$. Diese enthalten an der (i,i) Position die Betriebscharakteristik Φ_1 bzw Φ_2 des ersten bzw zweiten Stroms des i-ten Apparats. Die Temperaturvektoren, mit der Dimension $2n_i$, bzw die Untervektoren enthalten die jeweiligen Ein- bzw Austritrstemperaturen der entsprechenden Apparate.

Die Funktionsmatrix beschreibt die Wärmetauscherspezisfischen eigenschaften, die sich aus Übertragungsfähigkeit, Wärmestrom, Stoffdaten etc ergeben. Über die Struktur des Netzwerks, also die Verschaltung der einzelnen Zellen enthält Gleichung 5 keine Informationen weshalb auch der Vektor der Eintrittstemperaturen unbekannte Temperaturen beinhaltet. Deren Zusammenhang kann unter Berücksichtigung der Verschaltung des Netzwerks wie folgt beschrieben werden.

$$\begin{bmatrix} \underline{T_1^i} \\ \underline{T_2^i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{S_{11}}} & \underline{\underline{S_{12}}} \\ \underline{\underline{S_{21}}} & \underline{\underline{S_{22}}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{T_1^o} \\ \underline{T_2^o} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{I}_1}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{\mathbf{I}_2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{T_1^I} \\ \underline{T_2^I} \end{bmatrix}$$

$$\underline{T^i} = \underline{\underline{S}} \cdot \underline{T^o} + \underline{\underline{\mathbf{I}}} \cdot \underline{T^I} \tag{6}$$

Die Verschaltung der einzelnen Fluidströme innerhalb des Netzwerkes wird durch die Strukturmatrix **S** beschrieben. Diese besteht aus vier $n_c \times n_c$-dimensoinalen Untermatrizen, welche jeweils $x \in [0, 1]$ enthalten. Der Wert x representiert dabei den prozentualen Anteil

$\mathbf{S_{11}}(i, j) = x$: des Fluidstroms 1, der in Apperat i eintritt und als Fluidstrom 1

$\mathbf{S_{12}}(i, j) = x$: des Fluidstroms 1, der in Apperat i eintritt und als Fluidstrom 2

$\mathbf{S_{21}}(i, j) = x$: des Fluidstroms 2, der in Apperat i eintritt und als Fluidstrom 1

$\mathbf{S_{22}}(i, j) = x$: des Fluidstroms 2, der in Apperat i eintritt und als Fluidstrom 2

von Apparat j herausfliest. (i = Zeile, j = Spalte)

Die Apparate in welche Fluidströme in das Netzwerk einströmen werden durch die Inputmatrix **I** definiert. Die Dimension ist dabei abhängig von der Anzahl der eintretenden Fluidströme n_1^I und n_2^I wesahlb die Untermatrizen $\mathbf{I_1}$ und $\mathbf{I_2}$ die Dimensionen $n_c \times n_1^I$ und $n_c \times n_2^I$ haben. Die Einträge $x \in \{0, 1\}$ repräsentieren dabei den Eintritt in das Netzwerk wie folgt:

$\mathbf{I_1}(i, j) = 1$: der Fluidstrom j tritt als Fluidstrom 1 des Apparats i in das Netzwerk ein

$\mathbf{I_2}(i, j) = 1$: der Fluidstrom j tritt als Fluidstrom 2 des Apparats i in das Netzwerk ein

Die Temperaturen der in das Netzwerk eintretenden ströme sind in $\mathbf{T^I}$ enthalten. Die Dimension der Untermatrizen ergibt sich, entsprechend der zugehörigen Inputmatrix, zu $n_1^I \times 1$ für den $\mathbf{T_1^I}$ und für $\mathbf{T_2^I}$ mit $n_2^I \times 1$.

Setzt man Gleichung 6 in die Gleichung 5 ergibt sich somit der Vektor der Austrittstemperaturen der einzelnen Zellen zu

$$\underline{\mathbf{T^o}} = (\underline{\underline{\mathbb{I}}} - \underline{\underline{\Phi}} \cdot \underline{\underline{S}})^{-1} \cdot \underline{\underline{\Phi}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{I}}} \cdot \underline{T^I} \tag{7}$$

Damit können die Austrittstemperaturen der einzelnen Apparate berechnet werden. Um die resultierenden Austrittstemperaturen des gesamten netzwerks zu erhalten können diese durch die Outputmatrix **O** extrahiert werden.

$$\begin{bmatrix} \underline{T_1^O} \\ \underline{T_2^O} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{O}_1}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{\mathbf{O}_2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{T_1^o} \\ \underline{T_2^o} \end{bmatrix}$$

$$\underline{T^O} = \underline{\underline{\mathbf{O}}} \cdot \underline{T^o} \tag{8}$$

Wie die Inputmatrix ist auch die Outputmatrix aufgebaut und gibt den entsprechenden Anteil der aus den Apperaten strömenden, das Netzwerk verlassenden Fluidstöme an. Der Wert x representiert dabei wiederum den prozentualen Anteil,

$\mathbf{O_1}(i,j) = x$: des Fluidstroms 1 der aus dem Apperat j strömt und das Netzwerk verlässt

$\mathbf{O_2}(i,j) = x$: des Fluidstroms 2 der aus dem Apperat j strömt und das Netzwerk verlässt

Damit ergeben sich die Dimensionen der Untermatrizen zu $n_1^O \times n_c$ für $\mathbf{O_1}$ und für $\mathbf{O_2}$ zu $n_2^O \times n_c$.

Mit Gleichung 7 und Gleichung 8 kann man die Schaltungscharaktrsik $\mathbf{\Phi^S}$ des Netzwerks definieren. Mit ihr kann der Einfluss der Eintritts auf die Austritrstemperaturen des gesamten Netzwerks beschrieben werden. Die Dimension ergibt sich aus der Anzahl der aus bzw eintreten Fluidströme zu $(n_1^I + n_2^I) \times (n_1^O + n_2^O)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{T^O} &= \mathbf{O} \cdot (\underline{\underline{\mathbb{I}}} - \underline{\underline{\Phi}} \cdot \underline{\underline{S}})^{-1} \cdot \underline{\underline{\Phi}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{I}}} \quad \cdot \underline{\mathrm{T}^{\mathrm{I}}} \\ \mathbf{T^O} &= \qquad\qquad \mathbf{\Phi^S} \qquad\qquad \cdot \mathbf{T^I} \end{aligned} \tag{9}$$