# Inhaltsverzeichnis



# Literatur

[1] VDI-Wärmeatlas. Springer Berlin Heidelberg Imprint: Springer Vieweg, 12th ed. 2019 edition, 2019. ISBN 9783662529898. URL `https://doi.org/10.1007/978-3-662-52989-8`.

[2] P. Böckh. Wärmeübertragung : Grundlagen und Praxis. Springer Berlin Heidelberg Imprint: Springer Vieweg, 7. aufl. 2017 edition, 2017. ISBN 9783662554807. URL `http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-55480-7`.

[3] T. Kuppan. Heat Exchanger Design Handbook. CRC Press, Boca Raton, FL, second edition, 2013. ISBN 978-1-4398-4213-3.

[4] O. Strelow. A general calculation method for heat exchanger networks/Eine allgemeine Berechnungsmethode für Wärmeübertragerschaltungen. Forschung im Ingenieurwesen, 63(9):255, 1997.

## Formelzeichen und Indizes

Subscripts

| | |
|---|---|
| $i$ | Stoffstrom (1,2) |
| $j$ | Zelle/Apparat |
| $p$ | vorherige Zelle des Stoffstroms 1 |
| $q$ | vorherige Zelle des Stoffstroms 2 |

Superscripts

| | |
|---|---|
| $i$ | am Eintritt der Zelle/des Apparats |
| $o$ | am Austritt der Zelle/des Apparats |
| $I$ | Eintritt in das Netzwerk |
| $O$ | Austritt aus dem Netzwerk |

Tabelle 1: Indizes

| Kurzzeichen | Einheit | Bedeutung |
|---|---|---|
| $P$ | - | dimensionslose Temperaturänderung |
| $\vartheta$ | K, °C | Temperatur |
| $T$ | - | dimensionslose Temperatur |
| $n_c$ | - | Anzahl der Zellen/Apparate eines Wärmeübertragernetzwerks |
| $n_i$ | - | Anzahl der in das Netzwerk ein- bzw. austretenden Stoffströme |

Tabelle 2: Formelzeichen

Folgende Ausführung zur Zellenmethode orientiert sich insbesondere am Kapitel C1 Wärmeübertrager aus [1] und an [4].

## 1 Zellenmethode

Die Zellenmethode ist eine Methode zur Aufteilung eines komplexen Wärmeübertragers in mehrere kleinere Teil-Wärmeübertrager, die als "Zellen" oder "Apparate" bezeichnet werden. Diese Zellen werden dann von den Wärmeübertragungsmedien durchströmt. Jede Zelle wird als ein eigenständiger Wärmeübertrager betrachtet, und es werden individuelle Ein- und Austrittstemperaturen für die Medien in jeder Zelle angenommen. Das Ziel ist es, die Temperaturänderungen und den Wärmeaustausch in jeder Zelle zu berechnen und damit auf das Gesamtnetzwerk zu schließen.

## 1.1 Dimensionslose Kennzahlen

Um die Zellenmethode anwenden zu können, muss jeder Zelle eine möglichst realistische Stromführung zugeordnet werden, für die eine Betriebscharakteristik bekannt sein muss. Dadurch können für jede Zelle die dimensionslosen Wärmeübertrager-Kennzahlen berechnet bzw. zugewiesen werden.

Die dimensionslose Temperaturänderung der Stoffströme, auch Betriebscharakteristik genannt, ist definiert durch:

$$P_1 = \frac{\vartheta_1^i - \vartheta_1^o}{\vartheta_1^i - \vartheta_2^i}, \tag{1a}$$

$$P_2 = \frac{\vartheta_2^o - \vartheta_2^i}{\vartheta_1^i - \vartheta_2^i}. \tag{1b}$$

$P_i$ dient dazu, den Wärmeaustausch zwischen den Fluiden zu beschreiben, indem die erreichte Temperaturdifferenz ins Verhältnis zur Temperaturdifferenz die eintretenden Stoffströme gesetzt wird. Diese Betriebscharakteristik kann daher auch als zur Wirkungsgrad-Beurteilung des Wärmeübertragers verwendet werden.

## 1.2 Zellenmethode

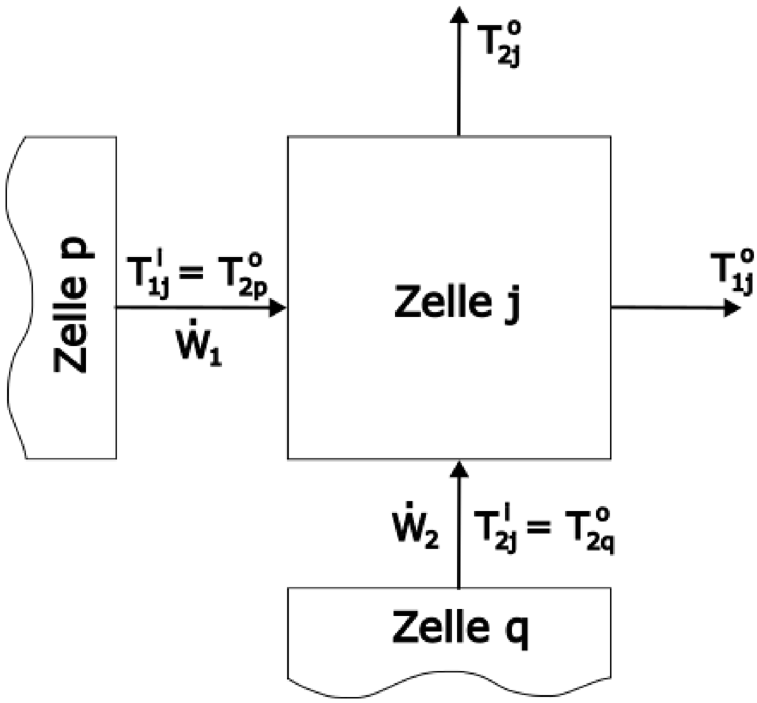


Abbildung 1: Prinzipskizze einer Zelle j, in welche Fluidströme von zwei Zellen p und q einströmen

Um die Temperatur in einem bestimmten Punkt eines Wärmeübertragers relativ zu den Ein- und Austrittstemperaturen des Wärmeübertragers zu beschreiben, wird die dimensionslose Temperatur $T_i$ wie folgt definiert:

$$T_1 = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2^i}{\vartheta_1^i - \vartheta_2^i}, \tag{2a}$$

$$T_2 = \frac{\vartheta_2 - \vartheta_2^i}{\vartheta_1^i - \vartheta_2^i}. \tag{2b}$$

Mit den dimensionslosen Temperaturänderungen der Zelle $P_{1j}$ aus Gleichung 1a

$$P_{1j} = \frac{\vartheta^i_{1j} - \vartheta^o_{1j}}{\vartheta^i_{1j} - \vartheta^i_{2j}} \rightarrow P_{1j}(\vartheta^i_{1j} - \vartheta^i_{2j}) - \vartheta^i_{1j} + \vartheta^o_{1j} = 0$$
$$\rightarrow (1 - P_{1j})\vartheta^i_{1j} - \vartheta^o_{1j} + P_{1j}\vartheta^i_{2j} = 0$$

und den dimensionslosen Temperaturen

$$T_{1j} = \frac{\vartheta_{1j} - \vartheta^i_2}{\vartheta^i_1 - \vartheta^i_2} \rightarrow \vartheta_{1j} = T_{1j}(\vartheta^i_1 - \vartheta^i_2) + \vartheta^i_2,$$
$$T_{2j} = \frac{\vartheta_{2j} - \vartheta^i_2}{\vartheta^i_1 - \vartheta^i_2} \rightarrow \vartheta_{2j} = T_{2j}(\vartheta^i_1 - \vartheta^i_2) + \vartheta^i_2,$$

folgt

$$(1 - P_{1j})(T^i_{1j}(\vartheta^i_1 - \vartheta^i_2) + \vartheta^i_2) - (T^i_{1j}(\vartheta^i_1 - \vartheta^i_2) + \vartheta^i_2) + P_{1j}(T^i_{2j}(\vartheta^i_1 - \vartheta^i_2) + \vartheta^i_2) = 0.$$

Wie in Abb. 1 dargestellt, ist $T^i_{1j} = T^o_{1p}$ und $T^i_{2j} = T^o_{2p}$. Somit ergibt sich

$$(1 - P_{1j})T^o_{1p} - T^o_{1j} + P_{1j}T^o_{2q} + (\frac{\vartheta^i_2}{\vartheta^i_1 - \vartheta^i_2})\underbrace{[(1 - P_{1j}) - 1 + P_{1j}]}_{0} = 0,$$

und es folgt

$$(1 - P_{1j})T^o_{1p} - T^o_{1j} + P_{1j}T^o_{2q} = 0, \tag{3a}$$

sowie durch dieselbe Vorgehensweise mit $P_{2j}$ aus Gleichung 1b

$$(1 - P_{2j})T^o_{2p} - T^o_{2j} + P_{2j}T^o_{1q} = 0. \tag{3b}$$

Durch diese zwei Gleichungen können nun die zwei unbekannten dimensionslosen Temperaturen $T^o_{1j}$ und $T^o_{2j}$ berechnet werden.

Für eine einzelne Zelle folgt daher in Matrixschreibweise

$$\begin{bmatrix} T^o_{1j} \\ T^o_{2j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - P_{1j} & P_{1j} \\ P_{2j} & 1 - P_{2j} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T^i_{1j} \\ T^i_{2j} \end{bmatrix},$$
$$\underline{\mathrm{T^o_j}} = \underline{\underline{\boldsymbol{\Phi}_\mathbf{j}}} \cdot \underline{\mathrm{T^i_j}}. \tag{4}$$

Für das gesamte Netzwerk mit $n_c$ Apparaten kann somit folgender Zusammenhang zwischen Ein- und Austrittstemperaturen aufgestellt werden:

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathrm{T^o_1}} \\ \underline{\mathrm{T^o_2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbb{I}}} - \underline{\underline{\boldsymbol{\Phi}_\mathbf{1}}} & \underline{\underline{\boldsymbol{\Phi}_\mathbf{1}}} \\ \underline{\underline{\boldsymbol{\Phi}_\mathbf{2}}} & \underline{\underline{\mathbb{I}}} - \underline{\underline{\boldsymbol{\Phi}_\mathbf{2}}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{T^i_1} \\ \underline{T^i_2} \end{bmatrix},$$

$$\underline{\mathrm{T}^{\mathrm{o}}} = \underline{\underline{\mathbf{\Phi}}} \cdot \underline{\mathrm{T}^{\mathrm{i}}}. \tag{5}$$

Die Funktionsmatrix $\underline{\underline{\Phi}}$ besteht aus 4 Untermatrizen, wie in Gleichung 5 dargestellt. Die $nxn$-dimensionalen Diagonalmatrizen $\underline{\underline{\Phi_1}}$ und $\underline{\underline{\Phi_2}}$ enthalten an der $(i, i)$ Position die Betriebscharakteristik $\Phi_1$ bzw. $\Phi_2$ des ersten bzw. zweiten Stroms des $i$-ten Apparats gemäß Gleichung 4. Die Temperaturvektoren, mit der Dimension $2n_i$, bzw. die Untervektoren enthalten die jeweiligen Ein- bzw. Austrittstemperaturen der entsprechenden Apparate.

Die Funktionsmatrix beschreibt die wärmetauscherspezifischen Eigenschaften, die sich aus Übertragungsfähigkeit, Wärmestrom, Stoffdaten, etc. ergeben. Über die Struktur des Netzwerks, also die Verschaltung der einzelnen Zellen enthält Gleichung 5 keine Informationen, weshalb auch der Vektor der Eintrittstemperaturen unbekannte Temperaturen beinhaltet. Die Zusammenhänge zwischen den Zellen können, unter Berücksichtigung der Verschaltung des Netzwerks, wie folgt beschrieben werden:

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathrm{T}_1^{\mathrm{i}}} \\ \underline{\mathrm{T}_2^{\mathrm{i}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathrm{S}_{11}}} & \underline{\underline{\mathrm{S}_{12}}} \\ \underline{\underline{\mathrm{S}_{21}}} & \underline{\underline{\mathrm{S}_{22}}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{T_1^o} \\ \underline{T_2^o} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{I}_1}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{I}_2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\mathrm{T}_1^{\mathrm{I}}} \\ \underline{\mathrm{T}_2^{\mathrm{I}}} \end{bmatrix},$$

$$\underline{\mathrm{T}^{\mathrm{i}}} = \underline{\underline{\mathrm{S}}} \cdot \underline{\mathrm{T}^{\mathrm{o}}} + \underline{\underline{\mathbf{I}}} \cdot \underline{\mathrm{T}^{\mathrm{I}}}. \tag{6}$$

Die Verschaltung der einzelnen Fluidströme innerhalb des Netzwerkes wird durch die Strukturmatrix **S** beschrieben. Diese besteht aus vier $n_c \times n_c$-dimensionalen Untermatrizen, welche jeweils $x \in [0, 1]$ enthalten. Der Wert $x$ repräsentiert dabei den prozentualen

$\mathbf{S_{11}}(i, j) = x$: Anteil des aus Fluidstroms 1, aus Apparat j austretenden Fluidstroms, welcher in Apparat i als Fluidstrom 1 eintritt,

$\mathbf{S_{12}}(i, j) = x$: Anteil des aus Fluidstroms 2, aus Apparat j austretenden Fluidstroms, welcher in Apparat i als Fluidstrom 1 eintritt,

$\mathbf{S_{21}}(i, j) = x$: Anteil des aus Fluidstroms 1, aus Apparat j austretenden Fluidstroms, welcher in Apparat i als Fluidstrom 2 eintritt,

$\mathbf{S_{22}}(i, j) = x$: Anteil des aus Fluidstroms 2, aus Apparat j austretenden Fluidstroms, welcher in Apparat i als Fluidstrom 2 eintritt.

Jene Apparate, in welche Fluidströme in das Netzwerk einströmen, werden durch die Inputmatrix **I** definiert. Die Dimension ist dabei abhängig von der Anzahl der eintretenden Fluidströme $n_1^I$ und $n_2^I$, weshalb die Untermatrizen $\mathbf{I_1}$ und $\mathbf{I_2}$ die Dimensionen $n_c \times n_1^I$ und $n_c \times n_2^I$ haben. Die Einträge $x \in \{0, 1\}$ repräsentieren dabei den Eintritt in das Netzwerk wie folgt:

$\mathbf{I_1}(i, j) = 1$: der Fluidstrom j tritt als Fluidstrom 1 des Apparats i in das Netzwerk ein,

$\mathbf{I_2}(i, j) = 1$: der Fluidstrom j tritt als Fluidstrom 2 des Apparats i in das Netzwerk ein.

Die Temperaturen der in das Netzwerk eintretenden Ströme sind in $\mathbf{T^I}$ enthalten. Die Dimension der Untermatrizen ergibt sich, entsprechend der zugehörigen Inputmatrix, zu $n_1^I \times 1$ für $\mathbf{T_1^I}$ und zu $n_2^I \times 1$ für $\mathbf{T_2^I}$.

Setzt man Gleichung 6 in Gleichung 5 ein, ergibt sich somit der Vektor der Austrittstemperaturen der einzelnen Zellen zu

$$\underline{\mathbf{T^o}} = (\underline{\underline{\mathbb{I}}} - \underline{\underline{\mathbf{\Phi}}} \cdot \underline{\underline{\mathrm{S}}})^{-1} \cdot \underline{\underline{\mathbf{\Phi}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{I}}} \cdot \underline{\mathrm{T}^{\mathrm{I}}}. \tag{7}$$

Damit können die Austrittstemperaturen der einzelnen Apparate berechnet werden. Um die resultierenden Austrittstemperaturen des gesamten Netzwerks zu erhalten, können diese durch die Outputmatrix **O** extrahiert werden:

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathrm{T}_1^{\mathrm{O}}} \\ \underline{\mathrm{T}_2^{\mathrm{O}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{O}_1}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{O}_2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\mathrm{T}_1^{o}} \\ \underline{\mathrm{T}_2^{o}} \end{bmatrix},$$

$$\underline{\mathrm{T}^{\mathrm{O}}} = \underline{\underline{\mathbf{O}}} \cdot \underline{\mathrm{T}^{\mathrm{o}}}. \tag{8}$$

Analog zur Inputmatrix, ist auch die Outputmatrix aufgebaut, und gibt den entsprechenden Anteil der aus den Apparaten strömenden, das Netzwerk verlassenden Fluidstöme an. Der Wert $x$ repräsentiert dabei wiederum den prozentualen Anteil,

$\mathbf{O_1}(i,j) = x$: des Fluidstroms 1, der aus dem Apparat j strömt und das Netzwerk verlässt,

$\mathbf{O_2}(i,j) = x$: des Fluidstroms 2, der aus dem Apparat j strömt und das Netzwerk verlässt.

Damit ergeben sich die Dimensionen der Untermatrizen zu $n_1^O \times n_c$ für $\mathbf{O_1}$ und für $\mathbf{O_2}$ zu $n_2^O \times n_c$.

Mit Gleichung 7 und Gleichung 8 kann man die Schaltungscharakteristik $\mathbf{\Phi^S}$ des Netzwerks definieren. Mit ihr kann der Einfluss der Eintritts- auf die Austrittstemperaturen des gesamten Netzwerks beschrieben werden. Die Dimension ergibt sich aus der Anzahl, der aus bzw. eintreten Fluidströme zu $(n_1^I + n_2^I) \times (n_1^O + n_2^O)$

$$\begin{aligned} \mathbf{T^O} &= \mathbf{O} \cdot \underbrace{(\underline{\underline{\mathbb{I}}} - \underline{\underline{\mathbf{\Phi}}} \cdot \underline{\underline{\mathrm{S}}})^{-1} \cdot \underline{\underline{\mathbf{\Phi}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{I}}}} \cdot \underline{\mathrm{T}^{\mathrm{I}}}, \\ \mathbf{T^O} &= \qquad\qquad \mathbf{\Phi^S} \qquad\qquad \cdot \mathbf{T^I}. \end{aligned} \tag{9}$$

## 1.3 Vorgehensweise bei der Berechnung

Die Berechnung eines Wärmeübertrager(-netzwerk)s unter Anwendung der Zellenmethode erfolgt mit folgender Vorgehensweise:

1. Aufteilen des Wärmeübertragers in Einzelapparate
2. Definition der Eintrittstemperaturen $\underline{\mathbf{T^I}}$
3. Bestimmung der Betriebscharakteristik der einzelnen Apparate und Definition der Funktionsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{\Phi}}}$
4. Definition der Strukturmatrix $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$, Inputmatrix $\underline{\underline{\mathbf{I}}}$ und Outputmatrix $\underline{\underline{\mathbf{O}}}$
5. Lösen des linearen Gleichungssystems von Gleichung 9
6. Gegebenenfalls anpassen der Betriebsparameter und wiederholen der Schritte 3 bis 6