



САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет Прикладной математики – Процессов управления

Об исследовании доли ВИЧ-инфицированных среди некоторых групп населения

Подготовила:

Заведующий кафедрой:

Научный руководитель:

студентка гр. 14.Б11-пу, Зуенок К. В.
д. ф.-м. наук, профессор Петросян Л. А.
д. ф.-м. наук, доцент Громова Е. В.

Санкт-Петербург, 2018



Проблемы глобального здравоохранения:

- Сбор информации
- Анализ информации
- Реализация программ лечения и профилактики



Постановка задачи

Дана популяция P , имеющая размер $N = |P|$, выборка S объемом $N_S = |P|$ с нарушенным условием репрезентативности, $S \subset P$.

Необходимо:

- Разделить рассматриваемое население P на возможные категории: $S_{(.)}$, $I_{(..)}$.
- Сформулировать математическую модель.
- Оценить доли здоровых $s_{(.)}$ и ВИЧ-инфицированных $i_{(..)}$ индивидов.
- Оценить количество людей в различных состояниях $S_{(.)}$, $I_{(..)}$ для всей популяции P .
- Осуществить программную реализацию модели.



Математическая модель Демографический баланс

- Все население делится на несколько групп
- Все индивиды в группе считаются одинаковыми
- Существуют переходы между группами, входной поток и выходной

Динамика i -й группы описывается следующим уравнением:

$$\dot{X}_i = \sum_{i \neq j} (\alpha_{ij}(X) - \alpha_{ji}(X)) - \alpha_{ii}(X) + \omega_i,$$

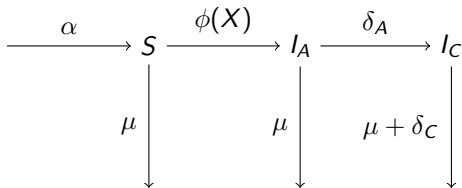
где
 X_i - количество человек в i -ой группе,
 $\alpha_{ij}(X)$ - скорость перехода из группы i в группу j ,
 $\alpha_{ii}(X)$ - отток из i -й группы, ω_i - приток в i -ю группу.
Предполагается, что выполнены следующие условия:
A1. $\alpha_{ij}(X) \geq 0$ и $\omega_i(X) \geq 0$ для всех i, j .
A2. Из $X_i = 0$ следует $\alpha_{ij}(X)$ и $\alpha_{ii}(X) = 0$.



Математическая модель

Простейшая модель распространения инфекции

Вся популяция - три категории:



α - входной поток (рождаемость), μ - выходной поток (смертность),
 δ_A - продолжительность острой фазы,
 $\phi(X)$ - уровень перехода от острой фазы к хронической (коэффициент
заболеваемости).



Математическая модель

Простейшая модель распространения инфекции

$$\begin{aligned}\dot{S} &= \alpha - (\phi(X) + \mu)S, \\ \dot{I}_A &= \phi(X)S - (\mu + \delta_A)I_A, \\ \dot{I}_C &= \delta_A I_A - (\mu + \delta_C)I_C,\end{aligned}$$

где

$$\phi(X) = \frac{\beta_A I_A + \beta_C I_C}{N},$$

$$X = [S \quad I_A \quad I_C],$$

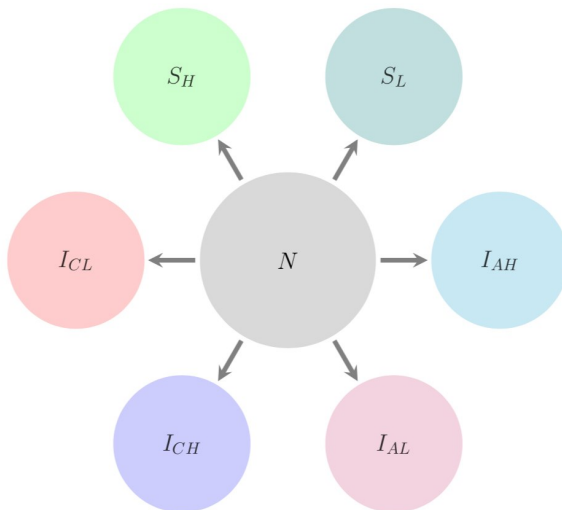
$$N = S + I_A + I_C,$$

β_A, β_C - вероятность заражения за одно взаимодействие для остро и хронически инфицированного соответственно.



Математическая модель

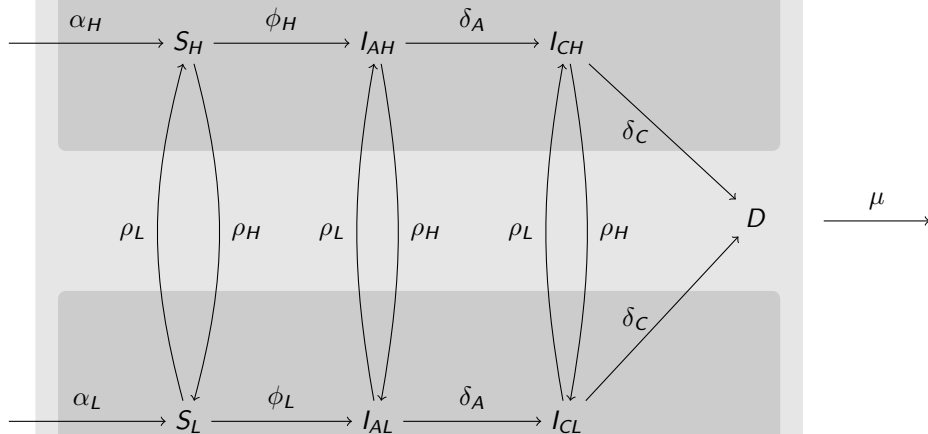
Модель с оценкой поведения





Математическая модель

Модель с оценкой поведения





Математическая модель

Модель с оценкой поведения

$$\dot{S}_H = \alpha_H - (\phi_H(X) + \rho_H + \mu)S_H + \rho_L S_L,$$

$$\dot{S}_L = \alpha_L - (\phi_L(X) + \rho_L + \mu)S_L + \rho_H S_H,$$

$$\dot{I}_{CH} = \delta_A I_{AH} - (\rho_H + \mu + \delta_C)I_{CH} + \rho_L I_{CL},$$

$$\dot{I}_{CL} = \delta_A I_{AL} - (\rho_L + \mu + \delta_C)I_{CL} + \rho_H I_{CH},$$

$$\dot{I}_{AH} = \phi_H(X)S_H - (\rho_H + \mu + \delta_A)I_{AH} + \rho_L I_{AL},$$

$$\dot{I}_{AL} = \phi_L(X)S_L - (\rho_L + \mu + \delta_A)I_{AL} + \rho_H I_{AH},$$

где $X = [I_{CH} \ I_{CL} \ I_{AH} \ I_{AL} \ S_H \ S_L]'$ - вектор переменных состояния,
 $\phi_H(X)$ и $\phi_L(X)$ - коэффициенты заболеваемости, δ_A - коэффициент перехода
заболевания из острой формы в хроническую,
 δ_C - коэффициент смертности хронически инфицированных из-за СПИДа.



Выборка и оценка состояний

Вероятность, что случайный высокорисковый (низкорисковый соответственно) человек R находится в HRE в случайный момент времени в течение периода отбора:

$$p_H = P(HRE | R = H),$$

$$p_L = P(HRE | R = L).$$



Выборка и оценка состояний

Вероятность случайного индивида R , находящегося в HRE в случайный момент времени, относиться к одному из состояний, соответствующих категории высокого риска, т.е. находиться в $X \in Z_H = \{S_H, I_{AH}, I_{CH}\}$, вычисляется с помощью формулы Байеса:

$$\begin{aligned} P(X|HRE) &= \frac{P(HRE|R=H)P(X)}{P(HRE|R=H)P(R=H) + P(HRE|R=L)P(R=L)} \\ &= \frac{p_H \frac{X}{N}}{p_H \frac{N_H}{N} + p_L \frac{N_L}{N}} = \frac{r_b X}{r_b N_H + N_L}, \end{aligned}$$

где $N_H = S_H + I_{AH} + I_{CH}$, $N_L = S_L + I_{AL} + I_{CL}$, $N = N_H + N_L$ и $rb = p_H/p_L$.



Вычисление долей в общей популяции

Пусть N_S - количество индивидов, которые были отобраны во время посещения HRE в единицу времени:

$$N_S = \hat{S}_H + \hat{S}_L + \hat{I}_{AH} + \hat{I}_{AL} + \hat{I}_{CH} + \hat{I}_{CL}.$$

Обозначим число лиц в соответствующих категориях через $\hat{S}_{(.)}$ и $\hat{I}_{(.)}$.

Обозначим известные доли соответствующих групп внутри выборки $\hat{s}_{(.)}$ и $\hat{i}_{(.)}$:

$$\hat{s}_H = \frac{\hat{S}_H}{N_S}, \quad \hat{s}_L = \frac{\hat{S}_L}{N_S}, \quad \hat{i}_{AH} = \frac{\hat{I}_{AH}}{N_S}, \quad \hat{i}_{AL} = \frac{\hat{I}_{AL}}{N_S}, \quad \hat{i}_{CH} = \frac{\hat{I}_{CH}}{N_S}, \quad \hat{i}_{CL} = \frac{\hat{I}_{CL}}{N_S}.$$



Вычисление долей в общей популяции

Случай для 6 групп

$$\left\{ \begin{array}{l} s_H r_b = \hat{s}_H r_b (s_H + i_{AH} + i_{CH}) + \hat{s}_H (s_L + i_{AL} + i_{CL}), \\ s_L = \hat{s}_L r_b (s_H + i_{AH} + i_{CH}) + \hat{s}_L (s_L + i_{AL} + i_{CL}), \\ i_{AH} r_b = \hat{i}_{AH} r_b (s_H + i_{AH} + i_{CH}) + \hat{i}_{AH} (s_L + i_{AL} + i_{CL}), \\ i_{AL} = \hat{i}_{AL} r_b (s_H + i_{AH} + i_{CH}) + \hat{i}_{AL} (s_L + i_{AL} + i_{CL}), \\ i_{CH} r_b = \hat{i}_{CH} r_b (s_H + i_{AH} + i_{CH}) + \hat{i}_{CH} (s_L + i_{AL} + i_{CL}), \\ i_{CL} = \hat{i}_{CL} r_b (s_H + i_{AH} + i_{CH}) + \hat{i}_{CL} (s_L + i_{AL} + i_{CL}), \\ s_H + s_L + i_{AH} + i_{AL} + i_{CH} + i_{CL} = 1. \end{array} \right.$$



Вычисление долей в общей популяции

Общий случай

$$\left[\begin{pmatrix} r_b l_{[H]} & 0 \\ 0 & l_{[L]} \end{pmatrix} + (1 - r_b) \begin{pmatrix} \text{diag}(\hat{x}_H) & 0 \\ 0 & \text{diag}(\hat{x}_L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_H \\ x_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_H \\ \hat{x}_L \end{pmatrix},$$

$$x_H = (s_H \ i_{CH})^T, \ x_L = (i_{CL})^T,$$

$$\hat{x}_H = (\hat{s}_H \ \hat{i}_{CH})^T, \ \hat{x}_L = (\hat{i}_{CL})^T,$$

$$s_L = 1 - s_H - i_{CH} - i_{CL}.$$



Результаты

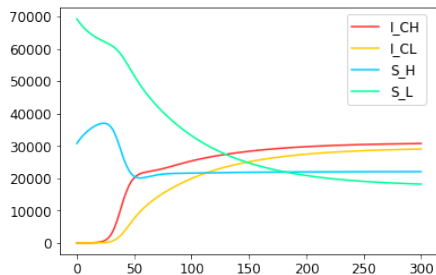
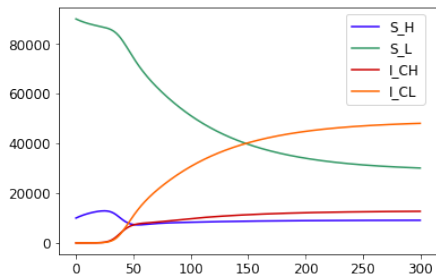


Рис.: Динамика популяции до и после переоценки.



Результаты

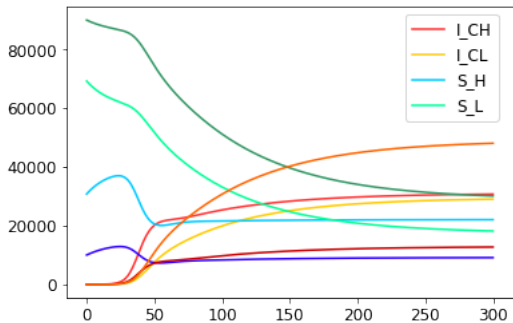


Рис.: Динамика популяции до и после переоценки.



Результаты

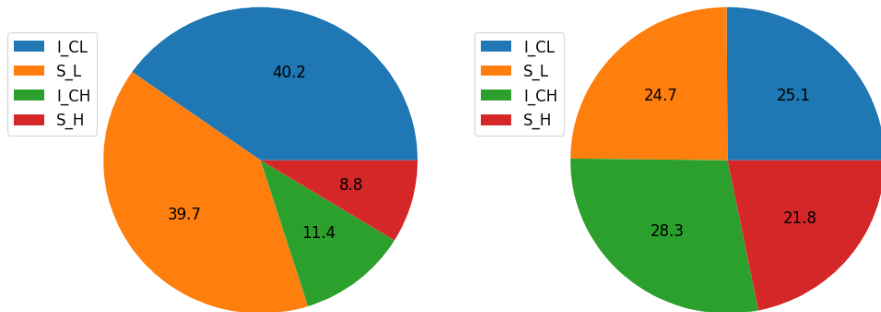


Рис.: Распределение населения до и после переоценки, $T = 150$.







- Анализ существующих эпидемиологических моделей распространения инфекции.
- Математическая модель, представляющая популяцию как совокупность шести различных групп, учитывающая два уровня рискованного поведения и различные стадии инфицирования рассматриваемого населения: острая и хроническая.
- Оценка соотношения категорий людей в выборке для нерепрезентативных данных, основываясь на их поведении.
- Вычисление долей в общей популяции для конкретного примера четырех состояний и для общего случая.
- Программная реализация и численный эксперимент для конкретной выборки.

<https://github.com/chris142/BachelorDiplomaHIV>







Список литературы

-  Hall H. I., Song R., Rhodes P., Prejean J., An Q., Lee L. M., Karon J., Brookmeyer R., Kaplan E. H., McKenna M. T. & Janssen R. S. (2008) Estimation of HIV incidence in the United States. JAMA 300, 520–529.
-  Beyrer C., Baral S. D., Collins C., Richardson E. T., Sullivan P. S., Sanchez J., Trapence G., Katabira E., Kazatchkine M., Ryan O., Wirtz A. L. & Mayer K. H. (2016) The global response to HIV in men who have sex with men. The Lancet 388, 198–206.
-  Paul Van de Ven, Pamela Rodden, June Crawford, Susan Kippax: A comparative demographic and sexual profile of older homosexually active men, Journal of Sex Research, 1997.
-  Данные «Объединённой программы ООН по ВИЧ/СПИДу». Декабрь 2006.







Список литературы

-  Zhang X., Zhong L., Romero-Severson E., Alam S. J., Henry C. J., Volz E. M. & Koopman J. S. (2012) Episodic HIV risk behavior can greatly amplify HIV prevalence and the fraction of transmissions from acute HIV infection. Stat. Commun. Infec. Dis. 4.
-  D. Gromov, I. Bulla, E. O. Romero-Severson, and O. S. Serea. Numerical optimal control for hiv prevention with dynamic budget allocation. Submitted to Mathematical Medicine & Biology, Online: <https://arxiv.org/abs/1611.06728>.
-  D. Gromov, I. Bulla, E. O. Romero-Severson. Optimal Resource Allocation for HIV Prevention and Control // September 22, 2017
-  E. O. Romero-Severson, E. Volz, J. S. Koopman, T. Leitner, and E. L. Ionides. Dynamic variation in sexual contact rates in a cohort of HIV-negative gay men. American Journal of Epidemiology, 182(3):255–262, 2015.



Список литературы

-  J. M. Hyman and E. A. Stanley, Using mathematical models to understand the AIDS epidemic, Math. Biosci. 90:415-474 (1988).
-  R. M. Anderson, S. P. Blythe, S. Gupta, and E. Konings. The transmission dynamics of the human immunodeficiency virus type 1 in the male homosexual community in the United Kingdom: the influence of changes in sexual behaviour, Phil. Trans. Roy. Soc. B 325:45-98 (1989).
-  R. M. May and R. M. Anderson, The transmission dynamics of human immunodeficiency virus (HIV), Phil. Trans. Roy. Soc. B 321:565-607 (1989).
-  H. W. Hethcote, A model for HIV transmission and AIDS, in Mathematical Approaches to Problems in Resource Management and Epidemiology, Springer-Verlag, Berlin, 1989, eds. C. Castillo-Chavez, S. A. Levin, C. A. Shoemaker, pp. 164-176.

