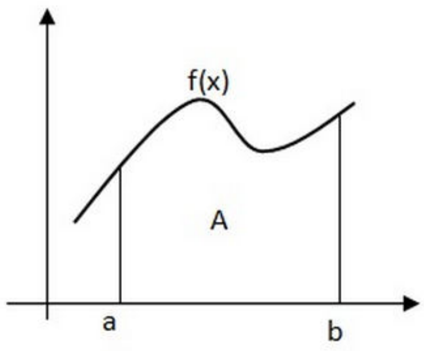
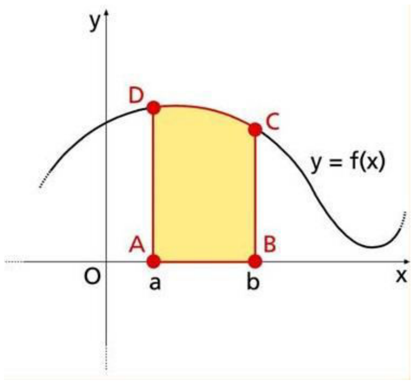
Integrali definiti

Data una funzione f(x), l'integrale definito in un certo intervallo [a, b] ha un significato geometrico preciso: rappresenta l'area *A* compresa tra il grafico della funzione f(x), l'asse x e le due rette verticali x=a e x=b (area sottesa al grafico su un intervallo a scelta [a, b]).



Il trapezoide

Dati una funzione y=f(x) e un intervallo chiuso limitato [a, b] nel quale la funzione è continua e positiva (o nulla), si chiama trapezoide la figura piana delimitata dall'asse x, dalle rette parallele all'asse y passanti per gli estremi dell'intervallo [a, b] e dal grafico della funzione f su tale intervallo. Essenzialmente si tratta di un quadrilatero mistilineo di vertici A (a;0), B (b;0), C (b; f(b)), D (a; f(a)):



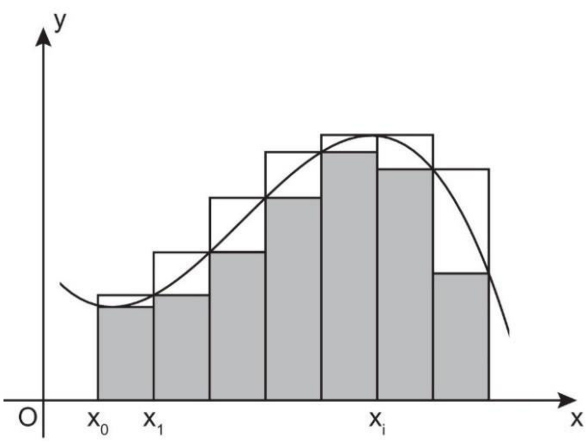
L'area S di un trapezoide non può essere calcolata in modo elementare, tuttavia possiamo approssimarla utilizzando il seguente procedimento:

- Dividiamo l'intervallo [a, b] in n parti uguali
- Consideriamo gli n intervalli aventi ciascuno per base un segmento dell'intervallo partizionato e per altezza il punto di minimo (se vogliamo approssimare per difetto) o di massimo (se vogliamo approssimare per eccesso) che la funzione assume in tale intervallo;
- Indichiamo con s_n la somma delle aree di tutti gli n rettangoli.

$$s_n = m_1h + m_2h + \cdots + m_nh$$
$$S_n = M_1h + M_2h + \cdots + M_nh$$

Otteniamo cosi due successioni di aree s_n e S_n tali che, per ogni n, l'area S del trapezoide risulta compresa fra l'area per difetto e quella per eccesso:

$$s_n \leq S \leq S_n$$



Calcolo integrale definito

Nella pratica, il procedimento per trovare l'area A non tiene conto di tutte queste sottigliezze tecniche. Esiste infatti il teorema fondamentale del calcolo integrale, che ci permette di calcolare il valore dell'integrale definito

$$\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a)$$

Applicazione teorema fondamentale

Calcoliamo $\int_2^3 2x\,dx$:

Utilizziamo l'integrale indefinito per determinare le primitive di 2x:

$$\int 2x\,dx = x^2 + c$$

Per applicare la formula del teorema fondamentale scegliamo la primitiva con c=0, ossia x^2:

$$\int_2^3 2x\,dx = [x^2]_2^3$$

Sostituiamo a x prima il valore 3 e poi il valore 2, ottenendo:

$$[x^2]_2^3 = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$$

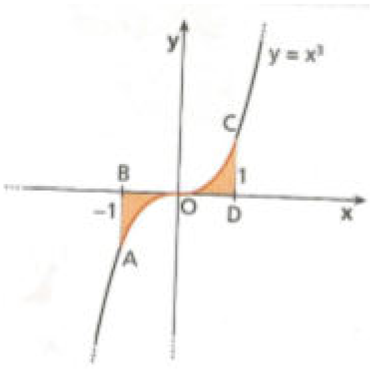
Caso particolare: la funzione è in parte negativa.

Consideriamo la funzione $y = x^3$

Calcoliamo l'integrale definito di intervallo [1; -1]:

$$\int_{-1}^{1} x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

Questo integrale non fornisce la misura dell'area S che però in realtà non è nulla. Risulta necessario scomporre la funzione nelle superfici ABO, dove la funzione è negativa, e OCD, dove invece positiva.



$$S = -\int_{-1}^{0} x^3\,dx + \int_0^1 x^3\,dx = -\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = -\left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

In generale, per calcolare l'area S formata da porzioni di figure che stanno in parte sopra l'asse x e in parte sotto, occorre scomporre le aree e calcolare gli integrali negli intervalli dove la funzione ha segno costante (positivo o negativo), tenendo presente che l'integrale di una funzione negativa va preceduto dal segno meno

---

Il valore medio di una funzione

Il teorema della media afferma l'esistenza del punto z (punto medio), ma non fornisce indicazioni su come calcolarlo. Tuttavia è possibile ricavare f(z) dalla seguente uguaglianza dividendo entrambi i membri per (b - a).

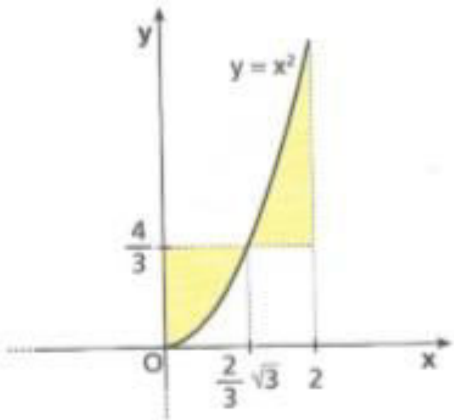
$$\int_d^b f(x)\,dx = (b-d)\cdot f(z)$$

$$f(z) = \frac{1}{(b-a)}\cdot\int_d^b f(x)\,dx$$

Il valore $f(z)$ viene definito valore medio della funzione $f(x)$

Applicazione pratica

Calcoliamo il valore medio della funzione $y = x^2$, continua nell'intervallo [0; 2]



$$f(z) = \frac{1}{2-0}\cdot\int_0^2 x^2\,dx$$

Da cui si ottiene:

$$f(z) = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{8}{3}-\frac{0}{3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

Poiché $f(z) = z^2$ possiamo ricavare il valore di z:

$$z^2 = \frac{4}{3}\ ; \quad z = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

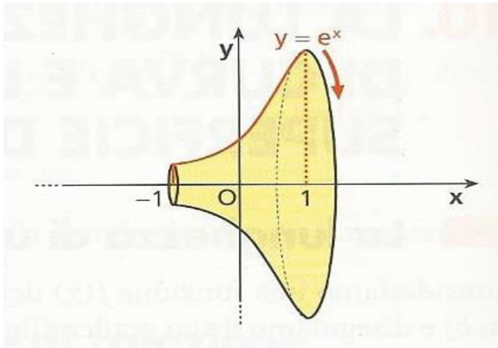
Il volume di un solido di rotazione

Dato il trapezoide ABCD esteso all'intervallo [a,b], delimitato dal grafico della funzione y=f(x) (positiva o nulla), dall'asse x e dalle rette x=a e x=b, si chiama volume del solido che si ottiene ruotando il tapezoide intorno all'asse x di un giro completo il numero espresso dal seguente integrale:

$$V = \pi\cdot\int_a^b f_{(x)}^2\cdot dx$$

Applicazione pratica

Calcoliamo il volume di V del solido ottenuto dalla rotazione completa attorno all'asse x della regione di piano delimitat dal grafico della funzione $y = e^x$, per x nellnintervallo [-1; 1].



$$v = \pi \int_{-1}^{1} (e^x)^2 \cdot dx = \pi \int_{-1}^{1} e^{2x} \cdot dx = \pi \cdot \left[\frac{e^2 x}{2}\right]_{-1}^{1} = \pi \left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^{-2}}{2}\right)$$