FACULTAD DE INGENIERIA Y CIENCIAS EXACTAS

MATERIA: ARQUITECTURA DE COMPUTADORES (3.4.072)

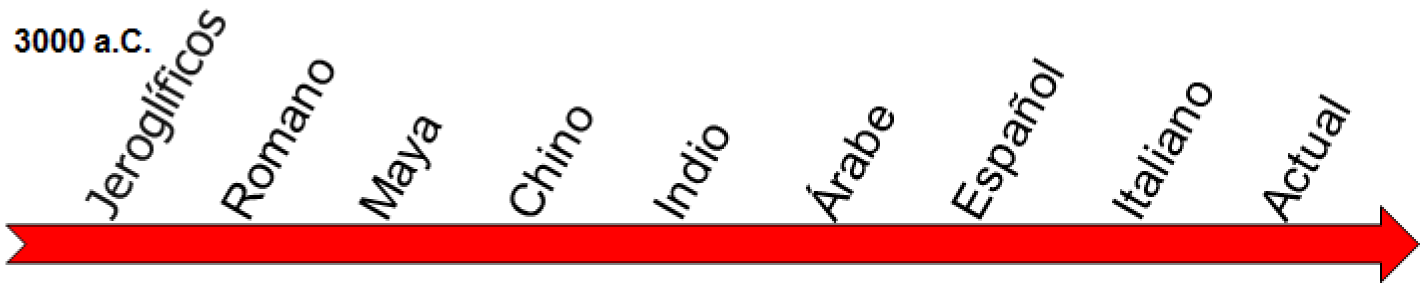
Códigos y Sistemas Numéricos

Ciudad de Buenos Aires, Argentina

Arquitectura de Computadores

Sistemas de Numeración

- Evolución:



Pueden ser de dos tipos: Veamos un ejemplo para el número decimal 221

- **No Posicionales:**
En estos, el valor del símbolo **no depende** la posición que este ocupe dentro del número. Veamos que C equivale a 100 y vale lo mismo en las dos posiciones

  CCXXI (numeración Romana: Dos veces cien “C”; Dos veces Diez “X”; Una unidad “I”)

- **Posicionales:**
En estos, el valor del símbolo **depende** la posición que este ocupe dentro del número o sea cada símbolo está afectado por un factor de escala. En este caso el primer dos vale doscientos y el segundo veinte

  221 (numeración Decimal: 2 centenas, 2 decenas y una unidad de izquierda a derecha)

Sistemas de Numeración Posicionales:

- Se calcula como un polinomio, denominado "**polinomio de potencias de la base**" o "**Teorema Fundamental de la Numeración**".

Todos los sistemas de numeración posicionales se rigen por este teorema:

$$N^o \text{ en base } b = \ldots d_2\, d_1\, d_0\ ,\ d_{-1}\, d_{-2}\, d_{-3} \ldots {}_{(b)}$$

Los dígitos varían entre b símbolos [0 y b-1]

Valores posibles de los diez dígitos en base 10 : ***[0,1,2,3,4,5,6,7,8,9]***

$$N^o{}_{(b)} = d_n\, b^n + \ldots d_2\, b^2 + d_1\, b^1 + d_0\, b^0 + d_{-1}\, b^{-1} + d_{-2}\, b^{-2} + d_{-3}\, b^{-3} \ldots + d_{-k}\, b^{-k}$$

Parte entera ***Parte fraccionaria***

Arquitectura de Computadores

- **La expresión genérica para un número en cualquier base es:**

$$\boxed{N^{\underline{o}}_{(b)} = \sum_{i=-k}^{n} d_i \, . \, b^i}$$

- Ejemplos de las bases usadas en informática
- BASE 2 (binaria) b= 2 d= [0,1]
- BASE 8 (octal) b= 8 d= [0,1,2,3,4,5,6,7]
- BASE 10 (decimal) b=10 d= [0,1,2,3,4,5,6,7,8,9]
- BASE 16 (hexadecimal) b=16 d= [0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F]

En este último caso los símbolos faltantes de los dígitos de la numeración arábiga se reemplazan con las primeras letras del alfabeto para cubrir los números decimales 10,11,12,13,14 y 15

Potencia de un Sistema Numérico:

- La potencia de un sistema numérico es inversamente proporcional a la cantidad símbolos que necesita para representar una cantidad.
  - SE TIENE LA CANTIDAD DE 15 ELEMENTOS
  - BASE 2 (binaria) $15_{(10)} \rightarrow 1111_{(2)} \rightarrow$ Menos potente
  - BASE 8 (octal) $15_{(10)} \rightarrow 17_{(8)}$
  - BASE 10 (decimal) $15_{(10)} \rightarrow 15_{(10)}$
  - BASE 16 (hexadecimal) $15_{(10)} \rightarrow F_{(10)} \rightarrow$ Mas potente

El número $10_{(xx)}$ en cualquier base representa la base XX

- $10_{(2)} = 2_{(10)}$; $10_{(8)} = 8_{(10)}$; $10_{(10)} = 10_{(10)}$; $10_{(16)} = 16_{(10)}$

Ejemplo en el Sistema de Numeración Decimal:

- Base 10 → posee 10 símbolos
- Símbolos → [0 1 2 3 4 5 6 7 8 9]
  (Cada dígito puede tomar cualquiera de estos símbolos con su valor asociado)
- Un determinado valor, denominado número decimal, se puede expresar entonces de la siguiente forma:

$$\textbf{Número} = \Sigma\ (\text{dígito})_i * (\text{Base})^i$$

i es la posición respecto a la coma o punto
La primera posición a la derecha de la coma i=-1

La primera posición a la izquierda de la coma i=0

El número decimal ***123,456***$_{(10)}$ puede expresarse como

$$N^o_{(10)} = 1\,.10^2 + 2\,.10^1 + 3.10^0 + 4.10^{-1} + 5.10^{-2} + 6.10^{-3}$$

- **Veamos un ejemplo en cualquier base**

Sistema Trinario:

- Base 3
- Símbolos: [0 1 2]
- Su polinomio equivalente es:

$$N^o_{(3)}= d_n\, 3^n + \ldots\; d_2\, 3^2 + d_1\, 3^1 + d_0\, 3^0 + d_{-1}\, 3^{-1} + d_{-2}\, 3^{-2} + d_{-3}\, 3^{-3} \ldots + d_{-k}\, 3^{-k}$$

- **Sistema Binario:**

- Base 2
- Símbolos: [0 1]
- Su polinomio equivalente es:

$$N^o_{(2)}= d_n\, 2^n + \ldots d_2\, 2^2 + d_1\, 2^1 + d_0\, 2^0 + d_{-1}\, 2^{-1} + d_{-2}\, 2^{-2} + d_{-3}\, 2^{-3} \ldots + d_{-k}\, 2^{-k}$$

- **Sistema Octal:**
  - Base 8
  - Símbolos: [0 1 2 3 4 5 6 7]
  - Su polinomio equivalente es:

$$N^{o}_{(8)}= d_n\, 8^n+\ldots d_2\, 8^2+d_1\, 8^1+d_0\, 8^0+d_{-1}\, 8^{-1}+d_{-2}\, 8^{-2}+d_{-3}\, 8^{-3}\ldots+d_{-k}\, 8^{-k}$$

- **Sistema Hexadecimal:**
  - Base 16
  - Símbolos: [0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E F]
  - Su polinomio equivalente es:

$$N^{o}_{(16)}= d_n 16^n+\ldots d_2 16^2+d_1 16^1+d_0 16^0+d_{-1} 16^{-1}+d_{-2} 16^{-2}+d_{-3} 16^{-3}\ldots+d_{-k} 16^{-k}$$

UADE
UNA GRAN UNIVERSIDAD

Ejemplo en el Sistema de Numeración Binario:

- Base 2 → posee 2 símbolos
- Símbolos → [0 1]
  (Cada dígito puede tomar cualquiera de dos símbolos con su valor asociado)
- Un determinado valor, denominado número binario, se puede expresar entonces de la siguiente forma:

$$110{,}101_{(2)}$$

Para interpretar este número también se cambia de base porque las potencias de la base y los coeficientes se reemplazan por su valor decimal

$$N^{o}_{(10)} = 1 \,.\, 2^{2} + 1 \,.\, 2^{1} + 0.2^{0} + 1.2^{-1} + 0.2^{-2} + 1.2^{-3}$$

$$N^{o}_{(10)} = 1 \,.\, 4 + 1 \,.\, 2 + 0 \,.\, 1 + 1 \,.\, 0{,}5 + 0 \,.\, 0{,}25 + 1 \,.\, 0{,}125$$

$$N^{o}_{(10)} = 4 + 2 + 0 + 0{,}5 + 0 + 0{,}125 = 6{,}625_{(10)}$$

- **Conversión entre sistemas numéricos:**
- **Decimal a Binario:**
  - **Parte Entera**, Método de las divisiones sucesivas por 2.
  - **Parte Fraccionaria**, Método de las multiplicaciones sucesivas por 2.

Ej.: $14{,}34_{(10)}$ → a Binario

14 | 2
0 7 | 2
1 3 | 2
1 1

$14_{(10)}$ = 1 1 1 0$_{(2)}$

Parte Entera

0,34 . 2 = 0,68
0,68 . 2 = 1,36
0,36 . 2 = 0,72
0,72 . 2 = 1,44

$0{,}34_{(10)}$ = 0 1 0 1$_{(2)}$

Parte Fraccionaria

Valor Final:
$14{,}34_{(10)}$ = **1110,0101**$_{(2)}$

- **Conversión entre sistemas numéricos:**
- **Decimal a Octal:**
  - **Parte Entera**, Método de las divisiones sucesivas por 8.
  - **Parte Fraccionaria**, Método de las multiplicaciones sucesivas por 8.

Ej.: *12342,890625*$_{(10)}$ → a Octal

12342	⌊8				
43	1542	⌊8			
34	74	192	⌊8		
22	22	32	24	⌊8	
6	**6**	**0**	**0**	**3**	

←

***12342*$_{(10)}$ = *30066*$_{(8)}$**

Parte Entera

0,890625 . 8 = **7**,125
0,125000 . 8 = **1**,0

↓

***0,890625*$_{(10)}$ = *71*$_{(8)}$**

Parte Fraccionaria

Valor Final:
***12342,890625*$_{(10)}$ = *30066,71*$_{(8)}$**

- **Conversión entre sistemas numéricos:**
- **Octal a Decimal:**
  - Se aplican los pesos correspondientes al sistema octal.
  - O sea se aplica el **Teorema fundamental de la Numeración**.

Ej.: $3034{,}75_{(8)} \rightarrow$ ***a Decimal***

$N^o_{(8)} = 3 . 8^3 + 0 . 8^2 + 3 . 8^1 + 4 . 8^0 + 7 . 8^{-1} + 5 . 8^{-2}$

$N^o_{(8)} = 3 . 512 + 0 . 64 + 3 . 8 + 4 . 1 + 7 . 0{,}125 + 5 . 0{,}015625$

$N^o_{(8)} = 1564{,}953125_{(10)}$

Valor Final: $3034{,}75_{(8)} = 1564{,}953125_{(10)}$

- **Conversión entre sistemas numéricos:**
- **Octal a Binario:**
  - Por cada símbolo octal se pone su equivalente en binario.

Ej.: $52,3_{(8)} \rightarrow$ a Binario

$5_{(8)} = 101_{(2)}$

$2_{(8)} = 010_{(2)}$

$3_{(8)} = 011_{(2)}$

$$52,3_{(8)} = \underbrace{101}_{5}\ \underbrace{010}_{2},\ \underbrace{011}_{3}\,{}_{(2)}$$

b_2	b_1	b_0	Dec.
4	**2**	**1**	
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	2
0	1	1	3
1	0	0	4
1	0	1	5
1	1	0	6
1	1	1	7

- **Conversión entre sistemas numéricos:**
- **Octal a Hexadecimal:**
  - Hay que llevar a cabo un paso intermedio; es decir, pasar el número a **decimal** o **binario** y éste, por ultimo, a **hexadecimal**.

Ej.: $37_{(8)} \rightarrow$ a Hexadecimal

$3 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0 = 31_{10} \rightarrow$ 31 | 16 $\rightarrow 37_{(8)} = 1F_{(16)}$

15   1

Pasaje por Decimal

$37_{(8)} \left\{ \begin{array}{l} 3 = 011 \\ 7 = 111 \end{array} \right\} \; 0\,0\,\underbrace{0\,1}_{1}\,\underbrace{1\,1\,1\,1}_{F}{}_{(2)} \rightarrow 37_{(8)} = 1F_{(16)}$

Pasaje por Binario

b_2	b_1	b_0	Dec.
4	**2**	**1**	
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	2
0	1	1	3
1	0	0	4
1	0	1	5
1	1	0	6
1	1	1	7

UADE
UNA GRAN UNIVERSIDAD
FUNDACIÓN UADE

- De derecha a izquierda cada cuatro símbolos binarios se convierte a hexadecimal.

Ej.: $DF4_{(16)} \rightarrow$ a Binario

$D_{(16)} = 13_{(10)} = \mathbf{1101}_{(2)}$

$F_{(16)} = 15_{(10)} = \mathbf{1111}_{(2)}$

$4_{(16)} = 04_{(10)} = \mathbf{0100}_{(2)}$

Obteniéndose:

$$\boldsymbol{DF4_{(16)}} \rightarrow \underbrace{1\,1\,0\,1}_{D}\;\underbrace{1\,1\,1\,1}_{F}\;\underbrace{0\,1\,0\,0}_{4}\,{}_{(2)}$$

b_3	b_2	b_1	b_0	Hex	Dec.
8	4	2	1		
0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	2	2
0	0	1	1	3	3
0	1	0	0	4	4
0	1	0	1	5	5
0	1	1	0	6	6
0	1	1	1	7	7
1	0	0	0	8	8
1	0	0	1	9	9
1	0	1	0	A	10
1	0	1	1	B	11
1	1	0	0	C	12
1	1	0	1	D	13
1	1	1	0	E	14
1	1	1	1	F	15

UADE UNA GRAN UNIVERSIDAD FUNDACIÓN UADE

- **Conversión entre sistemas numéricos:**
- **Hexadecimal a Decimal:**
  - Se desarrolla el polinomio equivalente.

Ej.: $3AC,1_{(16)} \rightarrow$ a Decimal

$$N^o_{(16)} = 3 \cdot 16^2 + A \cdot 16^1 + C \cdot 16^0 + 1 \cdot 16^{-1}{}_{(10)}$$

Reemplazamos los símbolos hexadecimales por su valor decimal: A , C → 10 , 12

$$N^o_{(16)} = 3 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16^1 + 12 \cdot 16^0 + 1 \cdot 16^{-1}{}_{(10)}$$

$$N^o_{(16)} = 768 + 160 + 12 + 0{,}0625 = 940{,}0625_{(10)}$$

UADE
UNA GRAN UNIVERSIDAD
FUNDACIÓN UADE

- **Conversión entre sistemas numéricos:**
- **Hexadecimal a Octal:**
  - Hay que llevar a cabo un paso intermedio; es decir, pasar el número a **decimal** o **binari**o y éste, por ultimo, a **octal**.

Ej.: *$1E_{(16)}$* → a Octal

1° El equivalente decimal será:

$\mathbf{1 . 16^1 + 14 . 16^0 = 16+14 = 30_{(10)}}$

2° por lo que en octal será:

$30 \mid \underline{8}$

$6 \quad 3$

$= 36_{(8)}$

1° El equivalente en binario será:

1 = 0001

E = 1110

$000\ 011\ 110_{(2)}$

agrupamos de a tres

2° por lo que en octal será:

$000_{(2)} = 0_{(8)}$

$011_{(2)} = 3_{(8)}$

$110_{(2)} = 6_{(8)}$

$= 36_{(8)}$

Síntesis de conversión entre sistemas numéricos:

- **Conversión octal, binario o hexadecimal a decimal:**
  - Mediante el Teorema Fundamental de la Numeración.
- **Conversión decimal a hexadecimal, octal o binario:**
  - Método de las divisiones sucesivas por la base (parte entera)
  - Método de las multiplicaciones sucesivas por la base (parte fraccionaria)
- **Conversión hexadecimal u octal a binario:**
  - Se toma cada símbolo se convierte a binario y se toman todos los bits como si fuera un solo número.
- **Conversión octal a hexadecimal:**
  - Se convierte primero octal a decimal o binario y luego el valor obtenido a hexadecimal. *(Si el número tiene fracción, usar sólo binario)*
- **Conversión hexadecimal a octal:**
  - Se convierte primero el valor hexadecimal a decimal o binario y luego el valor obtenido a octal. *(Si el número tiene fracción, usar sólo binario)*