Automaten und Formale Sprachen Tutorium

Teil III.

Christopher Blöcker (inf8871)

FH Wedel, SS 2010

Abschlusseigenschaften formaler Sprachen

Reguläre Sprachen

Die Menge der regulären Sprachen ist abgeschlossen bezüglich

- Komplementbildung
  $\overline{L_1} \in \mathcal{L}_3$
- Konkatenation
  $L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}_3$
- Vereinigung
  $L_1 \cup L_2 \in \mathcal{L}_3$
- Durchschnitt
  $L_1 \cap L_2 \in \mathcal{L}_3$
- Kleene'scher Stern
  ${L_1}^* \in \mathcal{L}_3$

mit $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_3$.

Abschlusseigenschaften formaler Sprachen

Kontext-freie Sprachen

Die Menge der kontext-freien Sprachen ist abgeschlossen bezüglich

- Konkatenation
  $L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}_2$
- Vereinigung
  $L_1 \cup L_2 \in \mathcal{L}_2$
- Kleene'scher Stern
  ${L_1}^* \in \mathcal{L}_2$

mit $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_2$.

Abschlusseigenschaften formaler Sprachen

Kontext-sensitive Sprachen

Die Menge der kontext-sensitive Sprachen ist abgeschlossen bezüglich

- Komplementbildung
  $\overline{L_1} \in \mathcal{L}_1$
- Konkatenation
  $L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}_1$
- Vereinigung
  $L_1 \cup L_2 \in \mathcal{L}_1$
- Durchschnitt
  $L_1 \cap L_2 \in \mathcal{L}_1$
- Kleene'scher Stern
  ${L_1}^* \in \mathcal{L}_1$

mit $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_1$.

Abschlusseigenschaften formaler Sprachen

Rekursiv aufzählbare Sprachen

Die Menge der rekursiv aufzählbaren Sprachen ist abgeschlossen bezüglich

- Konkatenation
  $L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}_0$
- Vereinigung
  $L_1 \cup L_2 \in \mathcal{L}_0$
- Durchschnitt
  $L_1 \cap L_2 \in \mathcal{L}_0$
- Kleene'scher Stern
  ${L_1}^* \in \mathcal{L}_0$

mit $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_0$.

Wiederholung

Das Pumping-Lemma

Sei $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ eine reguläre Sprache.
Dann gibt es eine natürliche Zahl $p \in \mathbb{N}$ derart, dass sich jedes Wort $x \in \mathcal{L}$ mit $|x| \geq p$ zerlegen lässt in drei Teilworte

$$x = uvw$$

mit

1. $|v| > 0$
2. $|uv| \leq p$
3. $\bigwedge_{i \in \mathbb{N}} uv^i w \in \mathcal{L}$

Aufgaben

Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Sprachen nicht regulär sind.

1. $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ ist kein Palindrom}\}$
2. $L = \{a^p \mid p \text{ ist eine Primzahl}\}$

Herangehensweise

1. Annahme, L sei regulär
2. Wenn L regulär ist, so muss das Pumping-Lemma gelten
3. Finden eines Wortes, für das es keine zum Pumpen geeignete Unterteilung gibt
4. Gegenbeispiel gefunden $\rightarrow$ Annahme muss falsch sein $\rightarrow$ L kann nicht regulär sein

$L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ ist kein Palindrom}\}$

Aufgrund der Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen gilt

$$L \in \mathcal{L}_3 \Leftrightarrow \overline{L} \in \mathcal{L}_3$$

$$\overline{L} = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ ist ein Palindrom}\}$$

Sei $x = 1^p 0 1^p$ mit $|x| = 2p + 1$

Die Unterteilung $x = uvw = 1^i \cdot 1^{p-i-j} \cdot 1^j 0 1^p$

Damit sind alle möglichen Unterteilungen erfasst. Beim Pumpen entstehen für jede Unterteilung Wörter, die kein Palindrom sind.
Es folgt

$$\overline{L} \notin \mathcal{L}_3 \rightarrow L \notin \mathcal{L}_3$$

$L = \{a^p \mid p \text{ ist eine Primzahl}\}$

$$\text{Sei } x = a^p \text{ mit } |x| = p$$

$$\text{Die Unterteilung } x = uvw = a^j \cdot a^{p-j-k} \cdot a^k$$

Die Länge des entstehenden Wortes x' ist dann

$$|x'| = (j + k) + i(p - j - k)$$

Wir wählen zum Pumpen für i einen Wert, sodass $|x'|$ nicht prim sein kann.
Sei $i = j + k$, dann ergibt sich als Wortlänge

$$|x'| = (j + k) + (j + k)(p - j - k) = (j + k)(1 + p - j - k)$$

Die Länge lässt sich in zwei Faktoren zerteilen und kann somit nicht prim sein. Für den Sonderfall $j + k = 1$ wählen wir $i = 0$, für $j + k = 0$ setzen wir $i = 2$.