

Automaten und Formale Sprachen

Tutorium

Teil IV.

Christopher Blöcker (inf8871)

FH Wedel, SS 2010

Wiederholung

Definition : Mehrdeutigkeit

Eine Grammatik ist mehrdeutig, wenn es ein Wort gibt, für das unterschiedliche Ableitungsbäume existieren.

Ob eine Grammatik mehrdeutig ist, ist im Allgemeinen nicht entscheidbar. (D.h. es kann für eine konkrete Grammatik entscheidbar sein, ob sie mehrdeutig ist, es existiert aber kein Algorithmus, der diese Frage für jede Grammatik entscheidet.)

Nicht-Determinismus in Grammatiken

Grammatiken sind nicht-deterministisch, da die angewendeten Produktionsregeln zufällig ausgewählt werden.

Soll eine Grammatik deterministisch sein, so darf es immer nur eine Produktionsregel zur Auswahl geben.

Wiederholung

Chomsky Hierarchie

Sprachklassen

Die Menge aller Sprachen wurde durch Chomsky eingeteilt in die Chomsky-Hierarchie mit den 4 Sprachklassen

- Typ-3 : Reguläre Sprachen \mathcal{L}_3
- Typ-2 : Kontext-Freie Sprachen \mathcal{L}_2
- Typ-1 : Kontext-Sensitive Sprachen \mathcal{L}_1
- Typ-0 : Rekursiv Aufzählbare Sprachen \mathcal{L}_0

Chomsky Hierarchie

$$\mathcal{L}_3 \subsetneq \mathcal{L}_2 \subsetneq \mathcal{L}_1 \subsetneq \mathcal{L}_0$$

Frage

Wie lässt sich feststellen, ob

$$\mathcal{L} \in \mathcal{L}_2?$$

Antwort

Eine Sprache ist vom Typ-2, wenn sie von einem Kellerautomaten akzeptiert oder von einer kontext-freien Grammatik erzeugt wird.

Für den Nachweis $\mathcal{L} \in \mathcal{L}_2$ ist also ein Kellerautomat \mathcal{A} oder eine Typ-2-Grammatik \mathcal{G} mit

$$\mathcal{L}_{\mathcal{A}} = \mathcal{L} \text{ bzw. } \mathcal{L}_{\mathcal{G}} = \mathcal{L}$$

anzugeben.

Außerdem lassen sich kontext-freie Grammatiken in nichtdeterministische(!) Kellerautomaten (**NKA**) überführen.

Deterministischer Kellerautomat

Definition

Ein deterministischer Kellerautomat ist ein 6-Tupel.

$$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \mathcal{F})$$

mit

- Q endliche, nichtleere Menge von Zuständen
- Σ endliche, nichtleere Menge, das Eingabealphabet mit $\Sigma \cap \Gamma = \emptyset$ und $\Sigma_\epsilon = \Sigma \cup \{\epsilon\}$
- Γ endliche, nichtleere Menge, das Kelleralphabet mit $\perp \in \Gamma$ und $\Gamma_\epsilon = \Gamma \cup \{\epsilon\}$
- δ Überföhrungsfunktion mit $\delta : Q \times \Sigma_\epsilon \times \Gamma_\epsilon \rightarrow Q \times \Gamma_\epsilon^*$
- q_0 Startzustand
- \mathcal{F} Menge von Endzuständen mit $\mathcal{F} \subseteq Q$

Nichtdeterministischer Kellerautomat

Definition

Ein nichtdeterministischer Kellerautomat ist ein 6-Tupel.

$$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \mathcal{F})$$

mit

- Q endliche, nichtleere Menge von Zuständen
- Σ endliche, nichtleere Menge, das Eingabealphabet mit $\Sigma \cap \Gamma = \emptyset$ und $\Sigma_\epsilon = \Sigma \cup \{\epsilon\}$
- Γ endliche, nichtleere Menge, das Kelleralphabet mit $\perp \in \Gamma$ und $\Gamma_\epsilon = \Gamma \cup \{\epsilon\}$
- δ Überführungsrelation mit $\delta \subseteq Q \times \Sigma_\epsilon \times \Gamma_\epsilon \times Q \times \Gamma_\epsilon^*$
- q_0 Startzustand
- \mathcal{F} Menge von Endzuständen mit $\mathcal{F} \subseteq Q$

Typ-2-Grammatik

Typ-2 Grammatik (Kontext-freie Sprachen)

Sei

$$\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{T}, \mathcal{R}, \mathcal{S}).$$

\mathcal{G} ist vom Typ-2, wenn die Produktionen folgende Form haben:

$$A \rightarrow w$$

mit

- $A \in \mathcal{N}$
- $w \in (\mathcal{N} \cup \mathcal{T})^*$

Frage

Wie lässt sich feststellen, ob

$$\mathcal{L} \notin \mathcal{L}_2?$$

Antwort

Mit Hilfe des Pumping-Lemmas für kontext-freie Sprachen. Wenn die Bedingungen des Pumping-Lemmas nicht erfüllt sind, so kann die betroffene Sprache nicht kontext-frei sein.

$$\overline{PL_{kfs}(\mathcal{L})} \rightarrow \mathcal{L} \notin \mathcal{L}_2.$$

Das Pumping-Lemma für kontext-freie Sprachen

Sei $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ eine kontext-freie Sprache.

Dann gibt es eine natürliche Zahl $p \in \mathbb{N}$ derart, dass sich jedes Wort $w \in \mathcal{L}$ mit $|w| \geq p$ zerlegen lässt in fünf Teilworte

$$w = uvxyz$$

mit

- 1 $|vy| > 0$
- 2 $|vxy| \leq p$
- 3 $\bigwedge_{i \in \mathbb{N}} uv^i xy^i z \in \mathcal{L}$

Vorsicht!

Es gilt $\mathcal{L} \in \mathcal{L}_2 \rightarrow PL_{kfs}(\mathcal{L})$

Es gilt **nicht** $PL_{kfs}(\mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{L} \in \mathcal{L}_2$

Aufgaben

Prüfen Sie auf Kontext-freiheit:

- ① $L = \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$
- ② $L = \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j^2\}$

Herangehensweise

- Angeben eines Kellerautomaten oder einer kontext-freien Grammatik für den Nachweis $L \in \mathcal{L}_2$
- Benutzung des Pumping-Lemma für kontext-freie Sprachen für den Nachweis $L \notin \mathcal{L}_2$

$$L = \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$$

Wir müssen eine Grammatik finden, bei der stets entweder mehr a's oder mehr b's in den erzeugten Wörtern auftreten. Außerdem darf kein b vor einem a stehen.

Sei $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{T}, \mathcal{R}, \mathcal{S})$ mit

$$\mathcal{N} = \{S, A, B, C\}$$

$$\mathcal{T} = \{a, b\}$$

$$\mathcal{R} : S \rightarrow A \mid B$$

$$A \rightarrow aA \mid aC$$

$$B \rightarrow Bb \mid Cb$$

$$C \rightarrow aCb \mid \epsilon$$

\mathcal{G} erzeugt L .

Transformation $\mathcal{G}_{kfs} \rightarrow \mathbf{NKA}$

Sei $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{T}, \mathcal{R}, \mathcal{S})$, dann lässt sich daraus ein **NKA** \mathcal{A} mit $\mathcal{L}_{\mathcal{A}} = \mathcal{L}_{\mathcal{G}}$ bestimmen mit

$$\mathcal{A} = (\mathcal{Q}, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \mathcal{F})$$

wobei

$$\begin{aligned}\mathcal{Q} &\leftarrow \{q_0, q_1, q_2\} \\ \Sigma &\leftarrow \mathcal{T} \\ \Gamma &\leftarrow \mathcal{T} \cup \{\perp\} \\ \delta &\leftarrow \{(q_0, \epsilon, \epsilon, q_1, S \perp), (q_1, \epsilon, \perp, q_2, \epsilon)\} \\ &\quad \cup \bigcup_{A \rightarrow w \in \mathcal{R}} (q_1, \epsilon, A, q_1, w) \\ &\quad \cup \bigcup_{a \in \mathcal{T}} (q_1, a, a, q_1, \epsilon) \\ \mathcal{F} &\leftarrow \{q_2\}\end{aligned}$$

Aufgaben

Prüfen Sie auf Kontext-freiheit:

- ① $L = \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$
- ② $L = \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j^2\}$

Herangehensweise

- Angeben eines Kellerautomaten oder einer kontext-freien Grammatik für den Nachweis $L \in \mathcal{L}_2$
- Benutzung des Pumping-Lemma für kontext-freie Sprachen für den Nachweis $L \notin \mathcal{L}_2$

$$L = \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j^2\}$$

Die Wörter von L haben alle die Form $w = a^{j^2} b^j$.

Wenn $L \in \mathcal{L}_2$, dann muss das PL_{kfs} gelten.

Sei

$$w = a^{p^2} b^p.$$

Wir müssen nun das Wort zerteilen in $w = uvxyz$, wobei beachtet werden muss, dass nur Wörter zu L gehören, bei denen kein a vor einem b steht. Außerdem muss bei zunehmender Anzahl von a 's auch die Anzahl der b 's zunehmen und umgekehrt.

Folglich kann v nur aus a 's und y nur aus b 's bestehen.

Sei die Zerteilung

$$w = a^{p^2} b^p = a^m a^{p^2-m-n} a^n b^r b^{p-r-s} b^s.$$

$$L = \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j^2\}$$

$$w = a^{p^2} b^p = a^m a^{p^2-m-n} a^n b^r b^{p-r-s} b^s.$$

Wegen $|vxy| \leq p$ ergibt sich

$$p^2 - m - n + n + r + p - r - s \leq p$$

$$\Rightarrow p^2 + p - m - s \leq p$$

$$\Rightarrow p^2 \leq m + s$$

Wir beobachten, dass das Verhältnis von a's zu b's genau

$$\frac{|a|}{|b|} = \frac{p^2}{p} = p$$

ist.

$$L = \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j^2\}$$

Pumpen wir nun w ganz allgemein mit i , so entsteht das Wort w' mit

$$w' = a^m a^{i(p^2 - m - n)} a^n b^r b^{i(p - r - s)} b^s.$$

Das Verhältnis von a's zu b's ist

$$\frac{|a|}{|b|} = \frac{m + i(p^2 - m - n) + n}{r + i(p - r - s) + s} = \frac{i(p^2 - m - n) + m + n}{i(p - r - s) + r + s}$$

Für $i \rightarrow \infty$ gilt

$$\frac{|a|}{|b|} = \frac{\infty(p^2 - m - n) + m + n}{\infty(p - r - s) + r + s} = \frac{\infty + m + n}{\infty + r + s}$$

Also

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{|a|}{|b|} = 1$$

$$L = \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j^2\}$$

Oder auf Deutsch:

Sowohl die Anzahl der a's als auch die der b's wächst linear mit der Größe von i .

Damit jedoch Wörter entstehen, welche zu L gehören, muss die Anzahl der a's quadratisch mit der Größe von i wachsen.

Da dies nicht der Fall ist, muss $L \notin \mathcal{L}_2$ gelten.