Tutorium
Automaten und Formale Sprachen
Einführung in die Komplexitätstheorie

Christopher Blöcker, B. Sc.
inf9900@fh-wedel.de

SS 2012

Vereinbarung

Im folgenden bezeichne

Π	Entscheidungsprobleme,
$\mathfrak{B}(\Pi)$	Menge der Beispiele (Instanzen) von Π,
I	Ein Beispiele mit $I \in \mathfrak{B}(\Pi)$,
$\mathcal{A}_\Pi$	Einen Algorithmus, der Π entscheidet,
$t_\mathcal{A}(I)$	Anzahl der Rechenschritte, die $\mathcal{A}$ für das Lösen von I benötigt.

Definition

Die Funktion $T_\mathcal{A} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$T_\mathcal{A}(n) = \max\left\{t_\mathcal{A}(I) \mid I \in \mathfrak{B}(\Pi) \wedge L(I) = n\right\}$$

heißt Zeitkomplexitätsfunktion für den Algorithmus $\mathcal{A}$.

Definition

Sei $\mathcal{M}$ eine **DTM**, die Funktion $T_{\mathcal{M}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$T_{\mathcal{M}}(n) = \max\{k \in \mathbb{N} \mid \bigvee_{\substack{x \in \Sigma^* \\ |x| = n}} \mathcal{M} \text{ stoppt nach k Schritten}\}$$

heißt Zeitkomplexitätsfunktion für die **TM** $\mathcal{M}$.

Definition

Eine **DTM** heißt Polynomialzeit-**DTM** (kurz **PZDTM**), wenn es ein Polynom p gibt mit

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} T_{\mathcal{M}}(n) \leq p(n).$$

$\mathcal{O}$-Notation

Es ist im allgemeinen sehr schwierig, eine konkrete Schranke für einen Algorithmus anzugeben, daher begnügt man sich mit ungefähren oberen Schranken.

Notation	Bedeutung
$\mathcal{O}(1)$	konstante Laufzeit
$\mathcal{O}(n)$	lineare Laufzeit
$\mathcal{O}(n^k)$	polynomiale Laufzeit
$\mathcal{O}(2^n)$	exponentielle Laufzeit

Definition

Die Klasse $\mathcal{P}$ wird definiert als

$$\mathcal{P} = \{L \mid L \subseteq \Sigma^* \wedge \text{ es gibt eine } \textbf{PZDTM } \mathcal{M} \text{ mit } L = L_{\mathcal{M}}\}\,.$$

$\mathcal{P}$: Deterministisch in Polynomialzeit lösbar.

Beispiele für Probleme aus $\mathcal{P}$

- Sortieren
- Suchen
- Kürzestes Wege-Problem (Dijkstra)
- STCON
- PRIMES
- ...

Definition

Die Klasse $\mathcal{NP}$ wird definiert als

$$\mathcal{NP} = \{L \mid L \subseteq \Sigma^* \wedge \text{ es gibt eine } \textbf{PZNDTM } \mathcal{M} \text{ mit } L = L_{\mathcal{M}}\}\,.$$

$\mathcal{NP}$: Nichtdeterministisch in Polynomialzeit lösbar.
$\mathcal{NPV}$ bildet dabei die Klasse der schwersten Probleme aus $\mathcal{NP}$.

Beispiele für Probleme aus $\mathcal{NPV}$

- Hampath
- Traveling Salesman
- Vertex Cover
- Knapsack
- ...

$\mathcal{P}$ und $\mathcal{NP}$

Die Probleme aus $\mathcal{P}$ werden als in der Praxis effizient lösbar betrachtet, die aus $\mathcal{NP}$ als nur näherungsweise gut lösbar.

Eine mittlerweile weitgehend anerkannte Definition für $\mathcal{NP}$ lautet: $\mathcal{NP}$ enthält die Probleme, für die eine Lösung in polynomialer Zeit verifiziert werden kann.

Das $\mathcal{P} - \mathcal{NP}$-Problem

Es gilt

$$\mathcal{P} \subseteq \mathcal{NP}.$$

Bis heute konnte jedoch weder

$$\mathcal{P} = \mathcal{NP}$$

noch

$$\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$$

gezeigt werden.

Eine Entscheidung ist derzeit auch nicht in Sicht.