Automaten und Formale Sprachen Tutorium

Teil 0.

Christopher Blöcker (inf8871)

FH Wedel, SS 2010

Vollständige Induktion

Aufgabe

Es sei eine Aussage der Form

$$\bigwedge_{x \in \mathbb{N}} \mathcal{H}(x)$$

zu beweisen.

$\mathcal{H}$ sei ein Prädikat.

Satz

$$\mathcal{H}(0) \wedge \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} [\mathcal{H}(n) \to \mathcal{H}(\sigma(n))] \to \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}(n)$$

Dabei bezeichne $\sigma(n)$ den Nachfolger von n.

Vollständige Induktion

Satz

$$\mathcal{H}(0) \wedge \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} [\mathcal{H}(n) \rightarrow \mathcal{H}(\sigma(n))] \rightarrow \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}(n)$$

Dabei bezeichne $\sigma(n)$ den Nachfolger von n.

Satz (in Worten)

Sei $\mathcal{H}(x)$ eine Aussageform über der Menge der natürlichen Zahlen.
Wenn $\mathcal{H}(0)$ wahr ist und wenn für jedes beliebige $n \in \mathbb{N}$ aus der Wahrheit von $\mathcal{H}(n)$ stets die Wahrheit von $\mathcal{H}(\sigma(n))$ folgt, so gilt die Aussage für alle natürlichen Zahlen.

Mengenlehre

Mengendefinition nach Cantor

Eine Menge ist eine Zusammenfassung bestimmter wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Von jedem dieser Objekte muss eindeutig feststehen, ob es zur Menge gehört oder nicht. Die zur Menge gehörenden Objekte nennt man die Elemente der Menge.

Definition

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \quad &:\Leftrightarrow \quad \{x | (x \in \mathcal{A}) \land (x \in \mathcal{B})\} \\
\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \quad &:\Leftrightarrow \quad \{x | (x \in \mathcal{A}) \lor (x \in \mathcal{B})\} \\
\mathcal{A} \setminus \mathcal{B} \quad &:\Leftrightarrow \quad \{x | (x \in \mathcal{A}) \land (x \notin \mathcal{B})\} \\
\mathcal{A} \triangle \mathcal{B} \quad &:\Leftrightarrow \quad \{x | [(x \in \mathcal{A}) \land (x \notin \mathcal{B})] \lor [(x \notin \mathcal{A}) \land (x \in \mathcal{B})]\}
\end{aligned}
$$

Mengenlehre

Frage

Es existiere ein Dorf, in dem es verboten sei, einen Bart zu tragen und

1. der Dorfbarbier denjenigen Männern den Bart schneidet, die sich nicht selbst den Bart schneiden und
2. der Dorfbarbier der einzige Mann sei.

$\mathcal{M}$ sei die Menge der Männer, denen der Dorfbarbier den Bart schneidet, x sei der Dorfbarbier.

$$x \overset{?}{\in} \mathcal{M} \text{ bzw } \mathcal{M} \overset{?}{=} \emptyset$$

Antwort

Die Frage ist unentscheidbar, da gilt

$$x \in \mathcal{M} \Leftrightarrow x \notin \mathcal{M}.$$

Relationen

Definition

Eine (2-stellige) Relation zwischen den Mengen $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ ist eine Teilmenge $\mathcal{R}$ der Produktmenge $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$.

$$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M} \times \mathcal{N}.$$

Dabei steht $m \in \mathcal{M}$ mit $n \in \mathcal{N}$ in Relation, wenn

$$(m, n) \in \mathcal{R}.$$

Man schreibt dafür auch

$$m \overset{\mathcal{R}}{\sim} n \text{ oder } m\mathcal{R}n.$$

Relationen

Äquivalenzrelation

Sei $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}^2$. $\mathcal{R}$ definiert eine Äquivalenzrelation, wenn gilt

1. Reflexivität : $\bigwedge_{x \in \mathcal{M}} x \overset{\mathcal{R}}{\sim} x$
2. Symmetrie : $\bigwedge_{x,y \in \mathcal{M}} (x \overset{\mathcal{R}}{\sim} y) \to (y \overset{\mathcal{R}}{\sim} x)$
3. Transitivität : $\bigwedge_{x,y,z \in \mathcal{M}} [(x \overset{\mathcal{R}}{\sim} y) \land (y \overset{\mathcal{R}}{\sim} z)] \to (x \overset{\mathcal{R}}{\sim} z)$

Ordnungsrelation

Sei $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}^2$. $\mathcal{R}$ definiert eine Halbordnung, wenn gilt

1. Reflexivität : $\displaystyle\bigwedge_{x \in \mathcal{M}} x \overset{\mathcal{R}}{\sim} x$

   Irreflexivität : $\displaystyle\bigwedge_{x \in \mathcal{M}} x \overset{\mathcal{R}}{\nsim} x$

2. Antisymmetrie : $\displaystyle\bigwedge_{x,y \in \mathcal{M}} [(x \overset{\mathcal{R}}{\sim} y) \wedge (y \overset{\mathcal{R}}{\sim} x)] \rightarrow (x = y)$

   Asymmetrie : $\displaystyle\bigwedge_{x,y \in \mathcal{M}} (x \overset{\mathcal{R}}{\sim} y) \rightarrow (x \neq y)$

3. Transitivität : $\displaystyle\bigwedge_{x,y,z \in \mathcal{M}} [(x \overset{\mathcal{R}}{\sim} y) \wedge (y \overset{\mathcal{R}}{\sim} z)] \rightarrow (x \overset{\mathcal{R}}{\sim} z)$

Definition

Ist zusätzlich die nachfolgende Eigenschaft erfüllt, so definiert $\mathcal{R}$ eine Totalordnung.

1. Linearität : $\displaystyle\bigwedge_{x,y \in \mathcal{M}} (x \overset{\mathcal{R}}{\sim} y) \vee (y \overset{\mathcal{R}}{\sim} x)$

kgV und ggT

Definition

Seien m, n zwei beliebige Zahlen in $\mathbb{N}$.
Die Zahl $d \in \mathbb{N}$ heisst **größter gemeinsamer Teiler** der Zahlen m und n (kurz: **ggT**), wenn gilt:

$$(d|m) \wedge (d|n) \wedge \bigwedge_{t \in \mathbb{N}} [(t|m) \wedge (t|n) \rightarrow (t|d)]$$

Definition

Seien m, n zwei beliebige Zahlen in $\mathbb{N}$.
Die Zahl $k \in \mathbb{N}$ heisst **kleinstes gemeinsames Vielfaches** der Zahlen m und n (kurz: **kgV**), wenn gilt:

$$(m|k) \wedge (n|k) \wedge \bigwedge_{s \in \mathbb{N}} [(m|s) \wedge (n|s) \rightarrow (k|s)]$$

kgV und ggT

Zusammenhang kgV und ggT

Zwischen dem $\mathbf{ggT}_{m,n}$ und dem $\mathbf{kgV}_{m,n}$ zweier Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ besteht der folgende Zusammenhang:

$$\mathbf{ggT}_{m,n} \cdot \mathbf{kgV}_{m,n} = m \cdot n$$

Berechnung

Der **ggT** zweier Zahlen lässt sich mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus berechnen.

Euklidischer Algorithmus (C - Rekursiv)

```
unsigned ggt(unsigned m, unsigned n) {
    if (n > m)  return ggt(n, m);
    if (n == 1) return 1;
    if (n == 0) return m;
    return ggt(n, m % n);
}
```

Euklidischer Algorithmus (Haskell)

```
module GGT where

ggt :: Int -> Int -> Int
ggt m n
  | m < n      = ggt n m
  | n == 1     = 1
  | n == 0     = m
  | otherwise  = ggt n (mod m n)
```