Tutorium
Automaten und Formale Sprachen
Teil V.

Christopher Blöcker, B. Sc.
inf9900@fh-wedel.de

SS 2012

Aufgaben

Gegeben sei das Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$. Beweisen Sie:

1. Die Menge aller Typ-0-Sprachen über Σ ist abzählbar.
2. Die Menge aller Sprachen über Σ ist überabzählbar.

Abzählbarkeit und Überabzählbarkeit

- Eine Menge $\mathcal{M}$ ist abzählbar, wenn es eine bijektive Funktion $f : \mathcal{M} \to \mathbb{N}$ gibt.
- Eine Menge $\mathcal{M}$ ist überabzählbar, wenn sie nicht endlich ist und es keine bijektive Funktion $f : \mathcal{M} \to \mathbb{N}$ gibt.

Abzählbarkeit der Menge der Typ-0-Sprachen über $\Sigma = \{0, 1\}$

Typ-0-Sprachen werden von **TM**'s erkannt, dabei erkennt jede **TM** genau eine Sprache.

Jeder Turingmaschine kann eine Gödelnummer zugeordnet werden, diese Gödelnummer kann als natürliche Zahl aufgefasst werden.

Somit existiert eine Funktion $f : \textbf{TM} \to \mathbb{N}$.

$\Rightarrow$ Die Menge der Typ-0-Sprachen muss abzählbar sein. $\square$

Überabzählbarkeit der Menge aller Sprachen über $\Sigma = \{0, 1\}$

Der Beweis erfolgt indirekt.

Angenommen, die Menge aller Sprachen über $\Sigma = \{0, 1\}$ sei abzählbar. Dann lassen sich alle Sprachen in einer zweiseitig unendlichen Matrix aufzählen.

Es sei $w_i \in L_j \Leftrightarrow \zeta(i, j) = 1$

ζ	w_1	w_2	w_3	w_4	$\cdots$
L_1	1	1	0	1	$\cdots$
L_2	0	1	0	1	$\cdots$
L_3	0	0	0	1	$\cdots$
L_4	1	1	1	0	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Wir konstruieren nun die Sprache $\mathcal{L}$. Dabei soll gelten

$$w_i \in \mathcal{L} \Leftrightarrow w_i \notin L_i$$

Überabzählbarkeit der Menge aller Sprachen über $\Sigma = \{0, 1\}$

$$w_i \in \mathcal{L} \Leftrightarrow w_i \notin L_i$$

ζ	w_1	w_2	w_3	w_4	$\cdots$
L_1	**1**	1	0	1	$\cdots$
L_2	0	**1**	0	1	$\cdots$
L_3	0	0	**0**	1	$\cdots$
L_4	1	1	1	**0**	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$
$\mathcal{L}$	0	0	1	1	$\cdots$

Wir haben nun eine Sprache konstruiert, die von jeder anderen in der Auflistung verschieden sein muss, da es immer wenigstens ein Wort w_i gibt, welches in $\mathcal{L}$ enthalten ist, aber in der jeweiligen Sprache L_i **nicht**.

Die Annahme, dass die Menge aller Sprachen über $\Sigma = \{0, 1\}$ abzählbar ist, muss somit falsch sein, also ist die Menge aller Sprachen über Σ überabzählbar. $\square$

Definition : Deterministische Turingmaschine **DTM**

Eine deterministische Turingmaschine **DTM** ist ein 7-Tupel.

$$\mathcal{A} = (\mathcal{Q}, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{YES}, q_{NO})$$

mit

$\mathcal{Q}$	endliche, nichtleere Menge von Zuständen
Σ	endliche, nichtleere Menge, das Eingabealphabet mit $\Sigma \cap \mathcal{Q} = \emptyset$ und $\sqcup \notin \Sigma$
Γ	endliche, nichtleere Menge, das Bandalphabet mit $\Sigma \subset \Gamma$ und $\sqcup \in \Gamma$
δ	Überführungsfunktion mit $\delta : \mathcal{Q} \times \Gamma \rightarrow \mathcal{Q} \times \Gamma \times \{R, M, L\}$
q_0	Startzustand
q_{YES}	Akzeptierender Endzustand
q_{NO}	Zurückweisender Endzustand

Definition : Nichtdeterministische Turingmaschine **NDTM**

Eine nichtdeterministische Turingmaschine **NDTM** ist ein 7-Tupel.

$$\mathcal{A} = (\mathcal{Q}, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{YES}, q_{NO})$$

mit

$\mathcal{Q}$	endliche, nichtleere Menge von Zuständen
Σ	endliche, nichtleere Menge, das Eingabealphabet mit $\Sigma \cap \mathcal{Q} = \emptyset$ und $\sqcup \notin \Sigma$
Γ	endliche, nichtleere Menge, das Bandalphabet mit $\Sigma \subset \Gamma$ und $\sqcup \in \Gamma$
δ	Überführungsrelation mit $\delta : \mathcal{Q} \times \Gamma \times \mathcal{Q} \times \Gamma \times \{R, M, L\}$
q_0	Startzustand
q_{YES}	Akzeptierender Endzustand
q_{NO}	Zurückweisender Endzustand

Arbeitsweise einer Turingmaschine

1. Das Eingabewort $w \in \Sigma^*$ wird in die Bandfelder $0..|w-1|$ eingetragen.
2. Entsprechend der Überführungsfunktion (bzw. -relation) wird der Bandinhalt verändert.
3. Die Berechnung stoppt, sobald die **TM** den Zustand q_{YES} oder q_{NO} erreicht hat.
4. $w \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ wenn die **TM** in q_{YES} stoppt.

Definition: Linear beschränkter Automat **LBA**

Ein linear beschränkter Automat ist eine Turingmaschine, bei der das Arbeitsband nur eine endliche Länge hat.