Tutorium
Automaten und Formale Sprachen
Teil III.

Christopher Blöcker, B. Sc.
inf9900@fh-wedel.de

SS 2012

Reguläre Sprachen

Die Menge der regulären Sprachen ist abgeschlossen bezüglich

- Komplementbildung $$\bigwedge_{L \in \mathcal{L}_3} \overline{L} \in \mathcal{L}_3$$
- Konkatenation $$\bigwedge_{L_1, L_2 \in \mathcal{L}_3} L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}_3$$
- Vereinigung $$\bigwedge_{L_1, L_2 \in \mathcal{L}_3} L_1 \cup L_2 \in \mathcal{L}_3$$
- Durchschnitt $$\bigwedge_{L_1, L_2 \in \mathcal{L}_3} L_1 \cap L_2 \in \mathcal{L}_3$$
- KLEENE'scher Stern $$\bigwedge_{L \in \mathcal{L}_3} L^* \in \mathcal{L}_3$$

Wie?

Kombination von Endlichen Automaten, Regulären Ausdrücken, ...

Kontext-freie Sprachen

Die Menge der kontext-freien Sprachen ist abgeschlossen bezüglich

- Konkatenation

$$\bigwedge_{L_1, L_2 \in \mathcal{L}_2} L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}_2$$

- Vereinigung

$$\bigwedge_{L_1, L_2 \in \mathcal{L}_2} L_1 \cup L_2 \in \mathcal{L}_2$$

- KLEENE'scher Stern

$$\bigwedge_{L \in \mathcal{L}_2} L^* \in \mathcal{L}_2$$

Vorsicht

Abgeschlossenheit bezüglich Komplementbildung und Durchschnitt besteht **nicht**.

Kontext-sensitive Sprachen

Die Menge der kontext-sensitive Sprachen ist abgeschlossen bezüglich

- Komplementbildung
$$\bigwedge_{L \in \mathcal{L}_1} \overline{L} \in \mathcal{L}_1$$
- Konkatenation
$$\bigwedge_{L_1, L_2 \in \mathcal{L}_1} L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}_1$$
- Vereinigung
$$\bigwedge_{L_1, L_2 \in \mathcal{L}_1} L_1 \cup L_2 \in \mathcal{L}_1$$
- Durchschnitt
$$\bigwedge_{L_1, L_2 \in \mathcal{L}_1} L_1 \cap L_2 \in \mathcal{L}_1$$
- KLEENE'scher Stern
$$\bigwedge_{L \in \mathcal{L}_1} L^* \in \mathcal{L}_1$$

Rekursiv aufzählbare Sprachen

Die Menge der rekursiv aufzählbaren Sprachen ist abgeschlossen bezüglich

- Konkatenation
$$\bigwedge_{L_1, L_2 \in \mathcal{L}_0} L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}_0$$
- Vereinigung
$$\bigwedge_{L_1, L_2 \in \mathcal{L}_0} L_1 \cup L_2 \in \mathcal{L}_0$$
- Durchschnitt
$$\bigwedge_{L_1, L_2 \in \mathcal{L}_0} L_1 \cap L_2 \in \mathcal{L}_0$$
- KLEENE'scher Stern
$$\bigwedge_{L \in \mathcal{L}_0} L^* \in \mathcal{L}_0$$

Endlicher Automat → Typ-3-Grammatik

Sei $\mathcal{A} = (\mathcal{Q}, \Sigma, \delta, q_0, \mathcal{F})$ ein Endlicher Automat.

Dann kann eine zu $\mathcal{A}$ äquivalente rechtslineare Typ-3-Grammatik $\mathcal{G}_r = (\mathcal{N}_r, \mathcal{T}_r, \mathcal{R}_r, \mathcal{S}_r)$ erzeugt werden durch

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_r &\leftarrow \{Q_i \mid q_i \in \mathcal{Q}\} \\
\mathcal{T}_r &\leftarrow \Sigma \\
\mathcal{R}_r &\leftarrow \{(Q_i, aQ_j) \mid (q_i, a, q_j) \in \delta\} \cup \{(Q_i, \epsilon) \mid q_i \in \mathcal{F}\} \\
\mathcal{S}_r &\leftarrow Q_0
\end{aligned}$$

und die äquivalente linkslineare Grammatik $\mathcal{G}_l = (\mathcal{N}_l, \mathcal{T}_l, \mathcal{R}_l, \mathcal{S}_l)$ durch

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_l &\leftarrow \{Q_i \mid q_i \in \mathcal{Q}\} \cup \{Q_{start}\} \\
\mathcal{T}_l &\leftarrow \Sigma \\
\mathcal{R}_l &\leftarrow \{(Q_j, Q_i a) \mid (q_i, a, q_j) \in \delta\} \cup \{(Q_{start}, Q_i) \mid q_i \in \mathcal{F}\} \cup \{(Q_0, \epsilon)\} \\
\mathcal{S}_l &\leftarrow Q_{start}
\end{aligned}$$

Rechtslineare Typ-3-Grammatik → Endlicher Automat

Sei $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{T}, \mathcal{R}, \mathcal{S})$ eine rechtslineare Typ-3-Grammatik.

Dann kann daraus ein äquivalenter NEA $\mathcal{A} = (\mathcal{Q}, \Sigma, \delta, q_0, \mathcal{F})$ erzeugt werden durch

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{Q} & \leftarrow & \{q_A \mid A \in \mathcal{N}\} \cup \{q_{end}\} \\ \Sigma & \leftarrow & \mathcal{T} \\ \delta & \leftarrow & \{(q_A, a, q_B) \mid (A, aB) \in \mathcal{R}\} \cup \{(q_A, a, q_{end}) \mid (A, a) \in \mathcal{R}\} \\ q_0 & \leftarrow & q_\mathcal{S} \\ \mathcal{F} & \leftarrow & \{q_A \mid (A, \epsilon) \in \mathcal{R}\} \cup \{q_{end}\} \end{array}$$

Der entstehende Automat ist nicht notwendigerweise minimal und kann unnütze Zustände enthalten.

Linkslineare Typ-3-Grammatik $\rightarrow$ Endlicher Automat

Sei $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{T}, \mathcal{R}, \mathcal{S})$ eine rechtslineare Typ-3-Grammatik.

Dann kann daraus ein äquivalenter NEA $\mathcal{A} = (\mathcal{Q}, \Sigma, \delta, q_0, \mathcal{F})$ erzeugt werden durch

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{Q} & \leftarrow & \{q_A \mid A \in \mathcal{N}\} \cup \{q_{start}\} \\
\Sigma & \leftarrow & \mathcal{T} \\
\delta & \leftarrow & \{(q_B, a, q_A) \mid (A, Ba) \in \mathcal{R}\} \cup \{(q_{start}, a, q_A) \mid (A, a) \in \mathcal{R}\} \\
q_0 & \leftarrow & q_{start} \\
\mathcal{F} & \leftarrow & \{q_{\mathcal{S}}\}
\end{array}$$

Der entstehende Automat ist nicht notwendigerweise minimal und kann unnütze Zustände enthalten.