WSTĘP

Z przyjemnością prezentuję ’mini’ zbiór zadań matematycznych przeznaczonych głównie dla uczniów szkół średnich, których celem jest rozwijanie kreatywności, intuicji matematycznej oraz umiejętności myślenia "out of the box". Zadania zawarte w tym zbiorku są tak dobrane, aby stymulować umysł uczniów, zachęcając ich do poszukiwania nietypowych rozwiązań i zależności.

Moim celem jest zachęcenie czytelników do samodzielnego myślenia i poszukiwania rozwiązań mniej typowych zadań matematycznych, wymykających się "szablonowemu podejściu". Dlatego też, namawiam do podejmowania prób rozwiązania zadań nawet, gdy wydają się one z początku trudne, czy nieosiągalne. Wiem, że często to właśnie w wymagających momentach rodzi się prawdziwa fascynacja matematyką i jej metodami. Zadania należy rozwiązać samodzielnie, nie zniechęcając się nawet przy kilku nieudanych podejściach. Dopiero po wyczerpaniu swoich własnych pomysłów, czytelnik powinien sięgnąć do sekcji z rozwiązaniami i dokładnie je przeanalizować, a następnie po pewnym czasie powrócić do zadania i postarać się rozwiązać je samodzielnie. Takie podejście zaprocentuje wyrobieniem własnego warsztatu matematycznego i pomoże w rozwiązaniu inny zadań w przyszłości.

Warto podkreślić, że większość zadań zawartych w tym zbiorze nie jest mojego autorstwa, lecz została zebrana z różnych ogólnie dostępnych źródeł. Pomimo staranności, czasami trudne (a faktycznie rzecz mówiąc: niemożliwe) jest zlokalizowanie pierwotnego źródło danego zadania. Dlatego też, chciałbym w tym miejscu podziękować wszystkim twórcom, którzy dzieląc się swoją pasją do matematyki, inspirują kolejne pokolenia matematyków i miłośników tej nauki.

Zapraszm do skorzystania z podanego tu materiału i wycieczki do ciekawej krainy matematyki! Powodzenia!

Krzysztof Buczyński

Uwaga techniczna: W całej pracy będziemy rozważać tylko dziedzinę liczb rzeczywistych, oznaczanych przez: $\mathbb{R}$.

kontakt: prostamatma.info@gmail.com

ZADANIA

Zadanie 1. Rozwiąż nierówność:

$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2} < 2x + 9$$

Zadanie 2. Dla jakich wartości parametru m funkcja $f(x) = \frac{x^2+(m+1)x+m}{x^2-9}$ ma dokładnie jedno miejsce zerowe?

Zadanie 3. [1] Dwa osły oddalone od siebie o 100 metrów wyruszają w tym samym momencie i idą wprost na przeciwko siebie ze stałą prędkością 1 m/s. Mucha siedząca na nosie pierwszego osła startuje równo z osłami i leci do nosa drugiego, po czym od razu zawraca do nosa pierwszego osła, po czym wraca do drugiego itd. Prędkość muchy to 10 m/s. Pytanie brzmi: ile czasu minie zanim mucha zostanie zmiażdżona między dwoma nosami osłów?

Zadanie 4. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} x \cdot y & = z + 2y \\ \sqrt{z} & = 2y \\ x \cdot z - 1984 & = 2z + 2 \cdot \frac{80}{\sqrt{z}} \end{cases}$$

Zadanie 5. [2] Współczynniki a i b są liczbami rzeczywistymi i spełniają warunek: $0 < a < b$. Zakładamy, że $u_0 = a$ i $v_0 = b$ dla całego ciągu liczb naturalnych n:

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{oraz} \quad v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n}$$

Udowonij, że ciągi u_n oraz v_n są zbieżne i że ich wspólna granica jest równa

$$\frac{b \sin(\arccos(\frac{a}{b}))}{\arccos(\frac{a}{b})}$$

Zadanie 6. Rozwiąż nierówność

$$\left|\frac{2x-3}{x^2-1}\right| \geq 2$$

Zadanie 7. Rozwiąż nierówność $|\frac{1}{x-2}| > |\frac{1}{x+1}|$

Zadanie 8. Rozwiąż równanie $4^x + 6^x = 9^x$

[1] Zadanie jest wariacją na teamat anegdotki o Eulerze. Więcej anegdot można znaleźć na stronie: https://www.tomaszgrebski.pl/blog/matematyka-na-wesolo/anegdoty-matematyczne

[2] Zadanie pochodzi z książki fabularnej, niestety nie znam tytułu ani autora. Zostało mi kiedyś przesłane w ramach ciekawostki. Gdyby ktoś z czytelników znał źródło tego zadania, bardzo proszę o kontakt.

Zadanie 9. Rozwiąż równanie $\frac{8^x + 27^x}{12^x + 18^x} = \frac{7}{6}$

Zadanie 10. Rozwiąż równanie $1 + \sin 6x = \sin 3x + \cos 3x$ w przedziale $[0, 2\pi]$

Zadanie 11. Wiedząc, że

$$\frac{1}{\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{5} + 1} = A\sqrt[3]{25} + B\sqrt[3]{5} + C,$$

gdzie A, B, C są liczbami wymiernymi, znajdź wartość wyrażenia $A + B + C$.

Zadanie 12. Znajdź dokładną wartość wyrażenia

$$\sum_{k=-9}^{9} \frac{1}{10^k + 1}$$

ROZWIĄZANIA

Zadanie 1. Rozwiąż nierówność:

$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2} < 2x+9$$

Rozwiązanie 1. Zacznijmy od wyznaczenia dziedziny nierówności. Mianownik musi być różny od zera, zaś wyrażenie podpierwiastkowe musi być nieujemne. Prowadzi to do układu nierówności:

$$\begin{cases} 1-\sqrt{1+2x} \neq 0 \\ 1+2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq \sqrt{1+2x} \\ 2x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+2x \neq 1 \\ x \geq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Ostatecznie więc dziedziną nierówności z zadania jest $D = [-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \infty)$.

Przejdziemy teraz do rozwiązania wyjściowej nierówności. Zauważmy, że wyrażenie z licznika $4x^2$ można zapisać jako $(2x)^2$, co sugeruje już bezpośredni związek z wyrażeniem podpierwiastkowym. Zatem, w celu uproszczenia rachunków zastosujemy podstawienie $y := 1+2x$. Doprowadzi to nierówność do postaci:

$$\frac{(2x)^2}{(1-\sqrt{y})^2} < 2x+9$$

W ułamku po lewej stronie skorzystamy z praw działań na potęgach. W obu wyrażeniach zamienimy niewiadomą x na y korzystając z warunku z podstawienia tzn. skoro $y = 1+2x$, to $2x = y-1$, zaś $2x+9 = 2x+1+8 = y+8$. Zatem otrzymamy nierówność ze zmienną y:

$$\left(\frac{y-1}{1-\sqrt{y}}\right)^2 < y+8$$

Zauważmy, że licznik wyrażenia po lewej stronie jest mocno związany z mianownikiem poprzez wzór skróconego mnożenia: $y-1 = (\sqrt{y}-1)(\sqrt{y}+1)$. Wyłączając minus przed pierwszy z nawiasów otrzymamy: $y-1 = -(1-\sqrt{y})(\sqrt{y}+1)$. Podstawiając to wyrażenie do powyższej nierówności otrzymamy:

$$\left(\frac{-(1-\sqrt{y})(\sqrt{y}+1)}{1-\sqrt{y}}\right)^2 < y+8$$

Skracamy w liczniku i mianowniku wyrażenia $(1-\sqrt{y})$, a minusa z licznika pozbywamy się, korzystając z prawa działań na potęgach: $(-a)^2 = a^2$. Otrzymamy:

$$(\sqrt{y}+1)^2 < y+8$$

Rozwijamy wyrażenie po lewej stronie korzystając ze wzoru skróconego mnożenia i dokonujemy kolejnych przekształceń:

$$\begin{gathered} y+2\sqrt{y}+1 < y+8 \quad / -y; \quad -1 \\ 2\sqrt{y} < 7 \quad / :2 \\ \sqrt{y} < \frac{7}{2} \end{gathered}$$

Podnosząc obie strony powyższej nierówności do kwadratu otrzymamy, że $y < \frac{49}{4}$. Wracając do podstawienia za y: $y = 1 + 2x$ i rozwiązując nierówność względem x otrzymujemy, że:

$$\begin{aligned} 1 + 2x &< \frac{49}{4} \quad / -1 = -\frac{4}{4} \\ 2x &< \frac{45}{4} \quad / \cdot \frac{1}{2} \\ x &< \frac{45}{8} \end{aligned}$$

Oczywiście musimy uwzględnić dziedzinę pierwotnie zadanej nam nierówności tzn. $x \in D = [-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \infty)$. Prowadzi to do układu nierówności:

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x \geq -\frac{1}{2} \\ x < \frac{45}{8} \end{cases}$$

a tenże do odpowiedzi: $x \in [-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \frac{45}{8})$.

Uwaga 1. Etap zadania następujący po wyznaczeniu dziedziny nierówności można było rozwiązać bez wprowadzania zmiennej pomocniczej y. Wyglądałoby następująco:

$$\left(\frac{2x}{1 - \sqrt{1 + 2x}}\right)^2 < 2x + 9$$

$$\left(\frac{2x(1 + \sqrt{1 + 2x})}{1 - (1 + 2x)}\right)^2 < 2x + 9$$

$$\left(\frac{2x(1 + \sqrt{1 + 2x})}{-2x}\right)^2 < 2x + 9$$

$$\left(1 + \sqrt{1 + 2x}\right)^2 < 2x + 9$$

$$1 + 2\sqrt{1 + 2x} + 1 + 2x < 2x + 9$$

$$\sqrt{1 + 2x} < \frac{7}{2}$$

$$1 + 2x < \frac{49}{4}$$

$$x < \frac{45}{8}$$

Uważam jednak, że rozwiązanie z niewiadomą pomocniczą jest bardziej eleganckie, a co ważniejsze – buduje dobre nawyki zauważania zależności między wyrażeniami matematycznymi. Czytelnik doceni tę umiejętność zwłaszcza podczas nauki rachunku całkowego.

Uwaga 2 (Jak nie rozwiązywać)**.** Początkowo kuszącym mogłoby być pomnożenie obu stron nierówności z treści zadania:

$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2} < 2x+9$$

przez mianownik lewej strony tejże nierówności (gdyż jest to kwadrat pewnego wyrażenia, a więc będziemy mogli pozostawić zwrot nierówności bez zmian). Zobaczmy do czego doprowadziłoby takie postępowanie:

$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2} < 2x+9 \quad / \ \cdot (1-\sqrt{1+2x})^2$$

$$4x^2 < (2x+9)(1-2\sqrt{1+2x}+1+2x)$$

$$4x^2 < 4x - 4x\sqrt{1+2x} + 4x^2 + 18 - 18\sqrt{1+2x} + 18x$$

$$0 < 22x - 22x\sqrt{1+2x} + 18 \quad / \ :2$$

$$0 < 11x - 11x\sqrt{1+2x} + 9 \quad / \ -9; \ \ :11$$

$$-\frac{9}{11} < x - x\sqrt{1+2x}$$

Jak widać, ostatnia z tych nierówności nie jest łatwa do rozwiązania.

Zadanie 2. Dla jakich wartości parametru m funkcja $f(x) = \frac{x^2+(m+1)x+m}{x^2-9}$ ma dokładnie jedno miejsce zerowe?

Rozwiązanie 2. Na wstępnie zaznaczmy, że dziedziną funkcji jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$. Miejsca zerowe funkcji to rozwiązania równania $f(x) = 0$, co w tym przypadku oznacza, że musimy rozwiązać równanie:

$$x^2 + (m+1)x + m = 0 \ \text{ dla } \ x \in \ \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\} \quad (*)$$

Ponieważ $\Delta = (m+1)^2 - 4m = m^2 + 2m + 1 - 4m = m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2 \geq 0$, więc powyższy trójmian może mieć jeden albo dwa pierwiastki rzeczywiste.

Przypadek I: $\Delta = 0 \iff m = 1$. Wtedy pierwiastkiem jest $x_0 = -\frac{m+1}{2} = -\frac{1+1}{2} = -1$. Liczba ta jest również miejscem zerowym funkcji z treści zadania, ponieważ spełnia warunek (*).

Przypadek II: $\Delta > 0 \iff m \neq 1$. Wtedy $\sqrt{\Delta} = \sqrt{(m-1)^2} = |m-1|$, zaś pierwiastki trójmianu wyrażają się wzorami:

$$x_1 = \frac{-(m+1) - |m-1|}{2}, \quad x_2 = \frac{-(m+1) + |m-1|}{2}$$

Zauważmy, że

$$|m-1| = \begin{cases} m-1 \quad \text{dla} \quad m > 1 \\ -(m-1) = -m+1 \quad \text{dla} \quad m < 1 \end{cases}$$

Prowadzi to do dwóch „podprzypadków”:

Przypadek II (a): $m > 1$. Wtedy pierwiastki trójmianu (*) wyrażają się wzorami:

$$x_1 = \frac{-(m+1) - (m-1)}{2}, \quad x_2 = \frac{-(m+1) + (m-1)}{2}$$
$$x_1 = \frac{-m-1-m+1}{2}, \quad x_2 = \frac{-m-1+m-1}{2}$$
$$x_1 = \frac{-2m}{2}, \quad x_2 = \frac{-2}{2}$$
$$x_1 = -m, \quad x_2 = -1$$

$x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$, więc żeby spełnić warunki zadania musimy zadbać o to, żeby $x_1 \notin \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$ tzn.

$$x_1 = -3 \iff -m = -3 \iff m = 3$$

lub

$$x_1 = 3 \iff -m = 3 \iff m = -3.$$

Z powyższych tylko $m = 3$ spełnia warunek przypadku II (a) tzn. $m > 1$.

Przypadek II (b): $m < 1$. Wtedy pierwiastki trójmianu (*) wyrażają się wzorami:

$$x_1 = \frac{-(m+1) - (-m+1)}{2}, \quad x_2 = \frac{-(m+1) + (-m+1)}{2}$$
$$x_1 = \frac{-m-1+m-1}{2}, \quad x_2 = \frac{-m-1-m+1}{2}$$

$$x_1 = \frac{-2}{2}, \quad x_2 = \frac{-2m}{2}$$
$$x_1 = -1, \quad x_2 = -m$$

$x_1 \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$, więc żeby spełnić warunki zadania musimy zadbać o to, żeby $x_2 \notin \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$ tzn.

$$x_2 = -3 \iff -m = -3 \iff m = 3$$

lub

$$x_2 = 3 \iff -m = 3 \iff m = -3.$$

Z powyższych tylko $m = -3$ spełnia warunek przypadku II (b) tzn. $m < 1$.

Reasumując: Funkcja $f(x) = \frac{x^2+(m+1)x+m}{x^2-9}$ ma dokładnie jedno miejsce zerowe wtedy i tylko wtedy gdy:

$$\begin{cases} m = 1 & / \ Przypadek\ I \\ m = 3 & / \ Przypadek\ II(a) \\ m = -3 & / \ Przypadek\ II(b) \end{cases}$$

Zadanie 3. Dwa osły oddalone od siebie o 100 metrów wyruszają w tym samym momencie i idą wprost na przeciwko siebie ze stałą prędkością 1 m/s. Mucha siedząca na nosie pierwszego osła startuje równo z osłami i leci do nosa drugiego, po czym od razu zawraca do nosa pierwszego osła, po czym wraca do drugiego itd. Prędkość muchy to 10 m/s. Pytanie brzmi: ile czasu minie zanim mucha zostanie zmiażdżona między dwoma nosami osłów?

Rozwiązanie 3 ("matematyczne")**.** Dane to $S = 100m$ (cała droga), $v_1 = 1m/s$ (prędkość pierwszego osła), $v_2 = 1m/s$ (prędkość drugiego osła) oraz $v_m = 10m/s$ (prędkość muchy).

1-wszy przelot muchy: Niech t oznacza czas jaki zajmie musze dolecenie do nosa drugiego osła, wtedy: $S_m = 100 - S_2 \iff 10 \cdot t = 100 - 1 \cdot t \iff 11t = 100 \iff t = \frac{100}{11}[s]$.

2-gi przelot muchy: Po upływie czasu $t = \frac{100}{11}s$ pierwszy osioł przeszedł już drogę równą $\frac{100}{11}$ metra; drugi osioł również przeszedł tę samą drogę (bo mają tę samą prędkość). Niech teraz t oznacza czas jaki zajmie musze dolecenie do nosa pierwszego osła, wtedy: $S_m = 100 - \frac{100}{11} - \frac{100}{11} - S_1 \iff 10 \cdot t = \frac{900}{11} - 1 \cdot t \iff 11t = \frac{900}{11} \iff t = \frac{900}{121}[s]$.

3-ci przelot muchy: Odległość dzieląca osły to teraz: $S = \frac{900}{11} - 2 \cdot \frac{900}{121} = \frac{900 \cdot 11 - 2 \cdot 900}{121} = \frac{8100}{121}$. Niech ponownie t oznacza czas jaki zajmie musze dolecenie do nosa drugiego osła, wtedy: $S_m = \frac{8100}{121} - S_1 \iff 10 \cdot t = \frac{8100}{121} - 1 \cdot t \iff 11t = \frac{8100}{121} \iff t = \frac{8100}{1331}[s]$.

Jeśli przez t_i oznaczmy czas w i-tym przelocie muchy, to możemy zanotować, że:

- $t_1 = \frac{100}{11}$
- $t_2 = \frac{900}{121} = \frac{100}{11} \cdot \frac{9}{11}$
- $t_3 = \frac{8100}{1331} = \frac{100}{11} \cdot \frac{81}{121}$

Zauważmy, że możemy zapisać te wyniki w postaci:

- $t_1 = \frac{100}{11} \cdot (\frac{9}{11})^0$
- $t_2 = \frac{100}{11} \cdot (\frac{9}{11})^1$
- $t_3 = \frac{100}{11} \cdot (\frac{9}{11})^2$

Sugeruje to wniosek, że $t_n = \frac{100}{11} \cdot (\frac{9}{11})^{n-1}$. (Fakt ten można formalnie wykazać, powołując się na dowód przez indukcję matematyczną; nie będziemy jednak tego robić).

Jest to szereg geometryczny zbieżny, o pierwszym wyrazie $t_1 = \frac{100}{11}$ i ilorazie $q = \frac{9}{11}$. Liczymy sumę tego szeregu:

$$S = \frac{t_1}{1-q} = \frac{\frac{100}{11}}{1 - \frac{9}{11}} = \frac{100}{11} \cdot \frac{11}{2} = \frac{100}{2} = 50$$

Oznacza to, że musi minąc 50 sekund, żeby doszło do zderzenia się osłów i zmiażdżenia muchy.

Rozwiązanie "życiowe"'. Z treści zadania wynika, że ważny jest tak naprawdę moment zderzenia się nosów obu osłów. Krążąca między nimi mucha nie ma zupełnie znaczenia – nawet bez jej obecności też dojdzie do zderzenia osłów. W związku z tym ignorujemy muchę. Skoro osły idą z tą samą prędkością (w tym momemncie nie ważne jak dużą), to spotkają się dokładnie w połowie dystansu, który ich dzieli, czyli po pokonaniu 100 metrów : 2 = 50 metrów.

Żeby przejść 50m potrzebują 50s (dopiero w tym momencie ważna jest wartość liczbowa ich prędkości tzn. 1 m/s.)

Odpowiedź: Zderzenie osłów, a tym samym zmiażdżenie muchy, nastąpi po 50 sekundach.

Zadanie 4. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} x \cdot y & = z + 2y \\ \sqrt{z} & = 2y \\ x \cdot z - 1984 & = 2z + 2 \cdot \frac{80}{\sqrt{z}} \end{cases}$$

Rozwiązanie 4. Rozwiązywanie zadania zacznijmy od wyznaczenia dziedziny podanego układu równań:

- Zauważmy, że niewiadoma z musi być dodatnia, ponieważ w trzecim równaniu występuje pierwiastek kwadratowy zmiennej z (a więc $z \geq 0$) w mianowniku wyrażenia $\frac{80}{\sqrt{z}}$ (a więc $z \neq 0$), stad wniosek, że $z > 0$.
- Skoro $2y = \sqrt{z} > 0$, to $y > 0$.
- Skoro $z > 0$ i $y > 0$, to z pierwszego równania wnioskujemy, że x również musi być dodatnie, bo $x = \frac{z+2y}{y} > 0$.
- Dziedziną układu równań jest więc zbiór trójek dodatnich liczb:

$$D = \{(x, y, z) \mid x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}$$

Wyrugujmy teraz jedną ze zmiennych – patrząc na stopień skomplikowania równań, można dojść do wniosku, że najłatwiej będzie pozbyć się zmiennej z i tym samym uwalonić układ od wyrażeń pierwiastkowych. Z drugiego równania wynika, że $\sqrt{z} = 2y \Rightarrow z = 4y^2$. Po podstawieniu tych wyników do równań (I) i (III) otrzymamy układ:

$$\begin{cases} x \cdot y & = 4y^2 + 2y \\ x \cdot 4y^2 - 1984 & = 2 \cdot 4y^2 + 2\frac{80}{2y} \end{cases}$$

Pierwsze równanie dzielimy przez $y > 0$,a drugie porządkujemy i otrzymujemy układ:

$$\begin{cases} x & = 4y + 2 \\ 4xy^2 - 1984 & = 8y^2 + \frac{80}{y} \quad \mid : 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & = 4y + 2 \\ xy^2 - 496 & = 2y^2 + \frac{20}{y} \end{cases}$$

Do drugiego równania powyższego układu podstawimy za x wyrażenie z pierwszego równania. Prowadzi to do równania:

$$(4y + 2)y^2 - 496 = 2y^2 + \frac{20}{y} \qquad \mid -2y^2 - \frac{20}{y}$$

$$4y^3 + 2y^2 - 496 - 2y^2 - \frac{20}{y} = 0 \qquad \mid \cdot y$$

$$4y^4 - 496y - 20 = 0 \qquad \mid : 4$$

$$y^4 - 124y - 5 = 0$$

Otrzymaliśmy wielomianowe równanie stopnia czwartego. Oznaczmy jego lewą stronę przez $f(y)$. Pierwiastków tego wielomianu poszukamy wśród dzielników wyrazu wolnego tzn. wśród liczb ze zbioru $\{-5, -1, 1, 5\}$.

$$\begin{aligned} f(-5) &= 625 + 620 - 5 \neq 0 \\ f(-1) &= 1 + 124 - 5 \neq 0 \\ f(5) &= 625 - 620 - 5 = 0 \\ f(1) &= 1 - 124 - 5 \neq 0 \end{aligned}$$

Z powyższego wynika, że wielomian $f(y)$ jest podzielny przez dwumian $y - 5$. Korzystamy ze schematu Hornera (albo dzielimy pisemnie wielomiany)

	1	0	0	-124	-5
5	1	5	25	1	0

i otrzymujemy, że $f(y) = (y - 5)(y^3 + 5y^2 + 25y + 1)$.

Stwierdzamy, że wielomian $y^3+5y^2+25y+1$ jest stale dodatni w dziedzinie, czyli nie ma w niej pierwiastków:

$$y > 0 \Rightarrow (y^3 > 0 \wedge 5y^2 > 0 \wedge 25y > 0) \Rightarrow (y^3 + 5y^2 + 25y + 1 > 0 + 0 + 0 + 1 = 1 > 0)$$

W związku z powyższym stwierdzamy, że dla $y > 0$ równanie $y^4 - 124y - 5 = 0$ ma tylko jedno rozwiązania, mianowicie $y = 5$.

To pozwala na wyznaczenie wartości niewiadomej x:

$$x = 4y + 2 = 4 \cdot 5 + 2 = 22$$

oraz niewiadomej z:

$$z = 4y^2 = 4 \cdot 5^2 = 4 \cdot 25 = 100.$$

Reasumując, trójka $(x, y, z) = (22, 5, 100)$ jest jedynym rozwiązaniem wyjściowego układu równań. Dodatkowo warto pokusić się o weryfikację obliczeń poprzez:

Sprawdzenie poprawności rozwiązania:

W układzie równań:

$$\begin{cases} x \cdot y & = z + 2y \\ \sqrt{z} & = 2y \\ x \cdot z - 1984 & = 2z + \frac{80}{\sqrt{z}} \end{cases}$$

dla $(x, y, z) = (22, 5, 100)$ otrzymujemy:

$$\begin{cases} 22 \cdot 5 & = 100 + 2 \cdot 5 \\ \sqrt{100} & = 2 \cdot 5 \\ 22 \cdot 100 - 1984 & = 2 \cdot 100 + 2 \cdot \frac{80}{\sqrt{100}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 110 = 110 \\ 10 = 10 \\ 216 = 216 \end{cases}$$

co dowodzi poprawnego wybrania trójki rozwiązującej układ równań.

Zadanie 5. Współczynniki a i b są liczbami rzeczywistymi i spełniają warunek: $0 < a < b$. Zakładamy, że $u_0 = a$ i $v_0 = b$ dla całego ciągu liczb naturalnych n:

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{oraz} \quad v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n}$$

Udowonij, że ciągi u_n oraz v_n są zbieżne i że ich wspólna granica jest równa

$$\frac{b \sin(\arccos(\frac{a}{b}))}{\arccos(\frac{a}{b})}$$

Rozwiązanie 5. Zastosujemy „trik" wynikający z własności liczb rzeczywistych. Skoro liczba dodatnia a jest mniejsza od liczby dodatniej b, to możemy zapisać, że $a = b \cdot c$, gdzie liczba c jest wartością ułamkową tzn. $0 < c < 1$. Inaczej mówiąc, liczba a jest pewną częśćią (ułamkiem) liczby b.

Teraz zauważamy, że liczbę c można wyrazić jako cosinus pewnej liczby rzeczywistej tzn., że istnieje takie $\alpha \in \mathbb{R}$, że $c = \cos(\alpha)$, a co za tym idzie: $a = b \cdot \cos(\alpha)$ [gdyż $0 < \cos(\alpha) < 1$].

Wtedy możemy zapisać, że:

$$\begin{cases} u_0 = a = b\cos(\alpha) \\ v_0 = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{b\cos(\alpha)+b}{2} = \frac{b(\cos(\alpha)+1)}{2} = b \cdot \frac{\cos(\alpha)+1}{2} = b \cdot \cos^2(\frac{\alpha}{2}) \\ v_1 = \sqrt{u_1 \cdot v_0} = \sqrt{b \cdot \cos^2(\frac{\alpha}{2}) \cdot b} = |b\cos(\frac{\alpha}{2})| = b\cos(\frac{\alpha}{2}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_2 = \frac{u_1+v_1}{2} = \frac{b\cos^2(\frac{\alpha}{2})+b\cos(\frac{\alpha}{2})}{2} = \frac{b\cos(\frac{\alpha}{2})(\cos(\frac{\alpha}{2})+1)}{2} = b \cdot \cos(\frac{\alpha}{2})\cos^2(\frac{\alpha}{4}) \\ v_2 = \sqrt{u_2 \cdot v_1} = \sqrt{b \cdot \cos(\frac{\alpha}{2})\cos^2(\frac{\alpha}{4}) \cdot b\cos(\frac{\alpha}{2})} = |b\cos(\frac{\alpha}{2})\cos(\frac{\alpha}{4})| = b\cos(\frac{\alpha}{2})\cos(\frac{\alpha}{4}) \end{cases}$$

Uwaga 3. Obliczając wartości u_1 oraz u_2 skorzystaliśmy z trygonometrycznej zależności:

$$\frac{\cos(\phi)+1}{2} = \cos^2(\frac{\phi}{2})$$

przyjmując dla u_1 w miejsce ϕ wartość α, zaś dla u_2 wartość $\frac{\alpha}{2}$.

Dokonujemy analizy wzorów na v_0, v_1, v_2

$$\begin{cases} v_2 = b\cos(\frac{\alpha}{2})\cos(\frac{\alpha}{4}) = b\cos(\frac{\alpha}{2^1})\cos(\frac{\alpha}{2^2}) \\ v_1 = b\cos(\frac{\alpha}{2}) = b\cos(\frac{\alpha}{2^1}) \\ v_0 = b = b \cdot 1 = b \cdot \frac{\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{1}{\cos(\alpha)} \cdot b\cos(\frac{\alpha}{2^0}) \end{cases}$$

Chcemy, żeby przy v_1 oraz v_2 pojawił się czynnik $\cos(\frac{\alpha}{2^0})$, zatem podobnie jak powyżej dla v_0 mnożymy równości przez $1 = \frac{\cos(\frac{\alpha}{2^0})}{\cos(\alpha)}$:

$$\begin{cases} v_2 = b\cos(\frac{\alpha}{2^1})\cos(\frac{\alpha}{2^2}) \cdot \frac{\cos(\frac{\alpha}{2^0})}{\cos(\alpha)} \\ v_1 = b\cos(\frac{\alpha}{2^1}) \cdot \frac{\cos(\frac{\alpha}{2^0})}{\cos(\alpha)} \\ v_0 = \frac{1}{\cos(\alpha)} \cdot b\cos(\frac{\alpha}{2^0}) \end{cases}$$

po zapisaniu powyższych w postaci:

$$\begin{cases} v_2 = \frac{1}{\cos(\alpha)} \cdot b\cos(\frac{\alpha}{2^0})\cos(\frac{\alpha}{2^1})\cos(\frac{\alpha}{2^2}) \\ v_1 = \frac{1}{\cos(\alpha)} \cdot b\cos(\frac{\alpha}{2^0})\cos(\frac{\alpha}{2^1}) \\ v_0 = \frac{1}{\cos(\alpha)} \cdot b\cos(\frac{\alpha}{2^0}) \end{cases}$$

możemy postawić tezę, że

$$v_n = \frac{1}{\cos(\alpha)} \cdot b \cdot \prod_{k=0}^{n} \cos(\frac{\alpha}{2^k}) \quad \text{dla} \;\; n \in \mathbb{N}$$

Dokonujemy teraz analizy wzorów (podanych przed uwagą) na u_0, u_1, u_2

$$\begin{cases} u_0 = b\cos(\alpha) = v_0\cos(\alpha) \\ u_1 = b \cdot \cos^2(\frac{\alpha}{2}) = v_1\cos(\frac{\alpha}{2}) \\ u_2 = b \cdot \cos(\frac{\alpha}{2})\cos^2(\frac{\alpha}{4}) = v_2\cos(\frac{\alpha}{4}) \end{cases}$$

Zauważamy, że:

$$\begin{cases} u_0 = v_0\cos(\frac{\alpha}{2^0}) \\ u_1 = v_1\cos(\frac{\alpha}{2^1}) \\ u_2 = v_2\cos(\frac{\alpha}{2^2}) \end{cases}$$

i wysuwamy tezę, że

$$u_n = v_n\cos(\frac{\alpha}{2^n}) \quad \text{dla} \;\; n \in \mathbb{N}$$

Dowód poprawności obu powyższych tez przeprowadzimy metodą indukcji matematycznej. Mamy więc pokazać, że:

$$v_n = \frac{1}{\cos(\alpha)} \cdot b \cdot \prod_{k=0}^{n} \cos(\frac{\alpha}{2^k}) \quad \text{dla} \;\; n \in \mathbb{N}$$

$$u_n = v_n\cos(\frac{\alpha}{2^n}) \quad \text{dla} \;\; n \in \mathbb{N}$$

Indukcyjny dowód powyższych wzorów:

1) dla $n = 0$ jest

$$v_0 = \frac{1}{\cos(\alpha)} \cdot b \cdot \prod_{k=0}^{0} \cos(\frac{\alpha}{2^k}) = \frac{1}{\cos(\alpha)} \cdot b \cdot \cos(\frac{\alpha}{2^0}) = \frac{1}{\cos(\alpha)} \cdot b \cdot \cos(\alpha) = b,$$

$$u_0 = v_0 \cos(\frac{\alpha}{2^0}) = b \cos(\alpha),$$

co zgadza się z określeniem v_0, u_0 podanym na początku rozwiązania zadania.

2) Załóżmy, że teza jest prawdziwa dla pewnego $n \in \mathbb{N}$.

3) Pokażemy, że jest też prawdziwa dla $n+1 \in \mathbb{N}$.

4) Istotnie:

Postąpimy podobnie, jak przy obliczaniu początkowych wyrazów obu ciągów. Zaczniemy od analizy ciągu (u_n), a następnie zajmiemy się ciągiem (v_n).

Wychodząc od wzoru $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ i korzystając z założenia indukcyjnego na postać u_n, otrzymujemy, że:

$$u_{n+1} = \frac{v_n \cos(\frac{\alpha}{2^n}) + v_n}{2} = \frac{v_n(\cos(\frac{\alpha}{2^n}) + 1)}{2} = v_n \cdot \frac{\cos(\frac{\alpha}{2^n}) + 1}{2} = v_n \cdot \cos^2\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right).$$

Ostatnia równość wynika z ,przytaczanego już wcześniej, wzoru trygonometrycznego:

$$\frac{\cos(\phi) + 1}{2} = \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right), \text{ gdzie } \phi := \frac{\alpha}{2^n}, \text{więc } \frac{\phi}{2} = \frac{\alpha}{2^{n+1}}.$$

Korzystamy teraz z założenia indukcyjnego na postać v_n i otrzymujemy, że:

$$u_{n+1} = \frac{1}{\cos(\alpha)} \cdot b \cdot \prod_{k=0}^{n} \cos\left(\frac{\alpha}{2^k}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right).$$

Zauważamy, że jeden z czynników $\cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)$ możemy „dołączyć” do produktu cosinusów i otrzymać, że:

$$u_{n+1} = \frac{1}{\cos(\alpha)} \cdot b \cdot \prod_{k=0}^{n+1} \cos\left(\frac{\alpha}{2^k}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right) = v_{n+1} \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right),$$

co należało pokazać dla ciągu (u_n).

Wychodząc teraz od wzoru $v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n}$ i stosując przed chwilą udowodnioną równość na u_{n+1} otrzymamy, że $v_{n+1} = \sqrt{v_{n+1} \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right) \cdot v_n}$, co po zastosowaniu założenia indukcyjnego na postać v_n można zapisać jako:

$$v_{n+1} = \sqrt{v_{n+1} \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right) \cdot \frac{1}{\cos(\alpha)} \cdot b \cdot \prod_{k=0}^{n} \cos\left(\frac{\alpha}{2^k}\right)},$$

po „dołączeniu” czynnika $\cos(\frac{\alpha}{2^{n+1}})$ do produktu cosinusów otrzymujemy, że

$$v_{n+1} = \sqrt{v_{n+1} \cdot \frac{1}{\cos(\alpha)} \cdot b \cdot \prod_{k=0}^{n+1} \cos\left(\frac{\alpha}{2^k}\right)}, \qquad |\ ()^2$$

$$v_{n+1}^2 = v_{n+1} \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right) \cdot \frac{1}{\cos(\alpha)} \cdot b \cdot \prod_{k=0}^{n} \cos\left(\frac{\alpha}{2^k}\right), \qquad |\ (\div v_{n+1})$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{\cos(\alpha)} \cdot b \cdot \prod_{k=0}^{n+1} \cos\left(\frac{\alpha}{2^k}\right),$$

co należało pokazać dla ciągu (v_n).

Na mocy zasady indukcji matematycznej udowodniliśmy jawne wzory ciągów (u_n) oraz (v_n). ∎

Zanim obliczymy granice obu ciągów, pokażemy jeszcze, jak, dzięki zależnościom trygonometrycznym, uprościć wyrażenie na iloczyn cosinusów. Za chwilę ułatwi to obliczenie szukanych granic.

Przekształcimy teraz $\prod_{k=0}^{n} \cos(\frac{\alpha}{2^k})$, korzystając ze wzoru $\cos(\phi) = \frac{\sin(2\phi)}{2\sin(\phi)}$.

$$\prod_{k=0}^{n} \cos(\frac{\alpha}{2^k}) = \prod_{k=0}^{n} \frac{\sin(2 \cdot \frac{\alpha}{2^k})}{2\sin(\frac{\alpha}{2^k})} = \prod_{k=0}^{n} \frac{\sin(\frac{\alpha}{2^{k-1}})}{2\sin(\frac{\alpha}{2^k})} = \prod_{k=0}^{n} \frac{\sin(\frac{\alpha}{2^{k-1}})}{2\sin(\frac{\alpha}{2^k})} \cdot \frac{2 \cdot \frac{\alpha}{2^{k-1}}}{2 \cdot \frac{\alpha}{2^{k-1}}} \cdot \frac{\frac{\alpha}{2^k}}{\frac{\alpha}{2^k}} =$$

$$= \prod_{k=0}^{n} \frac{\sin(\frac{\alpha}{2^{k-1}})}{\frac{\alpha}{2^{k-1}}} \cdot \frac{\frac{\alpha}{2^k}}{\sin(\frac{\alpha}{2^k})} \cdot \frac{2 \cdot \frac{\alpha}{2^{k-1}}}{2 \cdot 2 \cdot \frac{\alpha}{2^k}} = \prod_{k=0}^{n} \frac{\sin(\frac{\alpha}{2^{k-1}})}{\frac{\alpha}{2^{k-1}}} \cdot \frac{\frac{\alpha}{2^k}}{\sin(\frac{\alpha}{2^k})} =$$

$$= \frac{\sin(\frac{\alpha}{2^{-1}})}{\frac{\alpha}{2^{-1}}} \cdot \frac{\frac{\alpha}{2^0}}{\sin(\frac{\alpha}{2^0})} \cdot \frac{\sin(\frac{\alpha}{2^0})}{\frac{\alpha}{2^0}} \cdot \frac{\frac{\alpha}{2^1}}{\sin(\frac{\alpha}{2^1})} \cdot \frac{\sin(\frac{\alpha}{2^1})}{\frac{\alpha}{2^1}} \cdot \frac{\frac{\alpha}{2^2}}{\sin(\frac{\alpha}{2^2})} \cdot \frac{\sin(\frac{\alpha}{2^2})}{\frac{\alpha}{2^2}} \cdot \frac{\frac{\alpha}{2^3}}{\sin(\frac{\alpha}{2^3})} \cdot \ldots \cdot$$

$$\ldots \cdot \frac{\sin(\frac{\alpha}{2^{n-2}})}{\frac{\alpha}{2^{n-2}}} \cdot \frac{\frac{\alpha}{2^{n-1}}}{\sin(\frac{\alpha}{2^{n-1}})} \cdot \frac{\sin(\frac{\alpha}{2^{n-1}})}{\frac{\alpha}{2^{n-1}}} \cdot \frac{\frac{\alpha}{2^n}}{\sin(\frac{\alpha}{2^n})} =$$

$$= \frac{\sin(\frac{\alpha}{2^{-1}})}{\frac{\alpha}{2^{-1}}} \cdot \frac{\frac{\alpha}{2^n}}{\sin(\frac{\alpha}{2^n})} = \frac{\sin(2\alpha)}{2\alpha} \cdot \frac{\frac{\alpha}{2^n}}{\sin(\frac{\alpha}{2^n})}.$$

Reasumując, otrzymaliśmy, że:

$$\prod_{k=0}^{n} \cos(\frac{\alpha}{2^k}) = \frac{\sin(2\alpha)}{2\alpha} \cdot \frac{\frac{\alpha}{2^n}}{\sin(\frac{\alpha}{2^n})}$$

Korzystając z powyższej tożsamości, obliczamy granice ciągów (v_n) oraz (u_n):

$$\lim v_n = \lim \frac{b \cdot \prod_{k=0}^{n} \cos(\frac{\alpha}{2^k})}{\cos(\alpha)} = \frac{b}{\cos(\alpha)} \cdot \lim \prod_{k=0}^{n} \cos(\frac{\alpha}{2^k}) = \frac{b}{\cos(\alpha)} \cdot \lim \left(\frac{\sin(2\alpha)}{2\alpha} \cdot \frac{\frac{\alpha}{2^n}}{\sin(\frac{\alpha}{2^n})}\right)$$

Gdy $n \to \infty$, to $2^n \to \infty$, więc $\frac{\alpha}{2^n} \to 0$, a co za tym idzie $\frac{\frac{\alpha}{2^n}}{\sin(\frac{\alpha}{2^n})} \to 1$, co przekłada się na fakt, że:

$$\lim v_n = \frac{b}{\cos(\alpha)} \cdot \frac{\sin(2\alpha)}{2\alpha}.$$

Korzystając ze wzoru na sinus podwojonego kąta otrzymujemy, że

$$\lim v_n = \frac{b}{\cos(\alpha)} \cdot \frac{2\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{2\alpha} = \frac{b \cdot \sin(\alpha)}{\alpha} \in \mathbb{R},$$

zatem ciąg (v_n) jest zbieżny, a jego granicą jest $\frac{b\sin(\alpha)}{\alpha}$.

Wykorzystamy ten fakt do obliczenia granicy ciągu (u_n):

$$\lim u_n = \lim v_n \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) = \lim v_n \cdot \lim \cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) = \frac{b\sin(\alpha)}{\alpha}\cos(0) = \frac{b\sin(\alpha)}{\alpha}$$

Zatem ciąg (u_n) jest zbieżny, a jego granicą jest $\frac{b\sin(\alpha)}{\alpha}$.

Udowodniliśmy właśnie, że oba ciągi są zbieżne i mają tę samą granicę. Należy teraz tak dokonać przekształceń, by pokazać, że granica ta jest równa

$$\frac{b\sin(\arccos(\frac{a}{b}))}{\arccos(\frac{a}{b})}$$

Skoro początkowo dobraliśmy α tak, żeby $a = b\cos(\alpha)$, to stąd mamy, że $\cos(\alpha) = \frac{a}{b}$, czyli $\alpha = \arccos(\frac{a}{b})$. Zatem:

$$\lim v_n = \lim u_n = \frac{b\sin(\alpha)}{\alpha} = \frac{b\sin(\arccos(\frac{a}{b}))}{\arccos(\frac{a}{b})}$$

co należało udowodnić.

Zadanie 6. Rozwiąż nierówność

$$\left|\frac{2x-3}{x^2-1}\right| \geq 2$$

Rozwiązanie 6.

METODA 1

Zaczniemy od określenia dziedziny tej nierówności

$$|x^2-1| \neq 0 \iff x^2-1 \neq 0 \iff x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}.$$

Zakładamy teraz, że $x \neq 1 \wedge x \neq -1$. Wtedy wyjściowa nierównoś, na podstawie własności modułu: $|a| \geq b \iff a \geq b \vee a \leq -b$, jest równoważna alternatywie nierówności:

$$(I)\ \frac{2x-3}{x^2-1} \geq 2 \quad \vee \quad (II)\ \frac{2x-3}{x^2-1} \leq -2$$

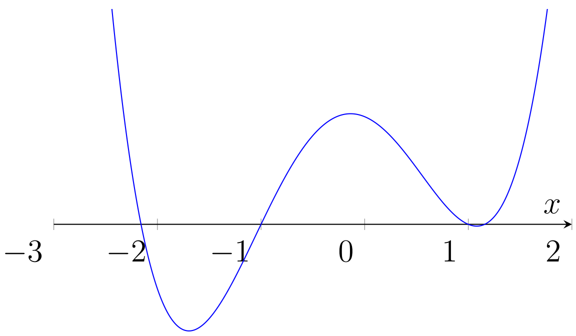
Najpierw rozwiążemy pierwszą z tych nierówności:

$$\begin{gathered}
\frac{2x-3}{x^2-1} \geq 2 \\
\Updownarrow \\
\frac{2x-3}{x^2-1} - 2 \cdot \frac{x^2-1}{x^2-1} \geq 0 \\
\Updownarrow \\
\frac{2x-3-2x^2+2}{x^2-1} \geq 0 \\
\Updownarrow \\
\frac{-2x^2+2x-1}{x^2-1} \geq 0 \\
\Updownarrow \\
\underbrace{(-2x^2+2x-1)}_{\text{stale ujemne, gdyż } a=-2<0 \wedge \Delta=-4<0} \cdot (x^2-1) \geq 0 \quad | : (-2x^2+2x-1) < 0 \\
\Updownarrow \\
(x^2-1) = (x-1)(x+1) \leq 0 \\
\Updownarrow \text{ pamiętając, że } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\} \\
x \in (-1; 1)
\end{gathered}$$

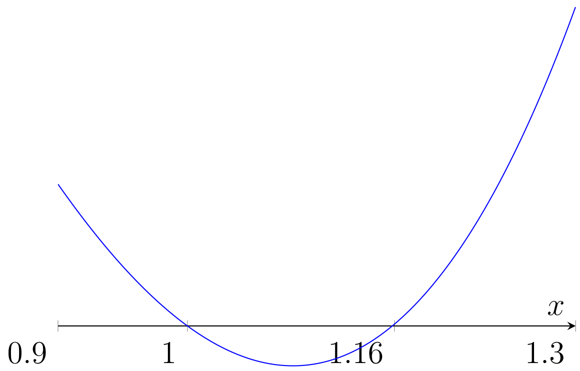
Teraz rowiążemy drugą z nierówności:

$$\frac{2x-3}{x^2-1} \leq -2$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{2x-3}{x^2-1} + 2 \cdot \frac{x^2-1}{x^2-1} \leq 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{2x-3+2x^2-2}{x^2-1} \leq 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{2x^2+2x-5}{x^2-1} \leq 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\underbrace{(2x^2+2x-5)}\cdot(x^2-1) \leq 0$$
$$\left(\Delta = 4+40 = 44;\ \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{11},\ x_1 = \frac{-2-2\sqrt{11}}{4};\ x_2 = \frac{-2+2\sqrt{11}}{4}\right)$$
$$\Updownarrow$$
$$2\left(x - \frac{-1-\sqrt{11}}{2}\right)\left(x - \frac{-1+\sqrt{11}}{2}\right)(x-1)(x+1) \leq 0 \ (*)$$

Rozwiązanie nierówności (*) można odczytać ze szkicu wykresu wielomianu stojącego po jej lewej stronie. Zauważmy, że skoro $\sqrt{11} \approx 3,32$, więc $x_1 \approx -2,16$, $x_2 \approx 1,16$.



Zobaczmy jeszcze zbliżenie wykresu w okolicach liczby 1, tam też wielomian przyjmuje wartości ujemne, co nie jest łatwe do odczytania z pełnego wykresu.



Pamiętając, że $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ stwierdzamy, że rozwiązaniem drugiej nierówności jest: $x \in \left[\frac{-1-\sqrt{11}}{2}; -1\right) \cup \left(1; \frac{-1+\sqrt{11}}{2}\right)$.

Z uwagi na to, że rozwiązujemy alternatywę dwóch nierówności, do końcowej odpowiedzi musimy zaliczyć sumę zbiorów rozwiązań nierówności (I) oraz nierówności (II). Odpowiedzią jest więc zbiór:

$$(-1; 1) \cup \left[\frac{-1-\sqrt{11}}{2}; -1\right) \cup \left(1; \frac{-1+\sqrt{11}}{2}\right],$$

co można zwięźlej zapisać jako:

$$\left[\frac{-1-\sqrt{11}}{2}; \frac{-1+\sqrt{11}}{2}\right] \setminus \{-1; 1\}.$$

METODA 2

Zaczniemy od określenia dziedziny tej nierówności

$$|x^2 - 1| \neq 0 \iff x^2 - 1 \neq 0 \iff x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}.$$

Przekształcamy nierówność równoważnie (przenosząc 2 na lewą stronę i mnożąc obie strony nierówności przez $|x^2 - 1| > 0$) do następującej postaci:

$$\left|\frac{2x-3}{x^2-1}\right| - 2 \geq 0 \iff \left|\frac{2x-3}{x^2-1}\right| - 2\left|\frac{x^2-1}{x^2-1}\right| \geq 0 \iff |2x-3| - 2|x^2-1| \geq 0$$

Korzystamy teraz z definicji wartości bezwzględnej, żeby „rozbić” powyższą nierówność na trzy przypadki (przedziały).

$$|2x-3| = \begin{cases} 2x-3 & \text{dla } 2x-3 \geq 0 \iff x \geq \frac{3}{2} \\ -(2x-3) = -2x+3 & \text{dla } 2x-3 < 0 \iff x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

Przy rozpisywaniu $|x^2 - 1|$ uwzględnimy od razu dziedzinę, tzn. wykluczmy $x^2 - 1 = 0$, czyli $x = 1$ i $x = -1$.

$$|x^2-1| = \begin{cases} x^2-1 & \text{dla } x^2-1>0 \iff x\in(-\infty;-1)\cup(1,+\infty) \\ -(x^2-1)=-x^2+1 & \text{dla } x^2-1<0 \iff x\in(-1,1) \end{cases}$$

Rozpatrujemy teraz trzy przypadki (wynikające z wybrania częsci wspólnych zbiorów).

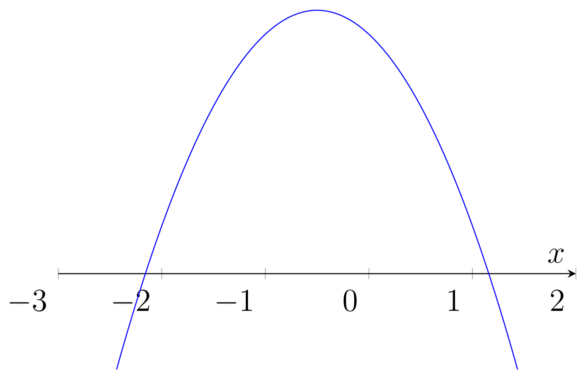
<u>I Przypadek: $x\in(-\infty,-1)\cup(1,\frac{3}{2})$</u> Nierówność $|2x-3|-2|x^2-1|\geq 0$ przyjmuje postać:

$$-2x+3-2(x^2-1)\geq 0 \iff -2x^2-2x+5\geq 0$$

$$\Delta=(-2)^2-4\cdot(-2)\cdot 5=44, \quad \sqrt{\Delta}=2\sqrt{11}$$

$$x_1=\frac{2-2\sqrt{11}}{-4}=\frac{-1-\sqrt{11}}{2}, \quad x_2=\frac{2+2\sqrt{11}}{-4}=\frac{-1+\sqrt{11}}{2}$$

Zauważmy, że skoro $\sqrt{11}\approx 3,32$, więc $x_1\approx -2,16$, $x_2\approx 1,16$. Szkicujemy parabolę i odczytujemy rozwiązywania nierówności.



Zatem $-2x^2-2x+5\geq 0 \iff x\in[\frac{-1-\sqrt{11}}{2},\frac{-1+\sqrt{11}}{2}]$.

Uwzględniamy teraz założenia związane z przypadkiem pierwszym i otrzymujemy odpowiedź do tej części rozwiązania zadania:

$$x\in\Big[\frac{-1-\sqrt{11}}{2},-1\Big)\cup\Big(1,\frac{-1+\sqrt{11}}{2}\Big]$$

<u>II Przypadek: $x\in(-1,1)$</u> Nierówność $|2x-3|-2|x^2-1|\geq 0$ przyjmuje postać:

$$-2x+3-2(-x^2+1)\geq 0 \iff 2x^2-2x+1\geq 0 \iff x^2+(x-1)^2\geq 0$$

Lewa strona powyższej nierówności jako suma kwadratów jest nieujemna w całym rozpatrywanym przedziale. Zatem dla przypadku II otrzymjemy rozwiązania: $x\in(-1,1)$.

<u>II Przypadek: $x\in[\frac{3}{2},+\infty)$</u> Nierówność $|2x-3|-2|x^2-1|\geq 0$ przyjmuje postać:

$$2x-3-2(x^2-1)\geq 0 \iff -2x^2+2x-1\geq 0 \iff x^2+(x-1)^2\leq 0$$

Lewa strona powyższej nierówności jako suma kwadratów jest nieujemna w całym rozpatrywanym przedziale, jedyną szansą na by lewa strona była równa zeru jest $x^2 = 0 \iff x = 0$ i jednocześnie $(x-1)^2 = 0 \iff x = 1$, co jest niemożliwe. Zatem dla przypadku III otrzymjemy brak rozwiązań. Inaczej mówiąc, zbiór rozwiązań jest zbiorem pustym.

Odpowiedź: Sumując zbiory rozwiazań z trzech przypadków, otrzymujemy, że odpowiedzią jest zbiór:

$$\Big[\frac{-1-\sqrt{11}}{2}; -1\Big) \cup \Big(1; \frac{-1+\sqrt{11}}{2}\Big] \cup (-1; 1),$$

co można zwięźlej zapisać jako:

$$\Big[\frac{-1-\sqrt{11}}{2}; \frac{-1+\sqrt{11}}{2}\Big] \setminus \{-1; 1\}.$$

Zadanie 7. Rozwiąż nierówność $|\frac{1}{x-2}| > |\frac{1}{x+1}|$

Rozwiązanie 7. Ustalmy dziedzinę nierówności: $x-2 \neq 0, x+1 \neq 0 \iff x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$. Teraz przekształcamy nierówność:

$$\begin{gathered} \left|\frac{1}{x-2}\right| > \left|\frac{1}{x+1}\right| \\ \Updownarrow \times|x+1| \\ \left|\frac{x+1}{x-2}\right| > 1 \\ \Updownarrow \\ (a) \quad \frac{x+1}{x-2} > 1 \quad \vee \quad (b) \quad \frac{x+1}{x-2} < -1 \end{gathered}$$

Nierówność (a) jest równoważna nierówności:

$$\frac{x+1}{x-2} - 1 > 0 \iff \frac{x+1-x+2}{x-2} > 0 \iff \frac{3}{x-2} > 0,$$

która jest prawdziwa dla $x > 2$.

Nierówność (b) jest równoważna nierówności:

$$\frac{x+1}{x-2} + 1 < 0 \iff \frac{x+1+x-2}{x-2} < 0 \iff \frac{2x-1}{x-2} < 0 \iff (2x-1)(x-2) < 0,$$

która jest prawdziwa dla $\frac{1}{2} < x < 2$.

Ostatecznie, zbiorem rozwiązań nierówności $\left|\frac{1}{x-2}\right| > \left|\frac{1}{x+1}\right|$ jest suma zbiorów rozwiązań nierówności $(a), (b)$ tzn. $x \in (\frac{1}{2}, \infty) \setminus \{2\}$.

Uwaga. Nierówność z zadania można również rozwiązać w inny sposób: ustalając dziedzinę $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$, mnożąc wyjściową nierówność obustronnie przez $|x-2||x+1|$, po czym rozpatrywać nierówność $|x+1| > |x-2|$. Dzielimy ją na trzy przypadki (”rozpisując” wartości bezwzględne z ich definicji) i na końcu sumując rozwiązania z tych przypadków.

Zadanie 8. Rozwiąż równanie $4^x + 6^x = 9^x$

Rozwiązanie 8. Równanie jest określone dla wszystkich liczb rzeczywistych x. Zauważmy, że korzystając z praw działań na potęgach, równanie możemy zapisać jako:

$$(2^x)^2 + 3^x \cdot 2^x - (3^x)^2 = 0$$

Potraktujmy je jako równanie kwadratowe w postaci ogólnej ze zmienną 2^x oraz współczynnikami $1, 3^x, -(3^x)^2$. Wtedy wyróżnikiem tego równania jest:

$$\Delta = (3^x)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-(3^x)^2) = 5 \cdot (3^x)^2 > 0, \quad \text{gdyż} \;\; 3^x > 0, \text{ dla dowolnego } \; x \in \mathbb{R}$$

Stosując wzory na rozwiązania równania kwadratowego otrzymujemy, że:

$$\begin{aligned} 2^x &= \frac{-3^x - 3^x\sqrt{5}}{2} & \vee \quad 2^x &= \frac{-3^x + 3^x\sqrt{5}}{2} \\ 2^x &= 3^x \cdot \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & \vee \quad 2^x &= 3^x \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x &= \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & \vee \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x &= \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{aligned}$$

Pierwsze z powyższych równań jest sprzeczne: jego lewa strona jest zawsze nieujemna, prawa zaś ujemna.

Drugie z równań rozwiązujemy logarytmując obie strony używając logarytmu z podstawą[3] $\frac{2}{3}$

$$x = \log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$

[3]Lub jakąkolwiek inną. Podstawa równa $\frac{2}{3}$ jest jednak najbardziej 'kompaktowa'.

Zadanie 9. Rozwiąż równanie $\dfrac{8^x + 27^x}{12^x + 18^x} = \dfrac{7}{6}$

Rozwiązanie 9. Równanie jest określone dla wszystkich liczb rzeczywistych x. Zauważmy, że korzystając z praw działań na potęgach, równanie możemy zapisać jako:

$$\frac{(2^3)^x + (3^3)^x}{(2^2)^x \cdot 3^x + 2^x \cdot (3^2)^x} = \frac{7}{6}$$

$$\frac{(2^x)^3 + (3^x)^3}{(2^x)^2 \cdot 3^x + 2^x \cdot (3^x)^2} = \frac{7}{6}$$

Podstawy zmienne pomocnicze: $a := 2^x, b := 3^x$, wtedy równanie ma postać:

$$\frac{a^3 + b^3}{a^2 b + ab^2} = \frac{7}{6}$$

Korzystamy ze wzoru na sumę sześcianów oraz faktoryzujemy mianownik:

$$\frac{(a+b)(a^2 - ab + b^2)}{ab(a+b)} = \frac{7}{6}$$

co prowadzi do równania:

$$a^2 - ab + b^2 = \frac{7}{6}ab$$

które jest równoważne równaniu:

$$6a^2 - 13ab + 6b^2 = 0$$

Potraktujmy je jako równanie kwadratowe w postaci ogólnej ze zmienną a oraz współczynnikami $6, -13b, 6b^2$. Wtedy wyróżnikiem tego równania jest:

$$\Delta(a) = (-13b)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 6b^2 = 169b^2 - 144b^2 = 25b^2 > 0, \quad \text{gdyż} \quad b = 3^x > 0 \text{ dla dowolnego } \quad x \in \mathbb{R}$$

Stosując wzory na rozwiązania równania kwadratowego otrzymujemy, że:

$$a_1 = \frac{13b - 5b}{12} \quad \vee \quad a_2 = \frac{13b + 5b}{12}$$
$$a_1 = \frac{2}{3}b \quad \vee \quad a_2 = \frac{3}{2}b$$

Wracając do zmiennych z podstawienia:

$$2^x = \frac{2}{3} \cdot 3^x \quad \vee \quad 2^x = \frac{3}{2} \cdot 3^x$$
$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^1 \quad \vee \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{3}{2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$$
$$x = 1 \quad \vee \quad x = -1$$

Zadanie 10. Rozwiąż równanie $1+\sin 6x = \sin 3x + \cos 3x$ w przedziale $[0, 2\pi]$

Rozwiązanie 10. Uwaga organizacyjna: kursywą zapisywane będą komentarze oraz zależności, na podstawie których napisaliśmy dane równanie.

$$1+\sin 6x = \sin 3x + \cos 3x$$

Z trygonometrii: $1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$ *oraz* $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, *więc dla* $\alpha = 3x$ *mamy:*

$$\sin^2 3x + \cos^2 3x + 2\sin 3x\cos 3x = \sin 3x + \cos 3x$$

Z algebry: $a^2+b^2+2ab = (a+b)^2$, *więc dla* $a = \sin 3x$ *i* $b = \cos 3x$ *mamy:*

$$(\sin 3x + \cos 3x)^2 = \sin 3x + \cos 3x$$

Z algebry: $y^2 = y \iff y = 0 \ \vee \ y = 1$, *więc dla* $y = \sin 3x + \cos 3x$ *mamy:*

$$\sin 3x + \cos 3x = 0 \quad \vee \quad \sin 3x + \cos 3x = 1$$

Z trygonometrii: $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\cos(\alpha - \frac{\pi}{4})$ *(ten wzór dowodzi się zamieniając* $\cos\alpha$ *na* $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ *i następnie korzystając ze wzoru na sumę sinusów), więc po podstawieniu* $\alpha = 3x$ *mamy:*

$$\sqrt{2}\cos(3x - \frac{\pi}{4}) = 0 \quad \vee \quad \sqrt{2}\cos(3x - \frac{\pi}{4}) = 1 \quad | \div \sqrt{2}$$

$$\cos(3x - \frac{\pi}{4}) = 0 \quad \vee \quad \cos(3x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Z trygonometrii: $0 = \cos\frac{\pi}{2}$ *oraz* $\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4}$, *więc mamy:*

$$\cos(3x - \frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{2} \quad \vee \quad \cos(3x - \frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{4}$$

Z trygonometrii: korzystając z zależności $\cos t = \cos\alpha \iff t_1 = \alpha + 2k\pi \ \vee \ t_2 = -\alpha + 2k\pi$, *gdzie* $k \in \mathbb{Z}$ *i podstawiając dla pierwszego równania* $t = 3x - \frac{\pi}{4}, \ \ \alpha = \frac{\pi}{2}$, *a dla drugiego:* $t = 3x - \frac{\pi}{4}, \ \ \alpha = \frac{\pi}{4}$, *mamy:*

$$3x_1 - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ \vee \ 3x_2 - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ \vee \ 3x_3 - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \ \vee \ 3x_4 - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \ \ k \in \mathbb{Z}$$

$$3x_1 = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi \quad \vee \quad 3x_2 = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \vee \quad 3x_3 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \vee \quad 3x_4 = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x_1 = \frac{3}{12}\pi + \frac{2}{3}k\pi \quad \vee \quad x_2 = -\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi \quad \vee \quad x_3 = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi \quad \vee \quad x_4 = \frac{2}{3}k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Teraz wybieramy tylko te wartości k, dla których $x \in [0, 2\pi]$.

Uwaga: w większości obliczeń i odpowiedzi celowo nie będziemy skracać ułamków, pozwoli to na prostsze rachunki, a nade wszytsko, pokaże „ładną” postać ostatecznego rozwiązania zadania.

Dla $k = -1$:

$$x_1 = \frac{3}{12} - \frac{2}{3}\pi = -\frac{5}{12}\pi < 0,\ \ x_2 = -\frac{\pi}{12} - \frac{2}{3}\pi = -\frac{9}{12}\pi < 0,\ \ x_3 = \frac{\pi}{6} - \frac{2}{3}\pi = -\frac{6}{12}\pi < 0,\ \ x_4 = -\frac{2}{3}\pi < 0$$

Wniosek: dla $k = -1$ wszystkie rozwiązania $x_1, x_2, x_3, x_4 \notin [0, 2\pi]$. Zauważmy, że tym bardziej dla wszystki wartości $k < -1$ rozwiązania x_1, x_2, x_3, x_4 plasują się poniżej 0, a co za tym idzie, nie należą do przedziału $[0, 2\pi]$.

Dla $k = 0$:

$$x_1 = \frac{3}{12}\pi,\quad x_2 = -\frac{\pi}{12} < 0,\quad x_3 = \frac{\pi}{6} = \frac{2}{12}\pi,\quad x_4 = 0$$

Dla $k = 1$:

$$x_1 = \frac{3}{12}\pi + \frac{2}{3}\pi = \frac{11}{12}\pi,\quad x_2 = -\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi = \frac{7}{12}\pi,\quad x_3 = \frac{2}{12}\pi + \frac{2}{3}\pi = \frac{10}{12}\pi,\quad x_4 = 0 + \frac{2}{3}\pi = \frac{8}{12}\pi$$

Dla $k = 2$:

$$x_1 = \frac{11}{12}\pi + \frac{2}{3}\pi = \frac{19}{12}\pi,\ \ x_2 = \frac{7}{12}\pi + \frac{2}{3}\pi = \frac{15}{12}\pi,\ \ x_3 = \frac{10}{12}\pi + \frac{2}{3}\pi = \frac{18}{12}\pi,\ \ x_4 = \frac{8}{12}\pi + \frac{2}{3}\pi = \frac{16}{12}\pi$$

Dla $k = 3$:

$$x_1 = \frac{19}{12}\pi + \frac{2}{3}\pi = \frac{25}{12}\pi > 2\pi,\ \ x_2 = \frac{15}{12}\pi + \frac{2}{3}\pi = \frac{23}{12}\pi,\ \ x_3 = \frac{18}{12}\pi + \frac{2}{3}\pi = \frac{26}{12}\pi > 2\pi,\ \ x_4 = \frac{16}{12}\pi + \frac{2}{3}\pi = \frac{24}{12}\pi$$

Wniosek: dla wartości $k = 3$ rozwiązania x_1, x_3 przekraczają 2π, zaś rozwiązanie x_4 jest równe dokładnie 2π. Oznacza to, że dla $k > 3$ rozwiązania x_1, x_3, x_4 będą już powyżej wartości 2π, a co za tym idzie, nie będą należeć do przedziału $[0, 2\pi]$.

Rozwiązanie x_2 dla wartości $k = 4$ to $x_2 = \frac{23}{12}\pi + \frac{2}{3}\pi = \frac{31}{12}\pi > 2\pi,\quad x_2 \notin [0, 2\pi]$. większych od 4, rozwiązania są już ponad 2π. Dla wartości $k > 4$ rozwiązanie x_2 tym bardziej nie będzie należeć do przedziału $[0, 2\pi]$.

Ostatecznie możemy podać odpowiedź: rozwiązaniami równania $1 + \sin 6x = \sin 3x + \cos 3x$ w przedziale $[0, 2\pi]$ są:

$$x \in \left\{0, \frac{2}{12}\pi, \frac{3}{12}\pi, \frac{7}{12}\pi, \frac{8}{12}\pi, \frac{10}{12}\pi, \frac{11}{12}\pi, \frac{15}{12}\pi, \frac{16}{12}\pi, \frac{18}{12}\pi, \frac{19}{12}\pi, \frac{23}{12}\pi, 2\pi\right\}.$$

Zadanie 11. Wiedząc, że

$$\frac{1}{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}+1} = A\sqrt[3]{25} + B\sqrt[3]{5} + C,$$

gdzie A, B, C są liczbami wymiernymi, znajdź wartość wyrażenia $A + B + C$.

Rozwiązanie 11. Korzystając ze wzoru $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$ możemy zamienić ułamek po lewej stronie na:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}+1} = \frac{1}{(\sqrt[3]{5})^2+\sqrt[3]{5}\cdot 1+1^2}\cdot\frac{\sqrt[3]{5}-1}{\sqrt[3]{5}-1} = \frac{\sqrt[3]{5}-1}{(\sqrt[3]{5})^3-1^3} = \frac{\sqrt[3]{5}-1}{4}$$

zauważmy teraz, że równość z treści zadania wygląda następująco:

$$\frac{1}{4}\sqrt[3]{5} - \frac{1}{4} = A\sqrt[3]{25} + B\sqrt[3]{5} + C$$

z porównania współczynników przy odpowiednich wyrazach wynika, że:

$$A = 0, \quad B = \frac{1}{4}, \quad C = -\frac{1}{4}$$

a co za tym idzie: $A + B + C = 0 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$.

Zadanie 12. Znajdź dokładną wartość wyrażenia

$$\sum_{k=-9}^{9} \frac{1}{10^k+1}$$

Rozwiązanie 12. Wyrażenie można zapisać w postaci sumy:

$$\sum_{k=-9}^{9} \frac{1}{10^k+1} = \frac{1}{10^{-9}+1} + \frac{1}{10^{-8}+1} + \ldots + \frac{1}{10^{8}+1} + \frac{1}{10^{9}+1}$$

Zauważmy teraz, że wyrażenie jest symetryczne w rozumieniu możliwości połączenia jego wyrazów w pary:

$$\frac{1}{10^{-9}+1} + \frac{1}{10^{9}+1}$$
$$\frac{1}{10^{-8}+1} + \frac{1}{10^{8}+1}$$
$$\vdots$$
$$\frac{1}{10^{-1}+1} + \frac{1}{10^{1}+1}$$

„samotnie” pozostaje składnik:

$$\frac{1}{10^{0}+1} = \frac{1}{2}$$

Zauważmy teraz, że:

$$\frac{1}{10^{-k}+1} + \frac{1}{10^{k}+1} = \frac{(10^k+1)+(10^{-k}+1)}{(10^{-k}+1)(10^k+1)} = \frac{10^k+10^{-k}+2}{1+10^{-k}+10^k+1} = 1$$

dla $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Na mocy powyższego mamy więc, że:

$$\frac{1}{10^{-9}+1} + \frac{1}{10^{9}+1} = 1$$
$$\frac{1}{10^{-8}+1} + \frac{1}{10^{8}+1} = 1$$
$$\vdots$$
$$\frac{1}{10^{-1}+1} + \frac{1}{10^{1}+1} = 1$$

oraz

$$\frac{1}{10^{0}+1} = \frac{1}{2}$$

Dokonujemy sumowania dziewięciu jedynek oraz jednej połówki. Otrzymujemy więc, że:

$$\frac{1}{10^{-9}+1} + \frac{1}{10^{-8}+1} + \ldots + \frac{1}{10^{8}+1} + \frac{1}{10^{9}+1} = 9 \cdot 1 + \frac{1}{2} = 9\frac{1}{2}$$