Równanie różniczkowe Bessela

Toruńska Letnia Szkoła Matematyki i Informatyki 2014

Krzysztof Buczyński

25 — 29 sierpnia 2014

Spis treści

Streszczenie

Nazwa omawianego tematu pochodzi od nazwiska niemieckiego matematyka i astronoma Friedricha Wilhelma Bessela (1784 - 1864). Równanie Bessela spotyka się np. w mechanice klasycznej, kwantowej, w technice czy w astronomii.

W pracy omówione zostanie równanie różniczkowe Bessela, tzn. równanie postaci

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - n^2)y(x) = 0,$$

gdzie $n, x \in \mathbb{R}$ oraz $n \geqslant 0$. Można uogólnić rozważania na zmienną $x \in \mathbb{C}$, lecz ze względu na małe praktyczne zastosowania pomija się tę sytuację. Jedynym ważnym wyjątkiem jest przypadek zmiennej czysto urojonej ix, $x \in \mathbb{R}$. Będzie to wtedy tzw. zmodyfikowane równanie różniczkowe Bessela. Ostatni rozdział tej pracy będzie poświęcony naszkicowaniu tego zagadnienia.

Streszczenie

Omawiane równanie jest równaniem różniczkowym zwyczajnym liniowym jednorodnym rzędu drugiego.

Uwaga

Uwaga terminologiczna — zwyczajowo mówi się jednak o równaniu różniczkowym Bessela rzędu n mając na myśli wartość jaką przyjmuje n w tym równaniu.

Dlatego oczekiwane jest uzyskanie dwóch liniowo niezależnych rozwiązań. W tym celu zastosowane będą tzw. funkcje Bessela.

Uwaga

Do ich opisu wykorzystuje się funkcję Γ *Eulera. Definiuje sie ją dla liczb dodatnich* a *:*

$$\Gamma(a) = \int_{0}^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx.$$

W pracy pokazane zostaną podstawowe własności tej funkcji oraz jej uogólnienie na argumenty ujemne.

Streszczenie

Funkcja Bessela pierwszego rodzaju (rzędu n) określona dla $x \in (0, +\infty)$ ma postać:

$$J_n(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (\frac{x}{2})^{2p+n}}{p!\Gamma(n+p+1)}$$

i jest calką szczególną równania Bessela.

Również funckja

$$J_{-n}(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (\frac{x}{2})^{2p+n}}{p!\Gamma(-n+p+1)}$$

jest całką szczególną tego równania.

Gdy n nie jest liczbą całkowitą, to owe funkcje stanowią układ fundamentalny całek równania Bessela w przedziale $(0, +\infty)$. W przeciwnym przypadku wrońskian funckji J_n oraz J_{-n} jest tożsamościowo równy zeru w przedziale $(0, +\infty)$.

Streszczenie

Wprowadza sie więc funkcję Bessela drugiego rodzaju (rzędu n) (inna nazwa : funkcja Neumanna) określoną w $(0, +\infty)$. Jej postać to:

$$N_n(x) = \lim_{\nu \to n} \frac{J_\nu(x) cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{sin(\nu\pi)},$$

gdzie ν to dowolna liczba rzeczywista niecałkowita, zaś n — nieujemna liczba całkowita.

Funkcja N_n wraz z J_n tworzy układ podstawowy całek równania Bessela w przedziale $(0, +\infty)$.

W celu ilustracji przybliżenia rozważań teoretycznych podane zostaną przykłady wraz z rozwiązaniami.

RÓWNANIE RÓŻNICZKOWE BESSELA

Wstęp

Definicja

Niech $n \in \mathbb{R}$ oraz $n \geqslant 0$. Równanie, różniczkowe zwyczajne jednorodne rzędu drugiego, postaci :

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - n^2)y(x) = 0 \tag{1}$$

nazwyamy ***równaniem różniczkowym Bessela****.*

Wstęp

Definicja

Niech $n \in \mathbb{R}$ oraz $n \geqslant 0$. Równanie, różniczkowe zwyczajne jednorodne rzędu drugiego, postaci :

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - n^2)y(x) = 0 \tag{1}$$

nazwyamy ***równaniem różniczkowym Bessela****.*

- Załóżmy, że mamy do czynienia ze zmienną x rzeczywistą.

Wstęp

Definicja

Niech $n \in \mathbb{R}$ oraz $n \geqslant 0$. Równanie, różniczkowe zwyczajne jednorodne rzędu drugiego, postaci :

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - n^2)y(x) = 0 \tag{1}$$

nazwyamy ***równaniem różniczkowym Bessela****.*

- Załóżmy, że mamy do czynienia ze zmienną x rzeczywistą.
- Będziemy poszukiwać dwóch liniowo niezależnych rozwiązań.

Wstęp

Definicja

Niech $n \in \mathbb{R}$ oraz $n \geqslant 0$. Równanie, różniczkowe zwyczajne jednorodne rzędu drugiego, postaci :

$$x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - n^2)y(x) = 0 \tag{1}$$

*nazwyamy **równaniem różniczkowym Bessela**.*

- Załóżmy, że mamy do czynienia ze zmienną x rzeczywistą.
- Będziemy poszukiwać dwóch liniowo niezależnych rozwiązań.
- W tym celu zastosujemy metodę Frobeniusa — szukamy rozwiązania równania różniczkowego drugiego rzędu w postaci szeregu potęgowego :

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{m+k}, \tag{2}$$

gdzie m jest liczbą na razie nieznaną. Będziemy poszukiwać m oraz a_k tak, żeby funkcja (2) była rozwiązaniem równania (1) w pewnym obszarze, który ustalimy później.

Wstęp

Załóżmy, że szerg (2) można różniczkować dwukrotnie wyraz po wyrazie.
Otrzymujemy wtedy :

Wstęp

Załóżmy, że szerg (2) można różniczkować dwukrotnie wyraz po wyrazie.
Otrzymujemy wtedy :

- $$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (m+k) x^{m+k-1}. \tag{3}$$

Wstęp

Załóżmy, że szerg (2) można różniczkować dwukrotnie wyraz po wyrazie.
Otrzymujemy wtedy :

- $$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (m+k) x^{m+k-1}. \tag{3}$$
- $$y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (m+k)(m+k-1) x^{m+k-2}. \tag{4}$$

Wstęp

Załóżmy, że szerg (2) można różniczkować dwukrotnie wyraz po wyrazie. Otrzymujemy wtedy :

- $$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (m+k) x^{m+k-1}. \tag{3}$$
- $$y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (m+k)(m+k-1) x^{m+k-2}. \tag{4}$$

Wstawiając teraz funkcje (2), (3) oraz (4) do równania (1) otrzymujemy:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (m+k)(m+k-1) x^{m+k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (m+k) x^{m+k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{m+k+2} - \sum_{k=0}^{\infty} n^2 a_k x^{m+k} = 0,$$

Wstęp

Załóżmy, że szerg (2) można różniczkować dwukrotnie wyraz po wyrazie.
Otrzymujemy wtedy :

- $$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(m+k)x^{m+k-1}. \tag{3}$$
- $$y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(m+k)(m+k-1)x^{m+k-2}. \tag{4}$$

Wstawiając teraz funkcje (2), (3) oraz (4) do równania (1) otrzymujemy:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(m+k)(m+k-1)x^{m+k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(m+k)x^{m+k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{m+k+2} - \sum_{k=0}^{\infty} n^2 a_k x^{m+k} = 0,$$

co po uproszczeniu daje nam:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k(m+k)(m+k-1) + a_k(m+k) - n^2 a_k\right)x^{m+k} = \sum_{k=0}^{\infty} -a_k x^{m+k+2},$$

Wstęp

Załóżmy, że szerg (2) można różniczkować dwukrotnie wyraz po wyrazie.
Otrzymujemy wtedy :

- $$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(m+k)x^{m+k-1}. \tag{3}$$
- $$y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(m+k)(m+k-1)x^{m+k-2}. \tag{4}$$

Wstawiając teraz funkcje (2), (3) oraz (4) do równania (1) otrzymujemy:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(m+k)(m+k-1)x^{m+k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(m+k)x^{m+k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{m+k+2} - \sum_{k=0}^{\infty} n^2 a_k x^{m+k} = 0,$$

co po uproszczeniu daje nam:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Big(a_k(m+k)(m+k-1) + a_k(m+k) - n^2 a_k\Big)x^{m+k} = \sum_{k=0}^{\infty} -a_k x^{m+k+2},$$

czyli:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Big((m+k)^2 - n^2\Big)a_k x^{m+k} = \sum_{k=2}^{\infty} -a_{k-2}x^{m+k}. \tag{5}$$

Wstęp

Równanie (5) jest spełnione tożsamościowo wtedy i tylko wtedy, gdy współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej x po obu stronach równania są sobie równe.

Wstęp

Równanie (5) jest spełnione tożsamościowo wtedy i tylko wtedy, gdy współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej x po obu stronach równania są sobie równe. Zatem musi być:

$$(m^2 - n^2)a_0 = 0$$

$$\left((m+1)^2 - n^2\right)a_1 = 0$$

$$\left((m+k)^2 - n^2\right)a_k = -a_{k-2} \text{ dla } k = 2, 3, \ldots$$

Wstęp

Równanie (5) jest spełnione tożsamościowo wtedy i tylko wtedy, gdy współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej x po obu stronach równania są sobie równe. Zatem musi być:

$$(m^2 - n^2)a_0 = 0$$

$$\left((m+1)^2 - n^2\right)a_1 = 0$$

$$\left((m+k)^2 - n^2\right)a_k = -a_{k-2} \text{ dla } k = 2, 3, \ldots$$

Zakładamy, że $a_0 \neq 0$. Wtedy z pierwszego warunku otrzymujemy, że $m = n$ lub $m = -n$.

Przeanalizujemy te przypadki oddzielnie.

Przypadek m=n

W pierwszym przypadku (m=n) otrzymujemy z warunku drugiego, że $(2n+1)a_1 = 0$, skąd oczywiście $a_1 = 0$. Z trzeciego warunku otrzymujemy dla $k = 3$, że

$$(6n+9)a_3 = -a_1 = 0,$$

więc $a_3 = 0$. Analogicznie dla $k = 5$ mamy a_5=0 itd. dla k nieparzystego. Zatem można napisać

$$a_{2p-1} = 0 \text{ dla } p \in \mathbb{N} \tag{6}$$

Przypadek m=n

W pierwszym przypadku (m=n) otrzymujemy z warunku drugiego, że $(2n+1)a_1 = 0$, skąd oczywiście $a_1 = 0$. Z trzeciego warunku otrzymujemy dla $k = 3$, że

$$(6n+9)a_3 = -a_1 = 0,$$

więc $a_3 = 0$. Analogicznie dla $k = 5$ mamy a_5=0 itd. dla k nieparzystego. Zatem można napisać

$$a_{2p-1} = 0 \text{ dla } p \in \mathbb{N} \tag{6}$$

Dla współczynników parzystych mamy:

$$a_2 = \frac{-a_0}{4n+4} = \frac{(-1)^1 a_0}{2^{2\cdot 1}1!(n+1)}$$

$$a_4 = \frac{-a_2}{8n+16} = \frac{(-1)^2 a_0}{2^{2\cdot 2}2!(n+1)(n+2)}$$

$$a_6 = \frac{-a_4}{12n+36} = \frac{(-1)^3 a_0}{2^{2\cdot 3}3!(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$\dots$$

$$a_{2p} = \frac{-a_{2p-2}}{2\cdot 2p + 2\cdot 2\cdot p^2} = \frac{(-1)^p a_0}{2^{2\cdot p}p!(n+1)\dots(n+p)} \text{ dla } p \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Uwaga

Wzory (6) oraz (7) dowodzi się metodą indukcji matematycznej.

Przypadek m=n

Wzory (6) i (7) określają wszystkie współczynniki a_k z szeregu wyjścioweg :

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{m+k}.$$

Ponieważ wyrazy o wskaźnikach nieparzystych znikają (oraz z racji, że $m = n$), otrzymujemy :

$$y(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p a_0 x^{2p+n}}{2^{2p} p!(n+1)\ldots(n+p)}, \tag{8}$$

przy czym dla $p = 0$ zamiast $(n+1)\ldots(n+p)$ podstawiamy 1.

Przypadek m=n

Wzory (6) i (7) określają wszystkie współczynniki a_k z szeregu wyjściowego :

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{m+k}.$$

Ponieważ wyrazy o wskaźnikach nieparzystych znikają (oraz z racji, że $m = n$), otrzymujemy :

$$y(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p a_0 x^{2p+n}}{2^{2p} p!(n+1)\dots(n+p)}, \tag{8}$$

przy czym dla $p = 0$ zamiast $(n+1)\dots(n+p)$ podstawiamy 1.

Przyjmujemy $a_0 = \frac{1}{2^n \Gamma(n+1)}$.

Uwaga

Γ *jest funkcją Gamma Eulera — patrz* ***Dodatek****. W tym miesjcu jej kluczową własnością jest równość :*

$$(n+1)\dots(n+p) \cdot \Gamma(n+1) = \Gamma(n+p+1).$$

Przypadek m=n

Wzory (6) i (7) określają wszystkie współczynniki a_k z szeregu wyjścioweg :

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{m+k}.$$

Ponieważ wyrazy o wskaźnikach nieparzystych znikają (oraz z racji, że $m = n$), otrzymujemy :

$$y(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p a_0 x^{2p+n}}{2^{2p} p!(n+1)\dots(n+p)}, \tag{8}$$

przy czym dla $p = 0$ zamiast $(n+1)\dots(n+p)$ podstawiamy 1.

Przyjmujemy $a_0 = \frac{1}{2^n \Gamma(n+1)}$.

Uwaga

*Γ jest funkcją Gamma Eulera — patrz **Dodatek**. W tym miesjcu jej kluczową własnością jest równość :*

$$(n+1)\dots(n+p) \cdot \Gamma(n+1) = \Gamma(n+p+1).$$

Korzystjąc z tej własności otrzymujemy:

$$y(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (\frac{x}{2})^{2p+n}}{p!\Gamma(n+p+1)}.$$

Funckcja Bessela pierwszego rodzaju

Zamiast $y(x)$ piszemy $J_n(x)$ i ostatecznie mamy:

$$J_n(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (\frac{x}{2})^{2p+n}}{p!\Gamma(n+p+1)}. \tag{9}$$

Funckcja Bessela pierwszego rodzaju

Zamiast $y(x)$ piszemy $J_n(x)$ i ostatecznie mamy:

$$J_n(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (\frac{x}{2})^{2p+n}}{p!\Gamma(n+p+1)}. \tag{9}$$

Zapisujemy funkcję (9) w postaci:

$$J_n(x) = (\frac{x}{2})^n \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (\frac{x}{2})^{2p}}{p!\Gamma(n+p+1)}.$$

i widzimy, że szereg po prawej stronie jest szeregiem potegowym zbieżny dla dowolnego x. Dlatego nasze założenie co do dwukrotnego różniczkowania szeregu wyjściowego (2) jest usprawiedliwione. Funcja (9) może nie być określona dla $x \leqslant 0$ — ze względu na czynnik $(\frac{x}{2})^n$.

Funckcja Bessela pierwszego rodzaju

Zamiast $y(x)$ piszemy $J_n(x)$ i ostatecznie mamy:

$$J_n(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (\frac{x}{2})^{2p+n}}{p!\Gamma(n+p+1)}. \tag{9}$$

Zapisujemy funkcję (9) w postaci:

$$J_n(x) = (\frac{x}{2})^n \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (\frac{x}{2})^{2p}}{p!\Gamma(n+p+1)}.$$

i widzimy, że szereg po prawej stronie jest szeregiem potegowym zbieżny dla dowolnego x. Dlatego nasze założenie co do dwukrotnego różniczkowania szeregu wyjściowego (2) jest usprawiedliwione. Funcja (9) może nie być określona dla $x \leqslant 0$ — ze względu na czynnik $(\frac{x}{2})^n$.
Ostatecznie mamy:

Definicja

Funckją Bessela pierwszego rodzaju rzędu n, określoną dla $x > 0$ *nazywamy*

$$J_n(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (\frac{x}{2})^{2p+n}}{p!\Gamma(n+p+1)}.$$

Uwaga

Funkcja Bessela pierwszego rodzaju jest jednym z rozwiązań szczególnych równania Bessela.

Przypadek m=-n

Gdy $m = -n$, to postępując analogicznie do przeprowadzonego rozumowania otrzymamy, że funkcja

$$J_{-n}(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (\frac{x}{2})^{2p-n}}{p!\Gamma(-n+p+1)}, \tag{10}$$

jest również rozwiązaniem szczególnym, w przedziale $(0, +\infty)$, równania Bessela.

Przypadek m=-n

Gdy $m = -n$, to postępując analogicznie do przeprowadzonego rozumowania otrzymamy, że funkcja

$$J_{-n}(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (\frac{x}{2})^{2p-n}}{p!\Gamma(-n+p+1)}, \tag{10}$$

jest również rozwiązaniem szczególnym, w przedziale $(0, +\infty)$, równania Bessela.

Twierdzenie

Dla n nie będącego liczbą całkowitą nieujemną funckcje (9) i (10) stanowią układ fundamentalny całek równania Bessela w przedziale $(0, +\infty)$.

Przypadek m=-n

Gdy $m = -n$, to postępując analogicznie do przeprowadzonego rozumowania otrzymamy, że funkcja

$$J_{-n}(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (\frac{x}{2})^{2p-n}}{p!\Gamma(-n+p+1)}, \tag{10}$$

jest również rozwiązaniem szczególnym, w przedziale $(0, +\infty)$, równania Bessela.

Twierdzenie

Dla n nie będącego liczbą całkowitą nieujemną funckcje (9) i (10) stanowią układ fundamentalny całek równania Bessela w przedziale $(0, +\infty)$.

Dlatego dla $n \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$ otrzymujemy rozwiązanie ogólne równania Bessela jako:

$$y(x) = C_1 J_n(x) + C_2 J_{-n}(x),$$

dla pewnych stałych C_1 i C_2.

Przypadek n naturalnego

Jeżeli $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, to $\Gamma(n+p+1) = (n+p)!$, więc:

$$J_n(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (\frac{x}{2})^{2p+n}}{p!(n+p)!}.$$

Z uwagi na to, że przyjmuje się (patrz **Dodatek**) $\frac{1}{\Gamma(t)} = 0$ dla $t = 0, -1, -2, \ldots$, więc:

$$J_{-n}(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (\frac{x}{2})^{2p-n}}{p!\Gamma(-n+p+1)} = \sum_{p=n}^{\infty} \frac{(-1)^p (\frac{x}{2})^{2p-n}}{p!(-n+p)!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+n} (\frac{x}{2})^{2k+n}}{k!(n+k)!} = (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\frac{x}{2})^{2k+n}}{k!(n+k)!} = (-1)^n J_n(x).$$

Przypadek n naturalnego

Jeżeli $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, to $\Gamma(n+p+1) = (n+p)!$, więc:

$$J_n(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (\frac{x}{2})^{2p+n}}{p!(n+p)!}.$$

Z uwagi na to, że przyjmuje się (patrz **Dodatek**) $\frac{1}{\Gamma(t)} = 0$ dla $t = 0, -1, -2, \ldots$, więc:

$$J_{-n}(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (\frac{x}{2})^{2p-n}}{p!\Gamma(-n+p+1)} = \sum_{p=n}^{\infty} \frac{(-1)^p (\frac{x}{2})^{2p-n}}{p!(-n+p)!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+n} (\frac{x}{2})^{2k+n}}{k!(n+k)!} = (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\frac{x}{2})^{2k+n}}{k!(n+k)!} = (-1)^n J_n(x).$$

Zatem wrońskian tych funkcji jest tożsamościowo równy zeru:

$$W(x) = \begin{vmatrix} J_n(x) & J_{-n}(x) \\ J'_n(x) & J'_{-n}(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} J_n(x) & (-1)^n J_n(x) \\ J'_n(x) & (-1)^n J'_n(x) \end{vmatrix} = 0$$

dla każdego $x \in (0, +\infty)$.

Przypadek n naturalnego

Jeżeli $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, to $\Gamma(n+p+1) = (n+p)!$, więc:

$$J_n(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (\frac{x}{2})^{2p+n}}{p!(n+p)!}.$$

Z uwagi na to, że przyjmuje się (patrz **Dodatek**) $\frac{1}{\Gamma(t)} = 0$ dla $t = 0, -1, -2, \ldots$, więc:

$$J_{-n}(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (\frac{x}{2})^{2p-n}}{p!\Gamma(-n+p+1)} = \sum_{p=n}^{\infty} \frac{(-1)^p (\frac{x}{2})^{2p-n}}{p!(-n+p)!} =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+n} (\frac{x}{2})^{2k+n}}{k!(n+k)!} = (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\frac{x}{2})^{2k+n}}{k!(n+k)!} = (-1)^n J_n(x).$$

Zatem wrońskian tych funkcji jest tożsamościowo równy zeru:

$$W(x) = \begin{vmatrix} J_n(x) & J_{-n}(x) \\ J_n'(x) & J_{-n}'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} J_n(x) & (-1)^n J_n(x) \\ J_n'(x) & (-1)^n J_n'(x) \end{vmatrix} = 0$$

dla każdego $x \in (0, +\infty)$.
Stąd funkcje te nie mogą stanowić układu fundamentalnego równania Bessela (1).

Funkcja Bessela drugiego rodzaju

Niech więc teraz $\nu > 0$ będzie dowolną liczbą nie całkowitą, zaś n – naturalną lub zerem. W przedziale $(0, +\infty)$ jest określona funckja :

$$N_n(x) = \lim_{\nu \to n} \frac{J_\nu(x) cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{sin(\nu\pi)} \tag{11}$$

Funkcja Bessela drugiego rodzaju

Niech więc teraz $\nu > 0$ będzie dowolną liczbą nie całkowitą, zaś n – naturalną lub zerem. W przedziale $(0, +\infty)$ jest określona funckja :

$$N_n(x) = \lim_{\nu \to n} \frac{J_\nu(x) cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{sin(\nu\pi)} \tag{11}$$

Definicja

Funckja (11) zwana jest funkcją Bessela drugiego rodzaju rzędu naturalnego n lub funkcją Neumanna.

Funkcja Bessela drugiego rodzaju

Niech więc teraz $\nu > 0$ będzie dowolną liczbą nie całkowitą, zaś n – naturalną lub zerem. W przedziale $(0, +\infty)$ jest określona funckja :

$$N_n(x) = \lim_{\nu \to n} \frac{J_\nu(x) cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{sin(\nu\pi)} \tag{11}$$

Definicja

Funckja (11) zwana jest funkcją Bessela drugiego rodzaju rzędu naturalnego n lub funkcją Neumanna.

Twierdzenie

Funkcja Neumanna jest rozwiązaniem szczególnym równania Bessela (1)

Funkcja Bessela drugiego rodzaju

Twierdzenie

Funkcje Bessela pierwszego i drugiego rodzaju stanowią układ fundamentalny całek równania Bessela.

Funkcja Bessela drugiego rodzaju

Twierdzenie

Funkcje Bessela pierwszego i drugiego rodzaju stanowią układ fundamentalny całek równania Bessela.

Uwaga

Podsumowując rozważania otrzymujemy, że

- *Dla* $n \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$ *rozwiązaniem ogólnym równania różniczkowego Bessela jest :*

$$y(x) = C_1 J_n(x) + C_2 J_{-n}(x). \tag{12}$$

- *Dla* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *rozwiązaniem ogólnym równania różniczkowego Bessela jest :*

$$y(x) = C_1 J_n(x) + C_2 N_n(x). \tag{13}$$

Dla pewnych stałych C_1, C_2.

PRZYKŁADY

Przykłady

Przykład

Rozwiązać rownania:

1. $x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \frac{1}{36})y(x) = 0.$
2. $x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - 4)y(x) = 0.$

Przykłady

Przykład

Rozwiązać rownania:

1. $x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \frac{1}{36})y(x) = 0.$
2. $x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - 4)y(x) = 0.$

Rozwiązanie. *1. Mamy tutaj* $n = \frac{1}{6}$. *W związku z tym* $n \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$ *i na mocy wyprowadzonego wzoru* (12) *otrzymujemy rozwiązanie:*

$$y(x) = C_1 J_{\frac{1}{6}}(x) + C_2 J_{-\frac{1}{6}}(x).$$

Przykłady

Przykład

Rozwiązać rownania:

1. $x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \frac{1}{36})y(x) = 0.$
2. $x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - 4)y(x) = 0.$

Rozwiązanie. *1. Mamy tutaj* $n = \frac{1}{6}$*. W związku z tym* $n \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$ *i na mocy wyprowadzonego wzoru* (12) *otrzymujemy rozwiązanie:*

$$y(x) = C_1 J_{\frac{1}{6}}(x) + C_2 J_{-\frac{1}{6}}(x).$$

2. W tym przypadku jest $n = 2$*, więc* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*. Ze wzoru* (13) *dostajemy:*

$$y(x) = C_1 J_2(x) + C_2 N_2(x).$$

Przykłady

Przykład

Niech $n > 0$ *i* $m > 0$. *Rozwiązać równanie* $x^2y'' + xy' + (m^2x^2 - n^2)y = 0$.

Przykłady

Przykład

Niech $n > 0$ i $m > 0$. Rozwiązać równanie $x^2y'' + xy' + (m^2x^2 - n^2)y = 0$.

Rozwiązanie. *W tym celu wprowadźmy zmienną pomocniczą $t := mx$ oraz napiszmy równanie w postaci: $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (m^2x^2 - n^2)y = 0$.*
Teraz obliczamy różniczki z nową zmienną:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = y'_t \cdot m = my'.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}(my'_t) \cdot \frac{dt}{dx} = my''_t \cdot m = m^2y''.$$

Stąd podstawiając otrzymamy:

$$\frac{t^2}{m^2}m^2y'' + \frac{t}{m}my' + (t^2 - n^2)y = 0,$$

czyli nowa postać równania różniczkowego Bessela:

$$t^2y'' + ty' + (t^2 - n^2)y = 0.$$

Rozwiązaniem jest $y = C_1J_n(t) + C_2J_{-n}(t)$ lub $y = C_1J_n(t) + C_2N_n(t)$.
Wracając do wyjściowej postaci mamy rozwiązania:

$$y = C_1J_n(mx) + C_2J_{-n}(mx)$$

lub

$$y = C_1J_n(mx) + C_2N_n(mx).$$

ZMODYFIKOWANE RÓWNANIE RÓŻNICZOWE BESSELA

Zmodyfikowane równanie Bessela

W ostatnim rozdziale skupimy się na przypadku, gdy zmienna niezależna jest postaci it, $t \in \mathbb{R}$. Równanie Bessela (1) przyjmuje postać:

$$(it)^2 y''(it) + (it)y'(it) + \left((it)^2 - n^2\right)y(it) = 0,$$

Zmodyfikowane równanie Bessela

W ostatnim rozdziale skupimy się na przypadku, gdy zmienna niezależna jest postaci $it, t \in \mathbb{R}$. Równanie Bessela (1) przyjmuje postać:

$$(it)^2 y''(it) + (it)y'(it) + \Big((it)^2 - n^2\Big)y(it) = 0,$$

czyli:

$$(it)^2 y''(it) + ity'(it) - (t^2 + n^2)y(it) = 0,$$

Zmodyfikowane równanie Bessela

W ostatnim rozdziale skupimy się na przypadku, gdy zmienna niezależna jest postaci $it, t \in \mathbb{R}$. Równanie Bessela (1) przyjmuje postać:

$$(it)^2 y''(it) + (it)y'(it) + \Big((it)^2 - n^2\Big)y(it) = 0,$$

czyli:

$$(it)^2 y''(it) + ity'(it) - (t^2 + n^2)y(it) = 0,$$

dokonujmey podstawienia: $x := it$, czyli $t = -ix$. Otrzymujemy:

$$x^2 y''(x) + xy'(x) - (x^2 + n^2)y(x) = 0. \qquad (14)$$

Zmodyfikowane równanie Bessela

W ostatnim rozdziale skupimy się na przypadku, gdy zmienna niezależna jest postaci $it, t \in \mathbb{R}$. Równanie Bessela (1) przyjmuje postać:

$$(it)^2 y''(it) + (it)y'(it) + \Big((it)^2 - n^2\Big) y(it) = 0,$$

czyli:

$$(it)^2 y''(it) + ity'(it) - (t^2 + n^2) y(it) = 0,$$

dokonujmey podstawienia: $x := it$, czyli $t = -ix$. Otrzymujemy:

$$x^2 y''(x) + xy'(x) - (x^2 + n^2) y(x) = 0. \qquad (14)$$

Wtedy rozwiązaniami szczególnymi tego równania (dowód pomijamy) są zmodyfikowane funkcje Bessela :

$$I_n(x) = i^{-n} J_n(ix) = e^{-ni\frac{\pi}{2}} J_n(xe^{i\frac{\pi}{2}}),$$
$$K_n(x) = \frac{1}{2}\pi i^{n+1}\Big(J_n(ix) + iN_n(ix)\Big),$$

gdzie J_n oraz N_n są funkcjami Bessele odpowiednio pierwszego i drugiego rodzaju.

Zmodyfikowane równanie Bessela

W ostatnim rozdziale skupimy się na przypadku, gdy zmienna niezależna jest postaci $it, t \in \mathbb{R}$. Równanie Bessela (1) przyjmuje postać:

$$(it)^2 y''(it) + (it)y'(it) + \Big((it)^2 - n^2\Big)y(it) = 0,$$

czyli:

$$(it)^2 y''(it) + ity'(it) - (t^2 + n^2)y(it) = 0,$$

dokonujmey podstawienia: $x := it$, czyli $t = -ix$. Otrzymujemy:

$$x^2 y''(x) + xy'(x) - (x^2 + n^2)y(x) = 0. \qquad (14)$$

Wtedy rozwiązaniami szczególnymi tego równania (dowód pomijamy) są zmodyfikowane funkcje Bessela :

$$I_n(x) = i^{-n} J_n(ix) = e^{-ni\frac{\pi}{2}} J_n(xe^{i\frac{\pi}{2}}),$$
$$K_n(x) = \frac{1}{2}\pi i^{n+1}\Big(J_n(ix) + iN_n(ix)\Big),$$

gdzie J_n oraz N_n są funkcjami Bessele odpowiednio pierwszego i drugiego rodzaju.

Uwaga

Pokazuje się, że rozwiązaniem ogólnym równania (14) *jest:*

$$y(x) = C_1 I_n(x) + C_2 K_n(x),$$

gdzie C_1 oraz C_2 są pewnymi stałymi.

DODATEK

Funkcja Gamma Eulera

Dodatek

Definicja

Funkcją Gamma (Eulera), określoną dla $a > 0$, nazywamy :

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt. \tag{15}$$

Uwaga

Dla $a \leqslant 0$ całka (15) *jest rozbieżna.*

Dodatek

Definicja

Funkcją Gamma (Eulera), określoną dla $a > 0$, nazywamy :

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt. \tag{15}$$

Uwaga

Dla $a \leqslant 0$ całka (15) *jest rozbieżna.*

Podstawowe własności funkcji Gamma to:

- $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$. Stąd otrzymujemy wzór wykorzystany w pracy : $(n+1)\dots(n+p)\Gamma(n+1) = \Gamma(n+2)(n+2)\dots(n+p) = \dots = \Gamma(n+p)(n+p) = \Gamma(n+p+1)$.
- $\Gamma(n+1) = n!$ dla $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
- Jest ciągła dla każdego $a > 0$ i ma ciągłe pochodne wszytskich rzędów.
- Dla $0 < a < 1$ zachodzi $\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{sin(a\pi)}$. W szczególności dla $a = \frac{1}{2}$ mamy $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.
- Dla $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$ zachodzi $\Gamma(a+\frac{1}{2}) \cdot \Gamma(\frac{1}{2} - a) = \frac{\pi}{\cos \pi a}$
- Jest logarytmicznie wypukła, tzn. wypukła jest funkcja $ln\Gamma(a)$.

Dodatek

Uwaga

Podajemy bez głębszych wyjaśnień w jaki sposób zdefiniować funkcję Γ również dla pewnych liczb ujemnych. Szczegółowe rozumowanie można znaleźć w [http://dydmat.mimuw.edu.pl/wyklady/analiza-matematyczna-i/calki-niewlasciwe-funkcje-gamma-i-b-eulera-oraz-ich-zastosowania].

1. $\Gamma_n(x) := \frac{n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}$.
2. $\Gamma(x) := \lim\limits_{n\to\infty} \Gamma_n(x)$.
3. *Pokazujemy, że wzór [2] ma sens dla* $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$.
4. *Przyjmujemy ten wzór, z podanym wyżej zakresem, za definicję funkcji Gamma.*
5. *Rozszerzamy go przyjmując, że dla* $x \in \{0, -1, -2, \dots\}$ *jest* $\Gamma(x) = \infty$. *Mamy więc w pełni określoną funkcję* Γ *dla wszystkich liczb rzeczywistych. Zauważmy, że przy takiej umowie zachodzi użyty w pracy wzór*

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = 0 \quad dla \quad x \in \{0, -1, -2, \dots\}.$$

Bibliografia

- DEREZIŃSKI J.: *Równania różniczkowe fizyki matematycznej. Metody Matematyczne Fizyki skrypt II.* Katedra Metod Matematycznych Fizyki, Uniwersytet Warszawski, 2012.
- FICHTENHOLZ G.M.: *Rachunek różniczkowy i całkowy. Tom II.* PWN, Warszawa 1976.
- LEKSIŃSKI W., ŻAKOWSKI W.: *Matematyka. Równania różniczkowe. Funkcje zmiennej zespolonej. Przekształcenia całkowe. Cześć IV.* WNT, Warszawa 1995.
- LENDA A.: *Wybrane rozdziały matematycznych metod fizyki.* Wydawnictwa AGH, Kraków 2004.
- WYKORZYSTANE STRONY INTERNETOWE:
  - http://iftia9.univ.gda.pl/ matmm/Bessel.pdf
  - http://dydmat.mimuw.edu.pl/wyklady/analiza-matematyczna-i/calki-niewlasciwe-funkcje-gamma-i-b-eulera-oraz-ich-zastosowania
  - http://mathworld.wolfram.com/ModifiedBesselFunctionoftheFirstKind.html
  - http://mathworld.wolfram.com/ModifiedBesselFunctionoftheSecondKind.html
  - http://mathworld.wolfram.com/ModifiedBesselDifferentialEquation.html