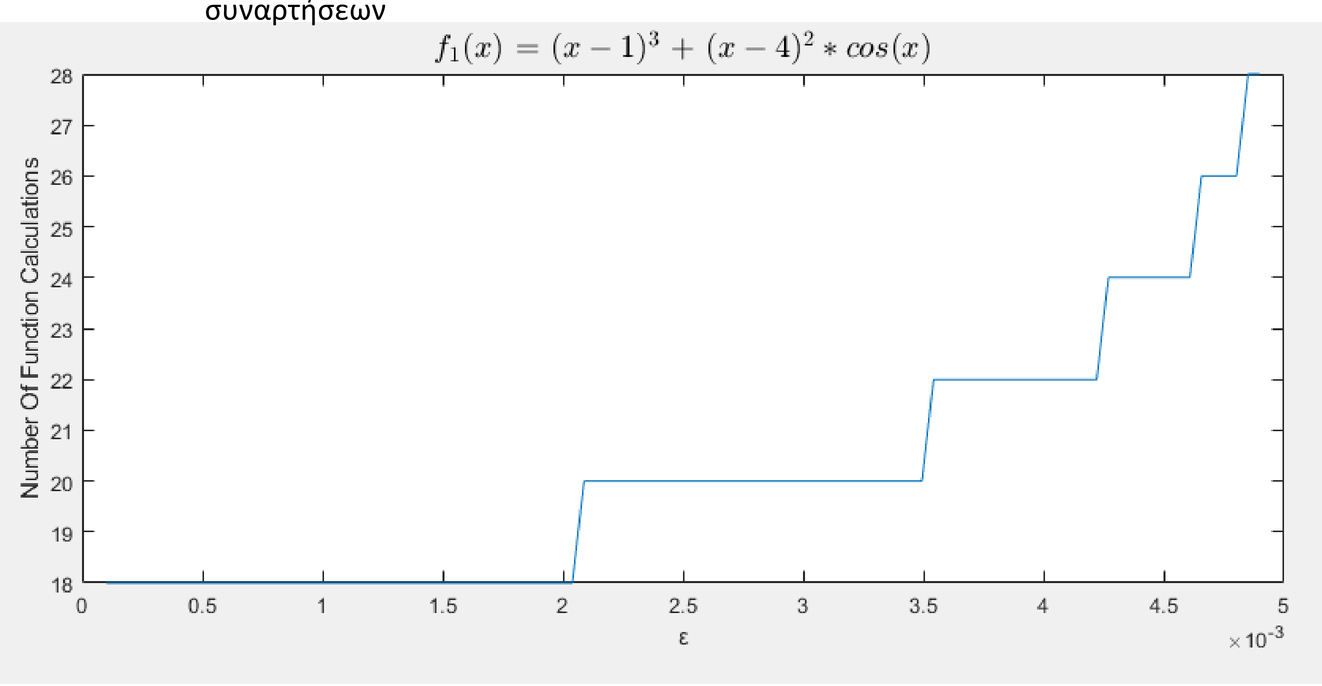
$1^η$ Εργαστηριακή Άσκηση: Ελαχιστοποίηση κυρτής συνάρτησης μιας μεταβλητής σε δοσμένο διάστημα

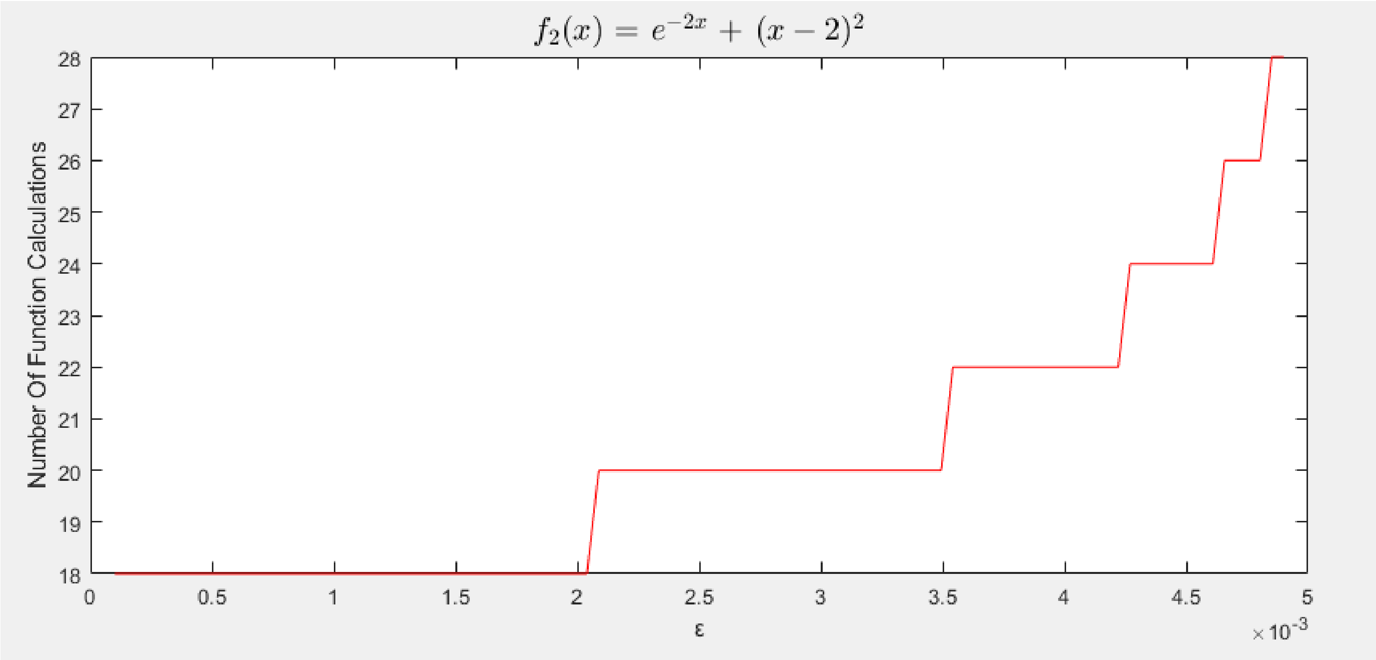
Θέμα 1ο :

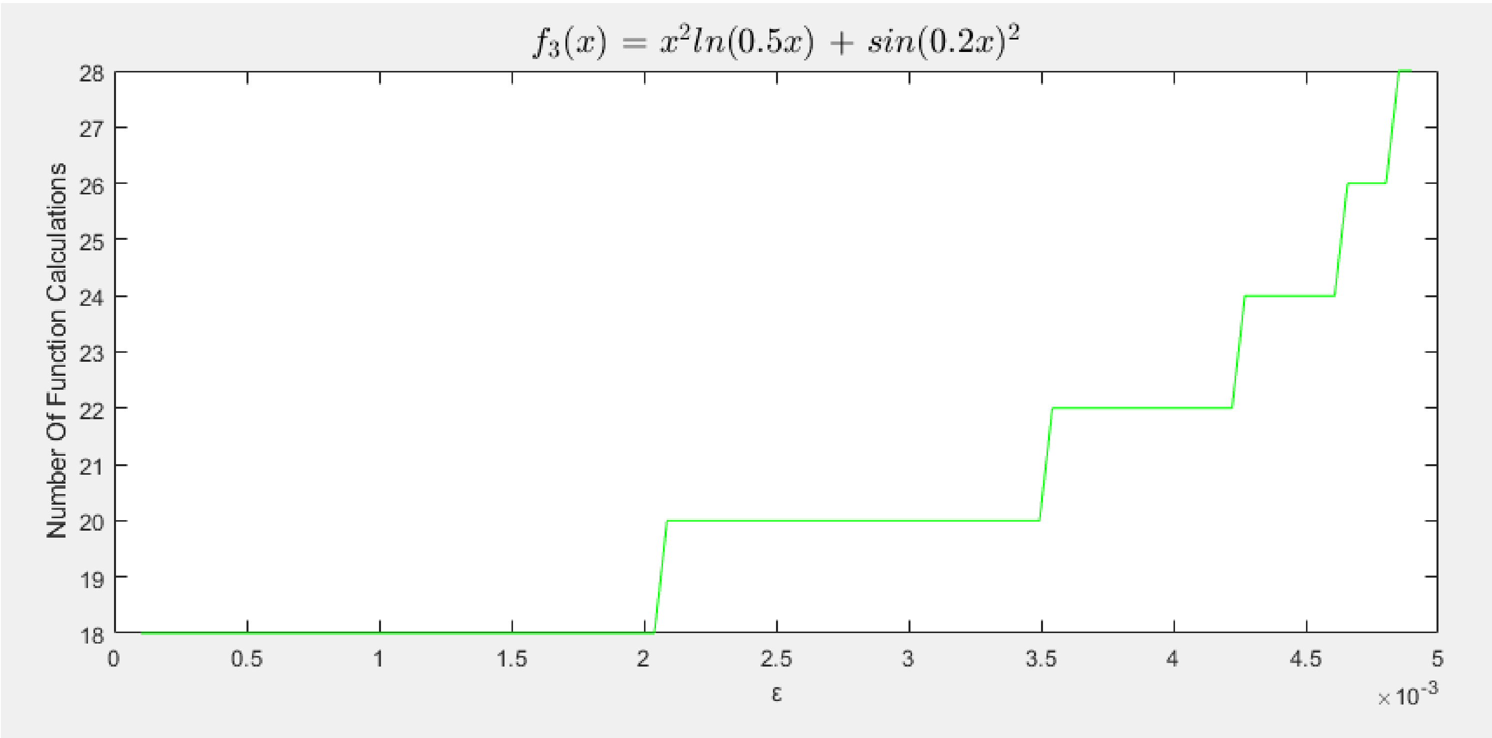
Μέθοδος Διχοτόμου:

Στην μέθοδο της διχοτόμου, ουσιαστικά χωρίζουμε το διάστημα αναζήτησης **[0,3]** σε ανισομερή διαστήματα με την βοήθεια δύο σημείων **x1** και **x2** τα οποία, για τον βέλτιστο προσδιορισμό του ελαχίστου, είναι εκείνα που χωρίζουν το διάστημα σε δύο ίσου εύρους πιθανά υπό-διαστήματα , δηλαδή πάνω στην διχοτόμο και απέχουν από αυτήν μια πολύ μικρή απόσταση **ε(ε>0)**. Η θετική σταθερά ε προσδιορίζεται από την τελική ακρίβεια με την οποία θέλουμε να προσδιορίσουμε το ελάχιστο $\mathbf{x}^*$ της συνάρτησης. Η μέθοδος αυτή μπορεί να εφαρμοστεί σε κυρτές συναρτήσεις καθώς επίσης και σε αυστηρά σχεδόν κυρτές συναρτήσεις. Επιπλέον, δοσμένης της ακρίβειας l ο αριθμός n των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης μπορεί να εκτιμηθεί ως τον μικρότερο θετικό ακέραιο που ικανοποιεί την σχέση $(\frac{1}{2})^{\frac{n}{2}} \leq \frac{l}{\beta_1-\alpha_1}$. Επιπλέον είναι αναμενόμενο να έχουν και οι δύο των ίδιο αριθμό επαναλήψεων διότι το ελάχιστο τους βρίσκεται στο διάστημα **[1,2]** περίπου. Οι γραφικές παραστάσεις για τις τρείς συναρτήσεις είναι οι ίδιες κάτι που ήταν αναμενόμενο καθότι ο αριθμός των κλήσεων της συνάρτησης εξαρτάται μόνο από το μήκος των διαδοχικών διαστημάτων αναζήτησης και την συνθήκη τερματισμού και όχι από την κυρτή συνάρτηση.

- Για σταθερό $\boldsymbol{l = 0.01}$:
  Καλείται η συνάρτηση **Bisection_Constant_Lamda** η οποία καλεί την μέθοδο διχοτόμησης(**Bisection_Method)** για ένα εύρος τιμών του θετικού ε το οποίο είναι από $\mathbf{0.0001 \leq \varepsilon \leq 0.0049}$ το οποίο χωρίζεται σε 100 τμήματα. Η επιλογή των τιμών του **ε** έγινε έτσι ώστε να ισχύει $\forall \boldsymbol{\varepsilon > 0}$ ότι $\boldsymbol{l > 2\varepsilon}$. Από τα διαγράμματα γίνεται φανερό ότι όσο μεγαλύτερο γίνεται το **ε** και όσο πιο κοντά είναι στο $l/2$ τόσο περισσότερο αυξάνονται οι κλήσεις των συναρτήσεων



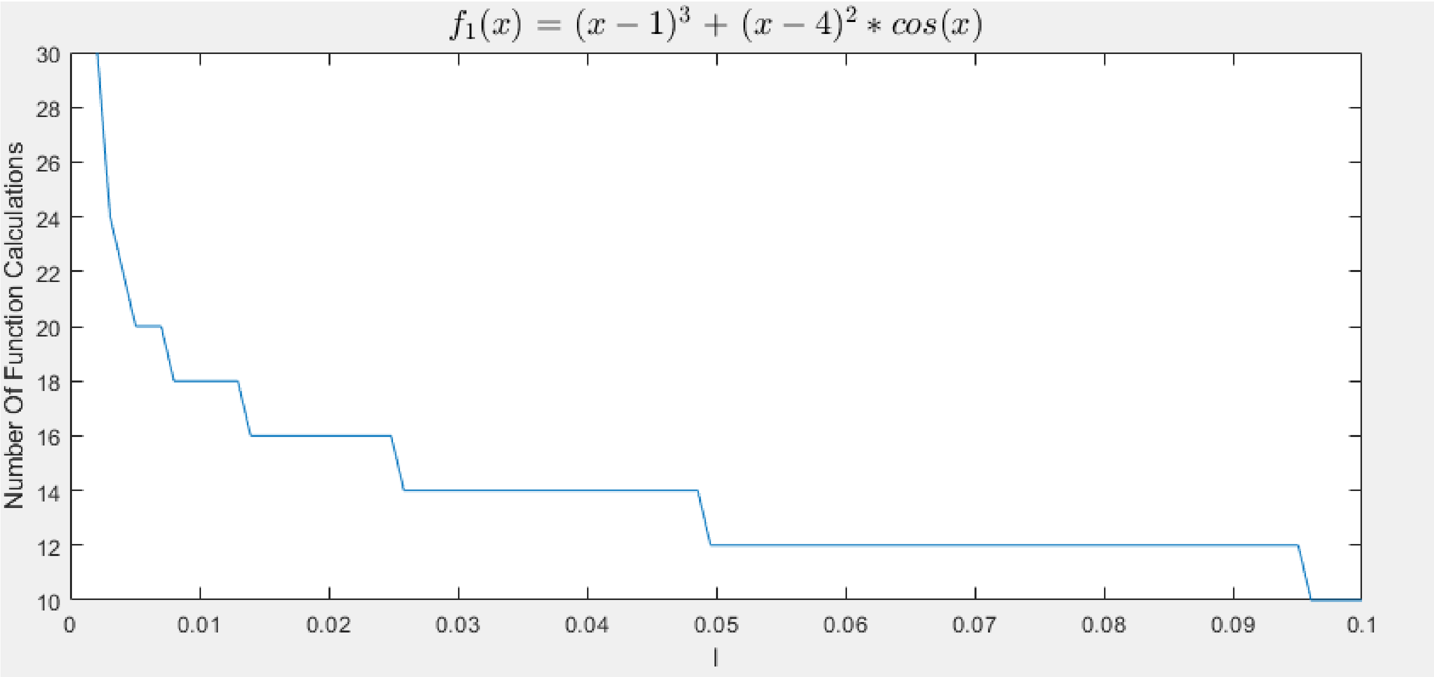


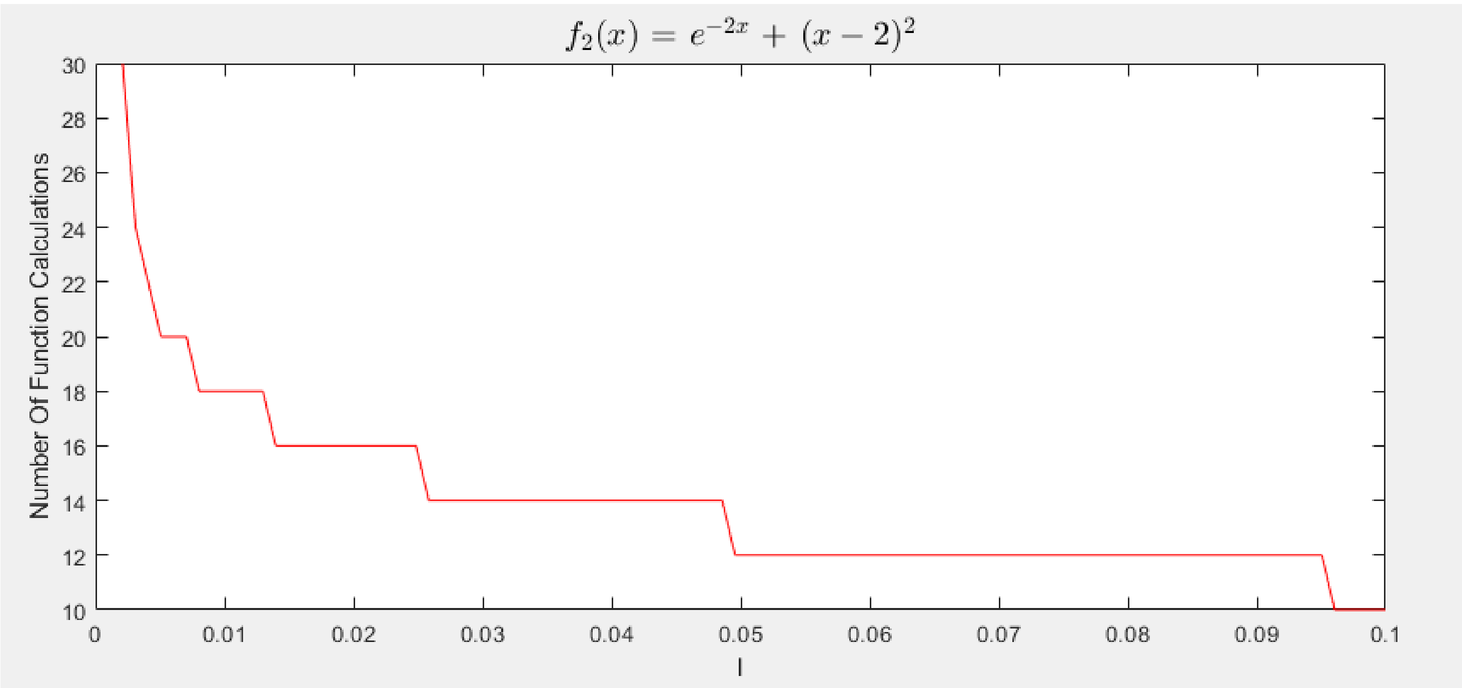


Χρήστος-Αλέξανδρος Δαρδαμπούνης ΑΕΜ:10335

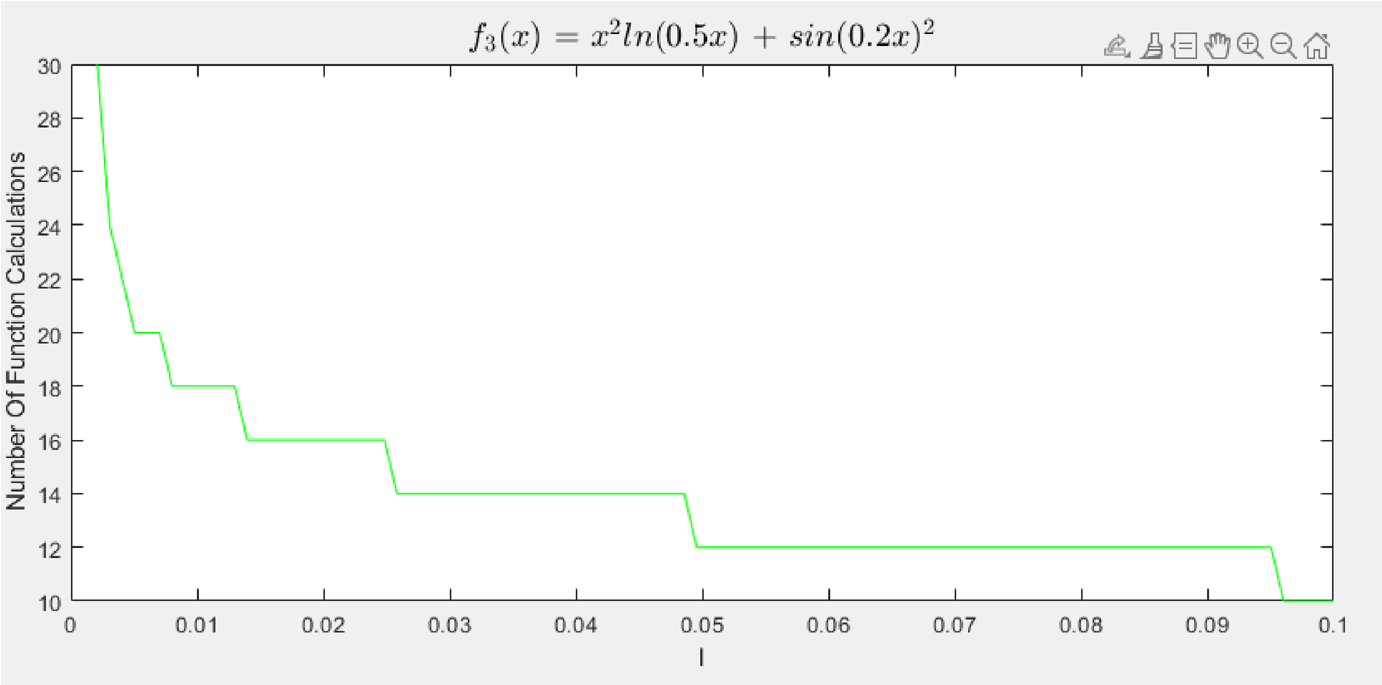
- Για σταθερό $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0.001}$:

Καλείται η συνάρτηση **Bisection_Constant_Epsilon** η οποία καλεί την μέθοδο διχοτόμησης για ένα εύρος τιμών του θετικού $\boldsymbol{l}$ το οποίο είναι από $\mathbf{0.0021} \leq \boldsymbol{l} \leq \mathbf{0.1}$ και το οποίο χωρίζεται σε 100 τμήματα. Η επιλογή των τιμών του $\boldsymbol{l}$ έγινε έτσι ώστε να ισχύει $\forall \boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}$ ότι $\boldsymbol{l} > \mathbf{2}\boldsymbol{\varepsilon}$**.** Από τα διαγράμματα παρατηρούμε ότι όσο περισσότερο αυξάνεται η τελική ακρίβεια και είναι αρκετά μεγαλύτερη από 2ε τόσο περισσότερο μειώνεται και ο αριθμός κλήσεων των συναρτήσεων, πράγμα που είναι αναμενόμενο καθότι θέλουμε μικρότερη ακρίβεια και άρα ο αλγόριθμος μπορεί να την επιτύχει με λιγότερα βήματα





Χρήστος-Αλέξανδρος Δαρδαμπούνης ΑΕΜ:10335

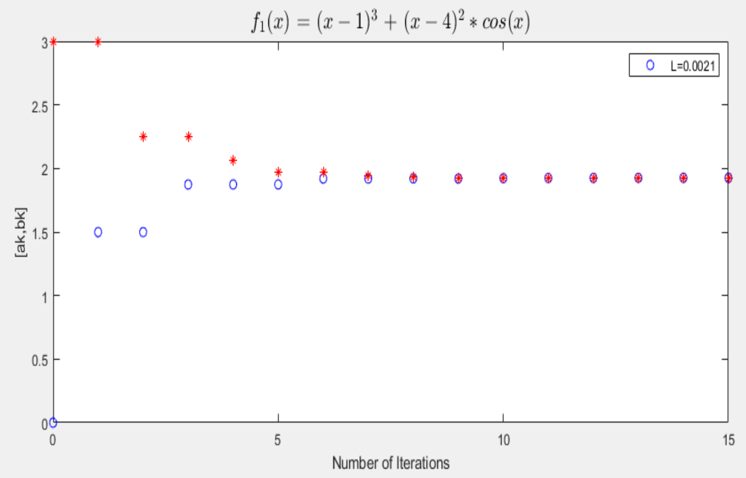


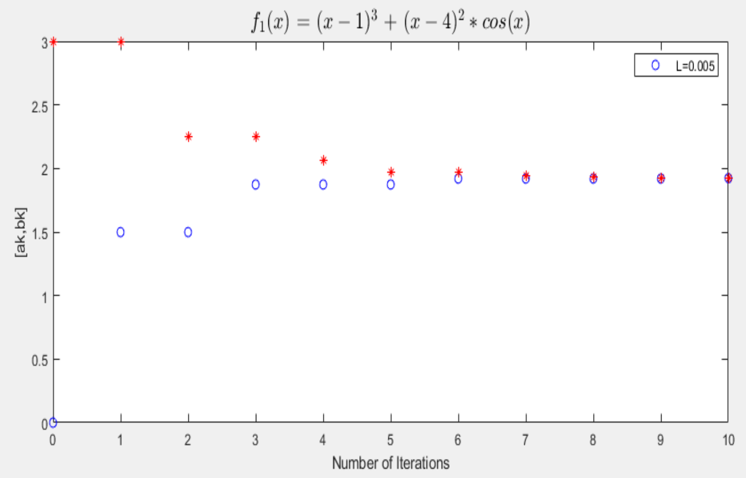
Τέλος, στην συνέχεια παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις των άκρων του διαστήματος $[a_k, b_k]$ συναρτήσει του βήματος k για τέσσερις διαφορετικές τιμές του τελικού εύρους αναζήτησης l

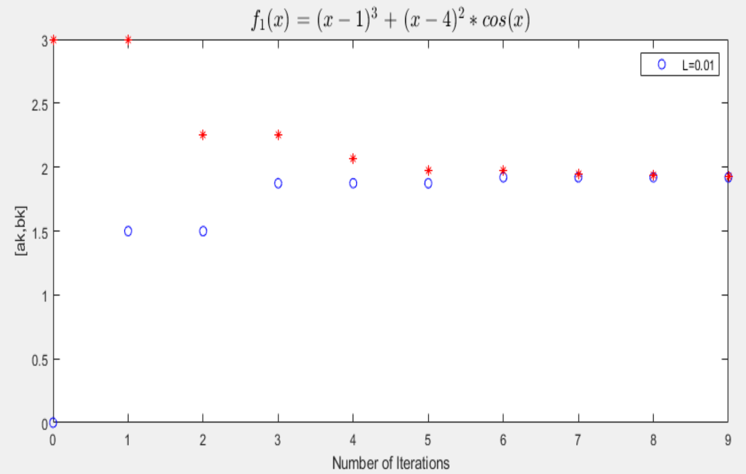
1. Δηλαδή για $l = 0.021$
2. Για $l = 0.01$
3. Για $l = 0.02$
4. Για $l = 0.05$

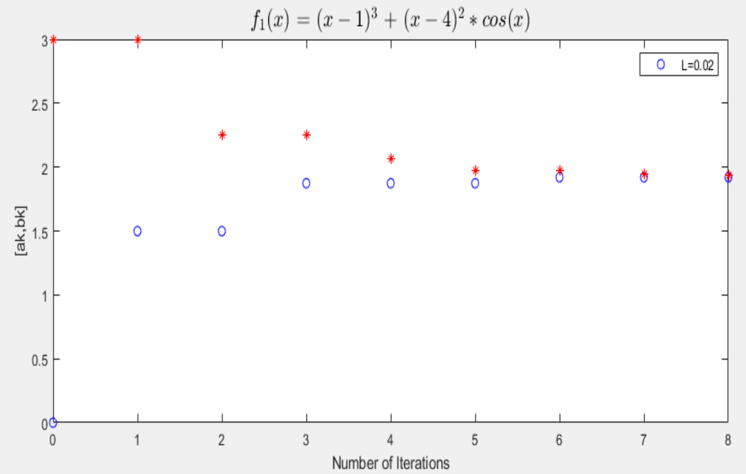
   Από τις οποίες φαίνεται πως ο αλγόριθμος διχοτόμησης θα συγκλίνει στην λύση δηλαδή στο ελάχιστο $\boldsymbol{x}^*$ της συνάρτησης μετά από k επαναλήψεις και αφότου η αντικειμενική συνάρτηση θα έχει κληθεί $n = 2(k-1)$ φορές
   Αυτό υλοποιείται με την συνάρτηση **Bisection_ak_bk** και μας δείχνει ότι για l κοντά στο ε (το οποίο έχει επιλεγεί ίσο με 0.001) ο αλγόριθμος συγκλίνει μετά από περισσότερες επαναλήψεις στο ελάχιστο αλλά το διάστημα $[a_k, b_k]$ είναι μικρότερο, γεγονός που σημαίνει ότι πήραμε μια καλύτερη εκτίμηση για τη περιοχή στην οποία θα βρίσκεται το ελάχιστο της κάθε συνάρτησης.

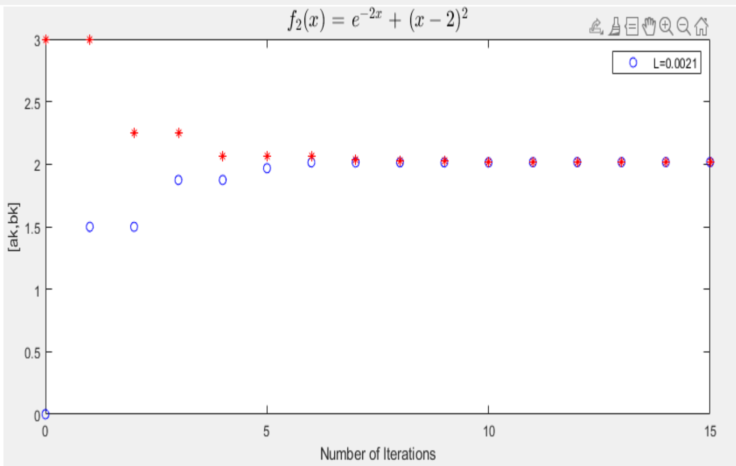
   ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Τα α_k φαίνονται στα γραφήματα με μπλε κύκλους ενώ τα b_k φαίνονται με κόκκινα αστεράκια

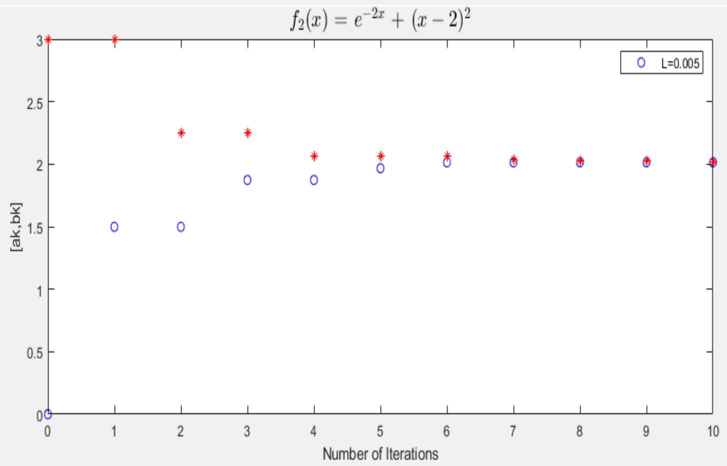


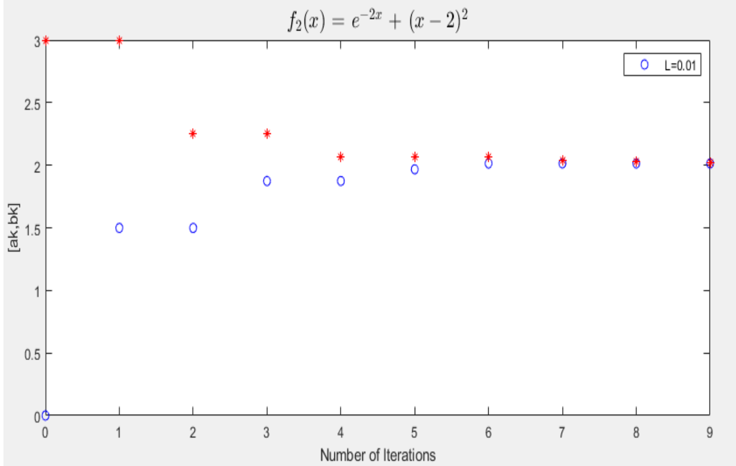


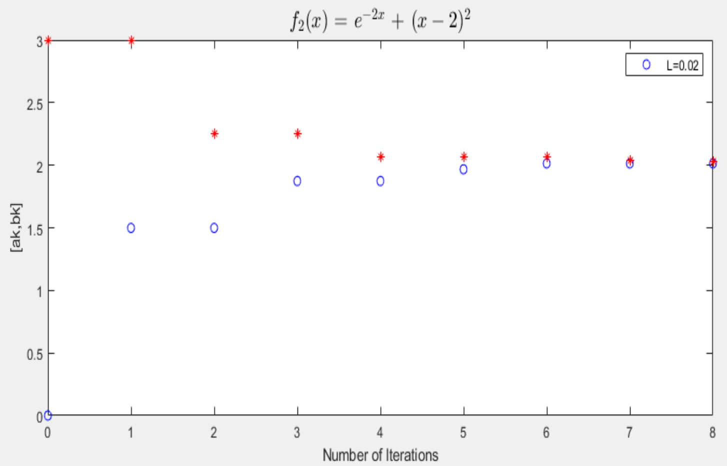




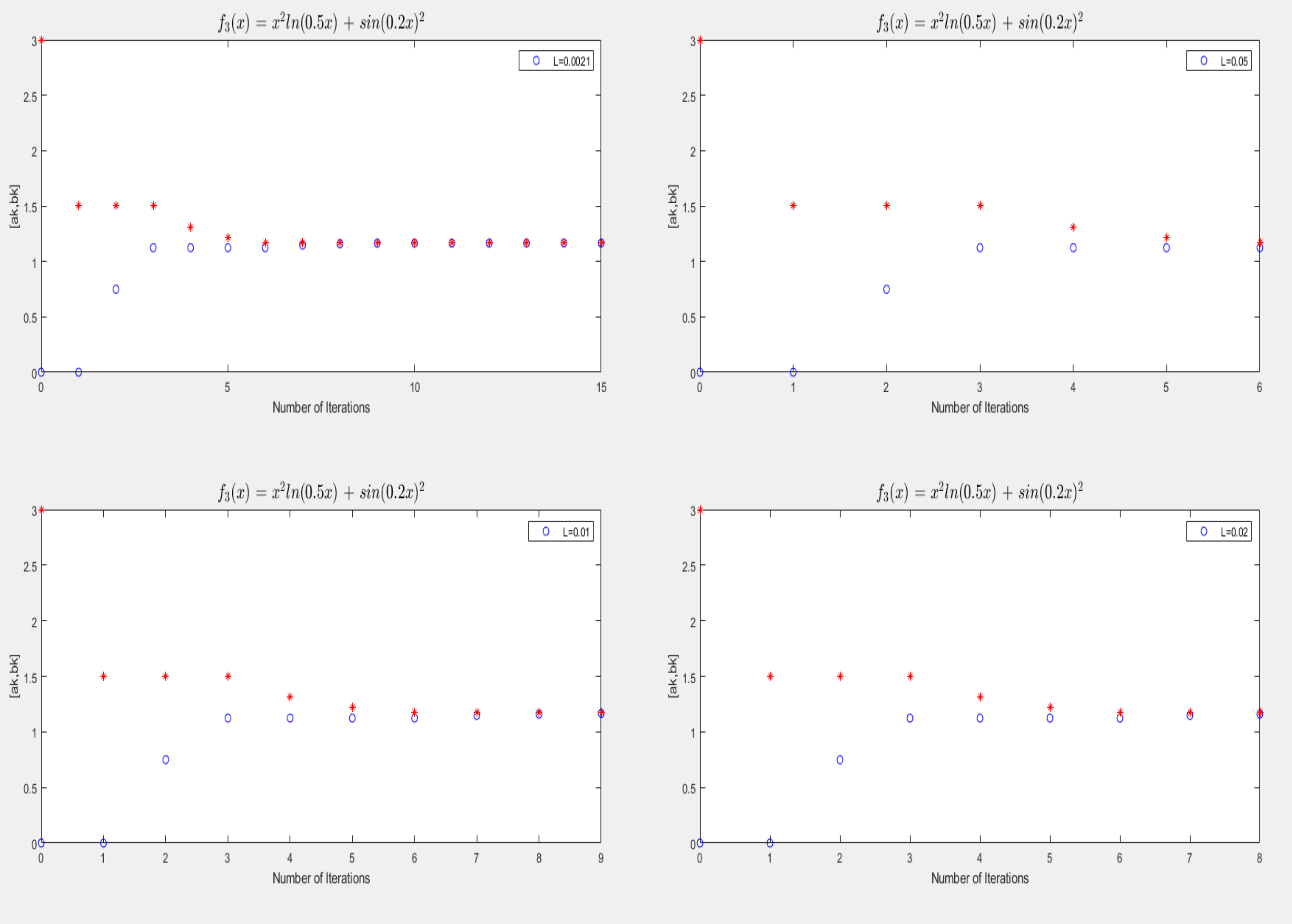








Χρήστος-Αλέξανδρος Δαρδαμπούνης ΑΕΜ:10335



Θέμα 2ο :

Μέθοδος Χρυσού Τομέα:

Σε αυτή την μέθοδο το εύρος του νέου διαστήματος αναζήτησης θα συνδέεται με το προηγούμενο με μια σταθερά αναλογίας η οποία είναι ίση με $\boldsymbol{\gamma = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cong 0.618}$

Δηλαδή : $\boldsymbol{\beta_{k+1} - a_{k+1} = \gamma(\beta_k - a_k)}$ οπότε τώρα πλέον στην **k-οστή** επανάληψη τα $\boldsymbol{x_{1k}}$ και τα $\boldsymbol{x_{2k}}$ θα είναι πλέον :

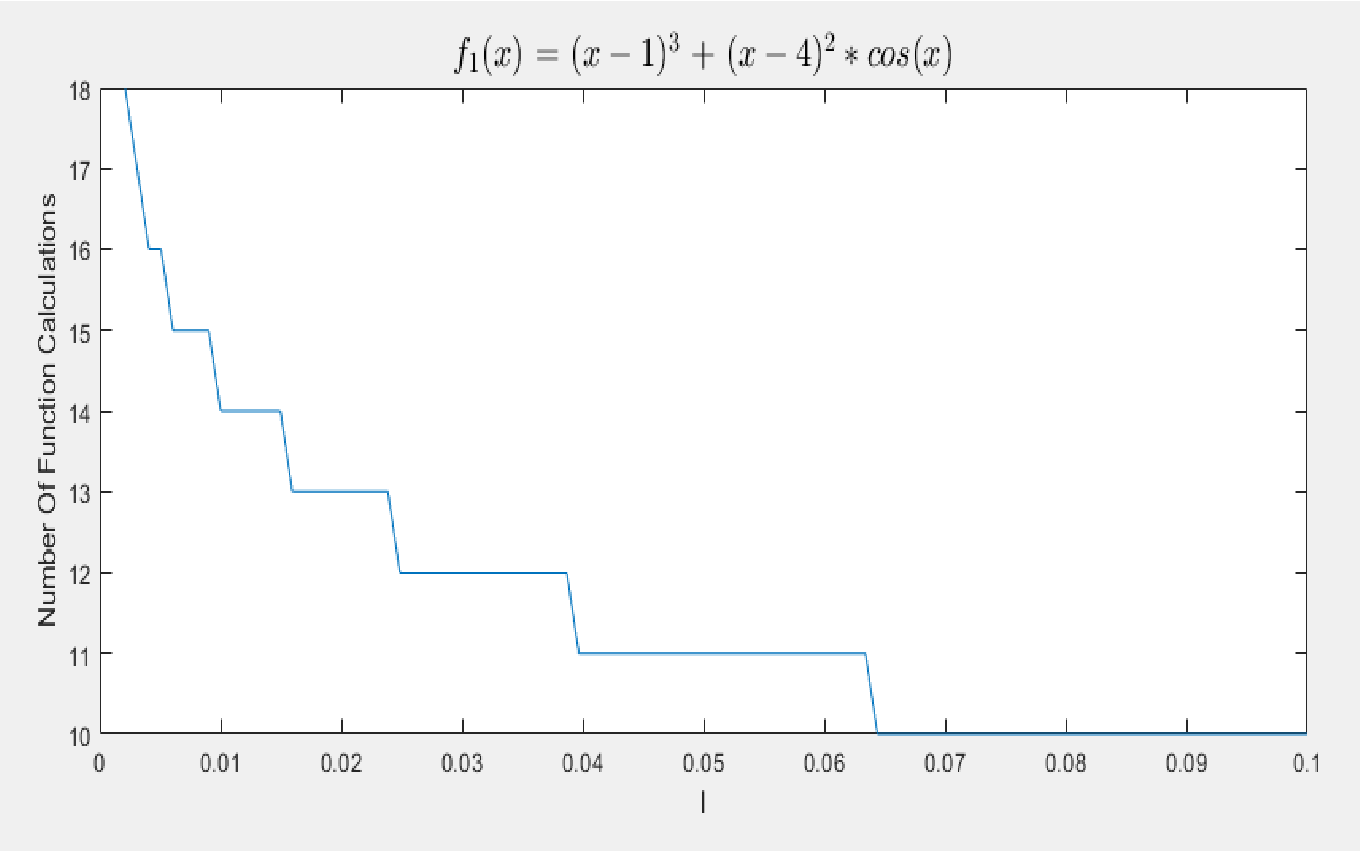
$$\boldsymbol{x_{1k} = a_k + (1-\gamma)(\beta_k - a_k)}$$

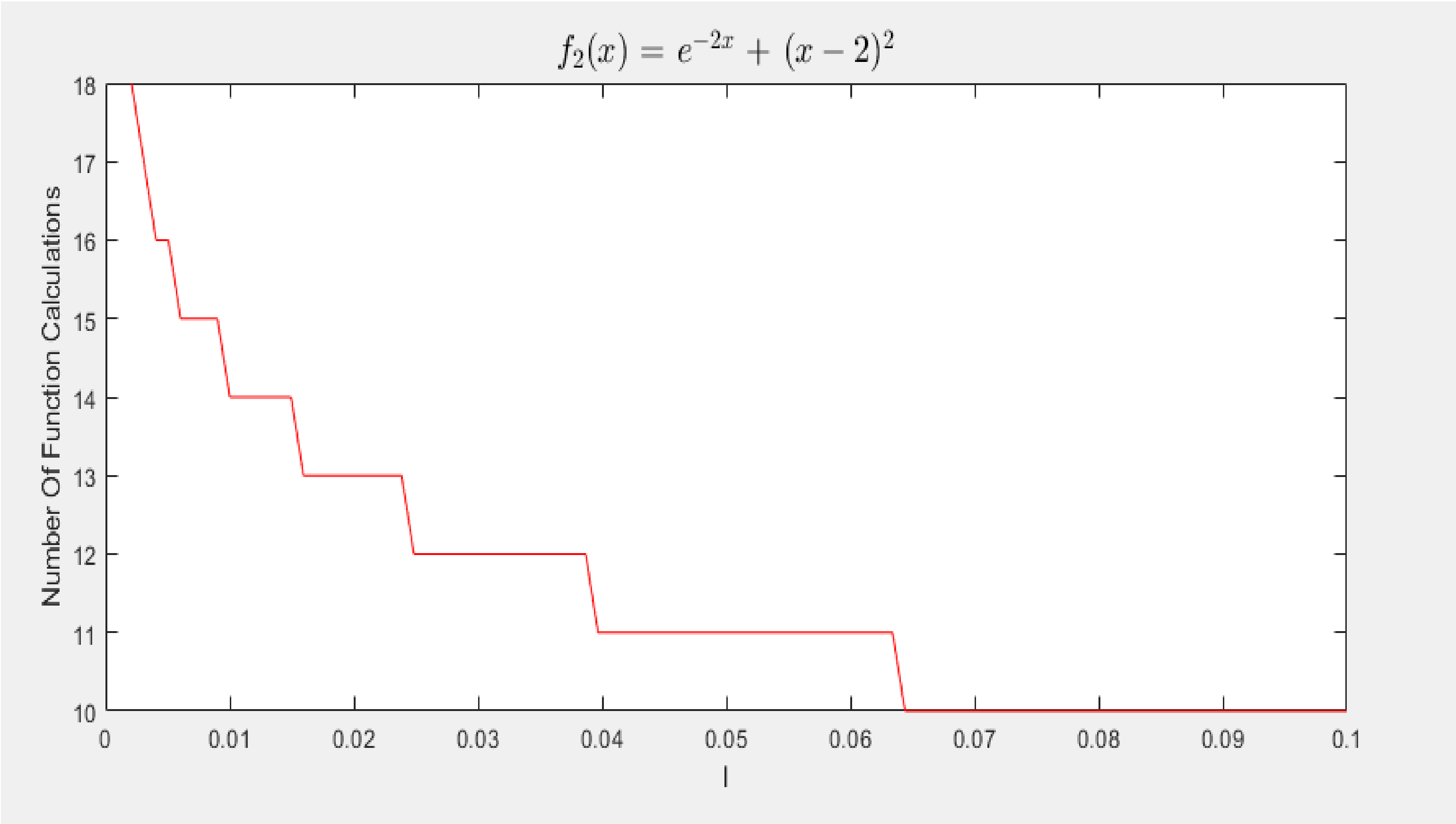
$$\boldsymbol{x_{2k} = a_k + \gamma(\beta_k - a_k)}$$

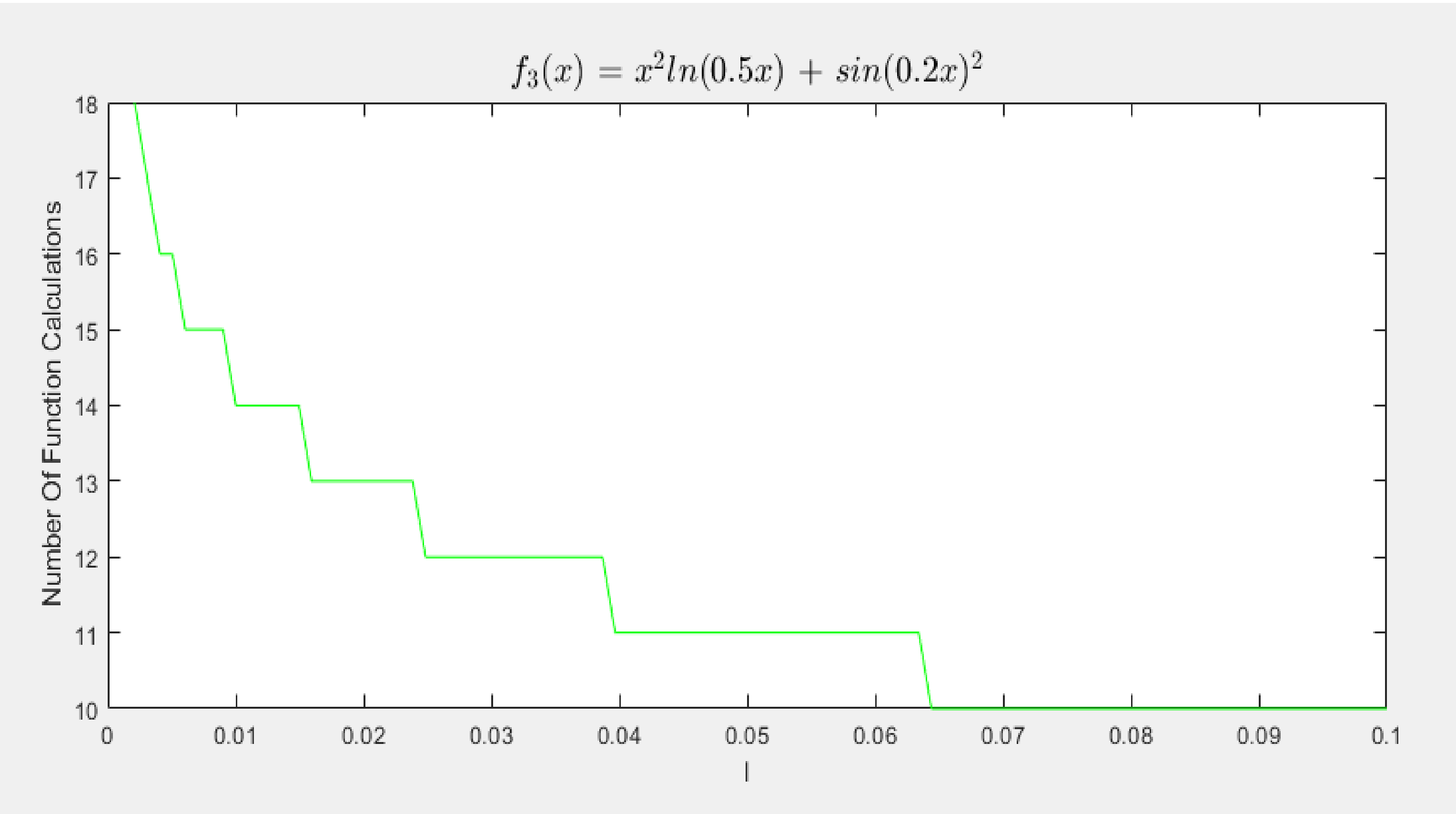
Επιπλέον τα $\boldsymbol{x_{1k+1}, x_{2k+1}}$ θα επιλέγονται με τέτοιο τρόπο ώστε σε κάθε επανάληψη να ισχύει : ή $\boldsymbol{x_{1k+1} = x_{2k}}$ ή $\boldsymbol{x_{2k+1} = x_{1k}}$ **.** Επομένως με αυτό τον τρόπο επιλογής θα απαιτείται πλέον **μόνο** ένας επιπλέον υπολογισμός της συνάρτησης σε κάθε επανάληψη σε αντίθεση με την μέθοδο της διχοτόμου η οποία απαιτούσε των υπολογισμό εκ νέου της συνάρτησης σε δύο διαφορετικά σημεία γύρω από την διχοτόμο.

- Για μεταβαλλόμενο $\boldsymbol{l}$:

Καλείται η συνάρτηση **Golden_Section_Variable_Lamda** η οποία με την σειρά της καλεί την συνάρτηση **Golden_Section** ,για την κάθε επιμέρους συνάρτηση, που υλοποιεί την μέθοδο του χρυσού τομέα για ένα εύρος τιμών του l το οποίο κυμαίνεται $\mathbf{0.0021} \leq \boldsymbol{l} \leq \mathbf{0.1}$ και είναι χωρισμένο σε 100 τμήματα. Από τα παρακάτω διαγράμματα γίνεται φανερό πως όσο αυξάνεται η τελική ακρίβεια l τόσο περισσότερο μειώνεται και αριθμός των κλήσεων των συναρτήσεων αφού με λιγότερα βήματα θα φτάσουμε στην πιο ελαστική ακρίβεια που επιθυμούμε. Επιπλέον, παρατηρούμε και την σημαντική μείωση ως προς τον αριθμό κλήσεων των συναρτήσεων σε αυτή την μέθοδο σε σχέση με την μέθοδο διχοτόμησης, γεγονός που καθιστά την μέθοδο χρυσού τομέα πιο ελκυστική για τον προσδιορισμό ελαχίστου σε μια κυρτή ή αυστηρά σχεδόν κυρτή συνάρτηση καθότι ο υπολογισμός του απαιτεί αρκετά λιγότερες πράξεις και συγκλίνει πιο γρήγορα. Επιπλέον, δοσμένης της ακρίβειας l ο αριθμός n των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης μπορεί να εκτιμηθεί ως τον μικρότερο θετικό ακέραιο που ικανοποιεί την σχέση $(\mathbf{0.618})^{\boldsymbol{n-2}} \leq \frac{\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{\beta_1 - \alpha_1}}$**.** Οι γραφικές παραστάσεις για τις τρείς συναρτήσεις είναι οι ίδιες κάτι που ήταν αναμενόμενο καθότι ο αριθμός των κλήσεων της συνάρτησης εξαρτάται μόνο από το μήκος των διαδοχικών διαστημάτων αναζήτησης και την συνθήκη τερματισμού και όχι από την κυρτή συνάρτηση.







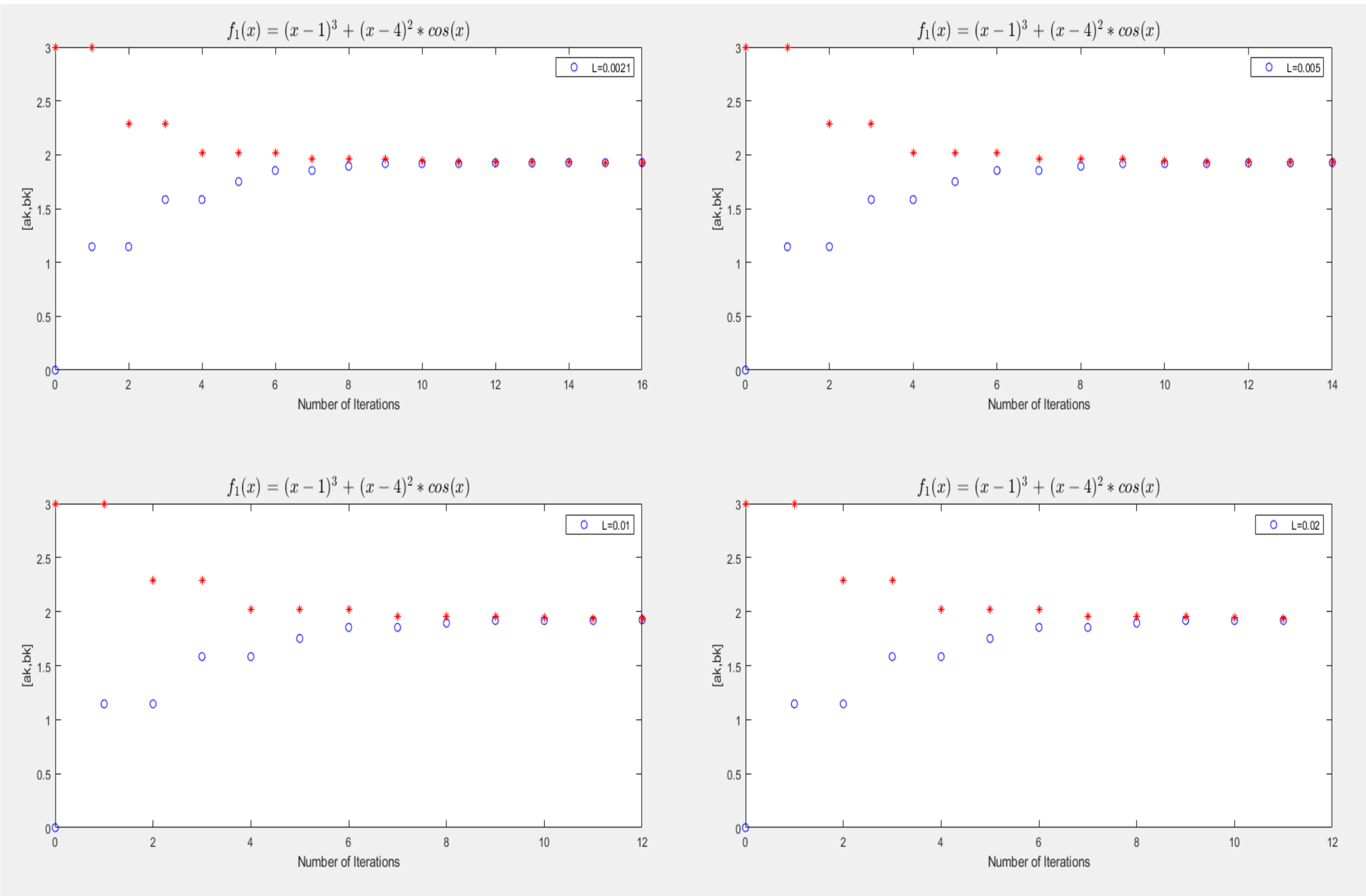
Χρήστος-Αλέξανδρος Δαρδαμπούνης ΑΕΜ:10335

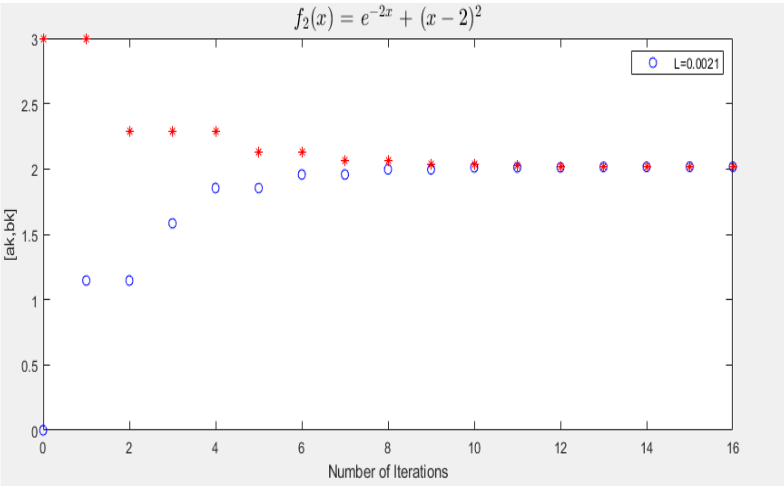
Τέλος, στην συνέχεια παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις των άκρων του διαστήματος $[a_k, b_k]$ συναρτήσει του βήματος k για τέσσερις διαφορετικές τιμές του τελικού εύρους αναζήτησης l

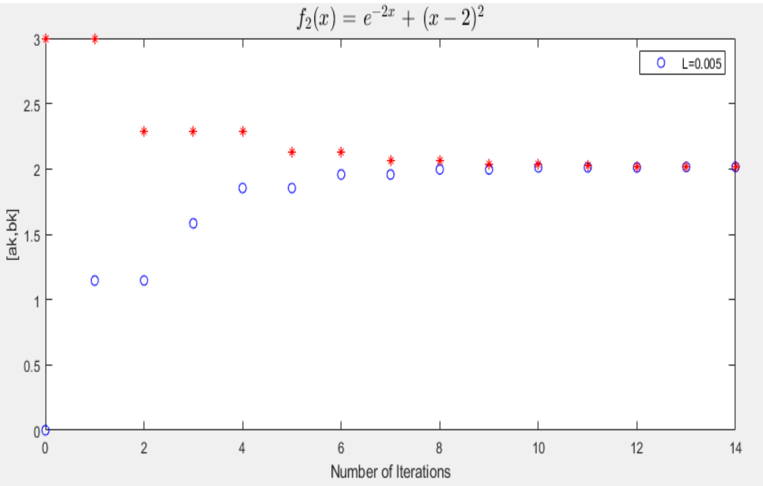
1. Δηλαδή για $l = 0.021$
2. Για $l = 0.005$
3. Για $l = 0.01$
4. Για $l = 0.02$

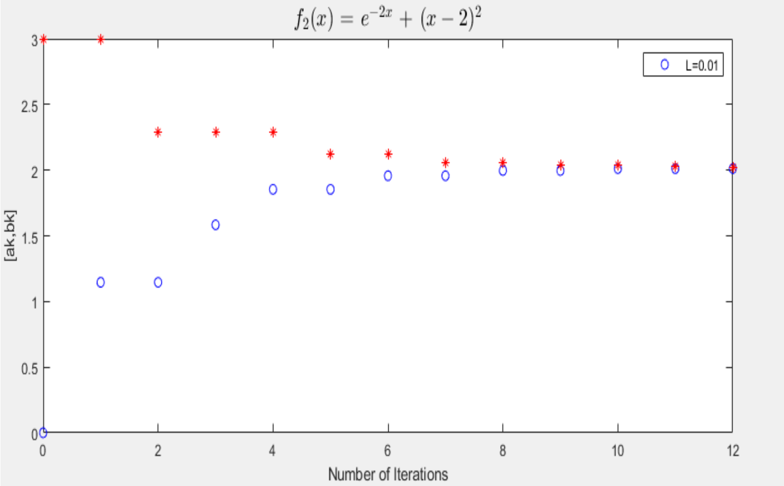
   Από αυτές φαίνεται ότι ο αλγόριθμος χρυσού τομέα θα συγκλίνει στο ελάχιστο $\boldsymbol{x}^*$ της συνάρτησης μετά από k επαναλήψεις και αφότου η αντικειμενική συνάρτηση θα έχει κληθεί $n = k + 1$ φορές Αυτό υλοποιείται με την συνάρτηση **Golden_Section_ak_bk** και μας δείχνει ότι για μικρά l ο αλγόριθμος συγκλίνει μετά από περισσότερες επαναλήψεις στο ελάχιστο αλλά το διάστημα $[a_k, b_k]$ είναι μικρότερο, γεγονός που σημαίνει ότι πήραμε μια καλύτερη εκτίμηση για τη περιοχή στην οποία θα βρίσκεται το ελάχιστο της κάθε συνάρτησης.

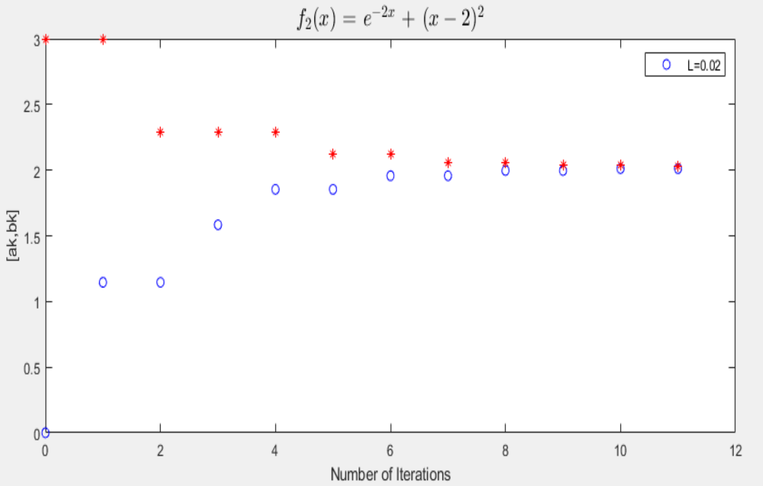
   ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Τα α_k φαίνονται στα γραφήματα με μπλε κύκλους ενώ τα b_k φαίνονται με κόκκινα αστεράκια

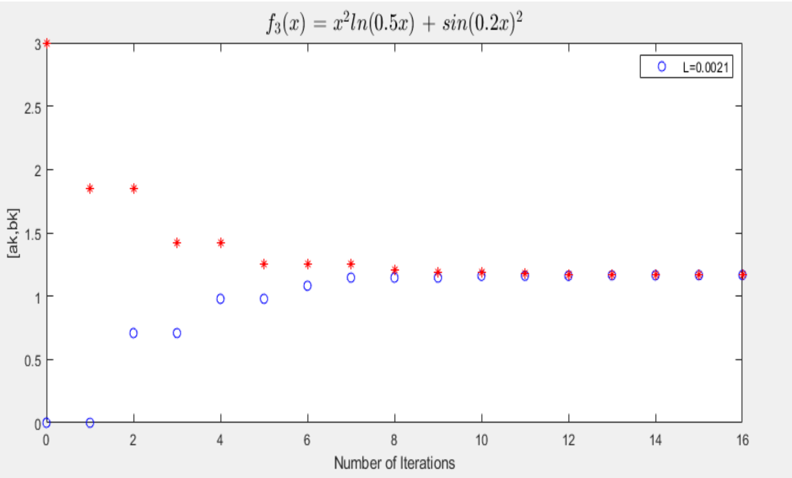


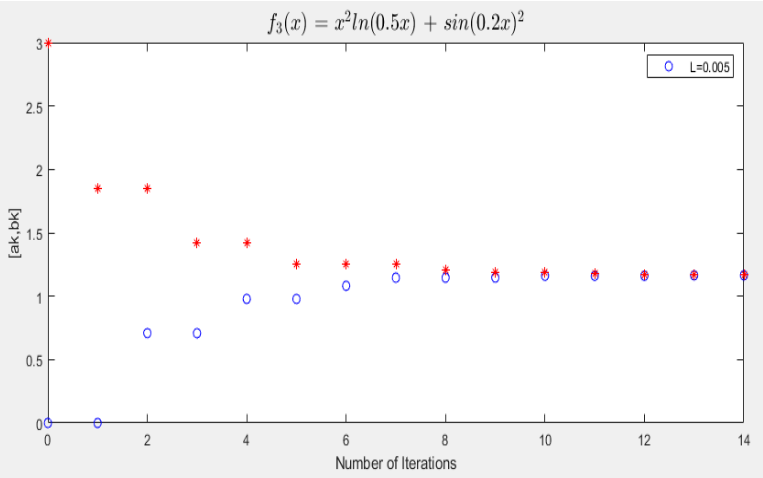

$f_2(x) = e^{-2x} + (x-2)^2$
L=0.0021
[ak,bk]
Number of Iterations

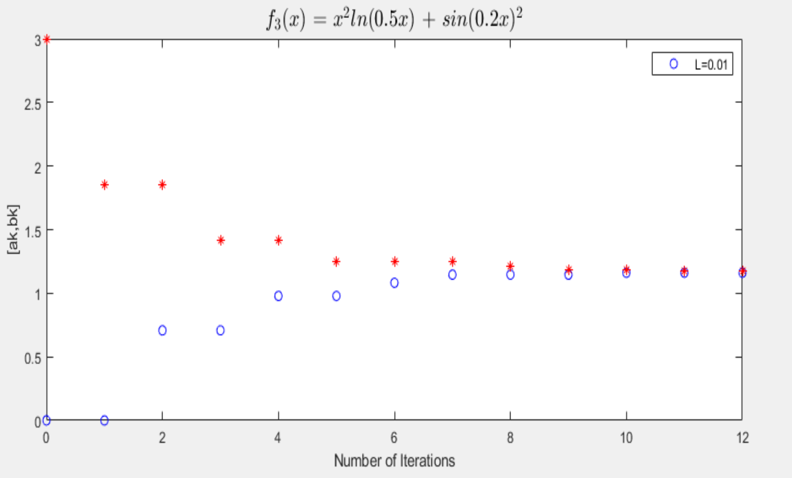

$f_2(x) = e^{-2x} + (x-2)^2$
L=0.005
[ak,bk]
Number of Iterations

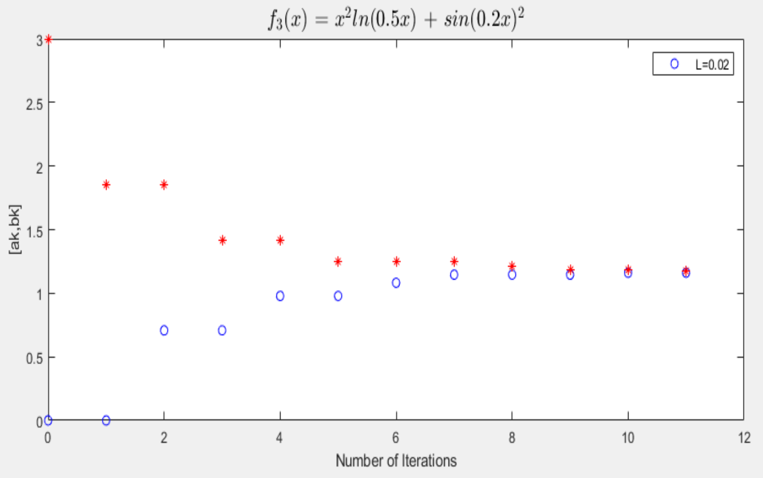

$f_2(x) = e^{-2x} + (x-2)^2$
L=0.01
[ak,bk]
Number of Iterations


$f_2(x) = e^{-2x} + (x-2)^2$
L=0.02
[ak,bk]
Number of Iterations


$f_3(x) = x^2 ln(0.5x) + sin(0.2x)^2$
L=0.0021
[ak,bk]
Number of Iterations


$f_3(x) = x^2 ln(0.5x) + sin(0.2x)^2$
L=0.005
[ak,bk]
Number of Iterations


$f_3(x) = x^2 ln(0.5x) + sin(0.2x)^2$
L=0.01
[ak,bk]
Number of Iterations


$f_3(x) = x^2 ln(0.5x) + sin(0.2x)^2$
L=0.02
[ak,bk]
Number of Iterations

Θέμα 3ο :

Μέθοδος Fibonacci:

Η μέθοδος Fibonacci μοιάζει αρκετά με την μέθοδο χρυσού τομέα**(**Στην πραγματικότητα είναι η μέθοδος χρυσού τομέα για αρκετά μεγάλα n διότι $\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n-1}}{F_n} = \gamma = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cong 0.618$ **)** απαιτεί όμως έναν επιπλέον υπολογισμό μετά την δεύτερη επανάληψη ενώ επίσης τα υπό-διαστήματα δεν συνδέονται πλέον μεταξύ τους με μία σταθερά αναλογίας όπως στη μέθοδο του χρυσού τομέα αλλά ο λόγος με τον οποίο συνδέονται μεταβάλλεται σε κάθε επανάληψη της μεθόδου. Η μέθοδος αυτή στηρίζεται στην ακολουθία Fibonacci $\{F_n\}$ η οποία ορίζεται με τον εξής τρόπο : $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, όπου\ F_0 = F_1 = 1\ με\ n = 1, 2, \ldots$ ενώ τα x_{1k} και τα x_{2k} θα είναι πλέον :

$$x_{1k} = a_k + \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k+1}}(\beta_k - a_k), k = 1, 2, \ldots, n-1$$

$$x_{2k} = a_k + \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}(\beta_k - a_k), k = 1, 2, \ldots, n-1$$

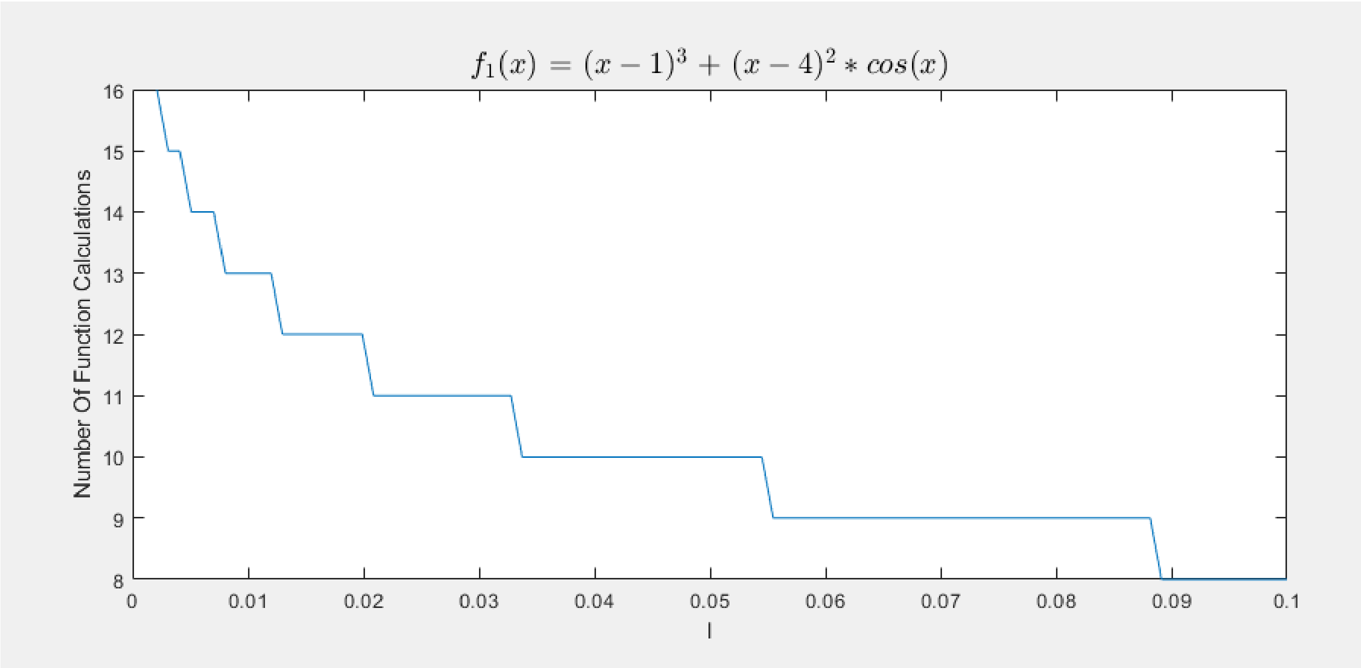
Από τις επιλογές των x_{1k} και x_{2k} γίνεται φανερό πως τα υπό-διαστήματα συνδέονται μεταξύ τους με την σχέση $\beta_{k+1} - \alpha_{k+1} = \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}(\beta_k - a_k)$ δηλαδή το διάστημα αναζήτησης μειώνεται κατά τον παράγοντα $\frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}$

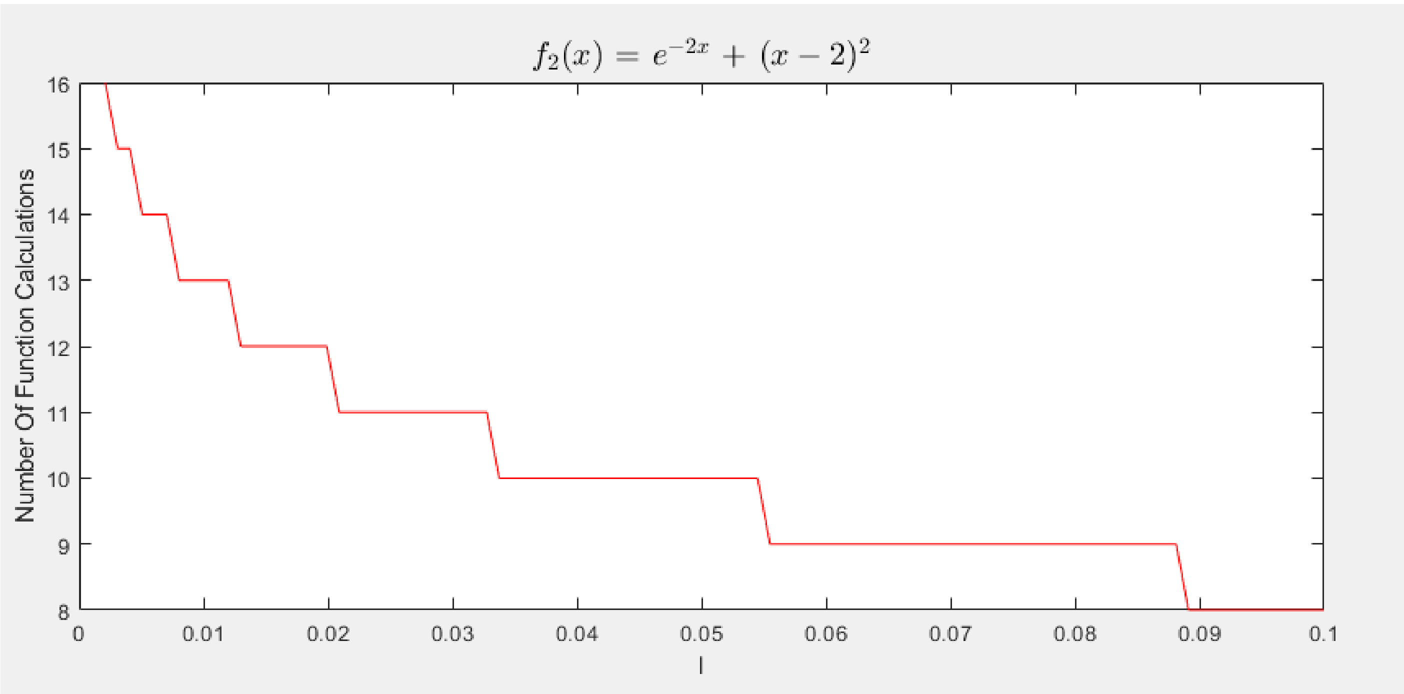
Επιπρόσθετα, σε αντίθεση με τις άλλες μεθόδους το ***n*** ,δηλαδή ο συνολικός υπολογισμός της αντικειμενικής συνάρτησης, επιλέγεται τώρα εκ των προτέρων έτσι ώστε $F_n > \frac{\beta_1-\alpha_1}{l}$ σχέση η οποία προκύπτει εύκολα από τον λόγο μείωσης των υπό-διαστημάτων. Αυτή η μέθοδος χρησιμοποιείται, όπως και οι προηγούμενες, για τον προσδιορισμό του ελαχίστου μιας κυρτής ή μιας αυστηρά σχεδόν κυρτής συνάρτησης μίας μεταβλητής

- Για μεταβαλλόμενο l :

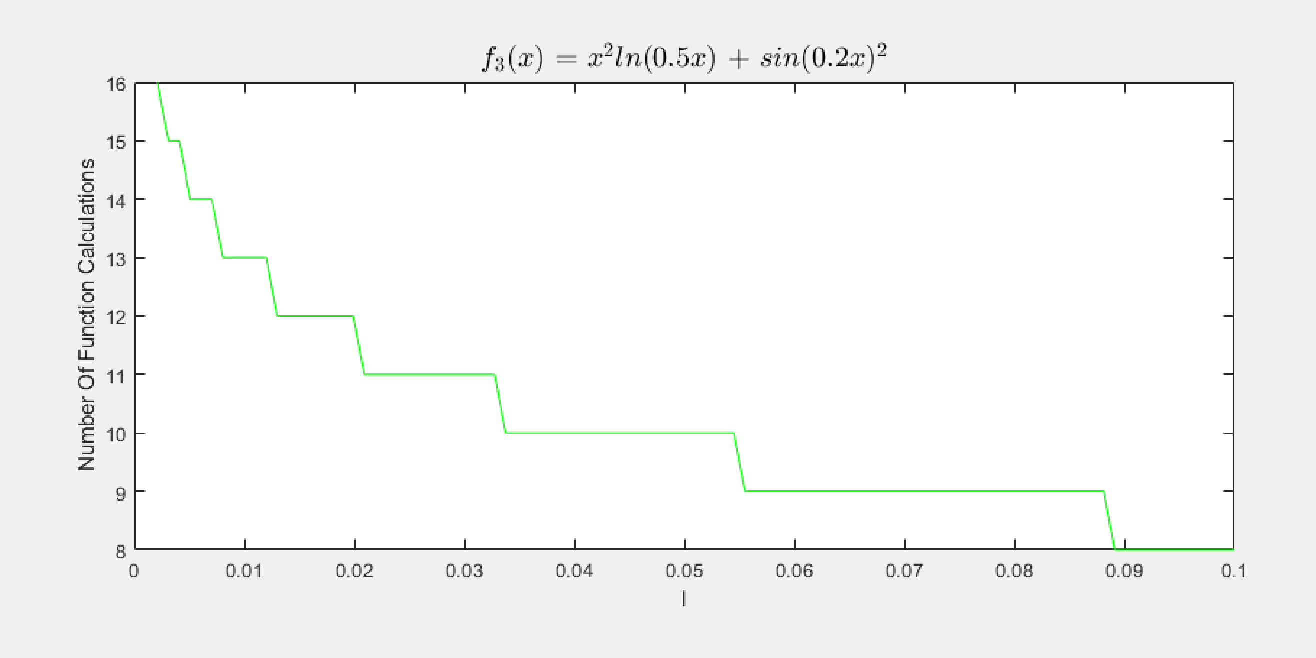
Καλείται η συνάρτηση **Fibonacci_Variable_Lamda** η οποία με την σειρά της καλεί την συνάρτηση **Fibonacci_Method** ,για την κάθε επιμέρους συνάρτηση, που υλοποιεί την μέθοδο Fibonacci για ένα εύρος τιμών του l το οποίο κυμαίνεται $0.0021 \leq l \leq 0.1$ και είναι χωρισμένο σε 100 τμήματα.**(ΣΗΜΕΙΩΣΗ :** Για τον υπολογισμό των όρων της σειράς Fibonacci υλοποίησα μία ακόμα συνάρτηση την **Fib** η οποία κάνει αυτή την δουλειά**)** Από τα παρακάτω διαγράμματα γίνεται φανερό πως όσο αυξάνεται η τελική ακρίβεια l τόσο περισσότερο μειώνεται και αριθμός των κλήσεων των συναρτήσεων αφού με λιγότερα βήματα θα φτάσουμε στην πιο ελαστική ακρίβεια που επιθυμούμε. Επιπλέον, από τα παρακάτω διαγράμματα παρατηρείται μια μικρή αλλά σημαντική βελτίωση σε σχέση με την μέθοδο χρυσού τομέα ενώ επίσης παρατηρείται μεγάλη διαφορά ως προς τον αριθμό των κλήσεων των συναρτήσεων σε σχέση με την μέθοδο διχοτόμησης(σχεδόν τις μισές κλήσεις σε σχέση με την μέθοδο διχοτόμησης).

Οι γραφικές παραστάσεις για τις τρείς συναρτήσεις είναι οι ίδιες κάτι που ήταν αναμενόμενο καθότι ο αριθμός των κλήσεων της συνάρτησης εξαρτάται μόνο από το μήκος των διαδοχικών διαστημάτων αναζήτησης και την συνθήκη τερματισμού και όχι από την κυρτή συνάρτηση.





Χρήστος-Αλέξανδρος Δαρδαμπούνης ΑΕΜ:10335

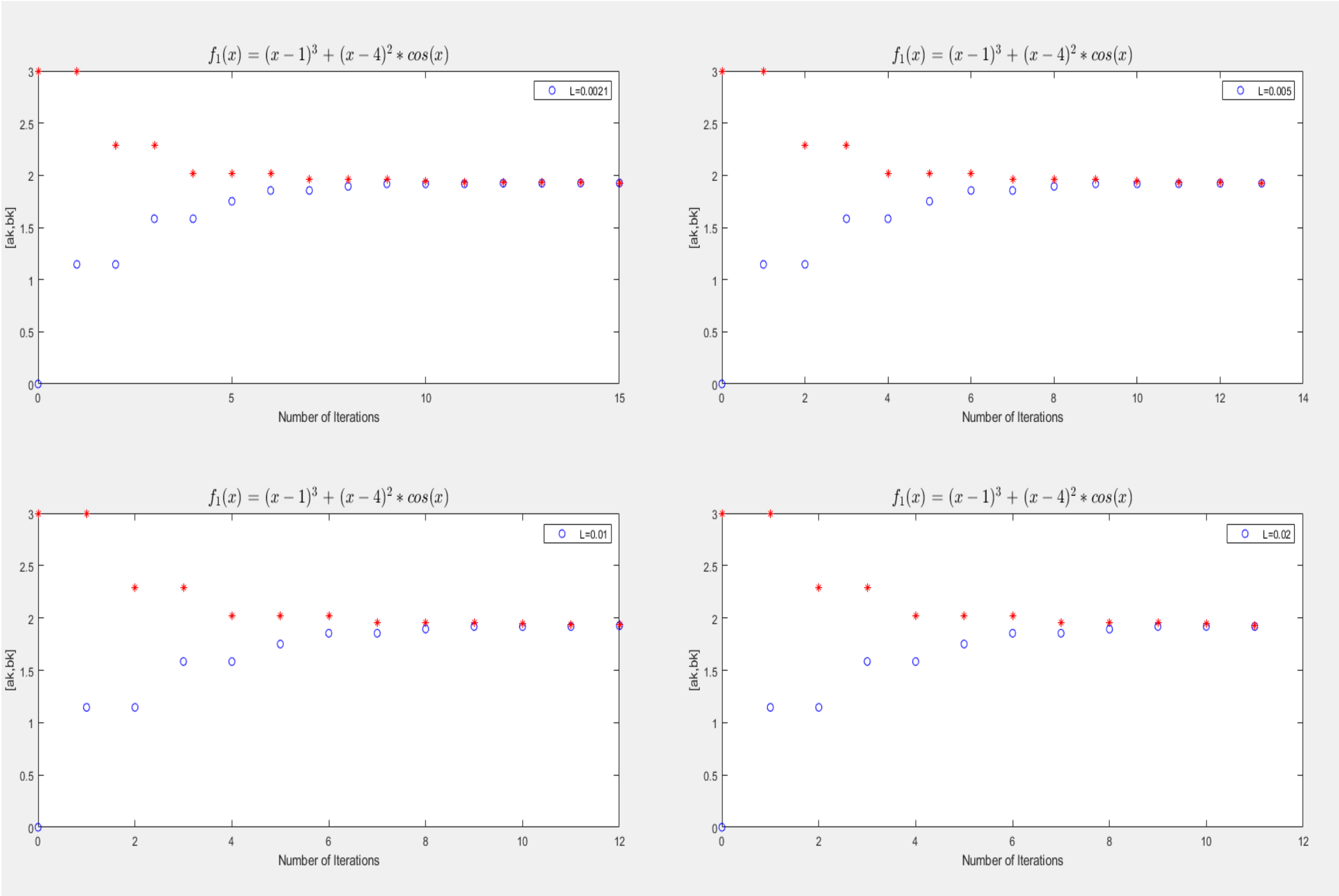


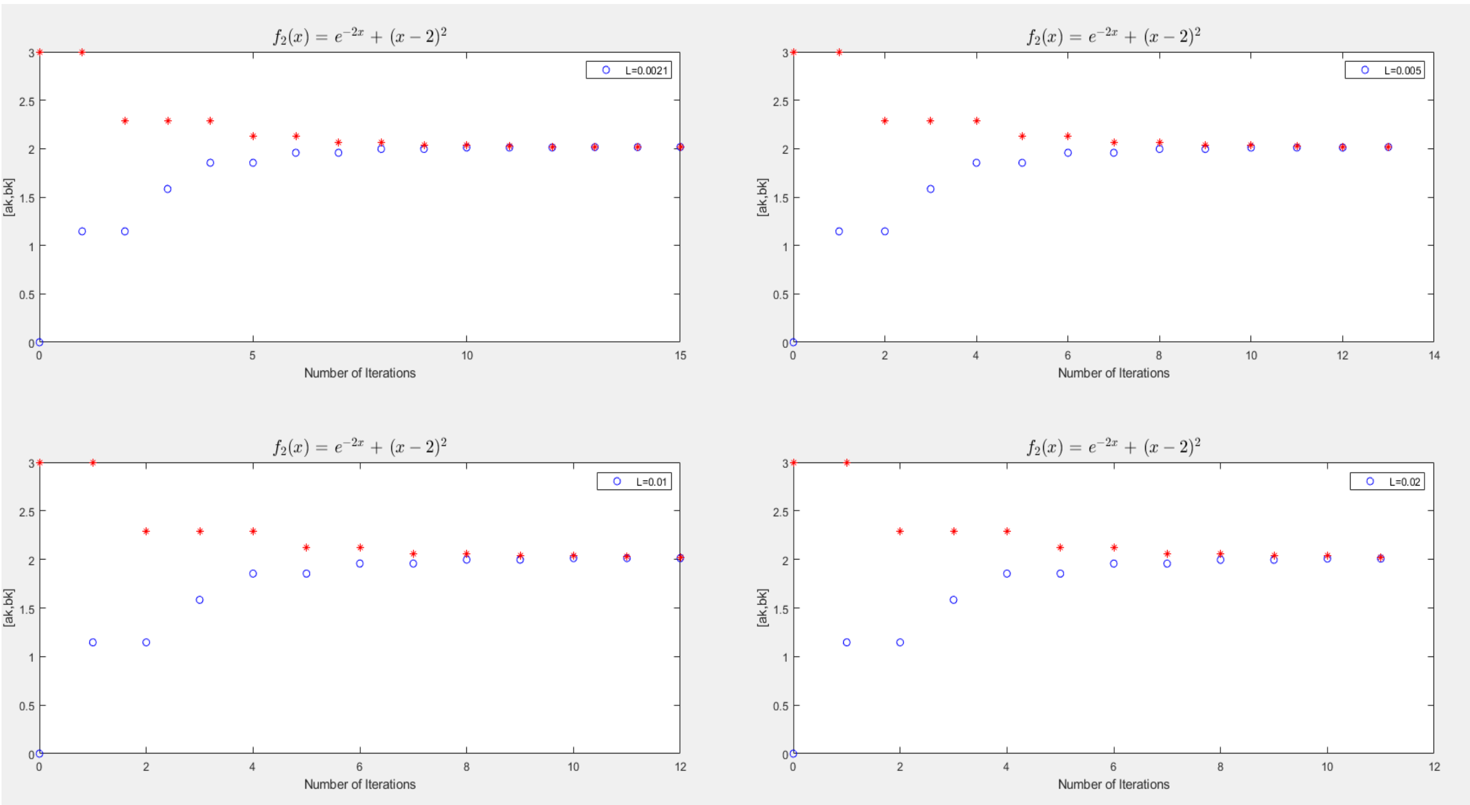
Τέλος, στην συνέχεια παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις των άκρων του διαστήματος $[a_k, b_k]$ συναρτήσει του βήματος k για τέσσερις διαφορετικές τιμές του τελικού εύρους αναζήτησης l

1. Δηλαδή για $l = 0.021$
2. Για $l = 0.005$
3. Για $l = 0.01$
4. Για $l = 0.02$

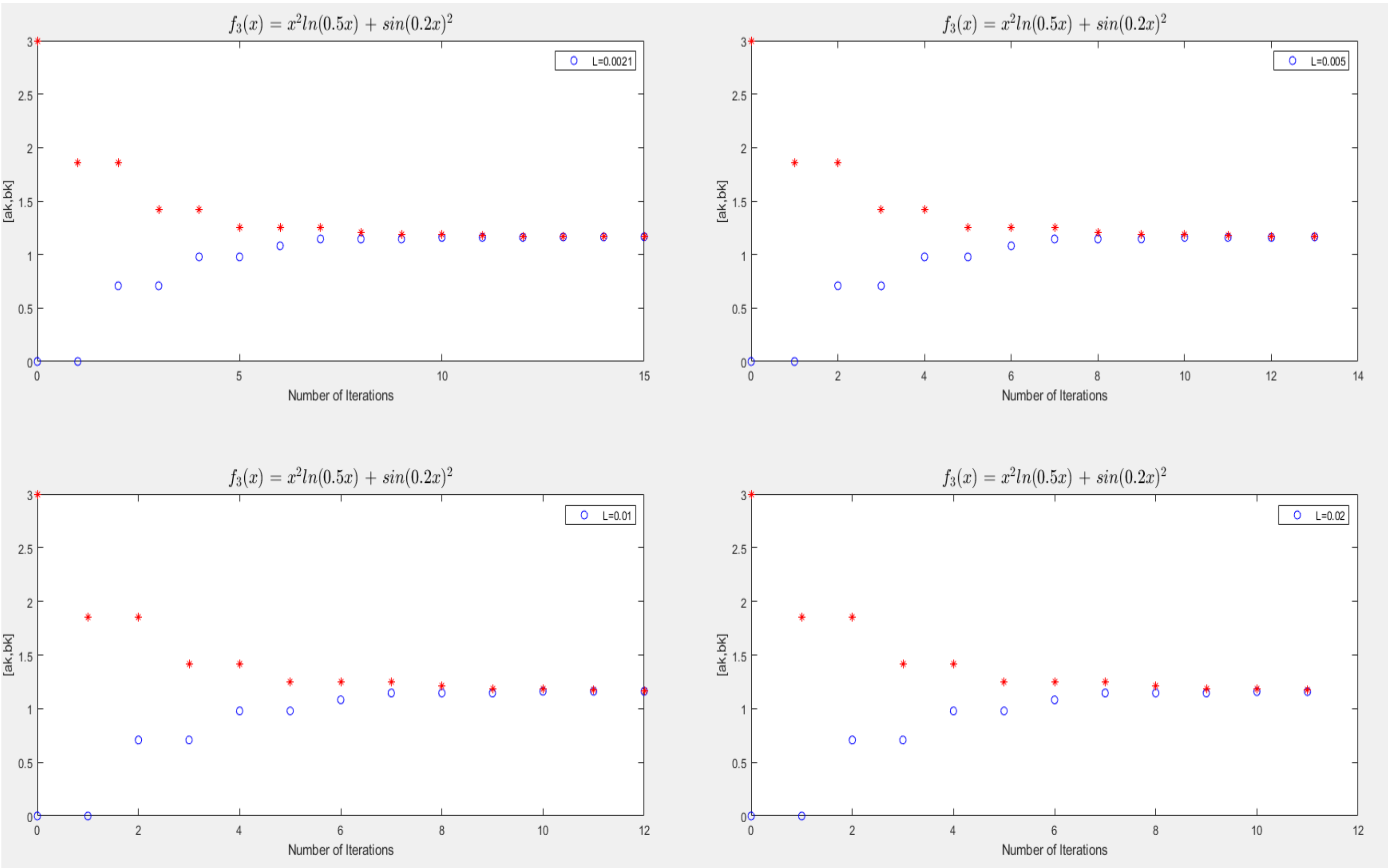
   Από αυτές φαίνεται ότι ο αλγόριθμος Fibonacci θα συγκλίνει στο ελάχιστο $\boldsymbol{x}^*$ της συνάρτησης μετά από k επαναλήψεις και αφότου η αντικειμενική συνάρτηση θα έχει κληθεί $n = k + 3$ φορές Αυτό υλοποιείται με την συνάρτηση **Fibonacci_ak_bk** και μας δείχνει ότι για μικρά l ο αλγόριθμος συγκλίνει μετά από περισσότερες επαναλήψεις στο ελάχιστο αλλά το διάστημα $[a_k, b_k]$ είναι μικρότερο, γεγονός που σημαίνει ότι πήραμε μια καλύτερη εκτίμηση για τη περιοχή στην οποία θα βρίσκεται το ελάχιστο της κάθε συνάρτησης.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Τα α_k φαίνονται στα γραφήματα με μπλε κύκλους ενώ τα b_k φαίνονται με κόκκινα αστεράκια





Χρήστος-Αλέξανδρος Δαρδαμπούνης ΑΕΜ:10335



Χρήστος-Αλέξανδρος Δαρδαμπούνης ΑΕΜ:10335

Θέμα 4ο :

Μέθοδος Διχοτόμου με χρήση παραγώγων:

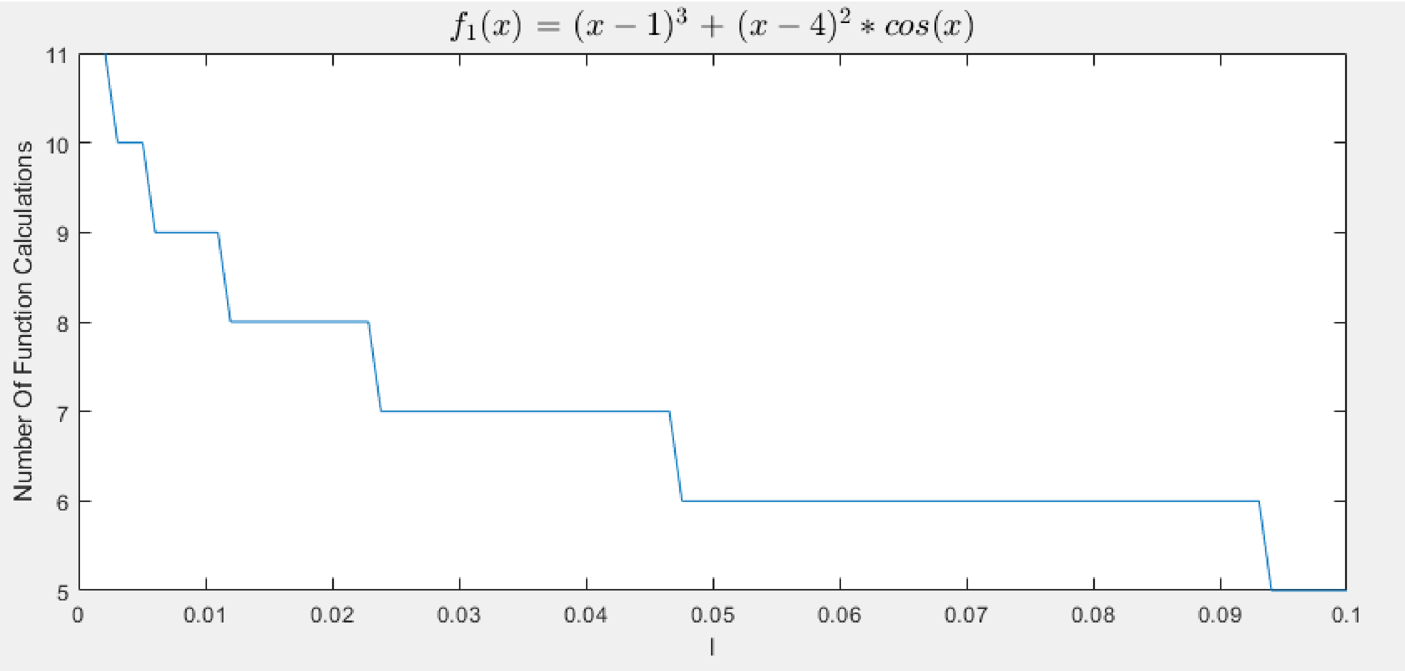
Η μέθοδος αυτή μοιάζει με την μέθοδο της διχοτόμου στο ότι η βέλτιστη επιλογή για την ελαχιστοποίηση του εύρους του διαστήματος αναζήτησης βρίσκεται και πάλι στο μέσο του διαστήματος $[a_k, \beta_k]$ δηλαδή $\boldsymbol{x_k = \frac{a_k+\beta_k}{2}}$ **.** Παρόλα αυτά η μέθοδος αυτή είναι πιο ισχυρή από την απλή μέθοδο διχοτόμησης καθότι κάνει χρήση της πρώτης παραγώγου της συνάρτησης οπότε με την παράγωγο «βλέπουμε» ένα βήμα πιο μπροστά και άρα έχουμε περισσότερη πληροφορία γεγονός που μας βοηθάει να συγκλίνουμε ακόμα πιο γρήγορα στο διάστημα που περιέχει το ελάχιστο της αντικειμενικής συνάρτησης. Ο τρόπος με τον οποίο το κάνει αυτό είναι ο εξής :

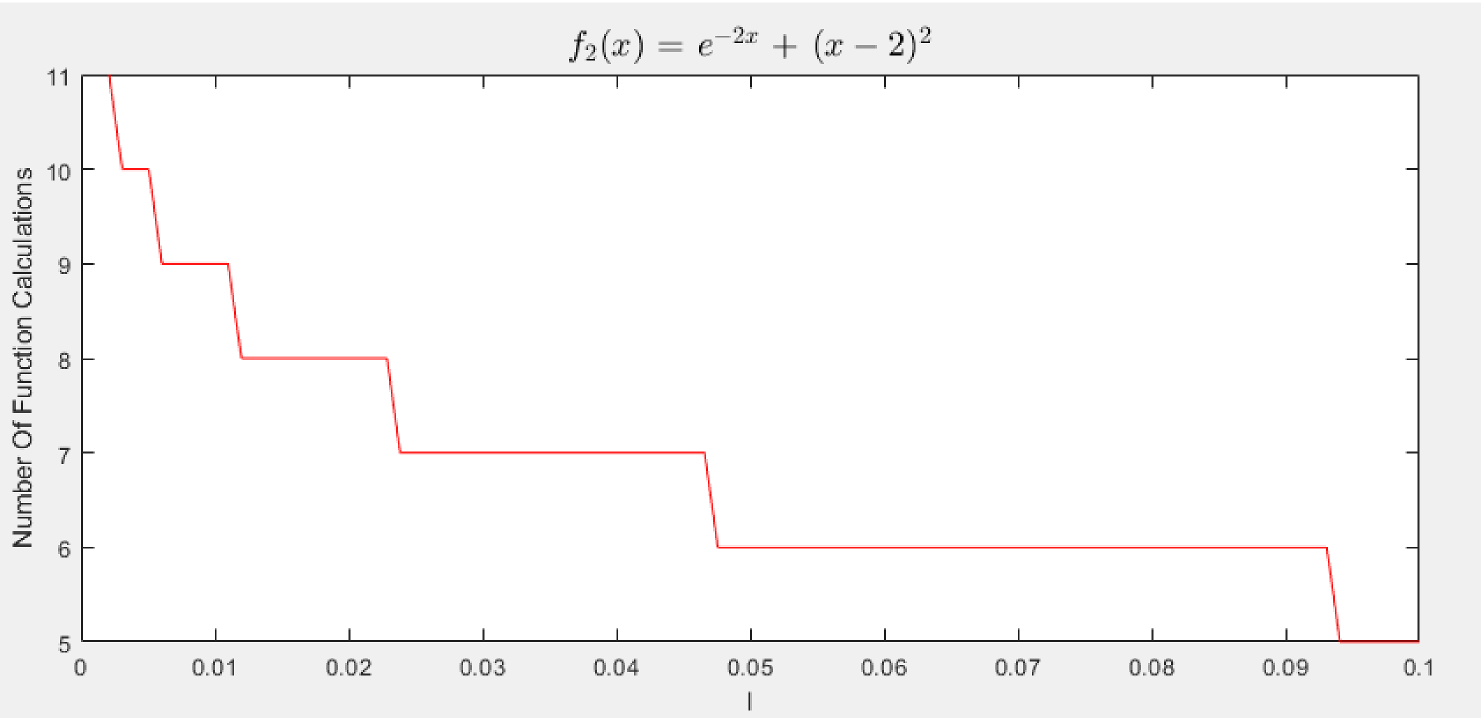
1) Αν $\boldsymbol{\frac{df(x)}{dx}}|_{x=x_k} = \boldsymbol{0}$, τότε λόγω της ψευδοκυρτότητας της f το $\boldsymbol{x_k}$ θα είναι το σημείο ελαχίστου.
2) Αν $\boldsymbol{\frac{df(x)}{dx}}|_{x=x_k} > \boldsymbol{0}$ τότε για $\boldsymbol{x > x_k}$ λόγω της ψευδοκυρτότητας της f θα έχουμε $\boldsymbol{f(x) \geq f(x_k)}$**.** Συνεπώς το ελάχιστο θα εμφανίζεται αριστερά του $\boldsymbol{x_k}$ οπότε το νέο διάστημα αναζήτησης θα είναι πλέον $[\alpha_k, x_k]$.
3) Αν $\boldsymbol{\frac{df(x)}{dx}}|_{x=x_k} < \boldsymbol{0}$ τότε για $\boldsymbol{x < x_k}$ θα ισχύει, λόγω της ψευδοκυρτότητας της f, $\boldsymbol{f(x) \geq f(x_k)}$**.** Επομένως το νέο διάστημα αναζήτησης θα είναι $[x_k, \beta_k]$.

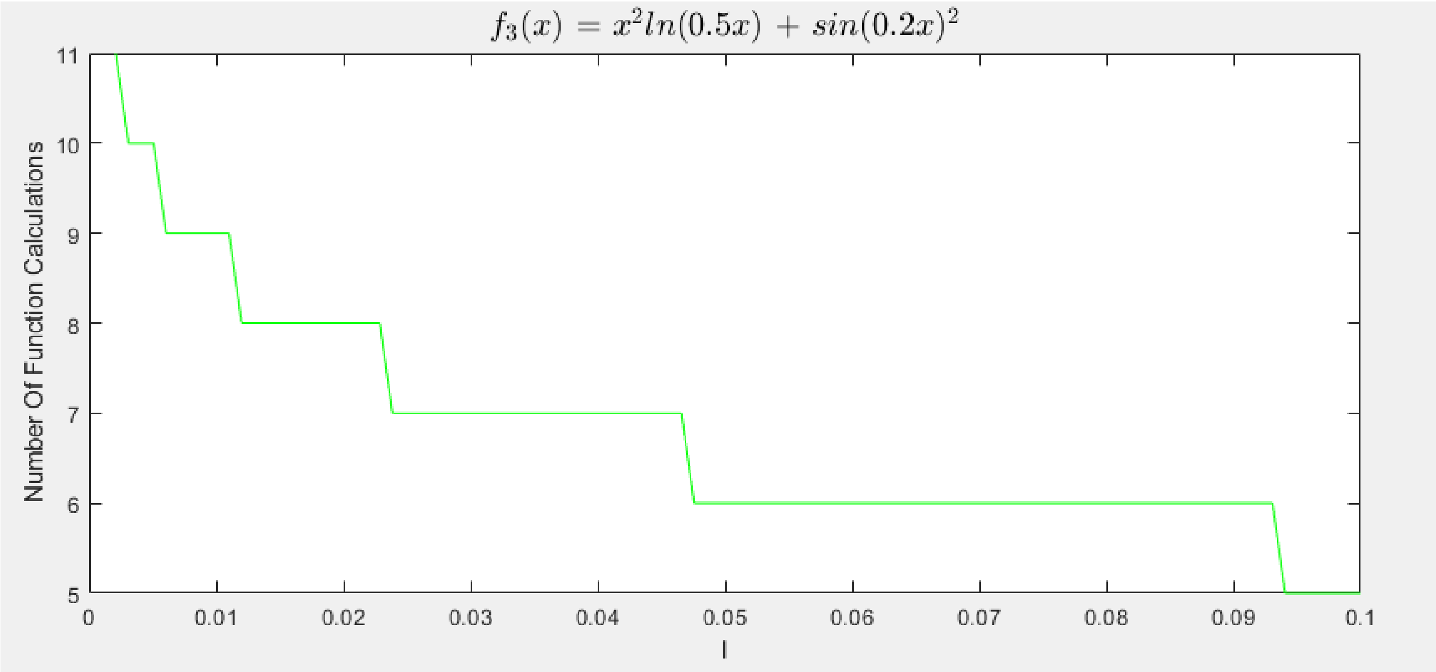
Τέλος η μέθοδος αυτή, όπως και η μέθοδος Fibonacci, θα έχει ένα καθορισμένο αριθμό n επαναλήψεων ο οποίος θα εξαρτάται από το τελικό εύρος αναζήτησης που επιθυμούμε και θα είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος αριθμός που θα ικανοποιεί την σχέση $(\frac{1}{2})^{\boldsymbol{n}} \leq \boldsymbol{\frac{l}{\beta_1-\alpha_1}}$ όπου l είναι το τελικό εύρος του διαστήματος αναζήτησης που επιθυμούμε και τα α_1 και β_1 είναι τα αρχικά άκρα του διαστήματος στο οποίο αναζητούμε το ελάχιστο.

- Για μεταβαλλόμενο $\boldsymbol{l}$:

Καλείται η συνάρτηση **Bisection_Der_Variable_Lamda** η οποία με την σειρά της καλεί την συνάρτηση **Bisection_Der_Method** ,για την κάθε επιμέρους συνάρτηση, που υλοποιεί την μέθοδο της διχοτόμησης με παράγωγο για ένα εύρος τιμών του l το οποίο κυμαίνεται $\boldsymbol{0.0021 \leq l \leq 0.1}$ και είναι χωρισμένο σε 100 τμήματα.**(ΣΗΜΕΙΩΣΗ :**Η παράγωγος της κάθε συνάρτησης υπολογίζεται προτού καλέσω την **Bisection_Der_Method.** Στον κώδικα οι συναρτήσεις $g_1(x), g_2(x)\ και\ g_3(x)$ αντιπροσωπεύουν τις παραγώγους των αντικειμενικών συναρτήσεων πάνω στις οποίες εκτελείται η μέθοδος**)** Από τα παρακάτω διαγράμματα γίνεται φανερό πως όσο αυξάνεται η τελική ακρίβεια l τόσο περισσότερο μειώνεται και αριθμός των κλήσεων των συναρτήσεων αφού με λιγότερα βήματα θα φτάσουμε στην πιο ελαστική ακρίβεια που επιθυμούμε. Επιπλέον, από τα παρακάτω διαγράμματα παρατηρείται μια αρκετά σημαντική βελτίωση του αριθμού των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης καθώς πλέον, όπως θα φανεί και από τα διαγράμματα, η μέθοδος διχοτόμησης με χρήση παραγώγου απαιτεί σχεδόν το ένα δεύτερο των υπολογισμών σε σχέση με την απλή μέθοδο διχοτόμησης ενώ ακόμα παρουσιάζει επίσης σημαντική μείωση υπολογισμού τιμών και με την μέθοδο Fibonacci η οποία ήταν μέχρι στιγμής η πιο γρήγορη μέθοδος από όλες τις άλλες(δηλαδή της διχοτόμησης και την μέθοδο του χρυσού τομέα) Οι γραφικές παραστάσεις για τις τρείς συναρτήσεις είναι οι ίδιες κάτι που ήταν αναμενόμενο καθότι ο αριθμός των κλήσεων της συνάρτησης εξαρτάται μόνο από το μήκος των διαδοχικών διαστημάτων αναζήτησης και την συνθήκη τερματισμού και όχι από την κυρτή συνάρτηση.





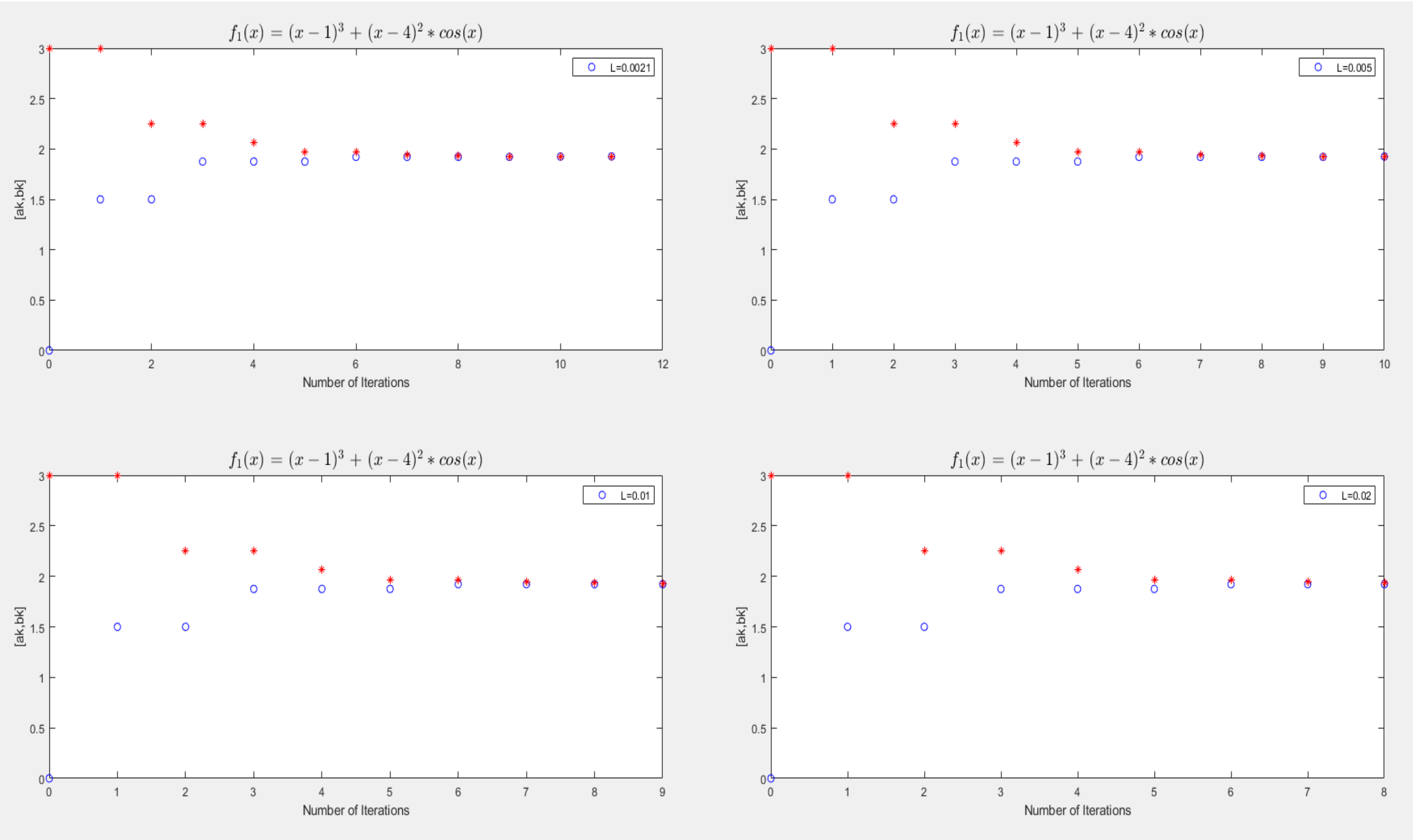


Τέλος, στην συνέχεια παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις των άκρων του διαστήματος $[a_k, b_k]$ συναρτήσει του βήματος k για τέσσερις διαφορετικές τιμές του τελικού εύρους αναζήτησης l

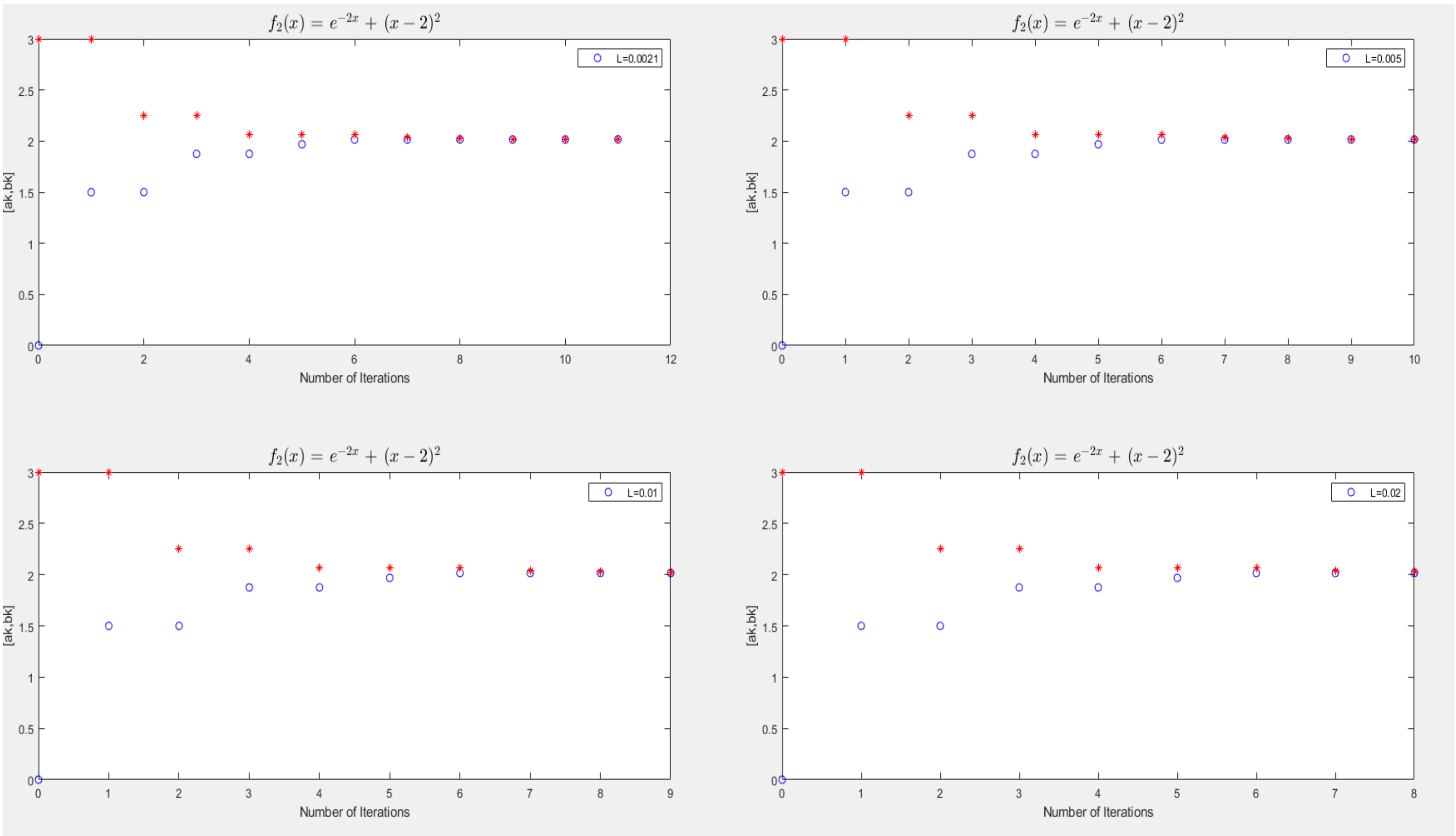
1. Δηλαδή για $l = 0.021$
2. Για $l = 0.005$
3. Για $l = 0.01$
4. Για $l = 0.02$

   Από αυτές φαίνεται ότι ο αλγόριθμος της διχοτόμησης με παράγωγο θα συγκλίνει στο ελάχιστο $\boldsymbol{x}^*$ της συνάρτησης μετά από k επαναλήψεις και αφότου η αντικειμενική συνάρτηση θα έχει κληθεί $n = k$ φορές Αυτό υλοποιείται με την συνάρτηση **Bisection_Der_ak_bk** και μας δείχνει ότι για μικρά l ο αλγόριθμος συγκλίνει μετά από περισσότερες επαναλήψεις στο ελάχιστο αλλά το διάστημα $[a_k, b_k]$ είναι μικρότερο, γεγονός που σημαίνει ότι πήραμε μια καλύτερη εκτίμηση για τη περιοχή στην οποία θα βρίσκεται το ελάχιστο της κάθε συνάρτησης.

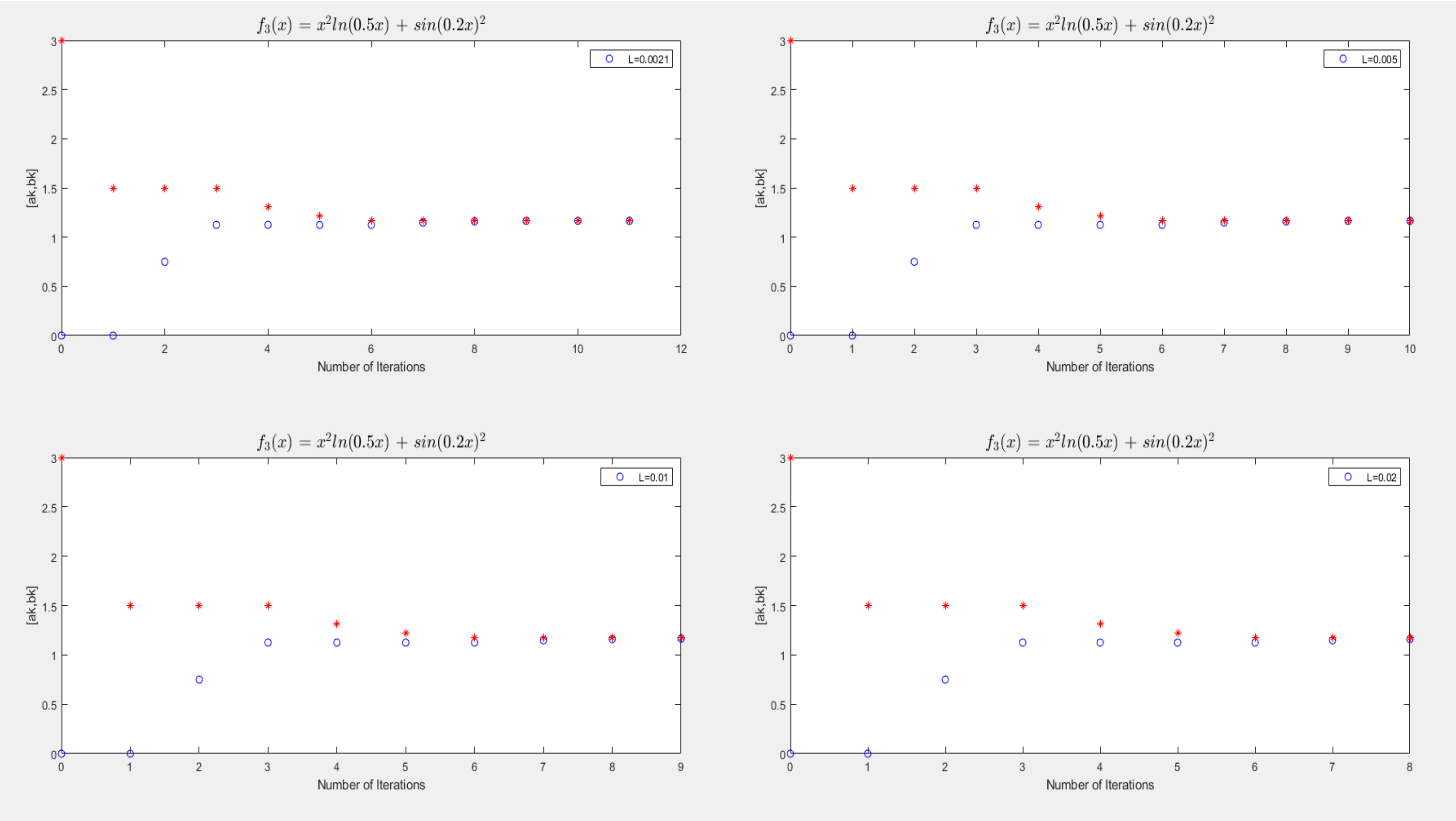
   ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Τα α_k φαίνονται στα γραφήματα με μπλε κύκλους ενώ τα b_k φαίνονται με κόκκινα αστεράκια



$f_1(x) = (x-1)^3 + (x-4)^2 * cos(x)$
L=0.0021
L=0.005
L=0.01
L=0.02
[ak,bk]
Number of Iterations



$f_2(x) = e^{-2x} + (x-2)^2$
L=0.0021
L=0.005
L=0.01
L=0.02
[ak,bk]
Number of Iterations



<u>Γενικά Συμπεράσματα:</u>

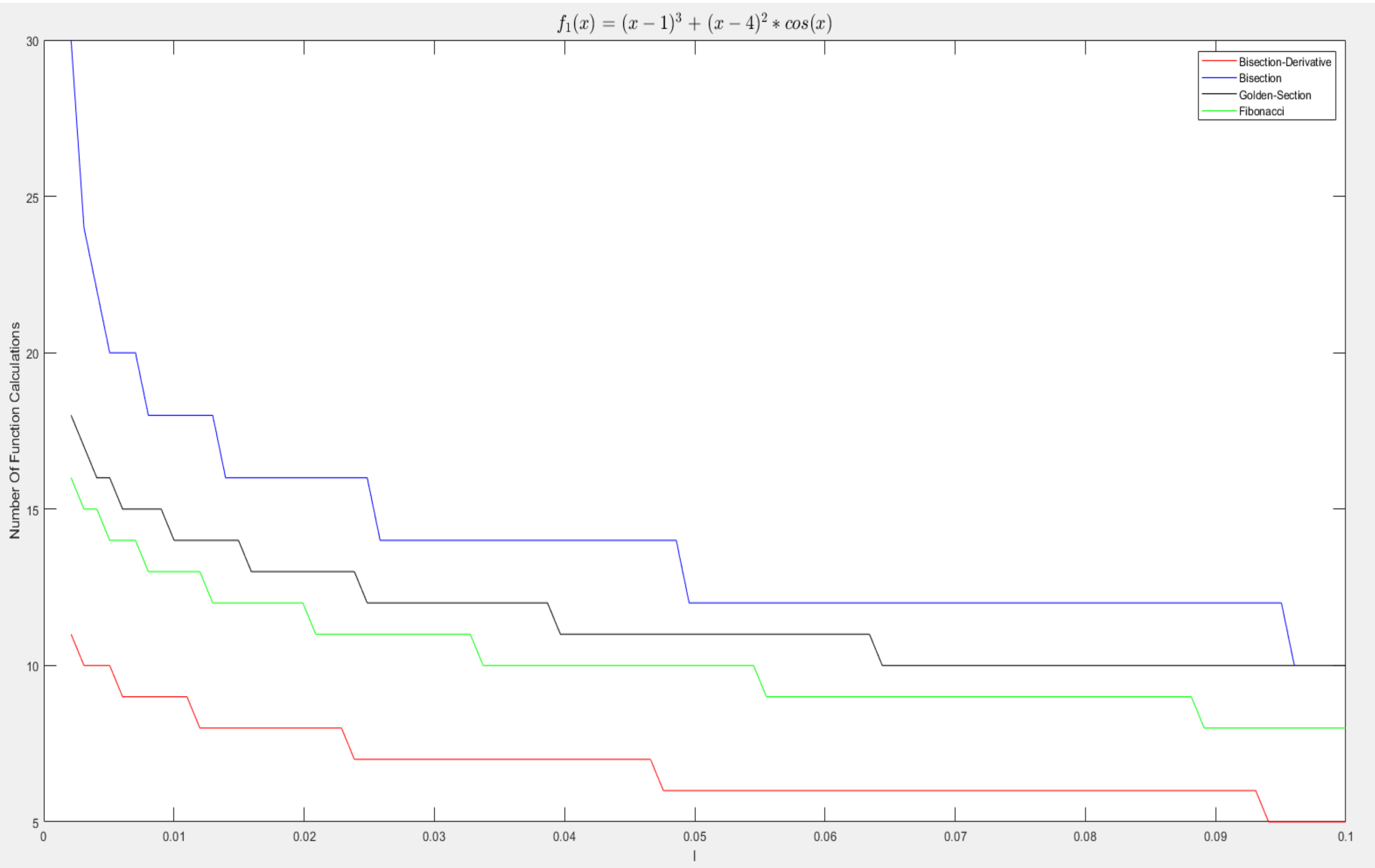
Τρέχοντας όλους τους αλγορίθμους της $1^{ης}$ εργαστηριακής άσκησης καταλήγουμε στα εξής συμπεράσματα τα οποία συνοψίζονται σε ένα πίνακα και αφορούν μόνο την πρώτη συνάρτηση αφού ανάλογα συμπεράσματα προκύπτουν και για εκείνες. Επίσης στον παρακάτω πίνακα που ακολουθεί ο αριθμός n παριστάνει τον συνολικό αριθμό υπολογισμών των τιμών της συνάρτησης ενώ ο αριθμός k παριστάνει τον συνολικό αριθμό επαναλήψεων

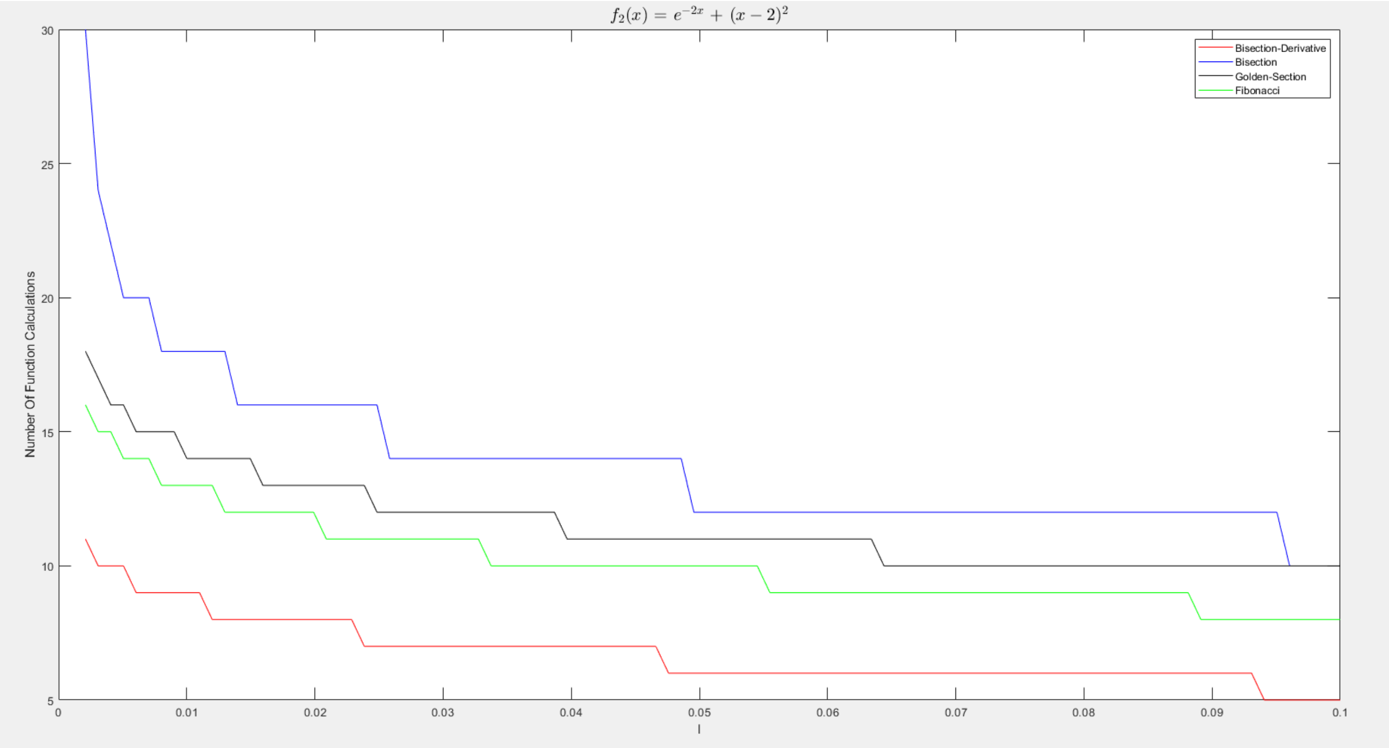
Χρήστος-Αλέξανδρος Δαρδαμπούνης ΑΕΜ:10335

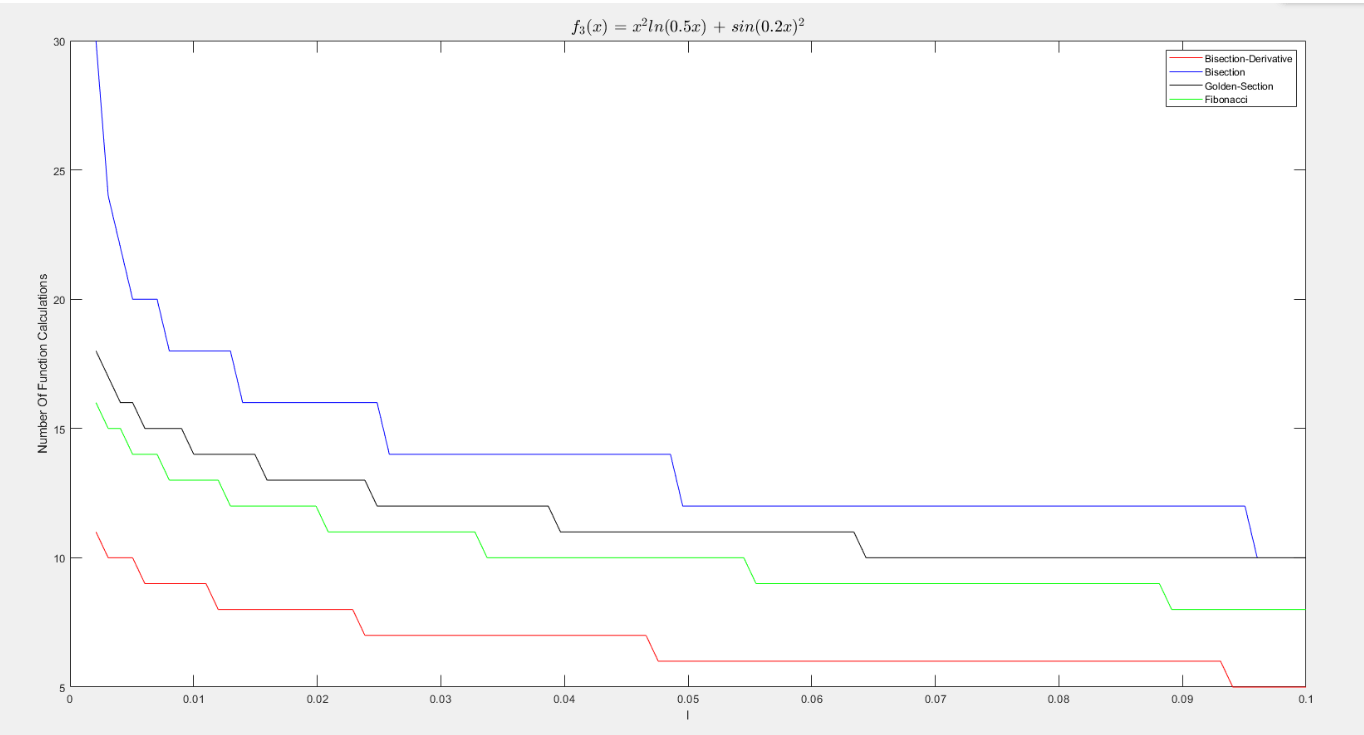
Μέθοδοι	**Εύρος αναζήτησης l**	**Αριθμός υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης**
Διχοτόμησης $n = 2(k-1)$	**0.0021**	30
	0.005	20
	0.01	18
	0.02	16
Χρυσού Τομέα $n = k + 1$	**0.0021**	18
	0.005	16
	0.01	14
	0.02	13
Fibonacci $n = k$	**0.0021**	17
	0.005	15
	0.01	14
	0.02	13
Διχοτόμησης με χρήση παραγώγου $n = k$	**0.0021**	11
	0.005	10
	0.01	9
	0.02	8

Όπως φαίνεται από τον παραπάνω πίνακα οι πιο γρήγορες μέθοδοι είναι οι Fibonacci και η μέθοδος διχοτόμησης με την χρήση παραγώγου. Επίσης παρατηρούμε ότι η πιο γρήγορη από όλες τις μεθόδους είναι η μέθοδος διχοτόμησης με την χρήση παραγώγου, γεγονός που ήταν αναμενόμενο καθώς αυτή η μέθοδος εκμεταλλεύεται την παράγωγο της συνάρτησης και άρα έχει περισσότερες πληροφορίες και καλύτερη εποπτεία για το διάστημα στο οποίο μπορεί να βρίσκεται το ελάχιστο. Επιπλέον, βλέπουμε ότι η πιο αργή μέθοδος είναι η μέθοδος της απλής διχοτόμησης η οποία θέλει περίπου τον διπλάσιο αριθμό υπολογισμών των τιμών της συνάρτησης, σε σχέση με την μέθοδο της διχοτόμησης με παράγωγο, προκειμένου να συγκλίνει στο επιθυμητό εύρος αναζήτησης. Επιπρόσθετα, είναι φανερό ότι δεν υπάρχει μεγάλη διαφορά μεταξύ του αριθμού υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης της μεθόδου του χρυσού τομέα και της μεθόδου Fibonacci και αυτό διότι για πολύ μεγάλα n οι δύο αυτές μέθοδοι θα είναι ταυτόσημες διότι όπως αναφέρθηκε νωρίτερα ισχύει $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n-1}}{F_n}=\gamma=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cong 0.618}$. Ωστόσο, παρότι η μέθοδος διχοτόμησης είναι εκείνη η οποία συγκλίνει πιο γρήγορα στο επιθυμητό εύρος αναζήτησης, πολλές φορές είναι πιθανό να μην μπορεί να εφαρμοστεί καθότι απαιτεί την ύπαρξη παραγώγου της συνάρτησης στο διάστημα αναζήτησης του ελαχίστου. Αυτό θα μας οδηγήσει στο να επιλέξουμε την μέθοδο Fibonacci η οποία είναι πιο γρήγορη από τις υπόλοιπες δύο μεθόδους και δεν έχει ως απαίτηση την ύπαρξη της παραγώγου της συνάρτησης.

Παρακάτω φαίνονται και οι γραφικές παραστάσεις με τις οποίες συγκρίνεται η απόδοση όλων των μεθόδων βελτιστοποίησης και φαίνεται ποια μέθοδος είναι εκείνη που είναι πιο γρήγορη και ποια είναι η πιο αργή. Προφανώς, αυτό που προκύπτει συμπίπτει με τα συμπεράσματα στα οποία καταλήξαμε νωρίτερα







Χρήστος-Αλέξανδρος Δαρδαμπούνης ΑΕΜ:10335

Όπως φαίνεται και για τις 3 συναρτήσεις οι αποδόσεις των αλγορίθμων είναι οι ίδιες δηλαδή πιο γρήγορη είναι η μέθοδος της διχοτόμησης με παράγωγο και πιο αργή η μέθοδος της διχοτόμησης. Αυτό είναι λογικό γιατί όπως έχουμε ήδη αναφέρει ο αριθμός των κλήσεων της συνάρτησης εξαρτάται μόνο από το μήκος των διαδοχικών διαστημάτων αναζήτησης και την συνθήκη τερματισμού και όχι από την κυρτή συνάρτηση.

Ονοματεπώνυμο : Χρήστος-Αλέξανδρος Δαρδαμπούνης

AEM : 10335