

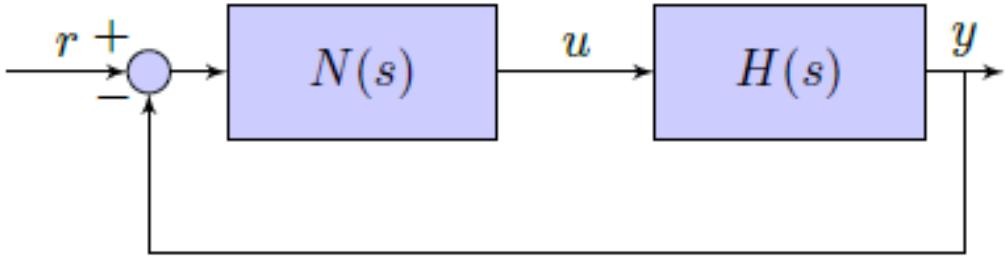
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ III

ΧΡΗΣΤΟΣ-ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΣ ΔΑΡΔΑΜΠΟΥΝΗΣ ΑΕΜ 10335

chridard@ece.auth.gr

Τμήμα Α

Άσκηση 1)



- i. Δεδομένου της συνάρτησης $H(s) = \frac{K}{s(Ts+1)}$ και ότι $N(s) = 1$ η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού βρόχου θα είναι $H_{cl}(s) = \frac{H(s)}{1+H(s)} = \frac{K/T}{s^2 + \frac{1}{T}s + \frac{K}{T}}$ επομένως το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της συνάρτησης μεταφοράς του κλειστού βρόχου θα είναι $s^2 + \frac{1}{T}s + \frac{K}{T}$ οπότε συγκρίνοντας το με το $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$ συμπεραίνουμε ότι $\zeta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{KT}}$ και $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{T}}$. Ισχύει ότι $E(s) = R(s) - Y(s) = (1 - H_{cl}(s)) * R(s) \Rightarrow E(s) = \frac{s^2 + \frac{1}{T}s}{s^2 + \frac{1}{T}s + \frac{K}{T}} R(s)$ οπότε από αυτή την εξίσωση μεταξύ του σφάλματος και της εισόδου αναφοράς στην συχνότητα προκύπτει η διαφορική εξίσωση τους στον χρόνο η οποία θα είναι :

$$\ddot{e}(t) + \frac{1}{T}\dot{e}(t) + \frac{K}{T}e(t) = \ddot{r}(t) + \frac{1}{T}\dot{r}(t)$$

Οπότε τώρα έχοντας την διαφορική εξίσωση του σφάλματος στον χρόνο μπορούμε να πάρουμε τις εξισώσεις κατάστασης θεωρώντας ως φασικές μεταβλητές

$$\begin{cases} x_1 = e(t) \\ x_2 = \dot{e}(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{r}(t) + \frac{1}{T}\dot{r}(t) - \frac{1}{T}x_2 - \frac{K}{T}x_1 \end{cases}$$

- ii. Όταν η είσοδος του συστήματος είναι $r(t) = A * u(t)$ τότε $\dot{r}(t) = \ddot{r}(t) = 0$ οπότε το σύστημα μας γίνεται :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{T}x_2 - \frac{K}{T}x_1 \end{cases}$$

Άρα για να βρούμε το σημείο ισορροπίας του συστήματος θέτουμε $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ και από την λύση αυτού του συστήματος εξισώσεων προκύπτει ότι το σημείο ισορροπίας θα είναι το **(0,0)** και από την μορφή που έχει το σύστημα σε αυτή την

εξίσωση μπορούμε να πούμε ότι θα είναι ευσταθές καθότι βλέπουμε πως η παράγωγος του χ_2 φθίνει και άρα και του χ_1 οπότε οι μεταβλητές κατάστασης θα μειώνονται συνεχώς και άρα θα οδηγούμαστε στο σημείο ισορροπίας. Αφού έχουμε για είσοδο αναφοράς την συνάρτηση βήματος αναζητούμε μόνο το σφάλμα θέσης άρα :

$$e_{ssp} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s^2 + \frac{1}{T}s}{s^2 + \frac{1}{T}s + \frac{K}{T}} R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 + \frac{1}{T}s}{s^2 + \frac{1}{T}s + \frac{K}{T}} = 0$$

Από όπου βλέπουμε πως το K, T δεν επηρεάζουν καθόλου την σύγκλιση τους σφάλματος στο σημείο ισορροπίας

Όταν η είσοδος του συστήματος είναι $r(t) = Btu(t)$ τότε $\dot{r}(t) = B, \ddot{r}(t) = 0$ οπότε το σύστημα μας γίνεται :

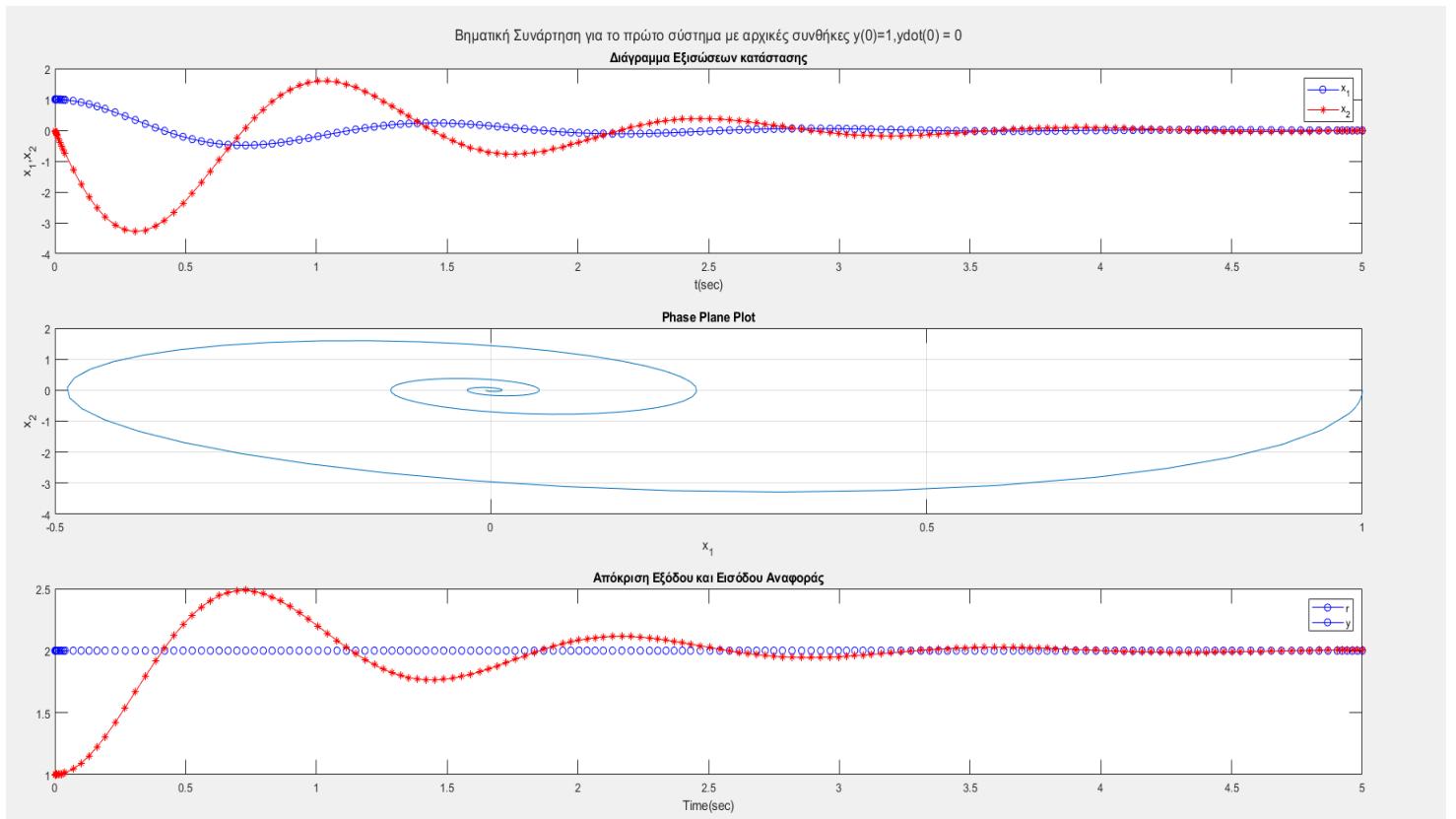
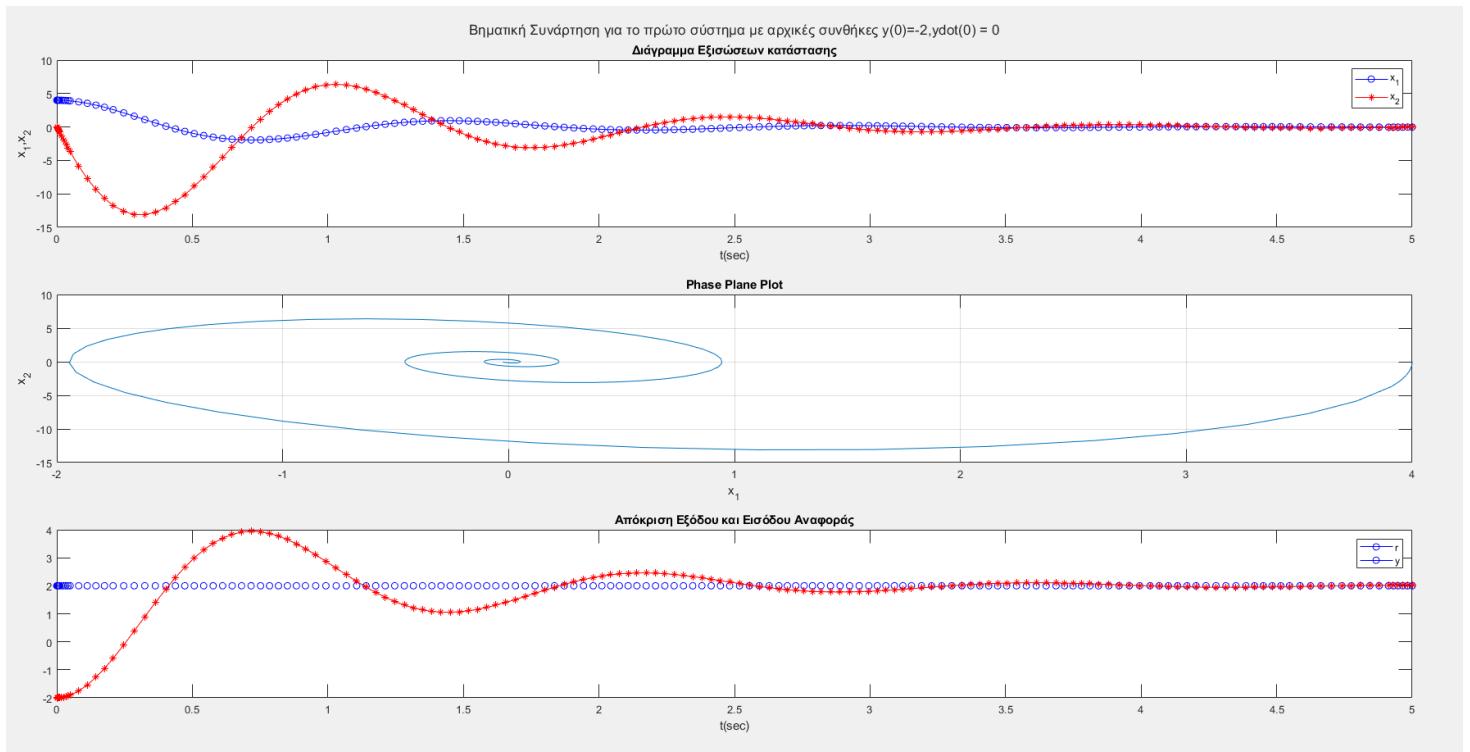
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{B}{T} - \frac{1}{T}x_2 - \frac{K}{T}x_1 \end{cases}$$

Άρα για να βρούμε το σημείο ισορροπίας του συστήματος θέτουμε $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ και από την λύση αυτού του συστήματος εξισώσεων προκύπτει ότι το σημείο ισορροπίας θα είναι $(B/K, 0)$ και από την μορφή που έχει το σύστημα σε αυτή την εξίσωση μπορούμε να πούμε ότι θα είναι ευσταθές καθότι βλέπουμε πως η παράγωγος του χ_2 φθίνει και άρα και του χ_1 οπότε οι μεταβλητές κατάστασης θα μειώνονται συνεχώς και άρα θα οδηγούμαστε στο σημείο ισορροπίας. . Αφού έχουμε για είσοδο αναφοράς την συνάρτηση ράμπας το σφάλμα του συστήματος θα είναι σφάλμα ταχύτητας και άρα :

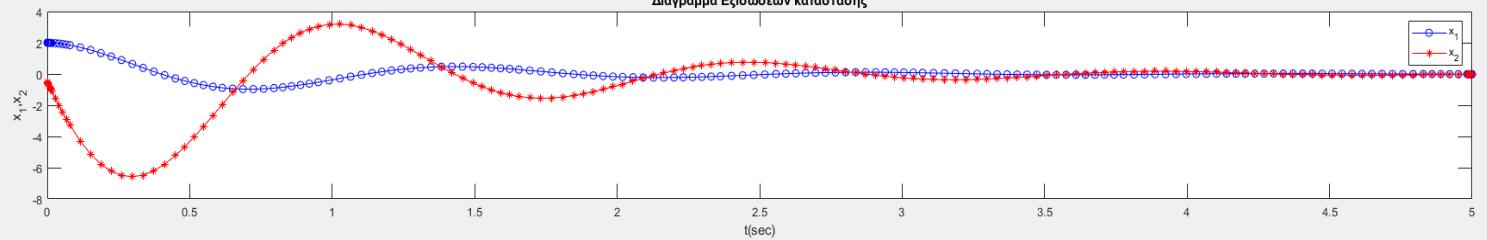
$$e_{ssv} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s^2 + \frac{1}{T}s}{s^2 + \frac{1}{T}s + \frac{K}{T}} R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{B}{s} \frac{s^2 + \frac{1}{T}s}{s^2 + \frac{1}{T}s + \frac{K}{T}} = \frac{B}{K}$$

Από όπου βλέπουμε πως το K καθώς και η κλίση της συνάρτησης ράμπας επηρεάζουν την ταχύτητα σύγκλισης στο σημείο ισορροπίας.

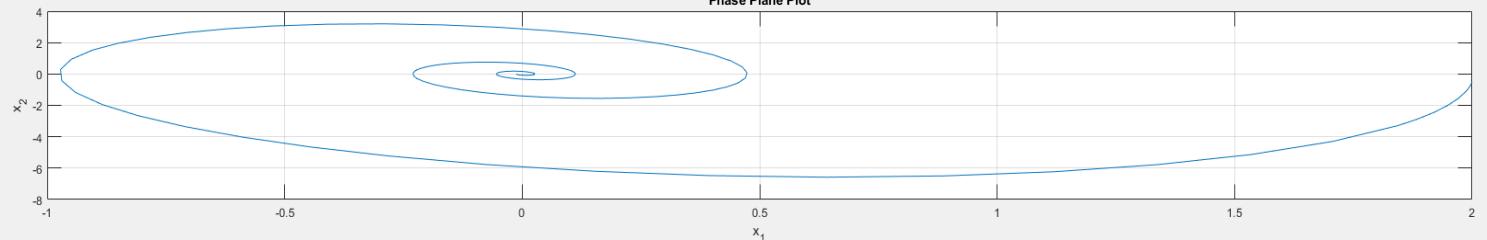
iii. Παρακάτω φαίνονται τα ζητούμενα διαγράμματα για είσοδο την βηματική $r(t) = 2u(t)$ με την σειρά με την οποία μας δίνονται οι αρχικές συνθήκες στην εκφώνηση



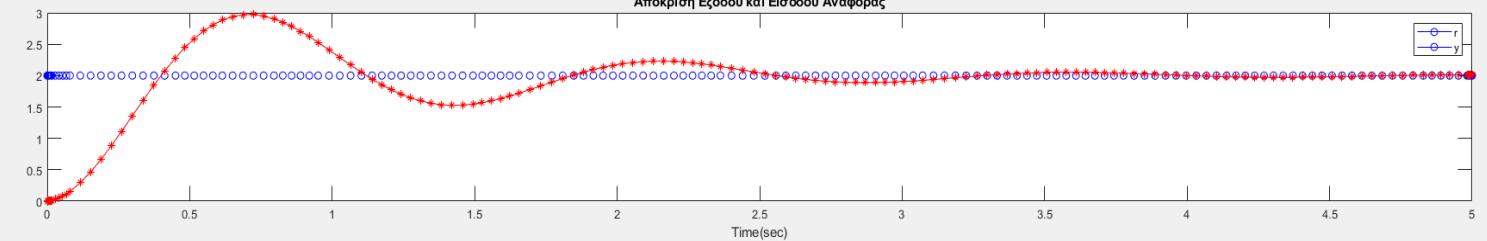
Βηματική Συνάρτηση για το πρώτο σύστημα με αρχικές συνθήκες $y(0)=0$, $ydot(0) = 0.5$
Διάγραμμα Εξισώσεων κατάστασης



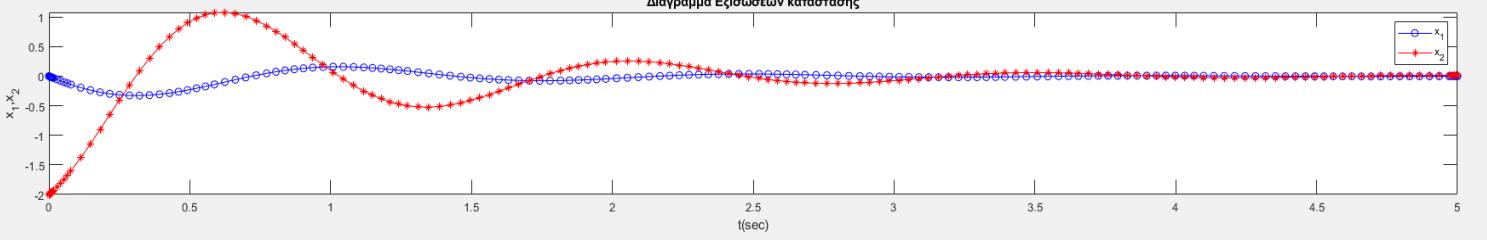
Phase Plane Plot



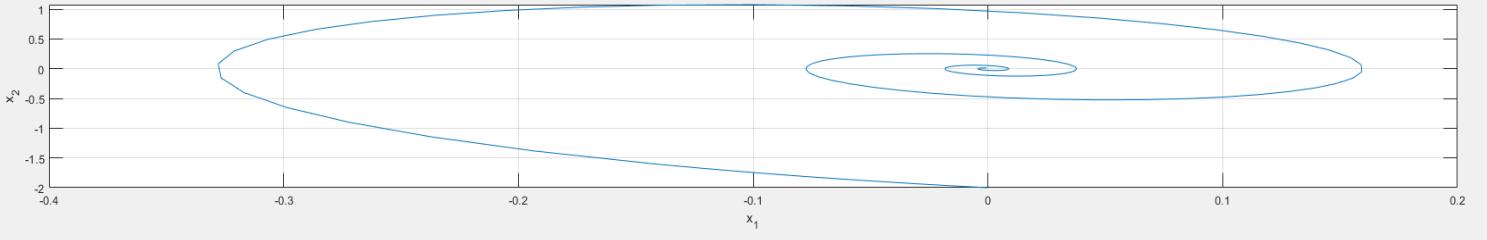
Απόκριση Εξόδου και Εισόδου Αναφοράς



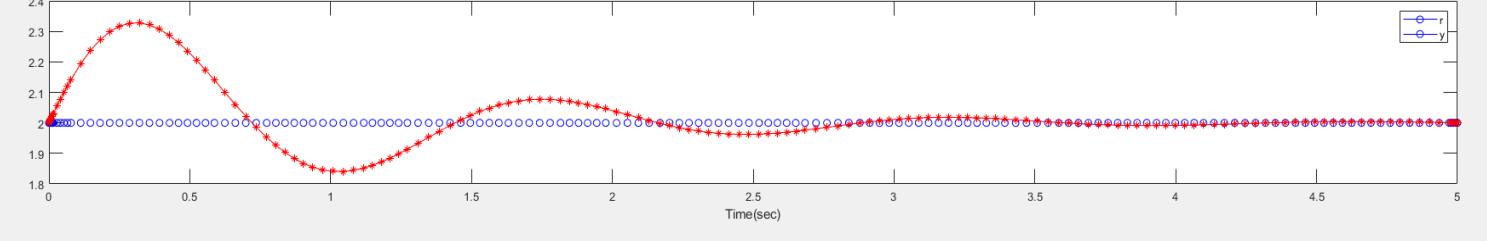
Βηματική Συνάρτηση για το πρώτο σύστημα με αρχικές συνθήκες $y(0)=2$, $ydot(0) = 2$
Διάγραμμα Εξισώσεων κατάστασης

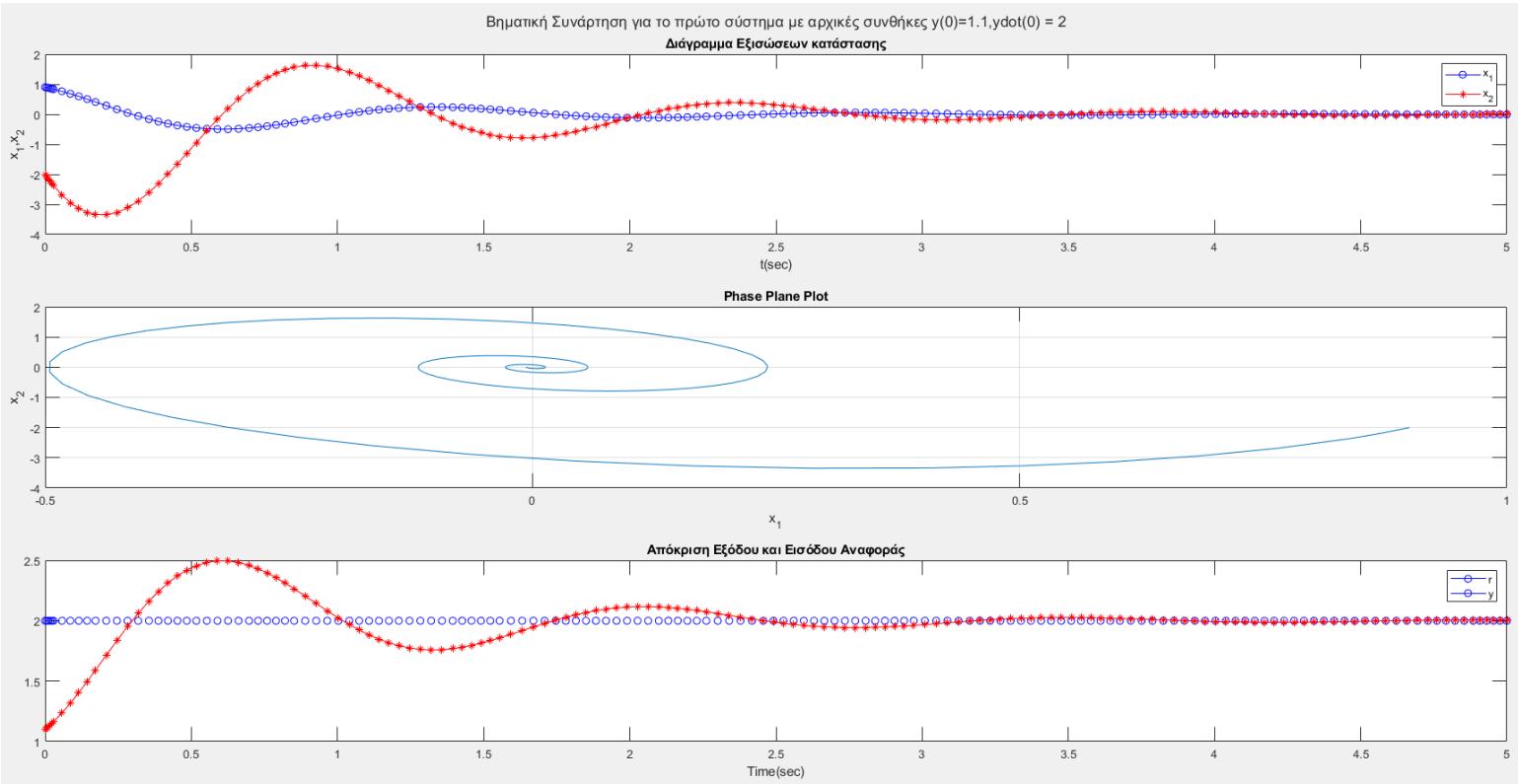
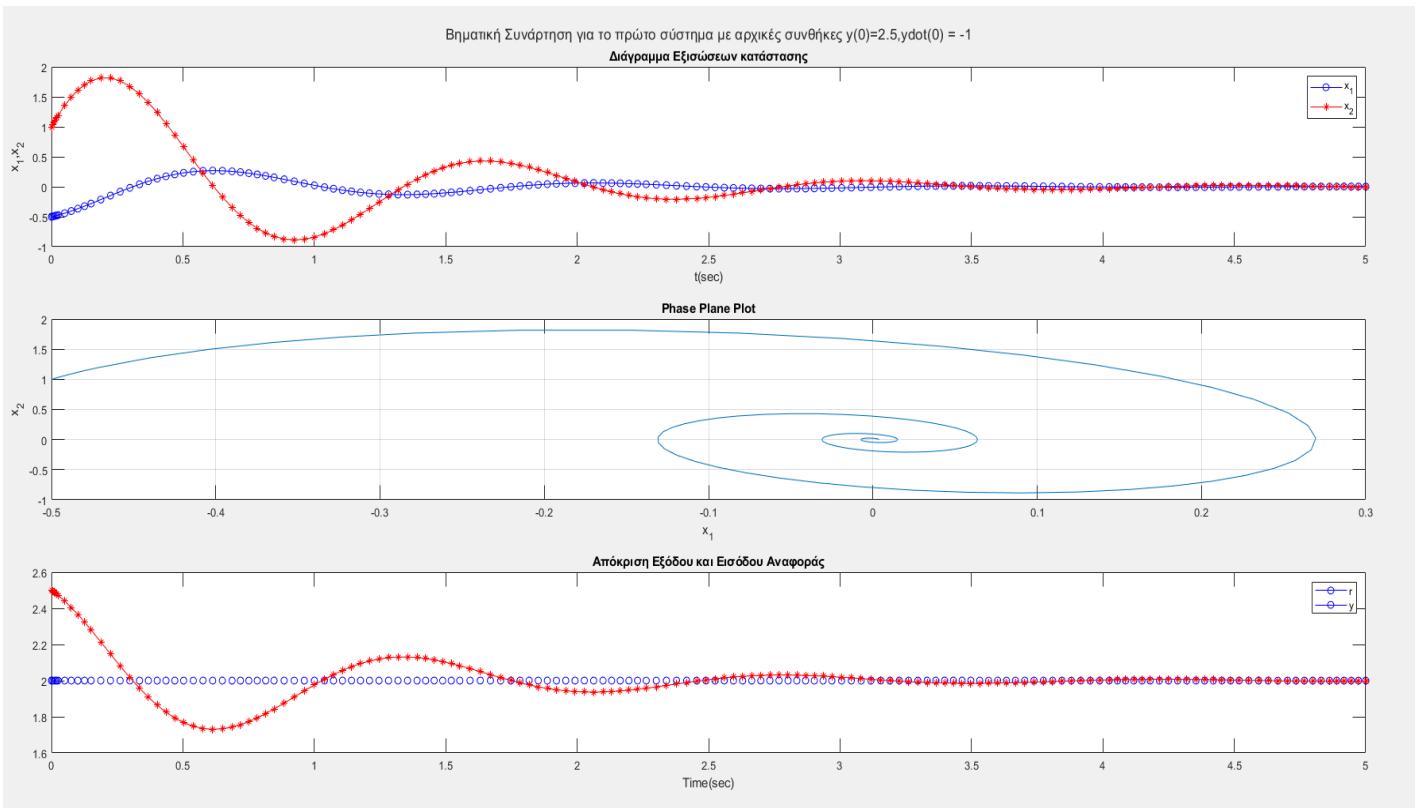


Phase Plane Plot

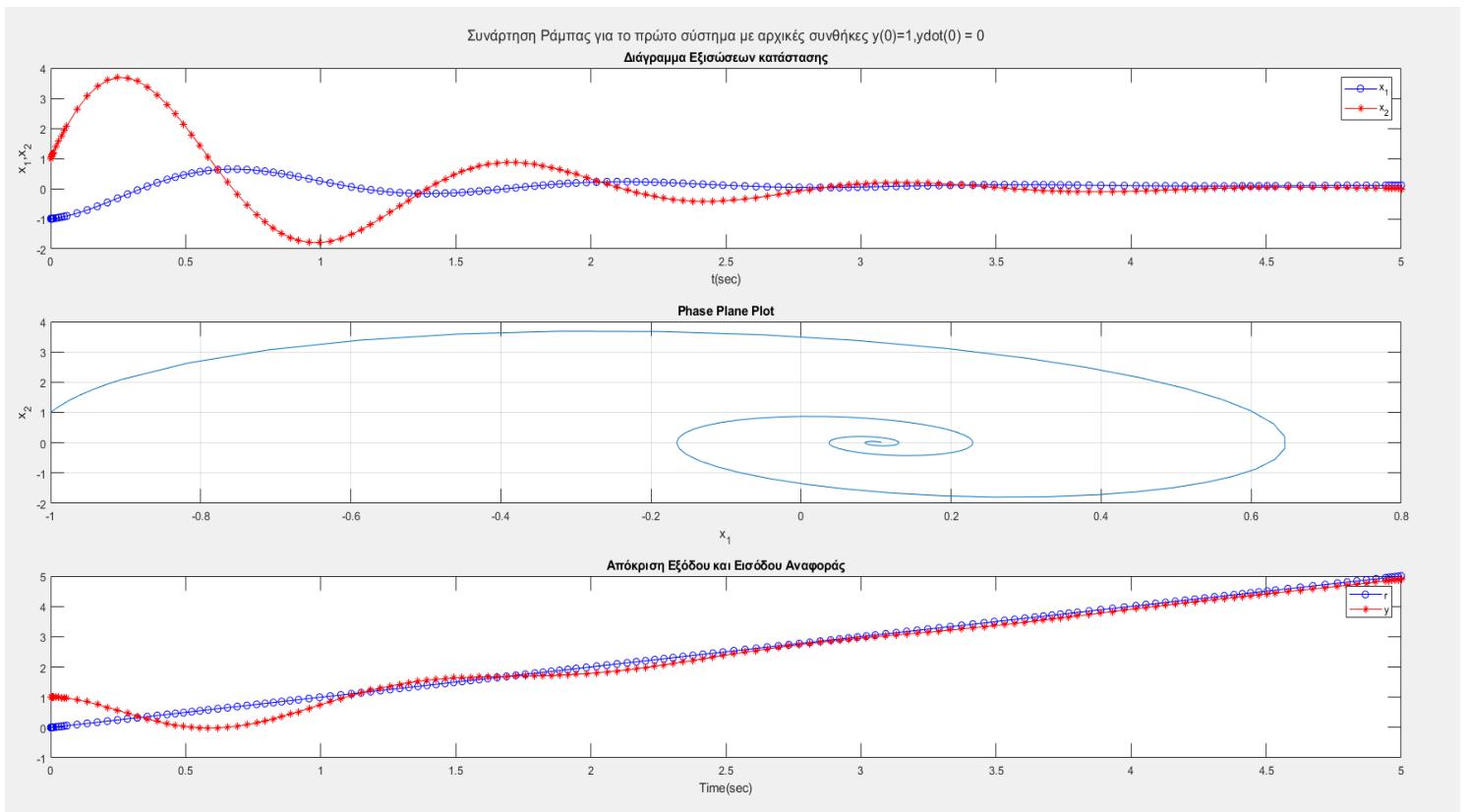
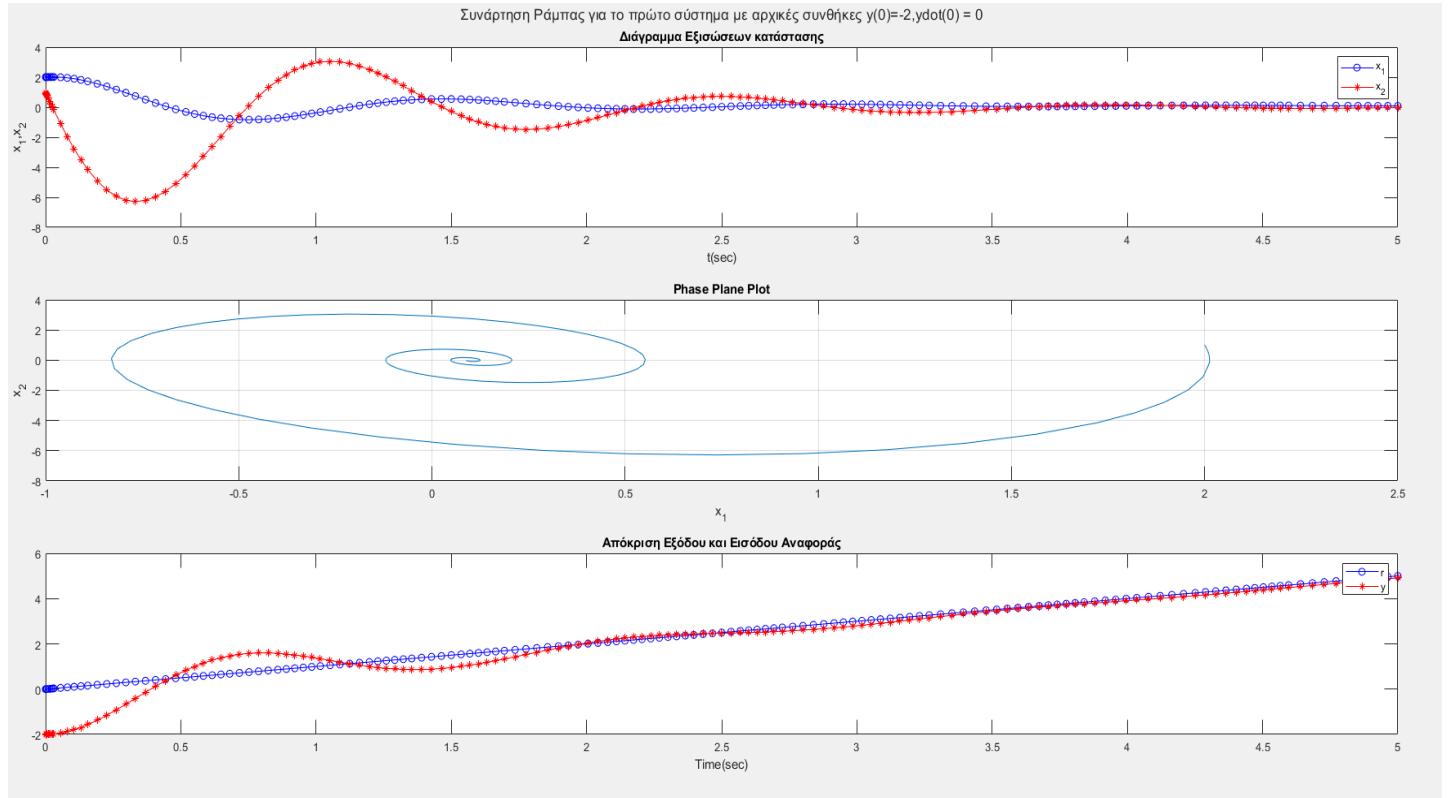


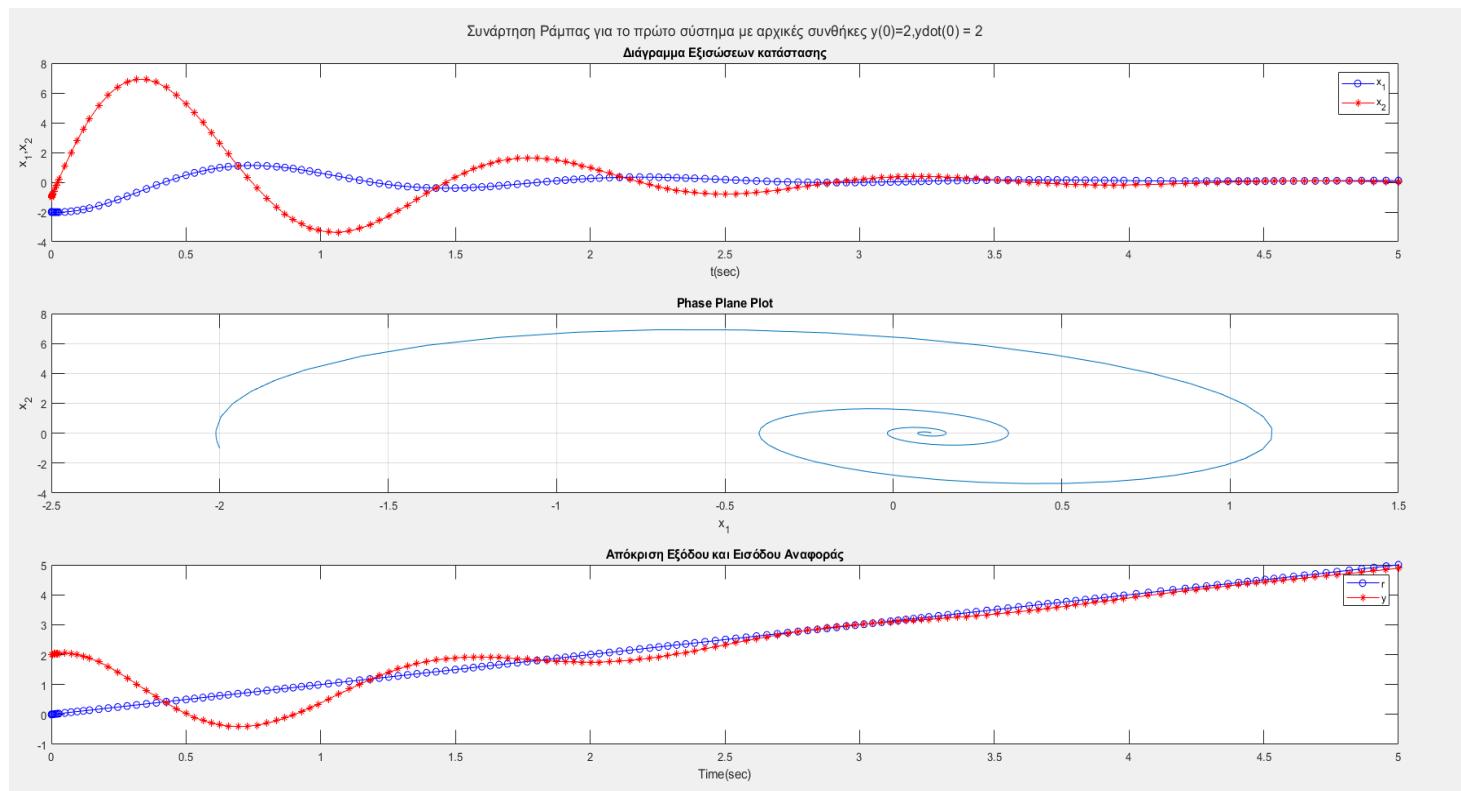
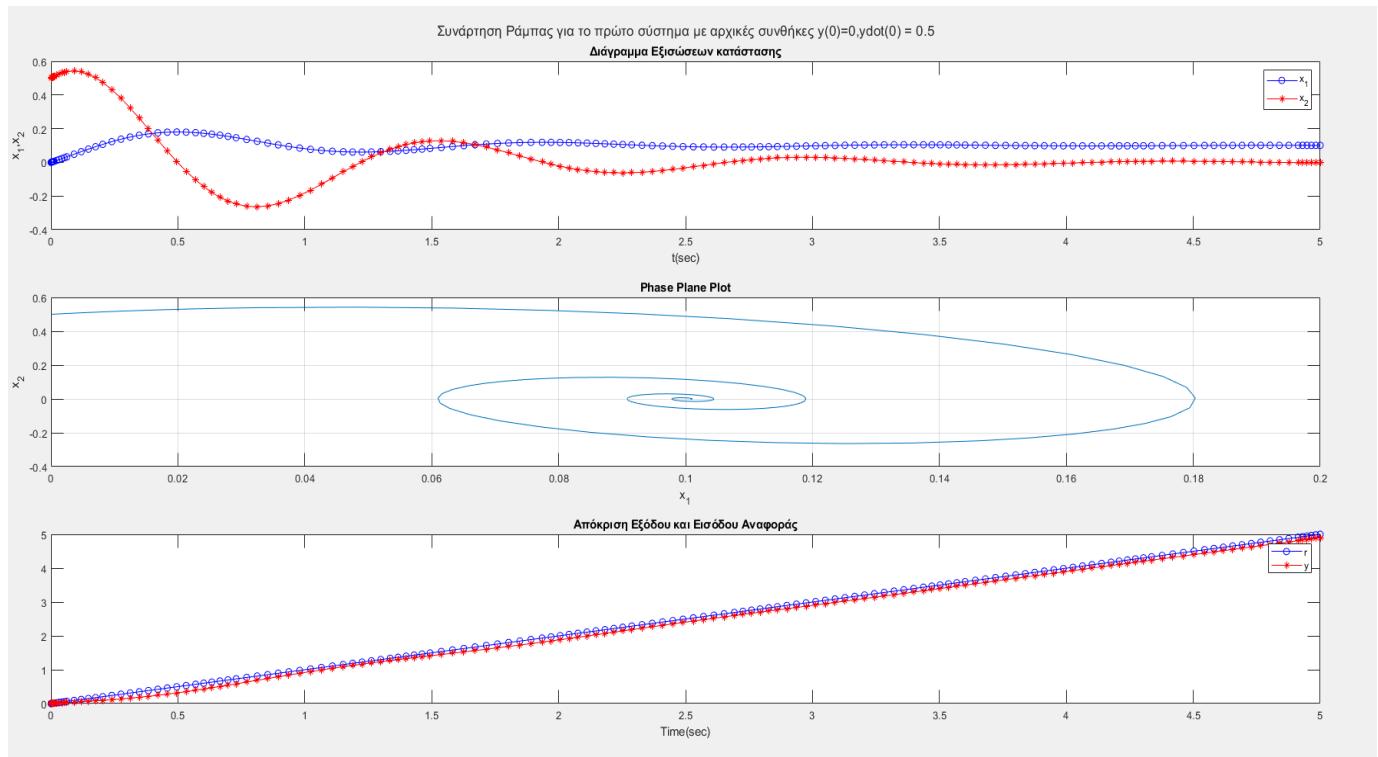
Απόκριση Εξόδου και Εισόδου Αναφοράς

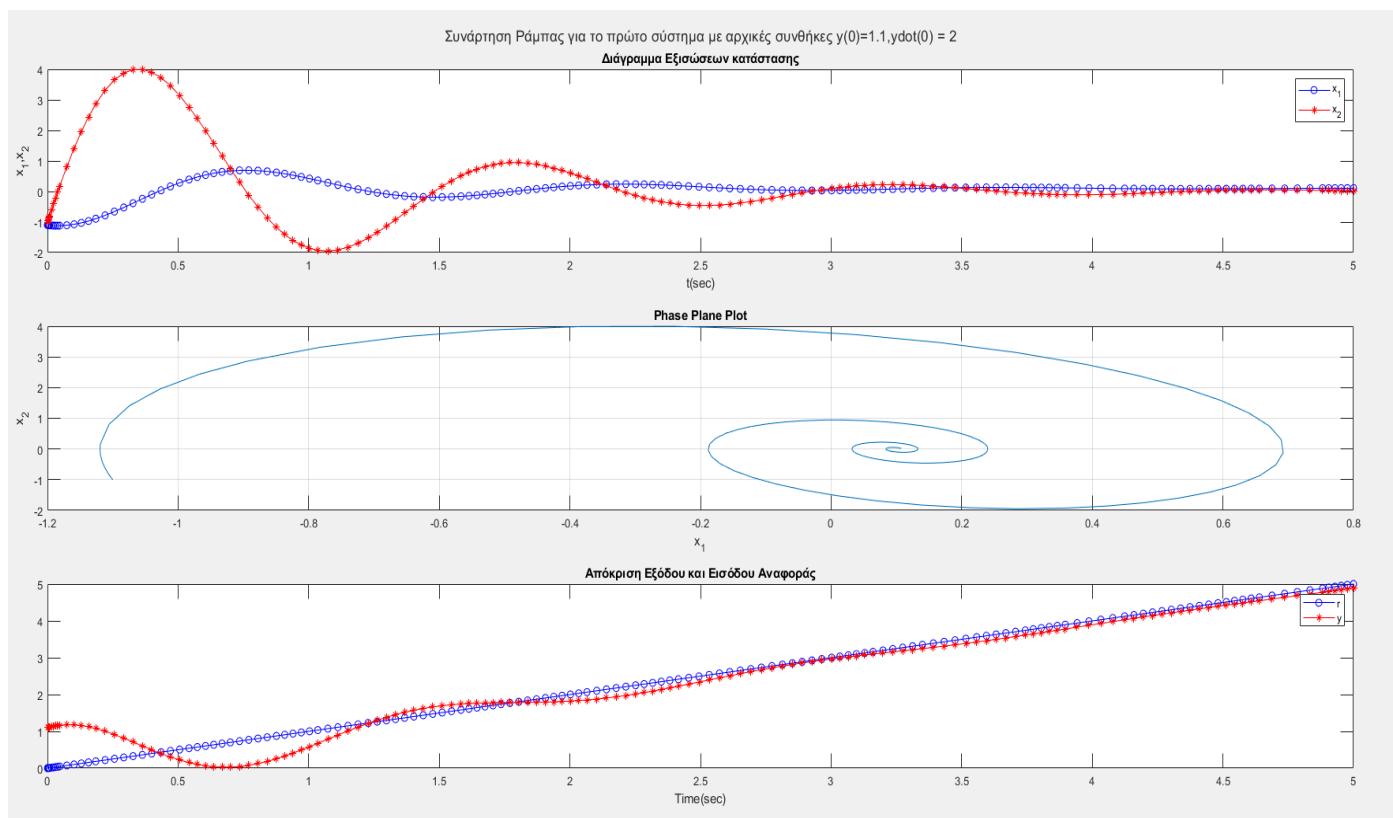
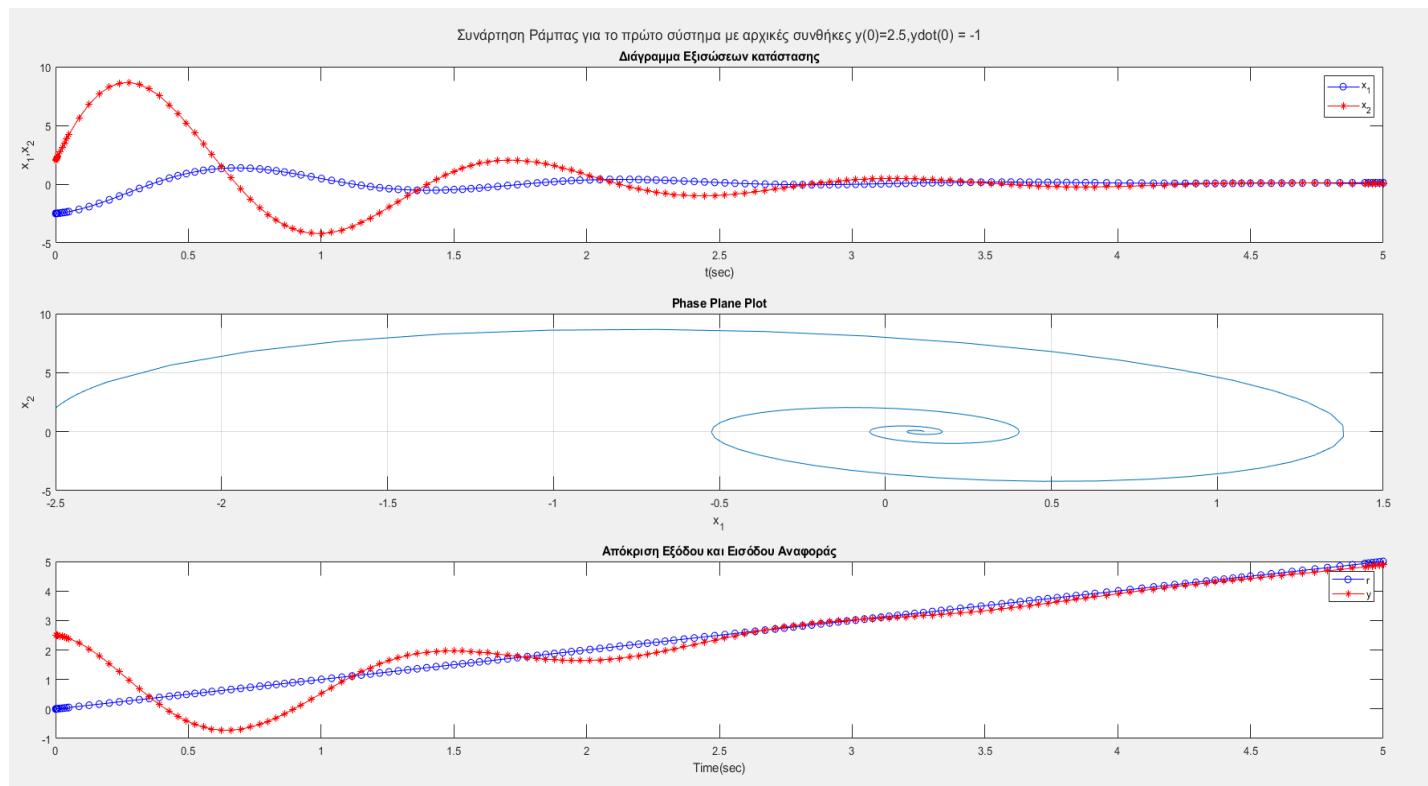




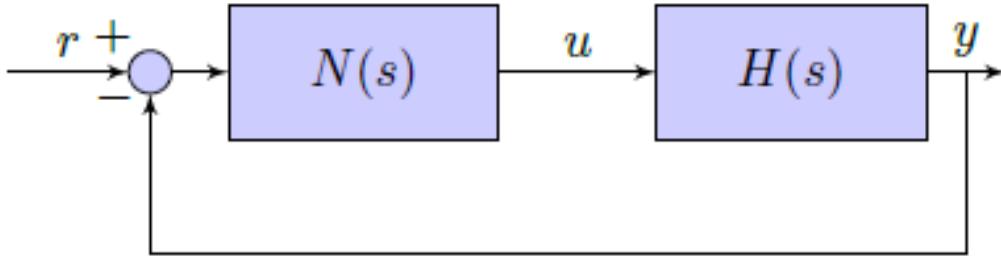
Στην συνέχεια φαίνονται τα ζητούμενα διαγράμματα για είσοδο την συνάρτηση ράμπας $r(t) = tu(t)$ με την σειρά με την οποία μας δίνονται οι αρχικές συνθήκες στην εκφώνηση:







Άσκηση 2)



- i. Τώρα πλέον το $N(s)$ είναι μια συνάρτηση κορεσμού οπότε το σύστημα δεν είναι πλέον γραμμικό και άρα δεν ορίζεται η έννοια της συνάρτησης μεταφορά κλειστού βρόχου. Ωστόσο, θα ισχύει σίγουρα ότι $Y(s) = H(s) * U(s) \Rightarrow Y(s) = \frac{K}{s(Ts+1)} U(s)$ οπότε η χρονική τους έκφραση θα είναι η εξής :

$$\ddot{y}(t) + \frac{1}{T} \dot{y}(t) = \frac{K}{T} u(t)$$

Όπου $u(t) = u_0 sat(\frac{e}{e_0})$ όπου e είναι το σφάλμα του συστήματος. Επομένως αφαιρώντας και από τα δύο μέλη την πρώτη και την δεύτερη παράγωγο της εισόδου αναφοράς σχηματίζουμε την διαφορική εξίσωση του σφάλματος η οποία είναι η εξής:

$$\ddot{e}(t) + \frac{1}{T} \dot{e}(t) = \ddot{r}(t) + \frac{1}{T} \dot{r}(t) - \frac{K}{T} u(t)$$

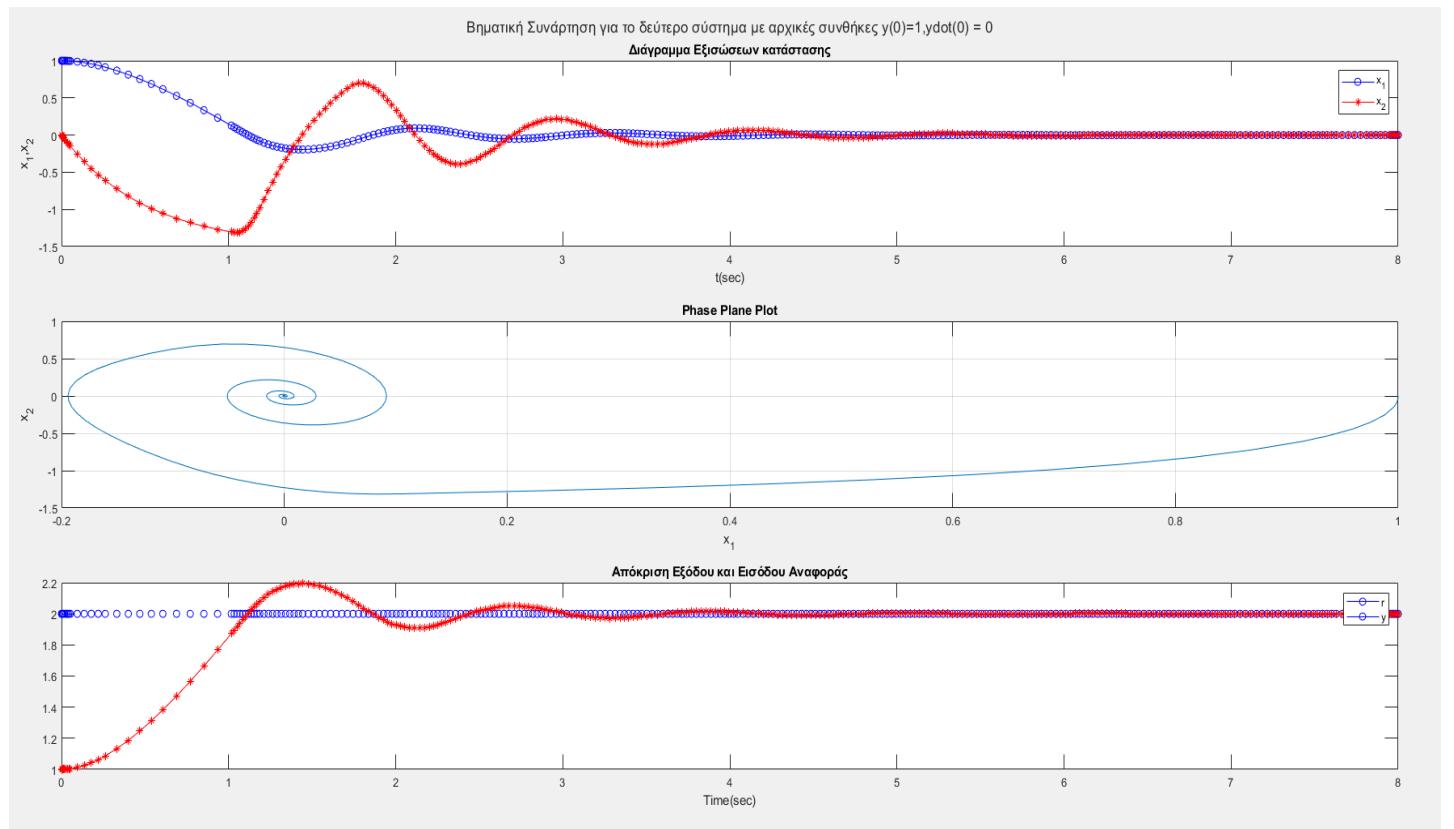
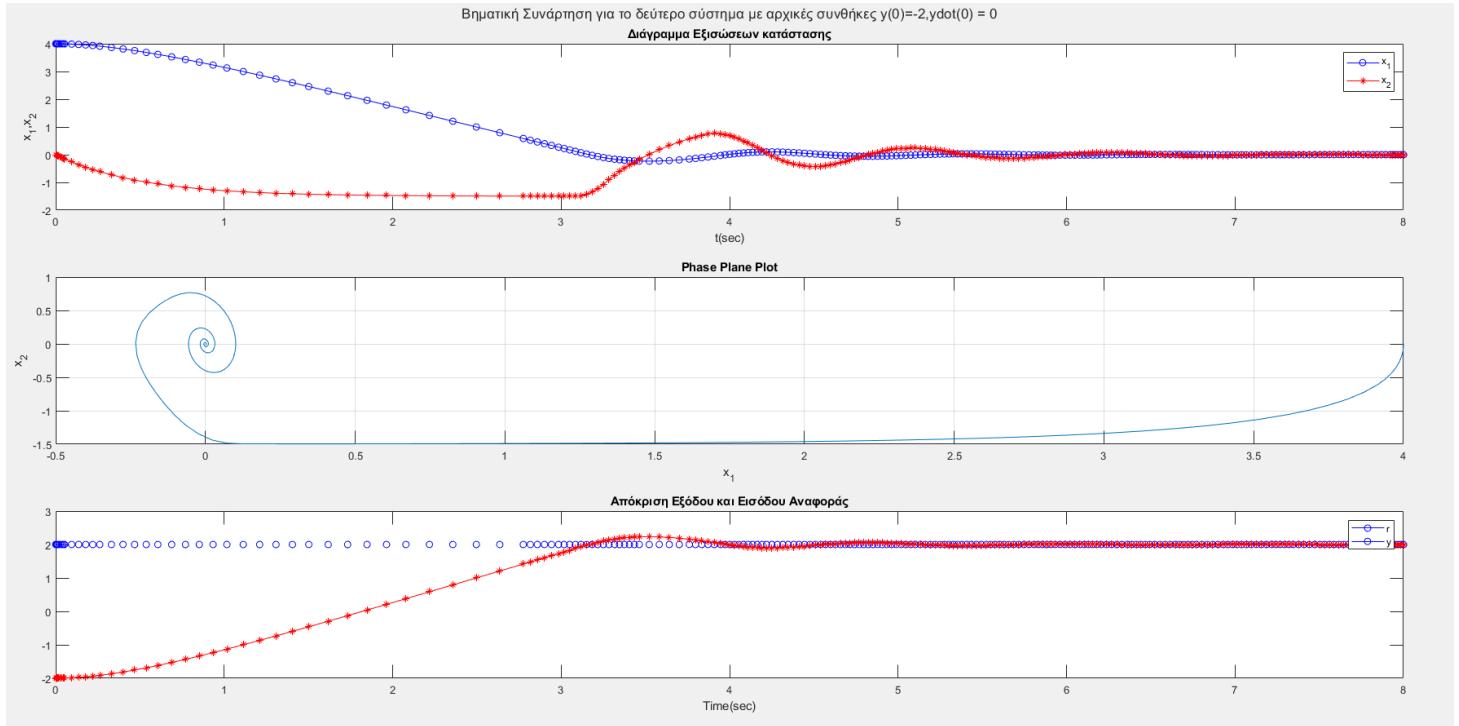
Άρα οι εξισώσεις κατάστασης του συστήματος θεωρώντας ως φασικές μεταβλητές το σφάλμα και την παράγωγο του θα είναι:

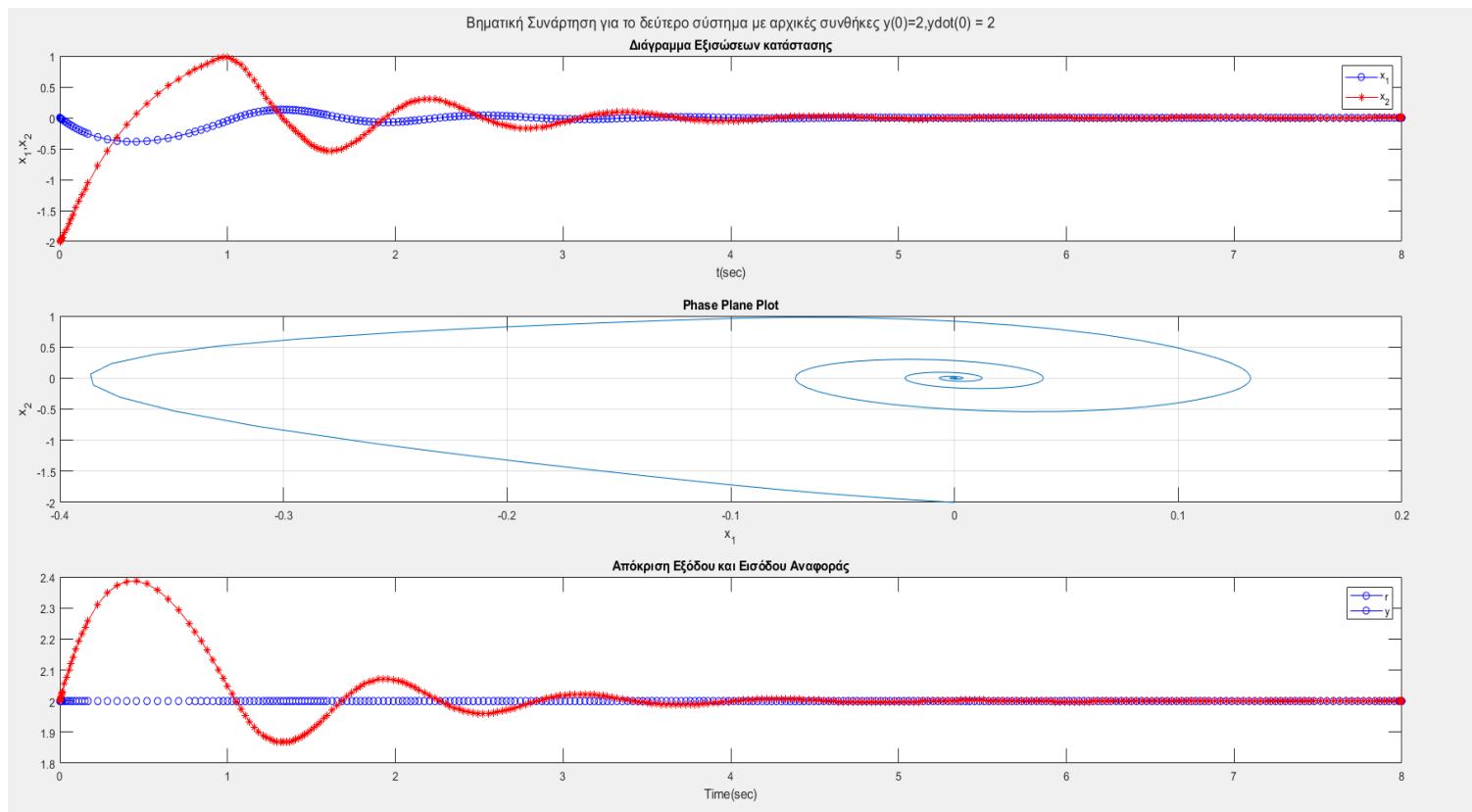
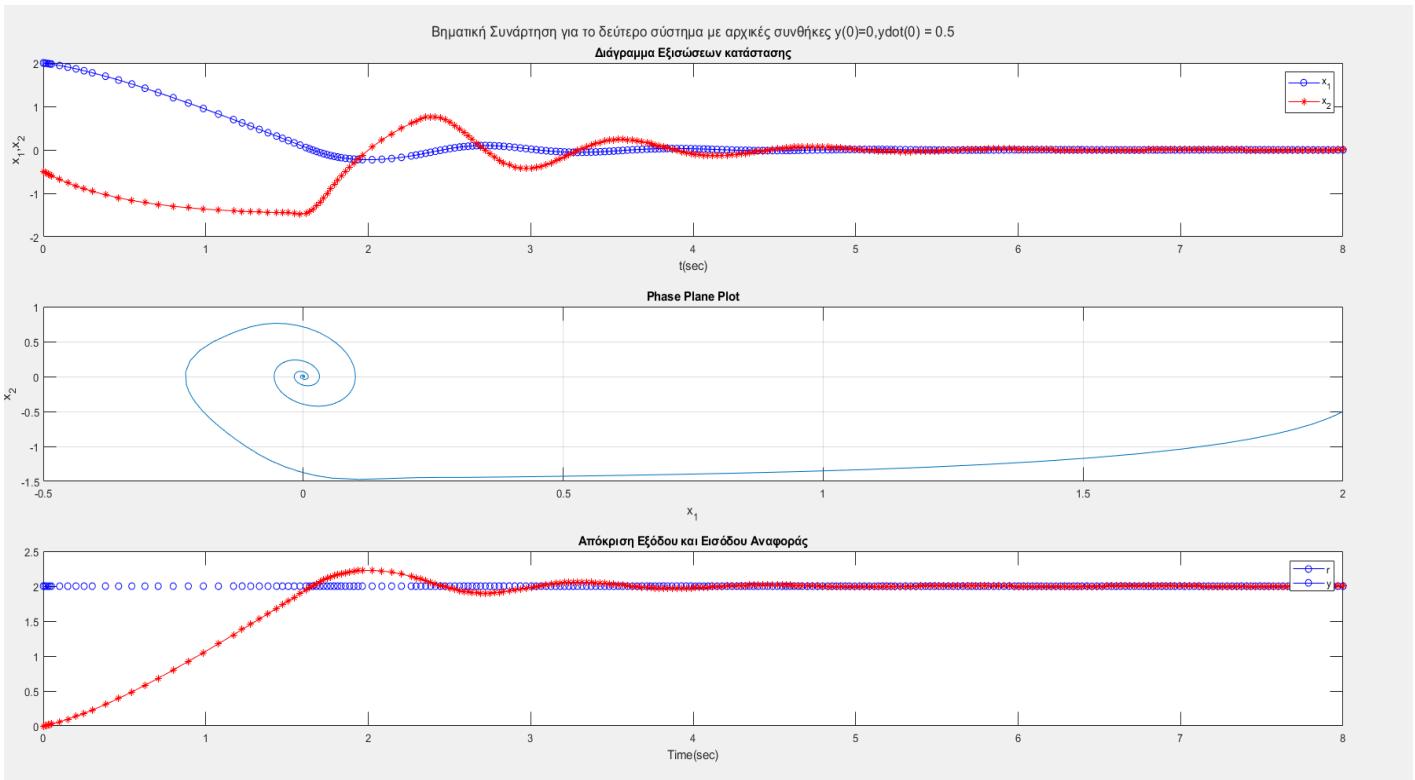
$$\begin{cases} x_1 = e(t) \\ x_2 = \dot{e}(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{r}(t) + \frac{1}{T} \dot{r}(t) - \frac{1}{T} x_2 - \frac{K}{T} u_0 sat(\frac{x_1}{e_0}) \end{cases}$$

- ii. Για βηματική είσοδο πλάτους A , $r(t) = A * u(t)$ τότε $\dot{r}(t) = \ddot{r}(t) = \mathbf{0}$ τα σημεία ισορροπίας του συστήματος που θα προκύψουν θα είναι θέτοντας τις παραγώγους των καταστάσεων $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \mathbf{0}$ το $(0,0)$

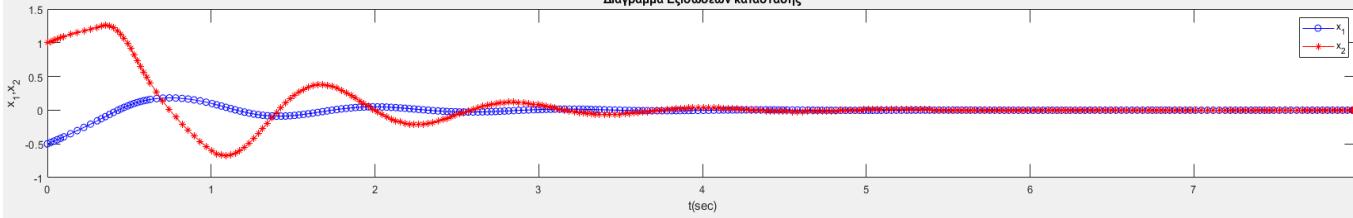
Ενώ για είσοδο ράμπας κλίσης B , $r(t) = B t u(t)$ τότε $\dot{r}(t) = B, \ddot{r}(t) = \mathbf{0}$, τα σημεία ισορροπίας που θα προκύψουν θα είναι τα $x_e = (\frac{B e_0}{K u_0}, \mathbf{0})$ τα οποία εξαρτώνται από τις τιμές των παραμέτρων και προφανώς μπορεί και να είναι ασταθή ή άπειρα ή και μπορεί να μην υπάρχει καν σημείο ισορροπίας για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων το οποίο όπως θα δούμε επαληθεύεται στην συνέχεια μέσω των προσομοιώσεων.

- iii. Παρακάτω ακολουθεί η προσομοίωση και τα ζητούμενα διαγράμματα για είσοδο βηματική συνάρτηση $r(t) = 2u(t)$ με την σειρά με την οποία μας δίνονται οι αρχικές συνθήκες στην εκφώνηση

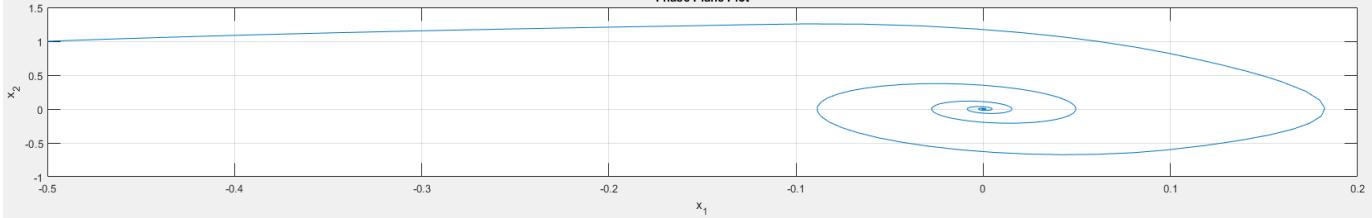




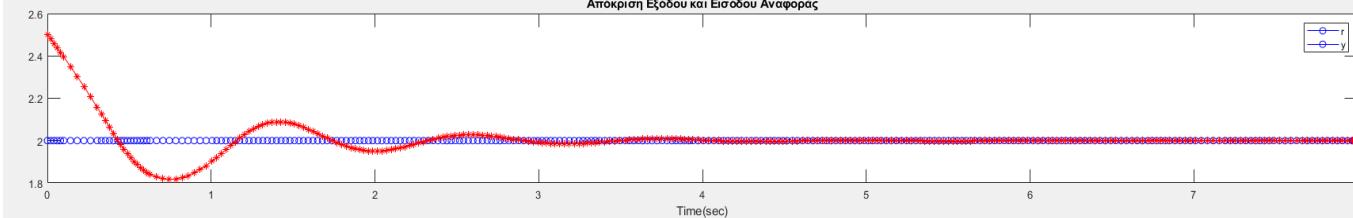
Βηματική Συνάρτηση για το δεύτερο σύστημα με αρχικές συνθήκες $y(0)=2.5, ydot(0)=-1$
Διάγραμμα Εξισώσεων κατάστασης



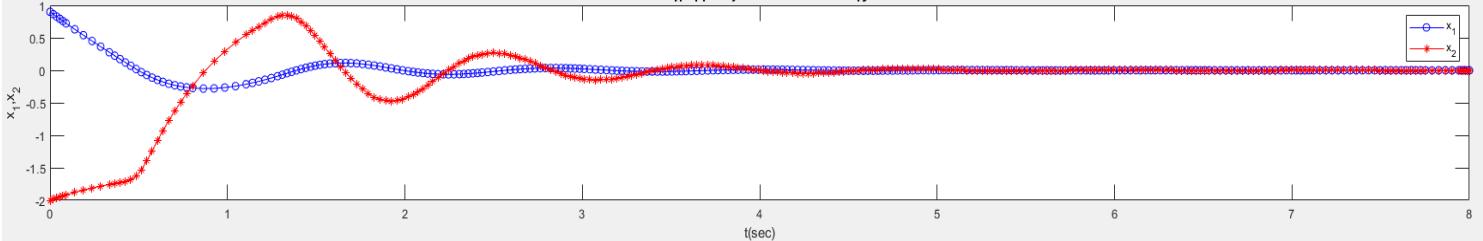
Phase Plane Plot



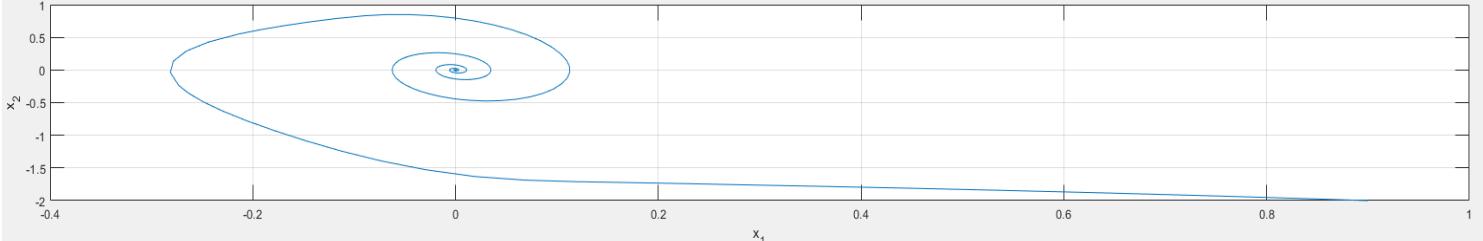
Απόκριση Εξόδου και Εισόδου Αναφοράς



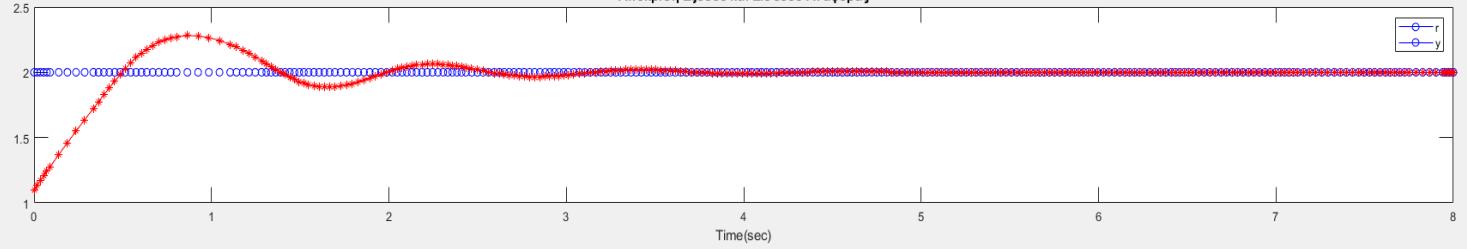
Βηματική Συνάρτηση για το δεύτερο σύστημα με αρχικές συνθήκες $y(0)=1.1, ydot(0)=2$
Διάγραμμα Εξισώσεων κατάστασης



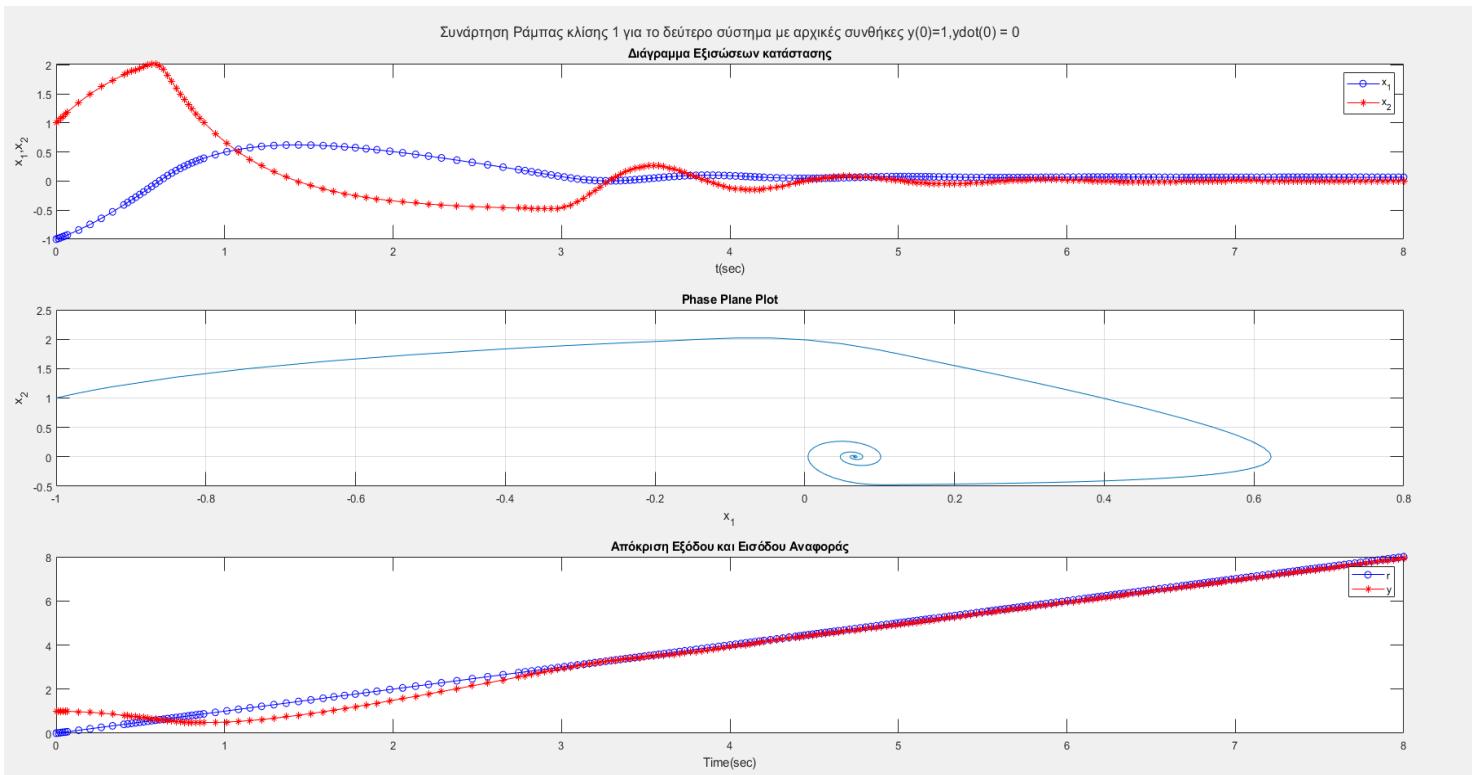
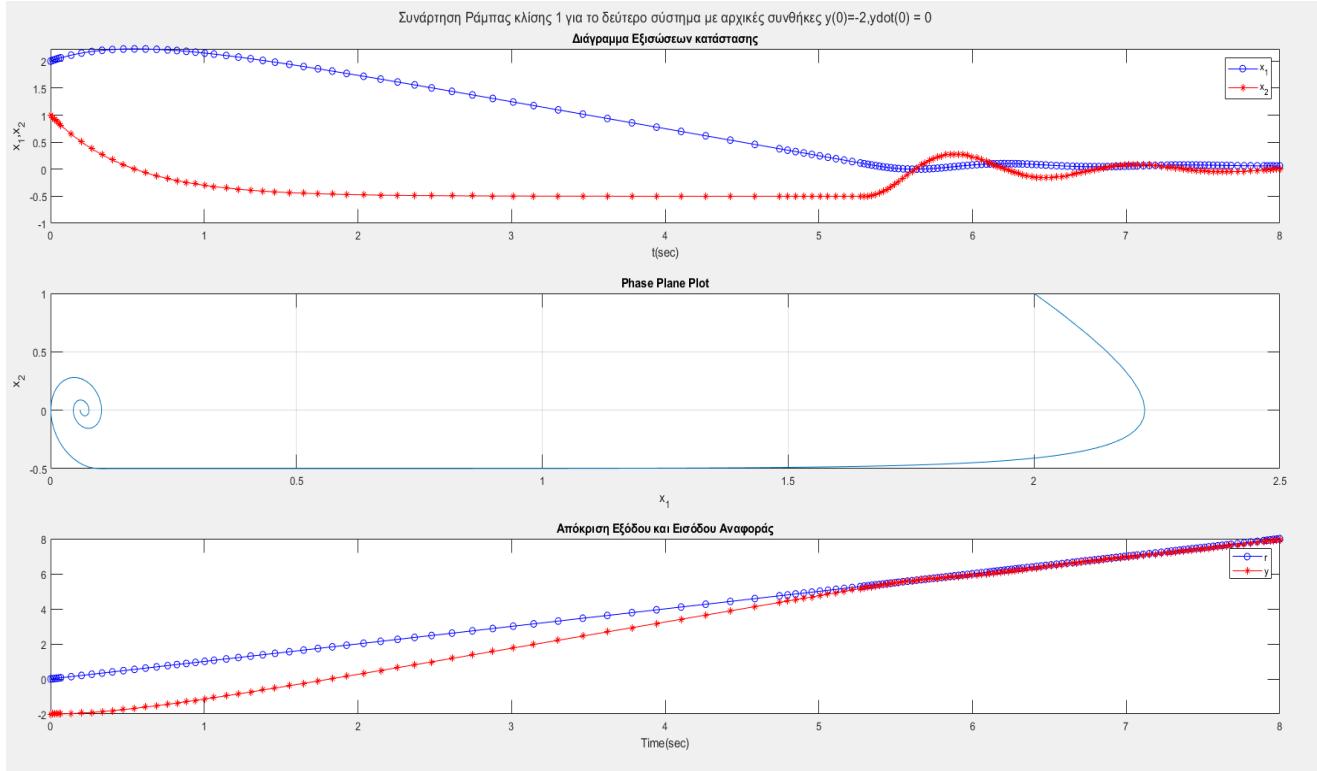
Phase Plane Plot

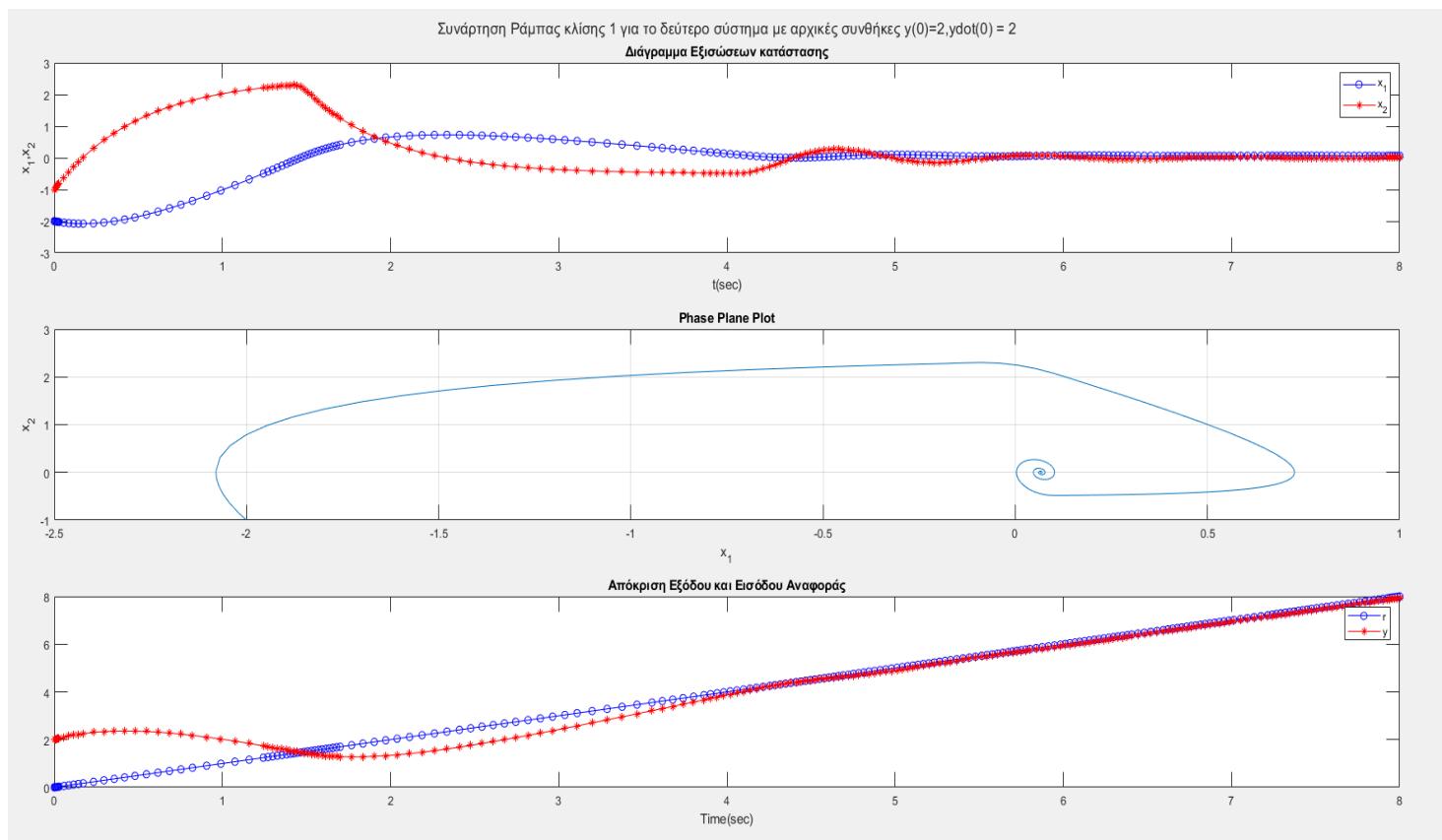
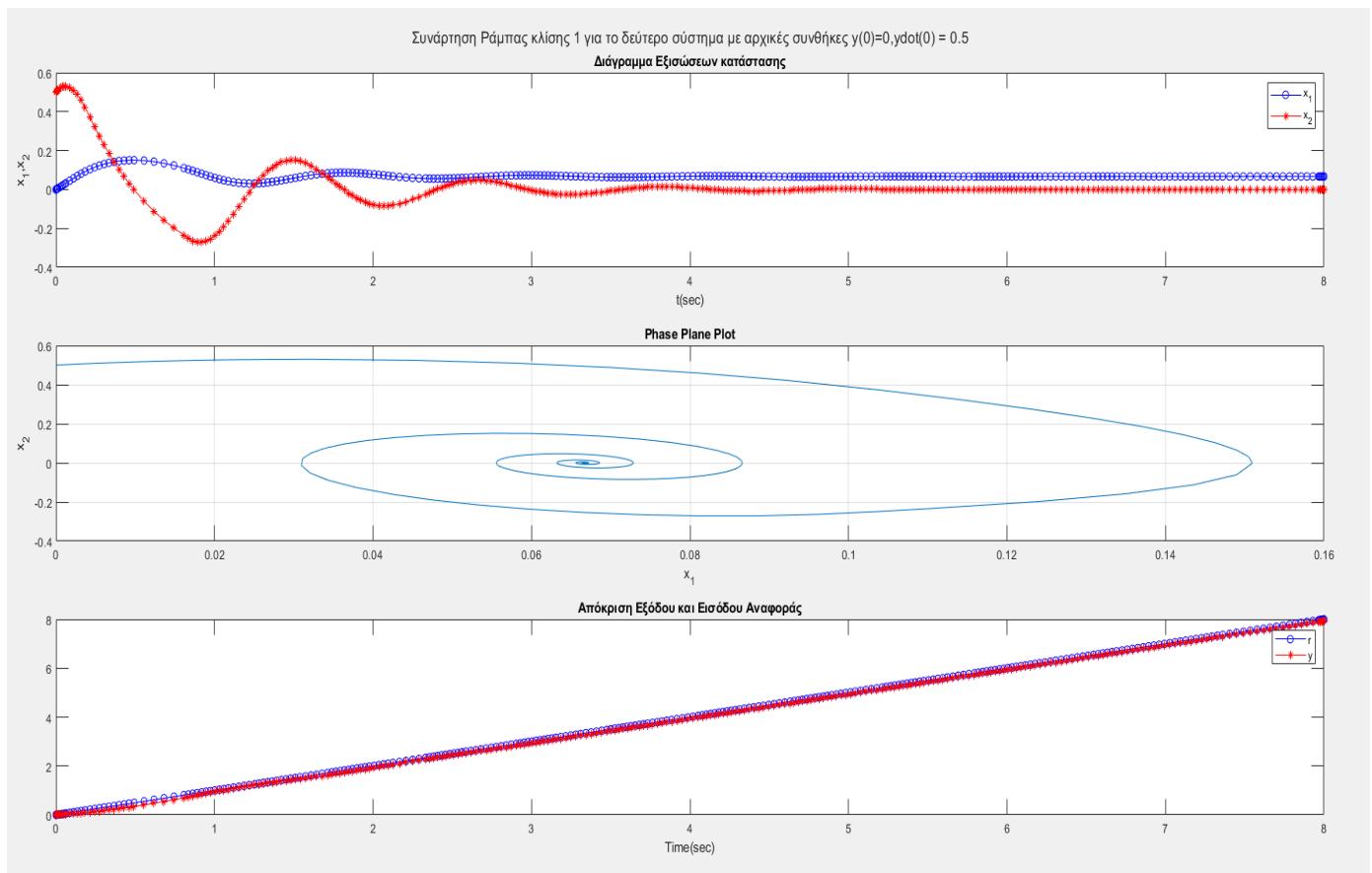


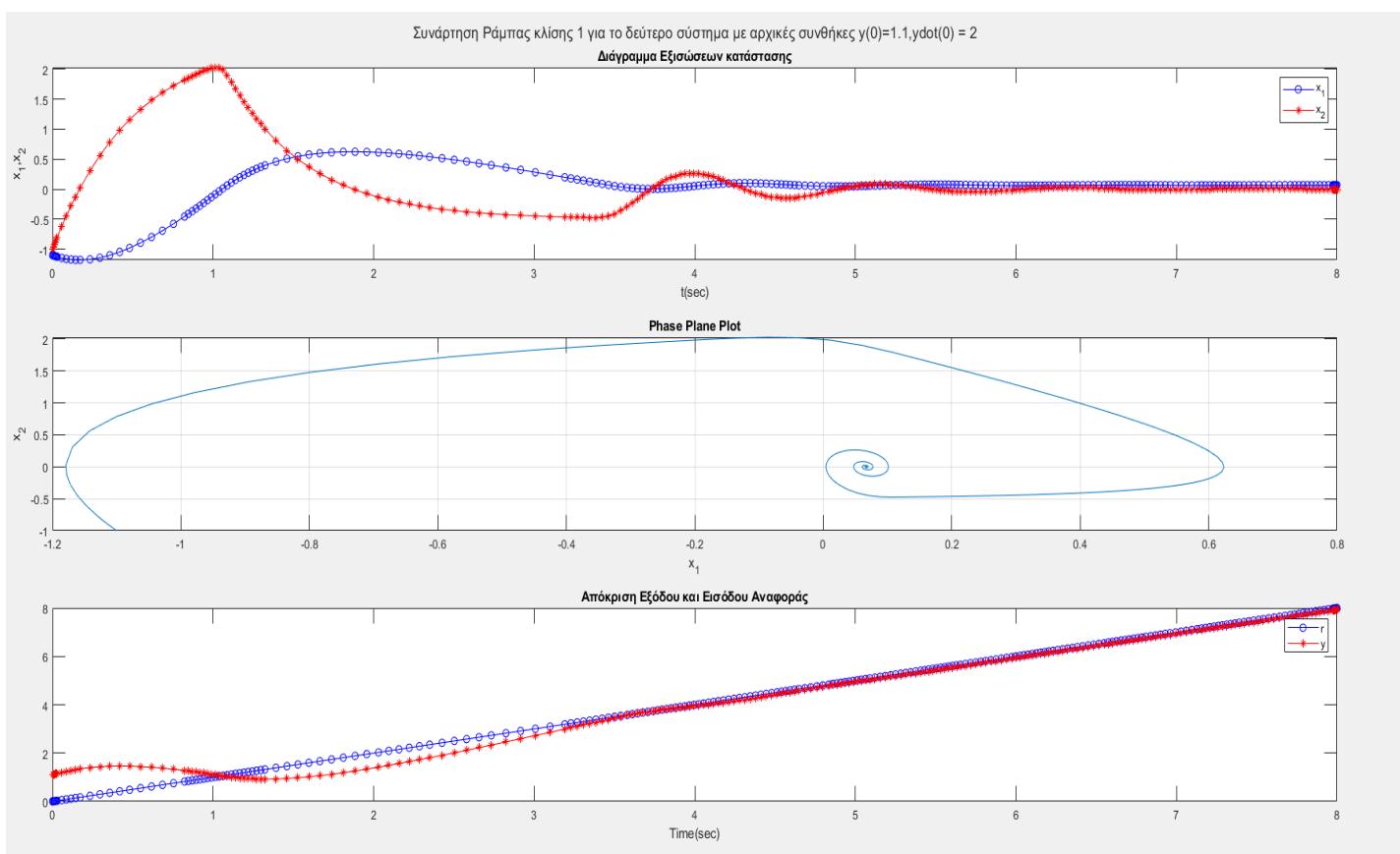
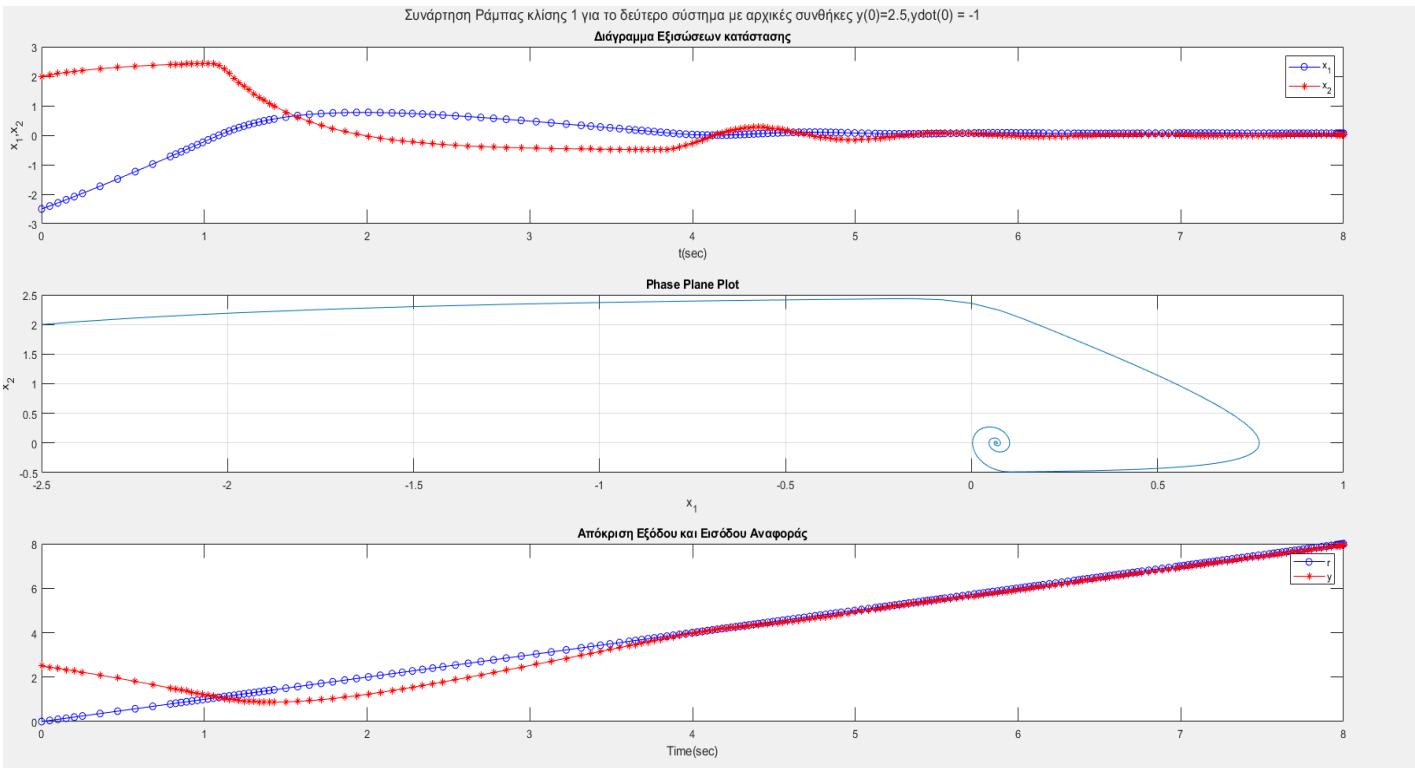
Απόκριση Εξόδου και Εισόδου Αναφοράς



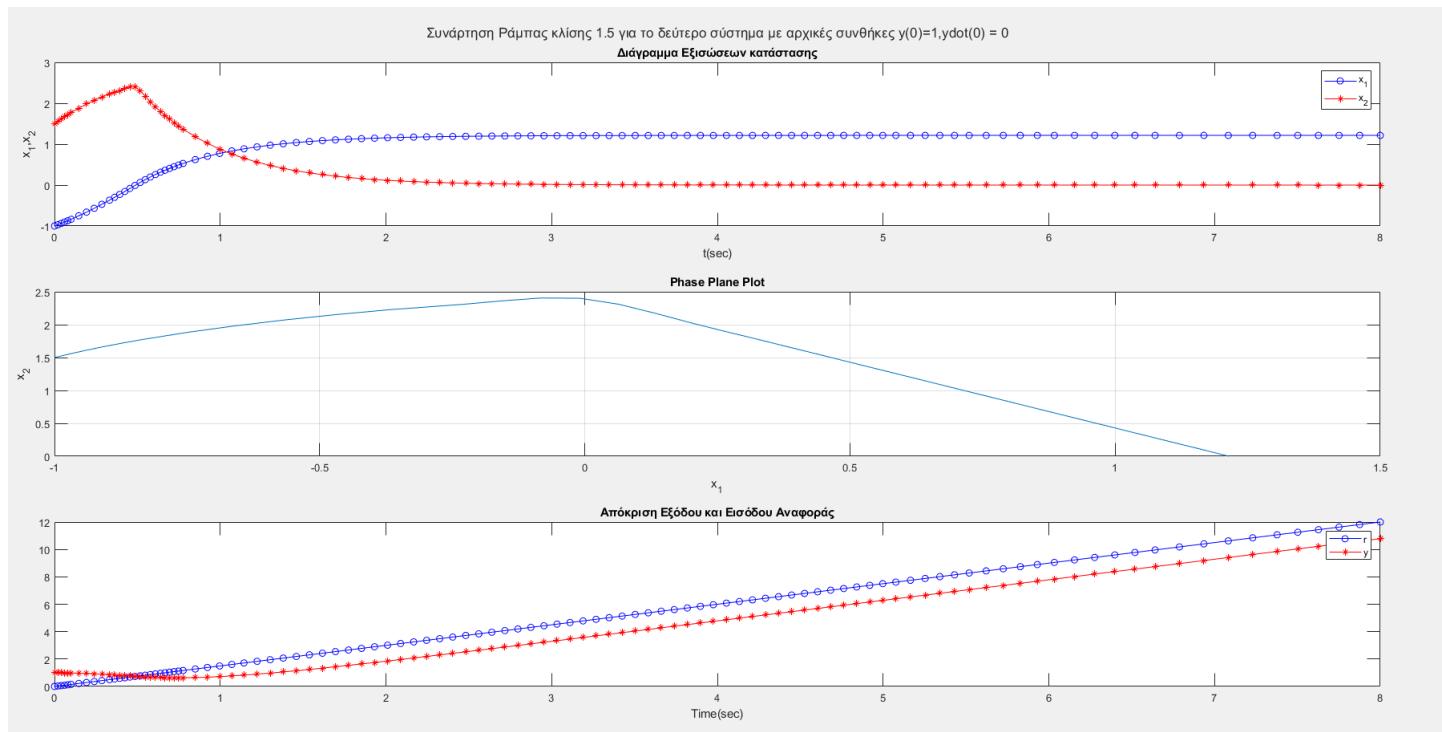
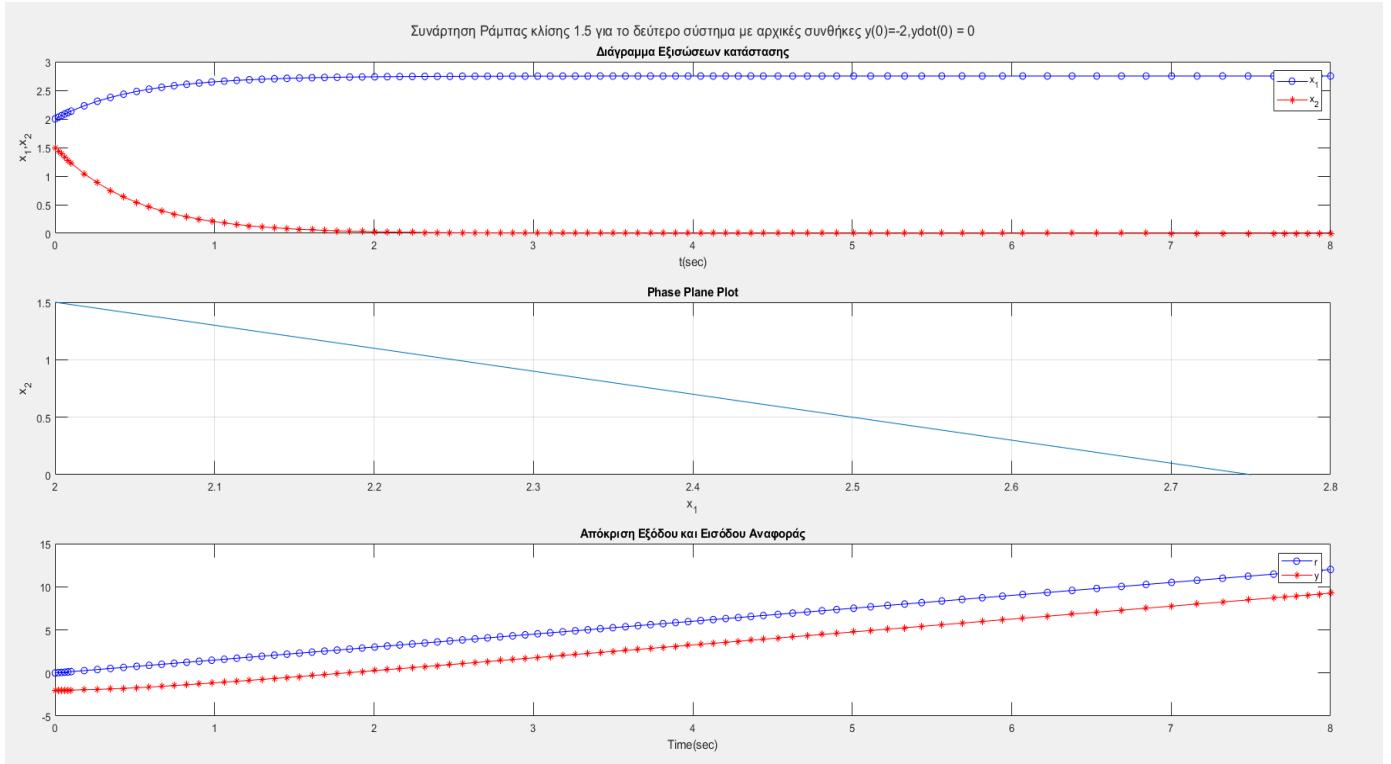
Στην συνέχεια φαίνονται τα ζητούμενα διαγράμματα για είσοδο την συνάρτηση ράμπας $r(t) = tu(t)$ με την σειρά με την οποία μας δίνονται οι αρχικές συνθήκες στην εκφώνηση:

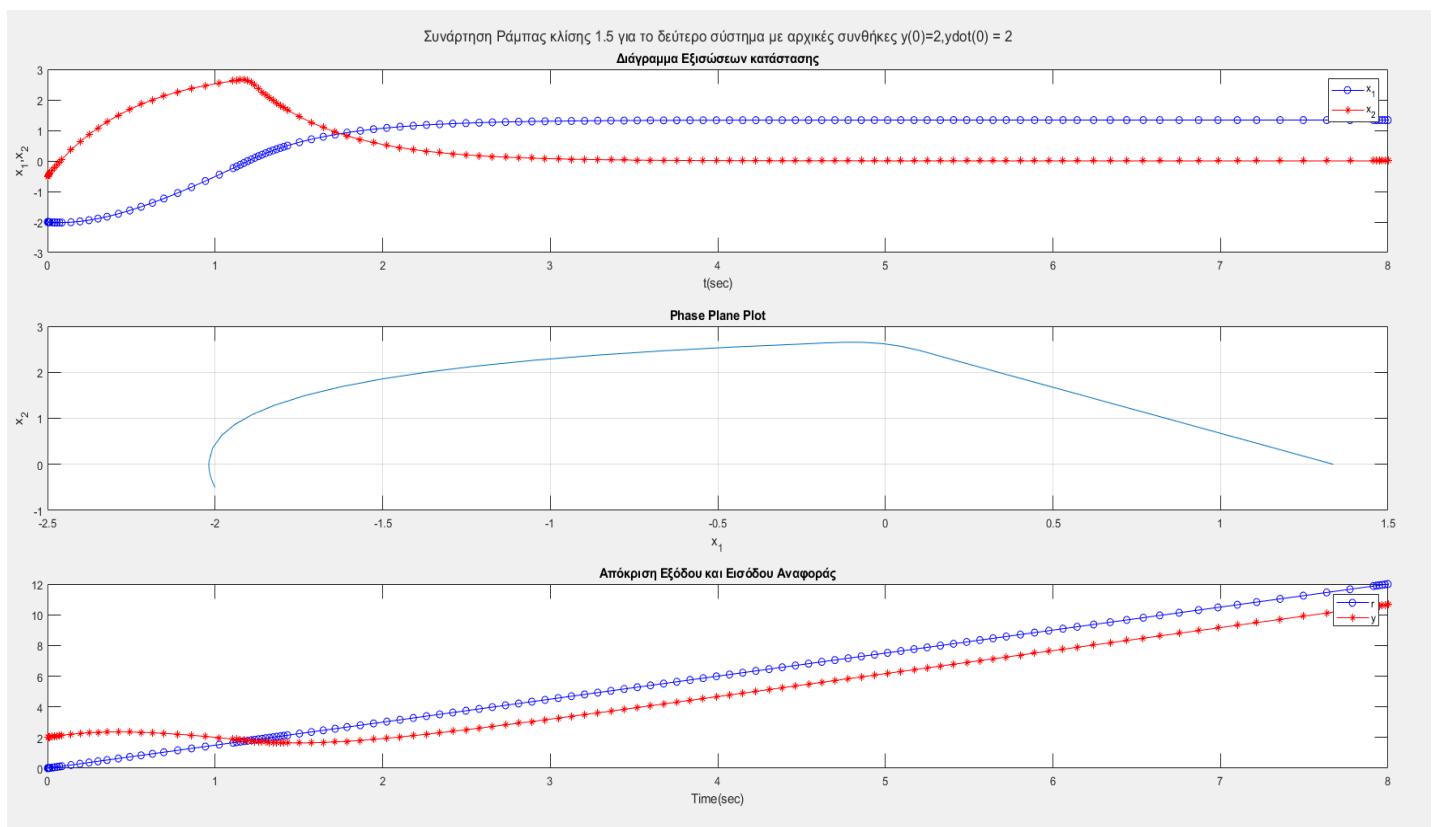
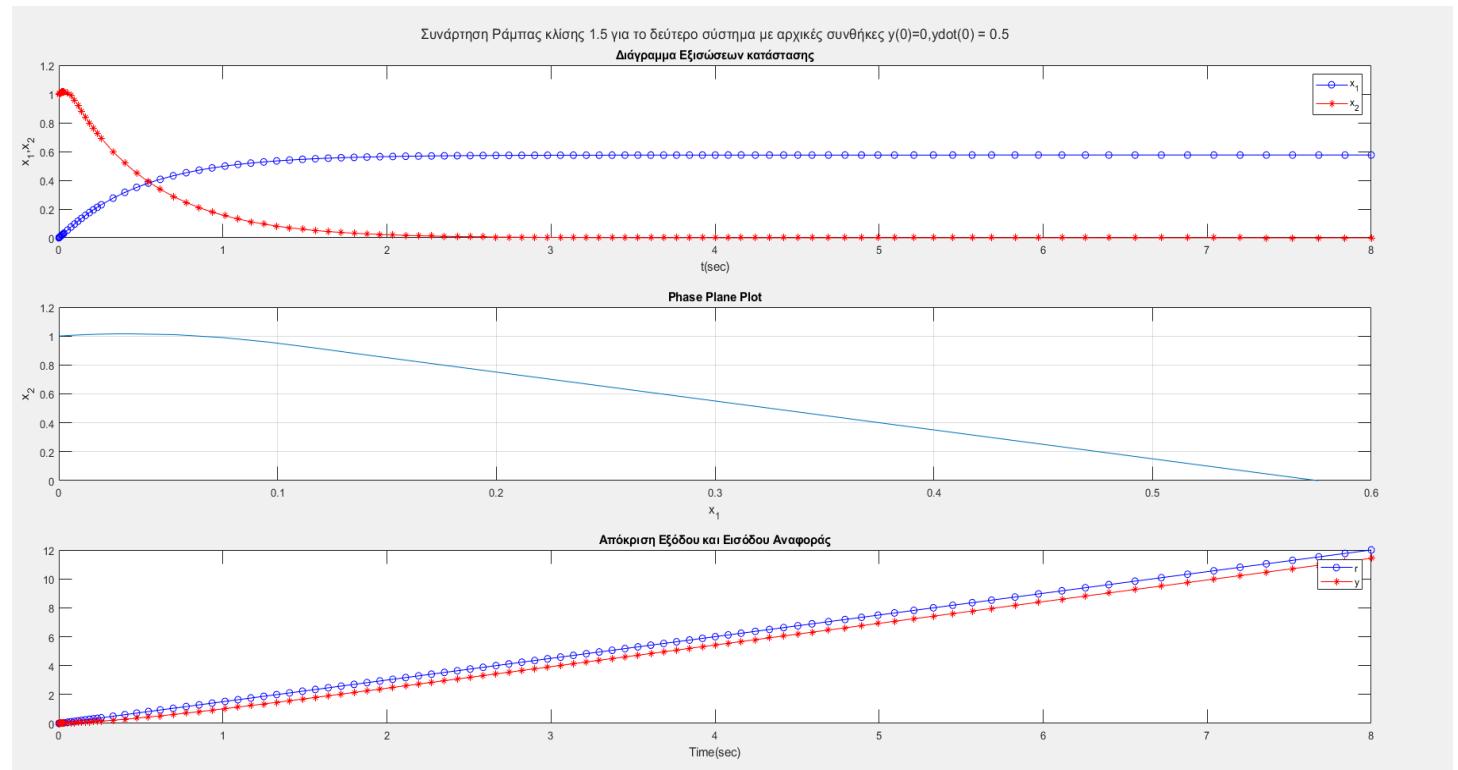


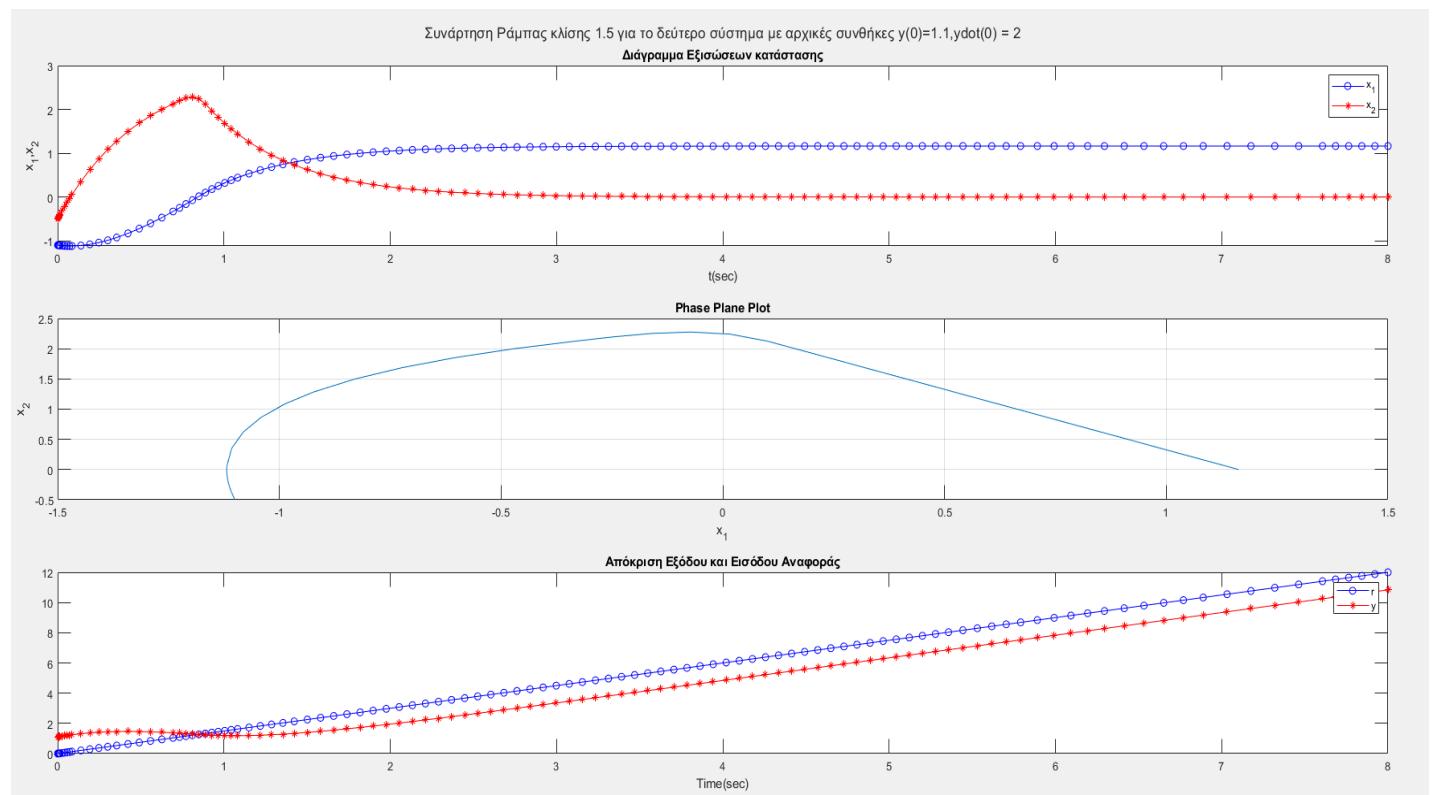
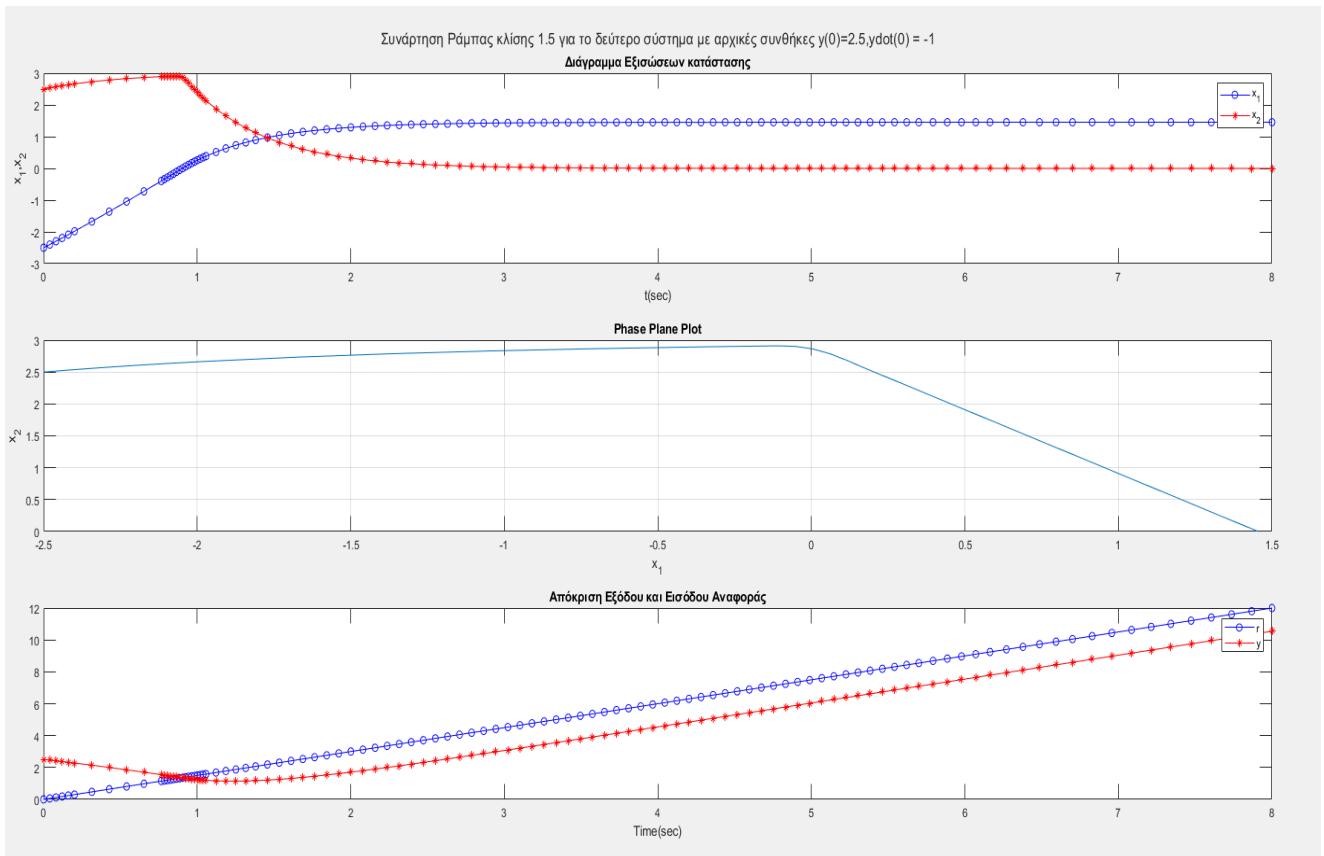




Στην συνέχεια φαίνονται τα ζητούμενα διαγράμματα για είσοδο την συνάρτηση ράμπας $r(t) = 1.5tu(t)$ με την σειρά με την οποία μας δίνονται οι αρχικές συνθήκες στην εκφώνηση:

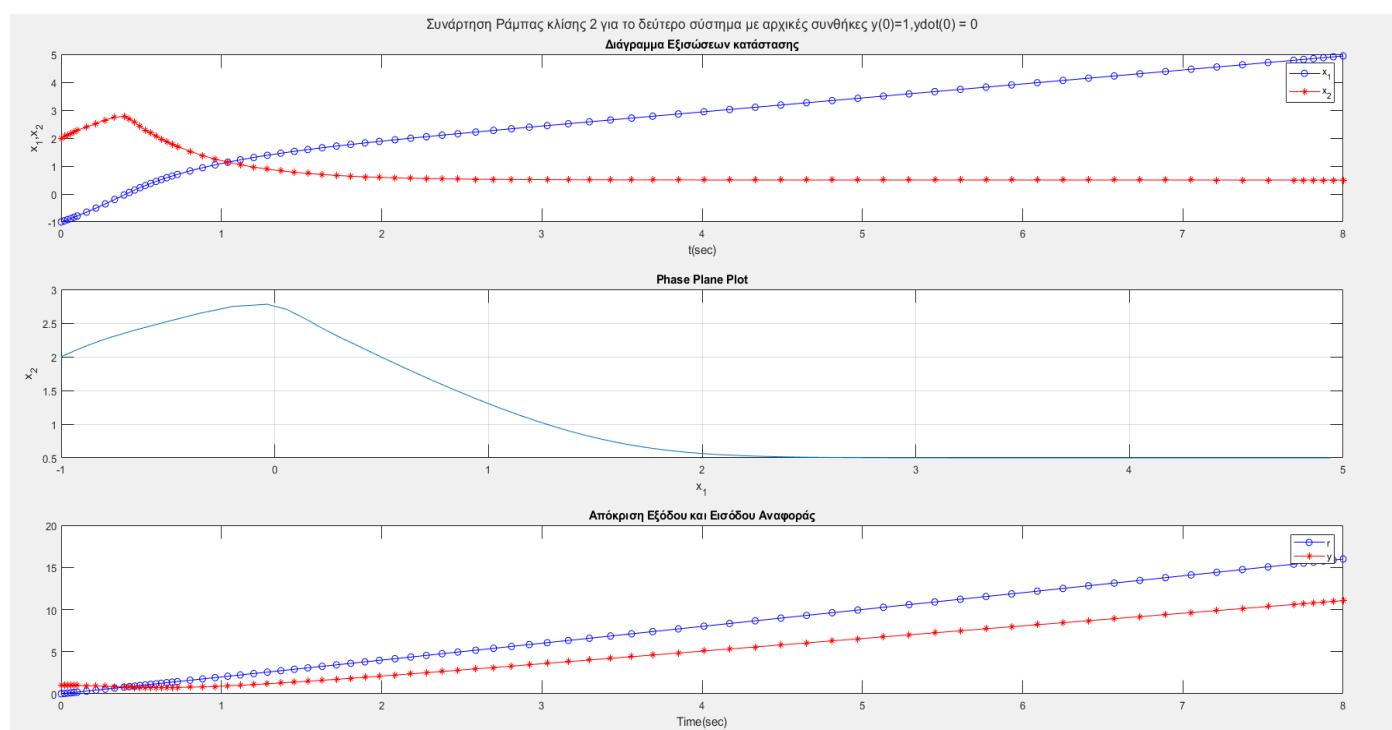
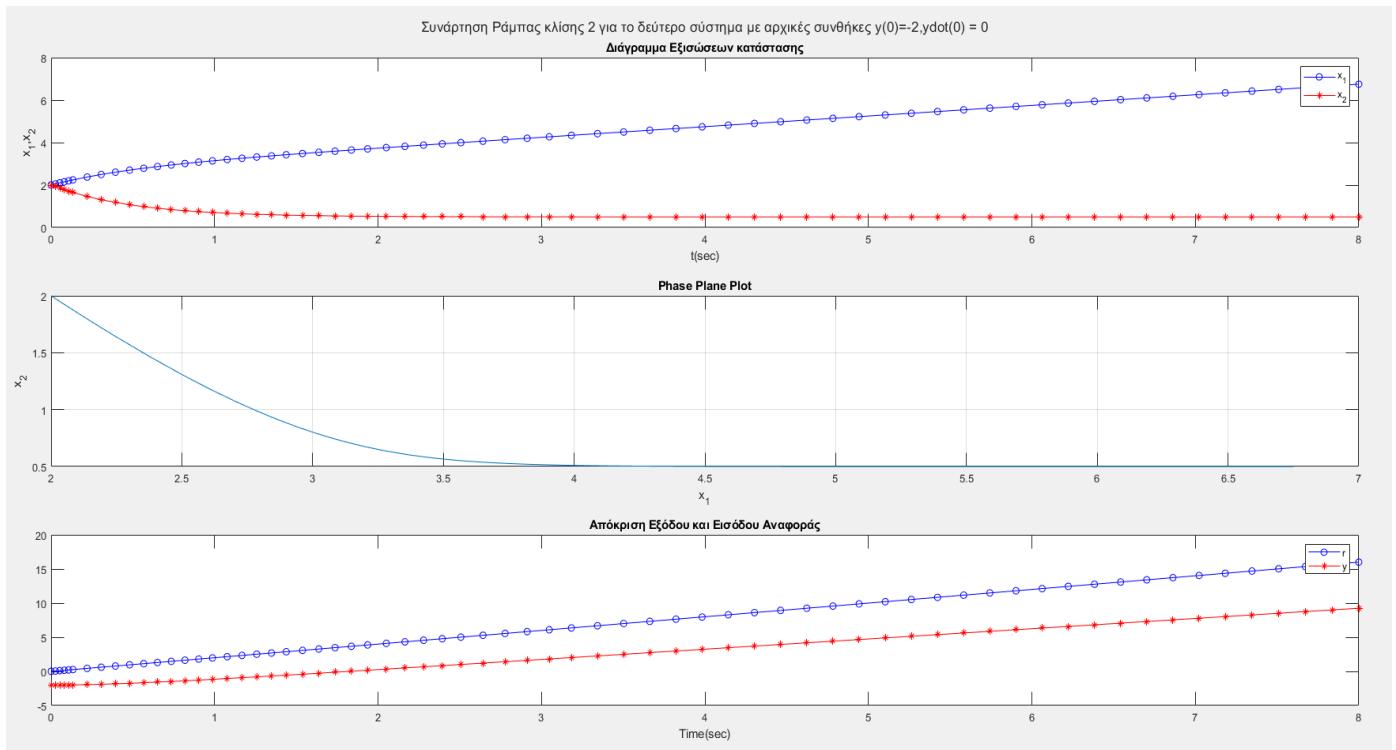


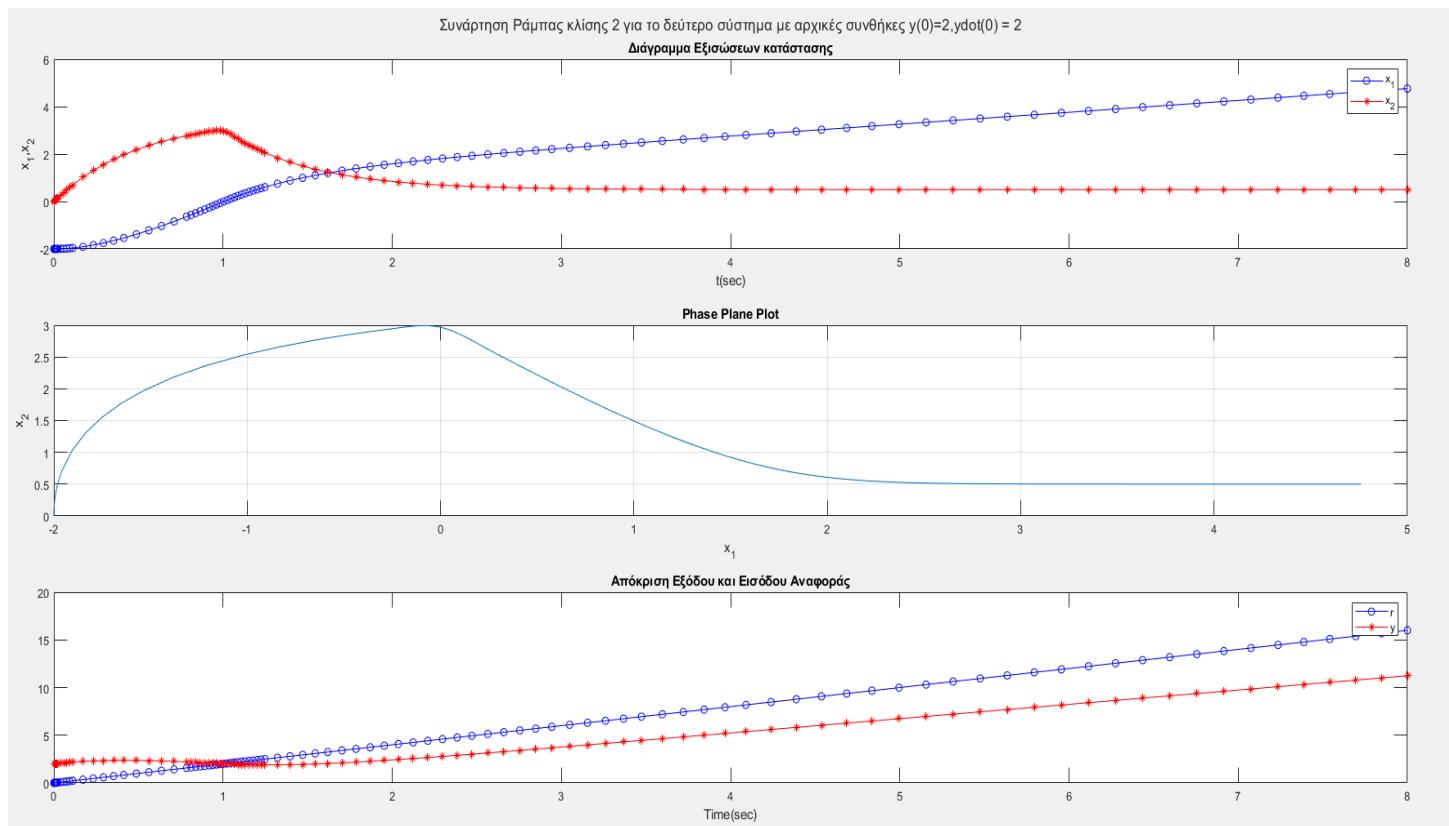
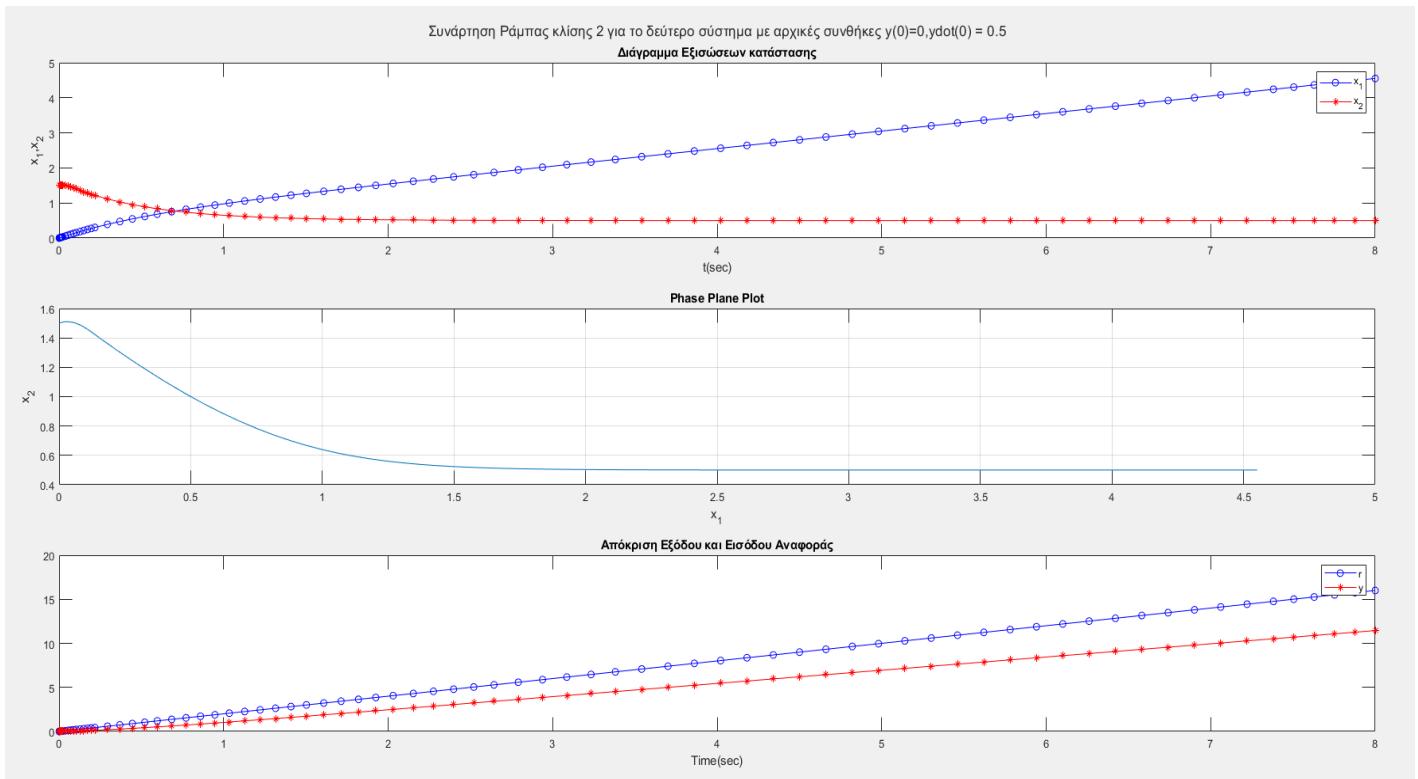


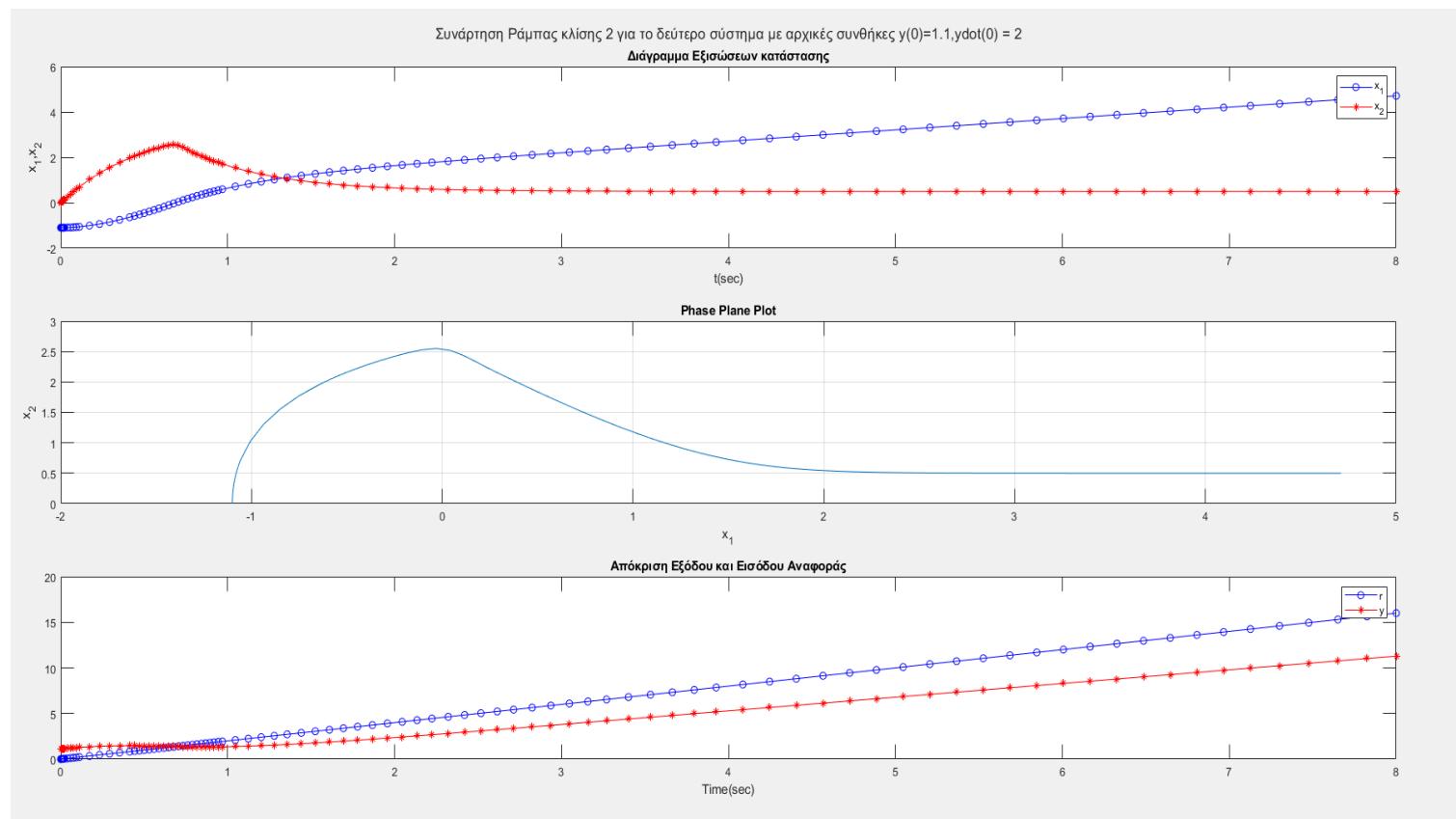
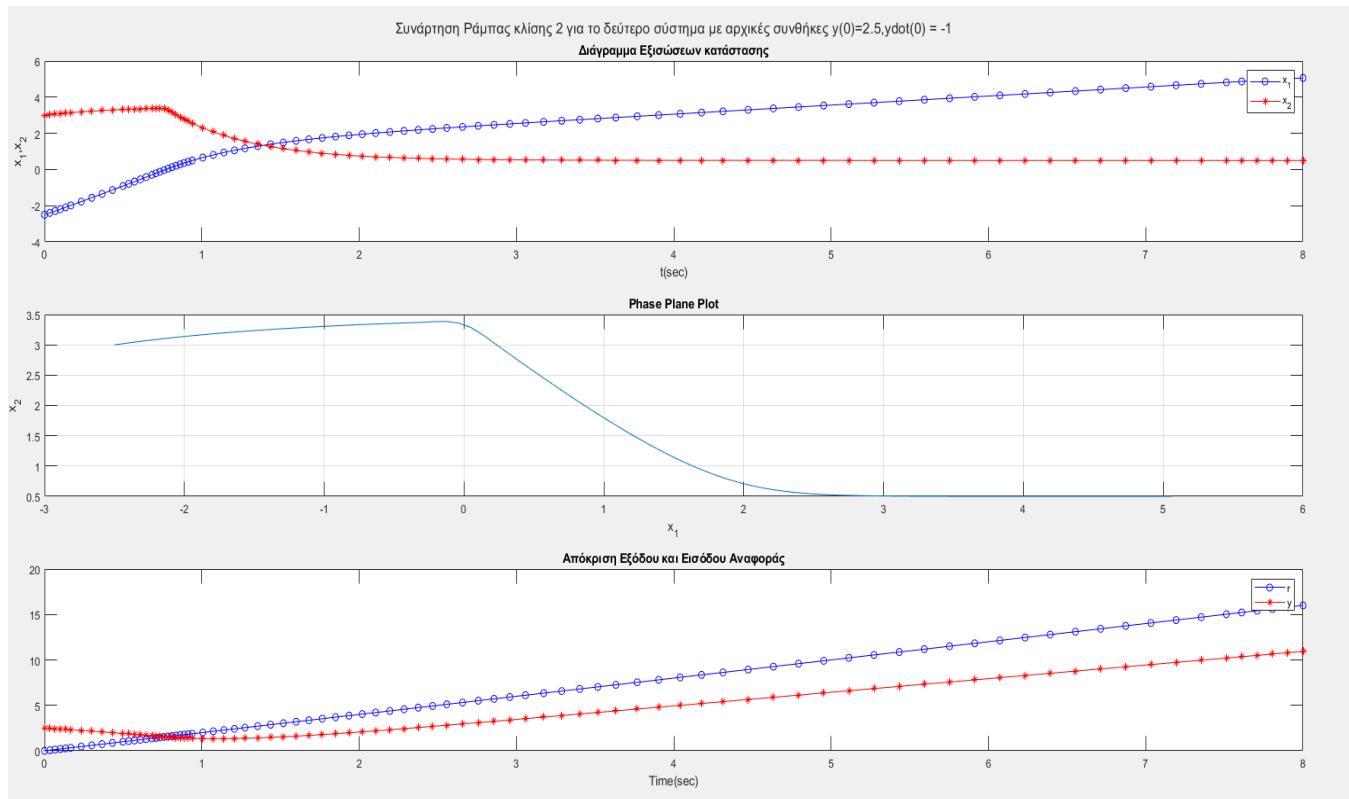


Από τα παραπάνω γραφήματα γίνεται φανερό ότι δεν έχουμε σύγκλιση σε κάποιο συγκεκριμένο σημείο ισορροπίας και αυτό διότι τα σημεία ισορροπίας μας στην συγκεκριμένη περίπτωση είναι όλα τα $x_1 > 0$. Τα σημεία προκύπτει από τον προσδιορισμό των σημείων ισορροπίας του συστήματος μηδενίζοντας τις παραγώγους των καταστάσεων. Επομένως τα αποτελέσματα που φαίνονται στα παραπάνω γραφήματα είναι αναμενόμενα.

Στην συνέχεια φαίνονται τα ζητούμενα διαγράμματα για είσοδο την συνάρτηση ράμπας $r(t) = 2tu(t)$ με την σειρά με την οποία μας δίνονται οι αρχικές συνθήκες στην εκφώνηση:







Από τα παραπάνω γραφήματα γίνεται φανερό ότι το σύστημα μας δεν συγκλίνει για αυτή την είσοδο αναφοράς σε κανένα σημείο ισορροπίας πράγμα που φαίνεται και άμα προσπαθήσουμε να βρούμε ένα σημείο ισορροπίας μηδενίζοντας τις παραγώγους των εξισώσεων κατάστασης αφού θα προκύψει

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ sat\left(\frac{x_1}{0.1}\right) = 2 \end{cases} \text{ΔΥΝΑΤΟ!!!}$$

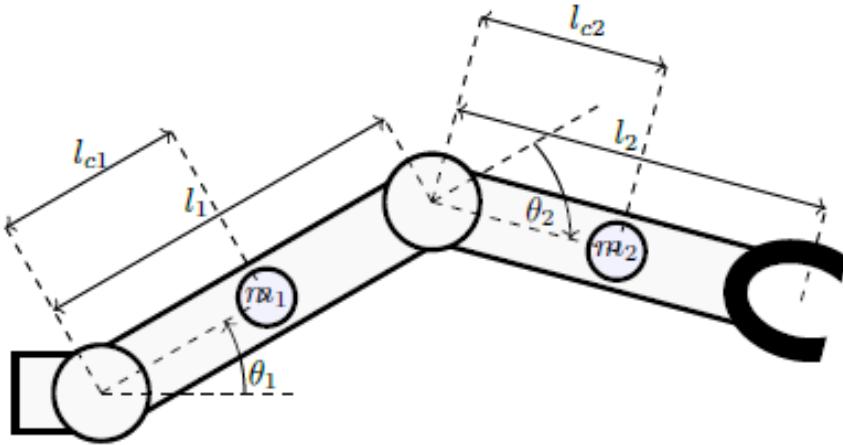
Άρα για αυτό τον λόγο το σύστημα δεν συγκλίνει σε κανένα σημείο ισορροπίας καθότι δεν υπάρχει κιόλας κάποιο σημείο έτσι ώστε να συγκλίνει σε αυτό οπότε σε αυτή την περίπτωση το σύστημα μας θα είναι ασταθές

Παρατηρώ ότι με το δεύτερο σύστημα λόγω της ύπαρξης της συνάρτησης κορεσμού η οποία έχει την ιδιότητα της διακοπτικής λειτουργίας, έχουμε πιο απότομη σύγκλιση στο σημείο ισορροπίας από ότι έχουμε στην περίπτωση όπου $N(s) = 1$. Συνεπώς, παρατηρούμε ότι η μη-γραμμικότητα συμβάλλει και βοηθάει στην ταχύτερη σύγκλιση των μεταβλητών κατάστασης στο επιθυμητό σημείο ισορροπίας.

Για την παραγωγή όλων των παραπάνω γραφημάτων μπορείτε να εκτελέσετε το **main.m** το οποίο θα δώσει **36 figures** που ζητούνται στην εκφώνηση.

Τμήμα Β

Άσκηση 1)



$$H(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + g(q) = u, \quad u \in \mathbb{R}^2$$

- i. Για ευκολία των πράξεων και της παρακάτω ανάλυσης θέτω $a_1 = m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1^2 + I_1 + I_2$, $a_2 = m_2 l_{c2}^2 + I_2$, $a_3 = m_2 l_1 l_{c2}$ και $a_4 = (m_2 l_1 + m_1 l_{c1})g$. Επομένως :

$$H(q) = \begin{bmatrix} a_1 + 2a_3 \cos q_2 & a_2 + a_3 \cos q_2 \\ a_2 + a_3 \cos q_2 & a_2 \end{bmatrix}$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -a_3 \sin q_2 & -a_3 \sin q_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ a_3 \sin q_2 \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$g(q) = \begin{bmatrix} a_3 \frac{g}{l} \cos(q_1 + q_2) + a_4 \cos q_1 \\ a_3 \frac{g}{l} \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

Συνεπώς:

$$\begin{aligned} & H(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + g(q) \\ &= \begin{bmatrix} a_1 \ddot{q}_1 + a_2 \ddot{q}_2 + a_3 \{(2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) \cos q_2 - (2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) \sin q_2 + \frac{g}{l} \cos(q_1 + q_2)\} + a_4 \cos(q_1 + q_2) \\ a_2(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + a_3(\ddot{q}_1 \cos q_1 + \dot{q}_1^2 \sin q_2 + \frac{g}{l} \cos(q_1 + q_2)) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Άρα τελικά

$$Y_{11} = \ddot{q}_1$$

$$Y_{12} = \ddot{q}_2 \quad Y_{13} = (2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) \cos q_2 - (2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) \sin q_2 + \frac{g}{l} \cos(q_1 + q_2)$$

$$Y_{14} = \cos(q_1) \quad Y_{21} = \mathbf{0} \quad Y_{22} = \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2,$$

$$Y_{23} = \dot{q}_1 \cos q_2 + \dot{q}_1^2 \sin q_2 + \frac{g}{l} \cos(q_1 + q_2)$$

$$Y_{24} = \mathbf{0}$$

Οπότε τώρα το σύστημα γράφεται $Y(\ddot{q}, \dot{q}, q) \Theta = u$ όπου $\Theta = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix}$ και

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} \end{bmatrix} \text{ με τα στοιχεία που αναφέραμε πιο πάνω}$$

ii. Θέλουμε το σφάλμα παρακολούθησης της επιθυμητής τροχιάς δηλαδή: $\tilde{q} = q - q_d$ να τείνει στο μηδέν έτσι ώστε να παρακολουθεί το σύστημά μας την επιθυμητή τροχιά. Ορίζουμε μια νέα τροχιά αναφοράς $q_r = \dot{q}_d - \Lambda \tilde{q}$ και άρα $\dot{q}_r = \ddot{q}_d - \Lambda \ddot{q}$. Οπότε φτιάχναμε την είσοδο ελέγχου βασισμένη στο μοντέλο. Άρα δηλαδή $u = Y(\dot{q}_r, q_r, q) \widehat{\Theta} - Ks$. Όπου $K = K^T > \mathbf{0}$ πίνακας, $s = \tilde{q} + \Lambda \tilde{q} = \dot{q} - q_r$ η επιφάνεια ολίσθησης του σφάλματος με την οποία θα εξασφαλίσουμε ότι το σφάλμα του συστήματος παρακολούθησης πηγαίνει στο $\mathbf{0}$. Επίσης $\widehat{\Theta}$ θα είναι οι εκτιμήσεις των αγνώστων παραμέτρων $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ και $Y(\dot{q}_r, q_r, q) \widehat{\Theta}$ θα είναι κατάλληλος πίνακας παλινδρόμησης ο οποίος προκύπτει άμα γράψουμε το σύστημα στη μορφή $H(q)\dot{q}_r + Cq_r + g(q) = Y\widehat{\Theta}$ όπου τώρα πλέον τα στοιχεία του Y θα είναι: $Y_{11} = \dot{q}_{r1}, Y_{12} = \dot{q}_{r2}, Y_{13} = (2\dot{q}_{r1} + \dot{q}_{r2}) \cos q_2 - (\dot{q}_2 q_{r1} + \dot{q}_1 q_{r2} + \dot{q}_2 q_{r2}) \sin q_2 + \frac{g}{l_1} \cos(q_1 + q_2), Y_{14} = \cos q_1, Y_{21} = \mathbf{0}, Y_{22} = \dot{q}_{r1} + \dot{q}_{r2},$

$$Y_{23} = \dot{q}_{r1} \cos q_2 + q_{r1} \dot{q}_1 \sin q_2 + \frac{g}{l_1} \cos(q_1 + q_2), \quad Y_{24} = \mathbf{0}$$

Επιπλέον γράφοντας πάλι το σύστημα αλλά αυτή τη φορά με τις προσεγγιστικές τιμές των

αγνώστων παραμέτρων θα έχουμε $\widehat{H}(q)\dot{q}_r + \widehat{C}(q, \dot{q}) + \widehat{g}(q) = Y\widehat{\Theta}$ όπου $\widehat{\Theta} = \begin{bmatrix} \widehat{\alpha}_1 \\ \widehat{\alpha}_2 \\ \widehat{\alpha}_3 \\ \widehat{\alpha}_4 \end{bmatrix}$. Άρα

$$H\ddot{q} + C\dot{q} + g = Y\widehat{\Theta} - Ks \text{ οπότε αφαιρώ και από τα 2 μέλη της εξίσωσης τον όρο } H\dot{q}_r + Cq_r + g \quad \text{Επομένως} \quad H\ddot{q} - H\dot{q}_r + C\dot{q} - Cq_r + g - g = Y\widehat{\Theta} - H\dot{q}_r - Cq_r - g - Ks \Rightarrow H\ddot{s} + Cs = Y\widehat{\Theta} - Y\Theta - Ks \Rightarrow H(q)\ddot{s} + (C(q, \dot{q}) + K)s = Y(\widehat{\Theta} - \Theta) = Y\Delta\Theta$$

Ωστόσο για να αποδείξω ότι το σύστημα θα είναι παθητικό θα χρησιμοποιήσω το αρχικό θεωρώντας γνωστές τις παραμέτρους. Άρα θα έχω $H(q)\ddot{s} + (C(q, \dot{q}) + K)s = \mathbf{0}$ για $u = H\dot{q}_r + Cq_r + g - Ks$. Οπότε $s^T u = s^T(H\ddot{s} + (C + K)s) = s^T M\ddot{s} + s^T Cs + s^T Ks$. Ισχύει επίσης ότι: $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (s^T H s) = \frac{1}{2} (\dot{s}^T M s + s^T \dot{M} s + s^T M \dot{s}) =$

$$= s^T M\ddot{s} + s^T Cs + s^T \left(\frac{1}{2} \dot{H} - C \right) s = s^T M\ddot{s} + s^T Cs \quad \text{Αρα} \quad \int_0^\tau s^T v dt = \left[\frac{1}{2} s^T H s \right] + \int_0^\tau s^T K s dt \Rightarrow \int_0^\tau s^T v dt = \frac{1}{2} s^T H s - \frac{1}{2} s^T (\mathbf{0}) H(\mathbf{0}) s(\mathbf{0}) + \int_0^\tau s^T K s dt \Rightarrow \frac{1}{2} s^T (\mathbf{0}) H(\mathbf{0}) s(\mathbf{0}) + \int_0^\tau s^T v dt = \frac{1}{2} s^T H s + \int_0^\tau s^T K s \geq 0$$

Αφού \mathbf{H} , \mathbf{K} θετικά ορισμένα πίνακες

$$\text{Άρα το σύστημα είναι παθητικό οπότε ισχύει } \mathbf{y}^T \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{W} \cdot \mathbf{A} \mathbf{v} \mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\mathbf{W} \\ \Rightarrow \dot{\mathbf{V}} = -\mathbf{s}^T \mathbf{K} \mathbf{s}$$

$$\text{Οπότε τελικά η Λγαρυπον θα είναι } V = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{H} \mathbf{s}$$

Τώρα όμως που έχω και τις άγνωστες παραμέτρους και το σύστημά μου είναι:

$\mathbf{H}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{s}} + (\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{K})\mathbf{s} = \mathbf{Y}\Delta\boldsymbol{\theta}$. Θα προσθέσω έναν ακόμη όρο Λγαρυπον και άρα θα γίνει: $V = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{H} \mathbf{s} + \frac{1}{2} \Delta\boldsymbol{\theta}^T \Gamma \Delta\boldsymbol{\theta} > 0$, όπου Γ σταθερός συμμετρικός και θετικά οριζόμενος πίνακας

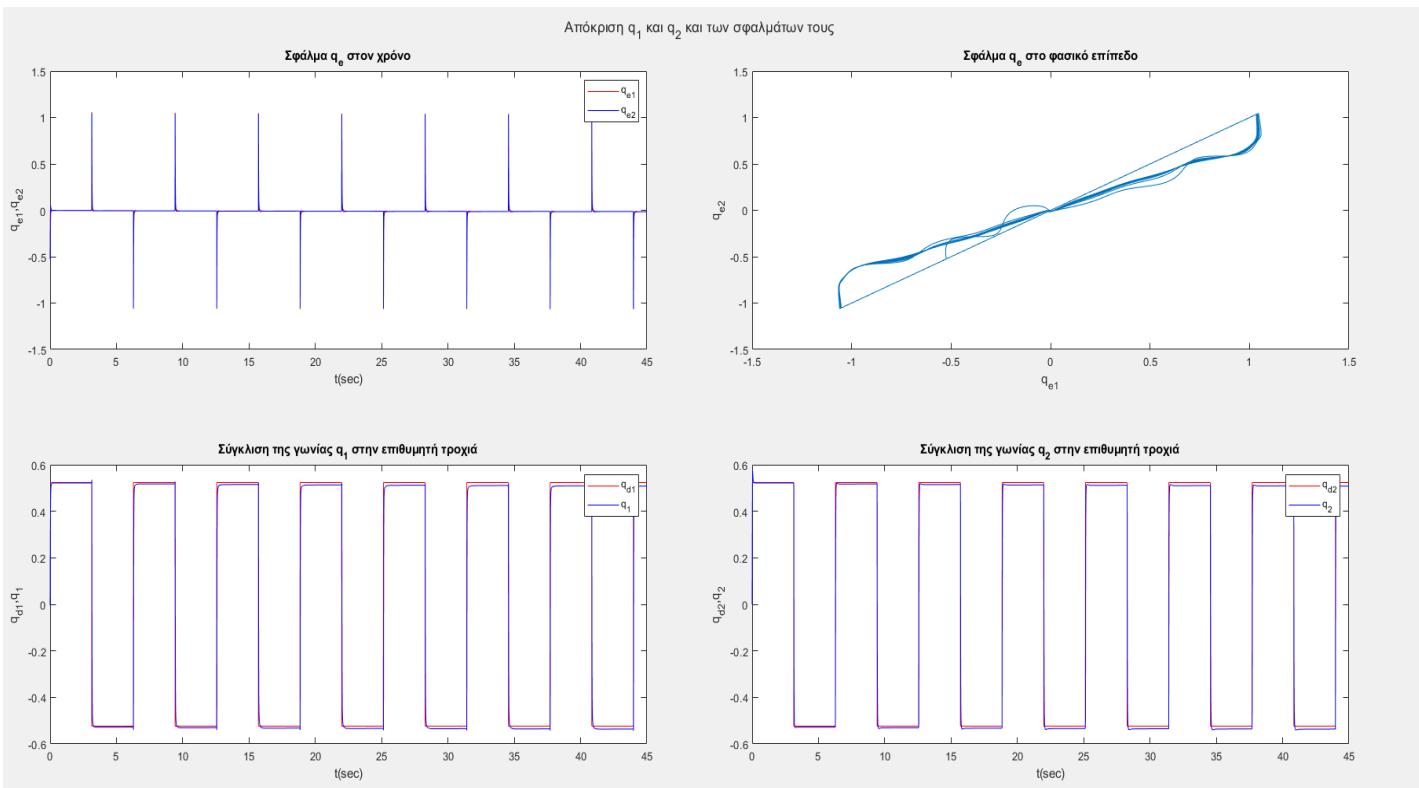
$$\text{Άρα } V = -\mathbf{s}^T \mathbf{K} \mathbf{s} + \mathbf{s}^T \mathbf{Y} \Delta\boldsymbol{\theta} + \Delta\boldsymbol{\theta}^T \Gamma \Delta\boldsymbol{\theta} \Rightarrow \dot{V} = -\mathbf{s}^T \mathbf{K} \mathbf{s} + \Delta\boldsymbol{\theta}^T (\mathbf{Y}^T \mathbf{s} + \Gamma \Delta\boldsymbol{\theta})$$

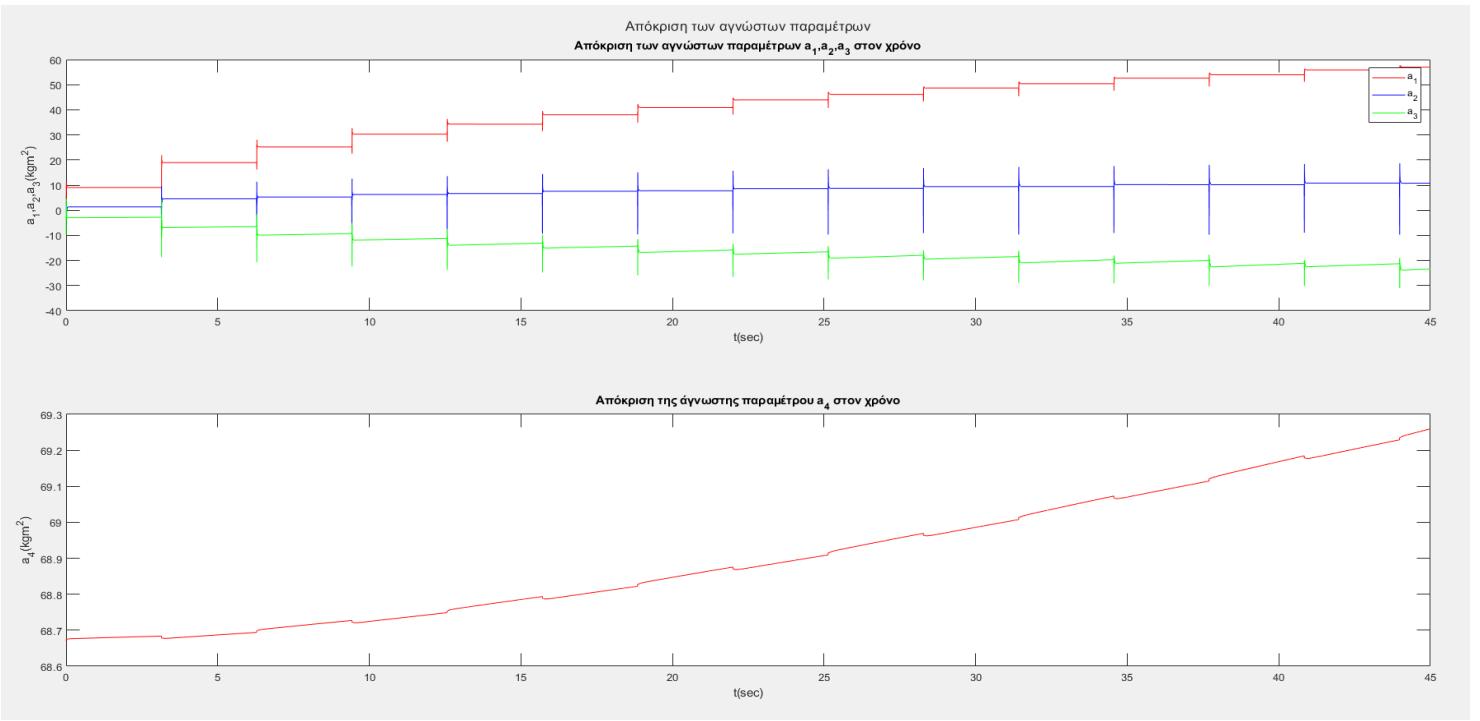
$$\Delta\dot{\boldsymbol{\theta}} = -\Gamma^{-1} \mathbf{Y}^T \mathbf{s}$$

Άρα επιλέγοντας $\frac{d}{dt}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) = \hat{\boldsymbol{\theta}}$ $\Rightarrow \dot{V} = -\mathbf{s}^T \mathbf{K} \mathbf{s} \leq 0$ Αρνητικά ημιορισμένη. Μπορώ όμως να πω ότι το \mathbf{s} είναι φραγμένη κατάσταση. Χρησιμοποιώντας το λήμμα Barbalat $\ddot{V} = -2\mathbf{s}^T \mathbf{K} \mathbf{s}$ άρα είναι φραγμένη οπότε \dot{V} ομοιόμορφα συνεχής. Και επομένως $\dot{V} \rightarrow 0$ Συνεπώς και $\mathbf{s} \rightarrow 0$ και επομένως έχω επιτύχει τον στόχο μου γιατί το σφάλμα παρακολούθησης θα τείνει στο μηδέν οπότε το σύστημα θα ακολουθεί την επιθυμητή τροχιά. Άρα λύνοντας το σύστημα $\frac{\mathbf{H}\dot{\mathbf{s}} + (\mathbf{C} + \mathbf{K})\mathbf{s} = \mathbf{Y}\Delta\boldsymbol{\theta}}{\Delta\dot{\boldsymbol{\theta}} = -\Gamma^{-1} \mathbf{Y}^T \mathbf{s}}$. Πετυχαίνω το σφάλμα παρακολούθησης της επιθυμητής τροχιάς να τείνει στο μηδέν.

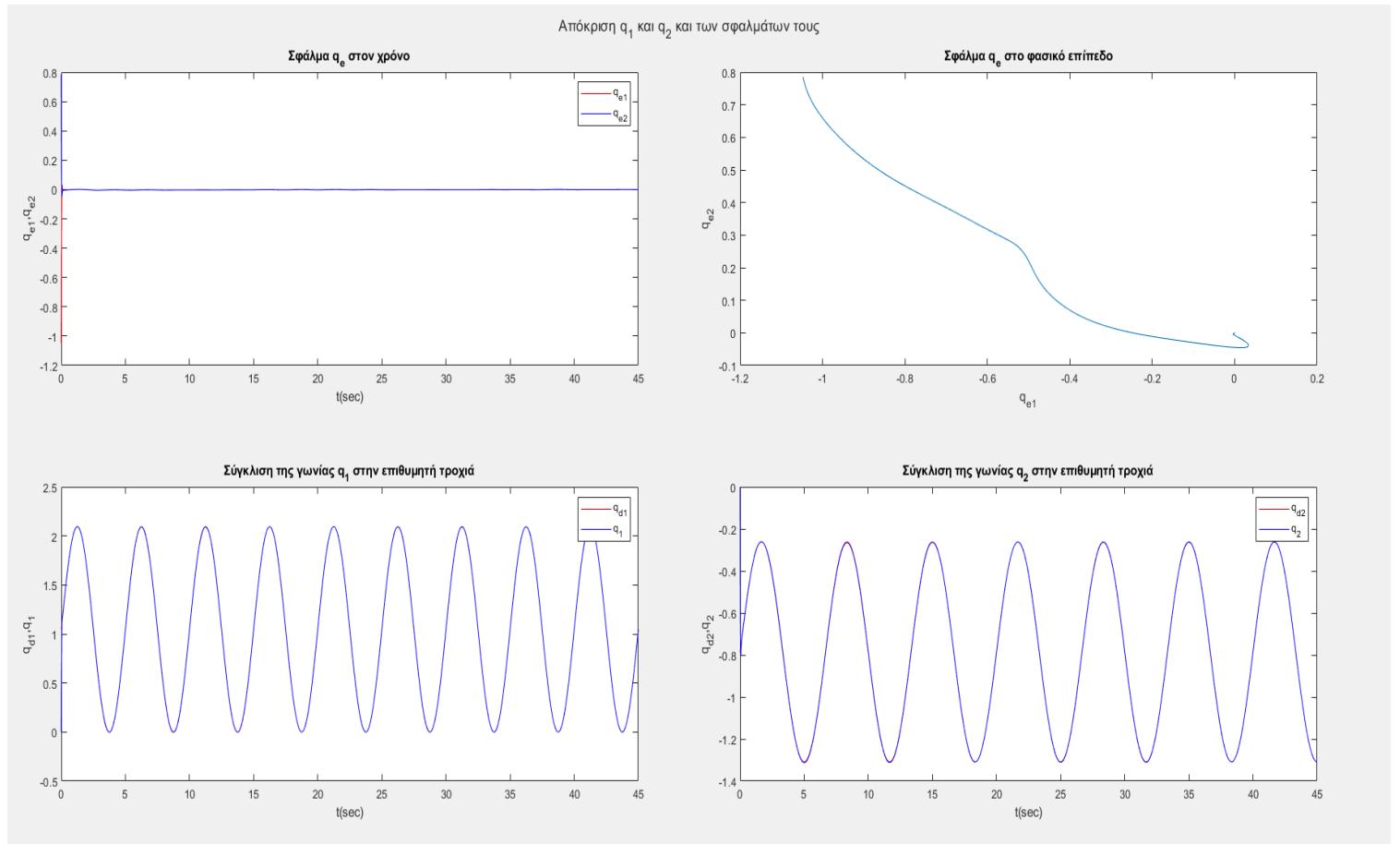
iii. Για τους πίνακες $\mathbf{K} = 200\mathbf{I}_2$, $\mathbf{A} = 80\mathbf{I}_2$ και $\mathbf{G} = 50\mathbf{I}_4$ παίρνουμε τα εξής γραφήματα για τους δύο στόχους ελέγχου της εκφώνησης (για την προσομοίωση για αρχικές συνθήκες για τις παραμέτρους του ελεγκτή χρησιμοποιήθηκαν οι μέσες τιμές των αγνώστων παραμέτρων) :

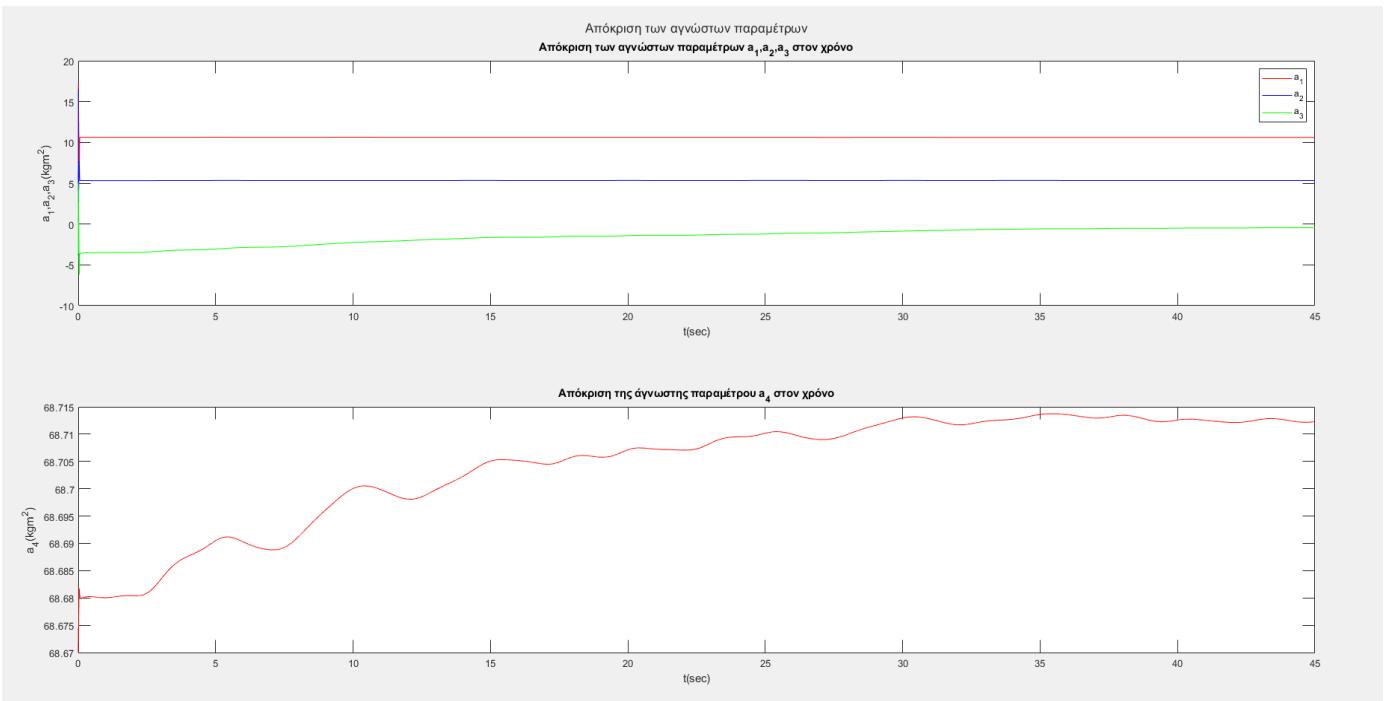
Για τον A) στόχο παίρνουμε:





Αντίστοιχα για τον στόχο **B**) παίρνουμε :



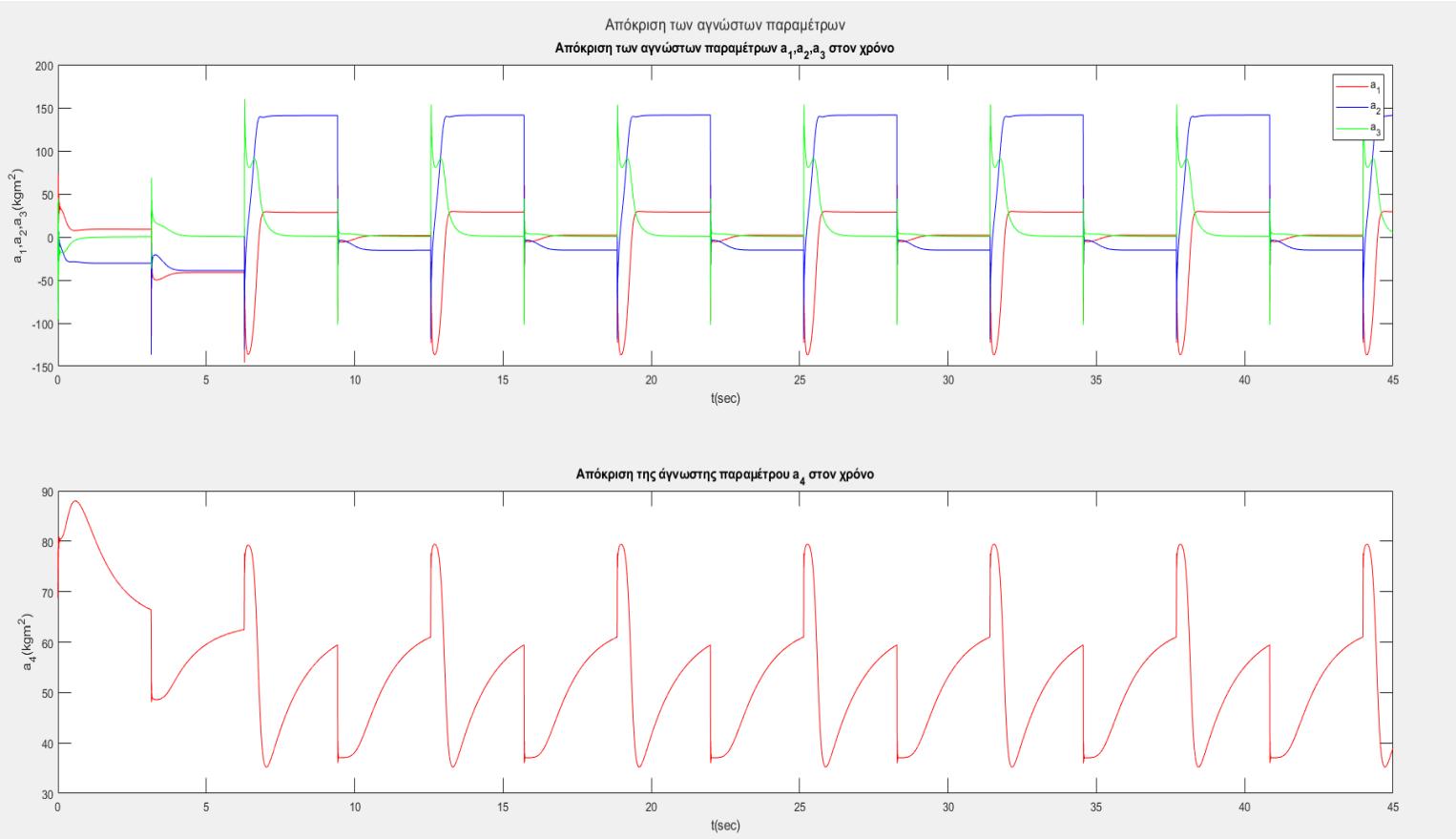
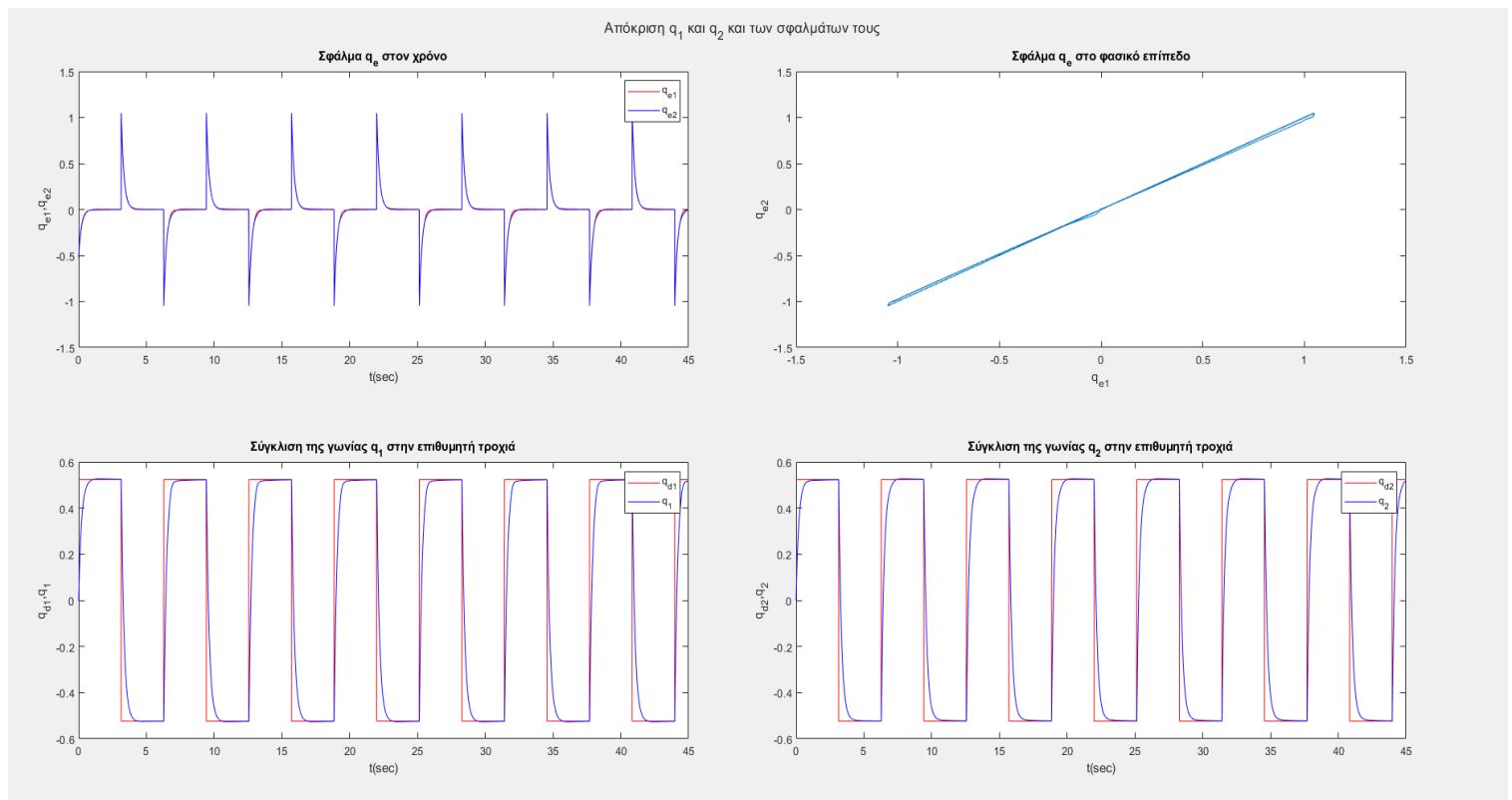


Από τα παραπάνω γραφήματα συμπεραίνουμε πως το σύστημα μας ακολουθεί με αρκετά ικανοποιητικό τρόπο την επιθυμητή τροχιά και για τους δύο στόχους ελέγχου της εκφώνησης. Ωστόσο παρατηρούμε πως γίνεται αρκετά καλύτερη παρακολούθηση τροχιάς για τον δεύτερο στόχο ελέγχου από ότι για τον πρώτο και αυτό οφείλεται στο γεγονός πως ο τετραγωνικός παλμός έχει ασυνέχειες οπότε λόγω αυτών καθίσταται πιο δύσκολη η παρακολούθηση σε αντίθεση με τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις όπου είναι πιο ομαλές οι μεταβολές και για αυτό βλέπουμε πολύ καλό fitting. Παρόλα αυτά τα κέρδη αυτά είναι λίγο μεγάλα για τον ελεγκτή μας οπότε ίσως να μην είναι και υλοποιήσιμος ενώ επίσης παρατηρούμε ότι η άγνωστη παράμετρος a_4 φαίνεται να μην συγκλίνει και για τους δύο στόχους ελέγχου της εκφώνησης. Συνεπώς θα πρέπει να δοκιμάσουμε άλλα κέρδη τα οποία να μας εξασφαλίζουν και καλή παρακολούθηση της επιθυμητής τροχιάς αλλά και σύγκλιση των παραμέτρων σε μια σταθερή τιμή όχι κατά ανάγκη την πραγματική τους αφού ο στόχος μας δεν είναι η αναγνώριση των παραμέτρων.

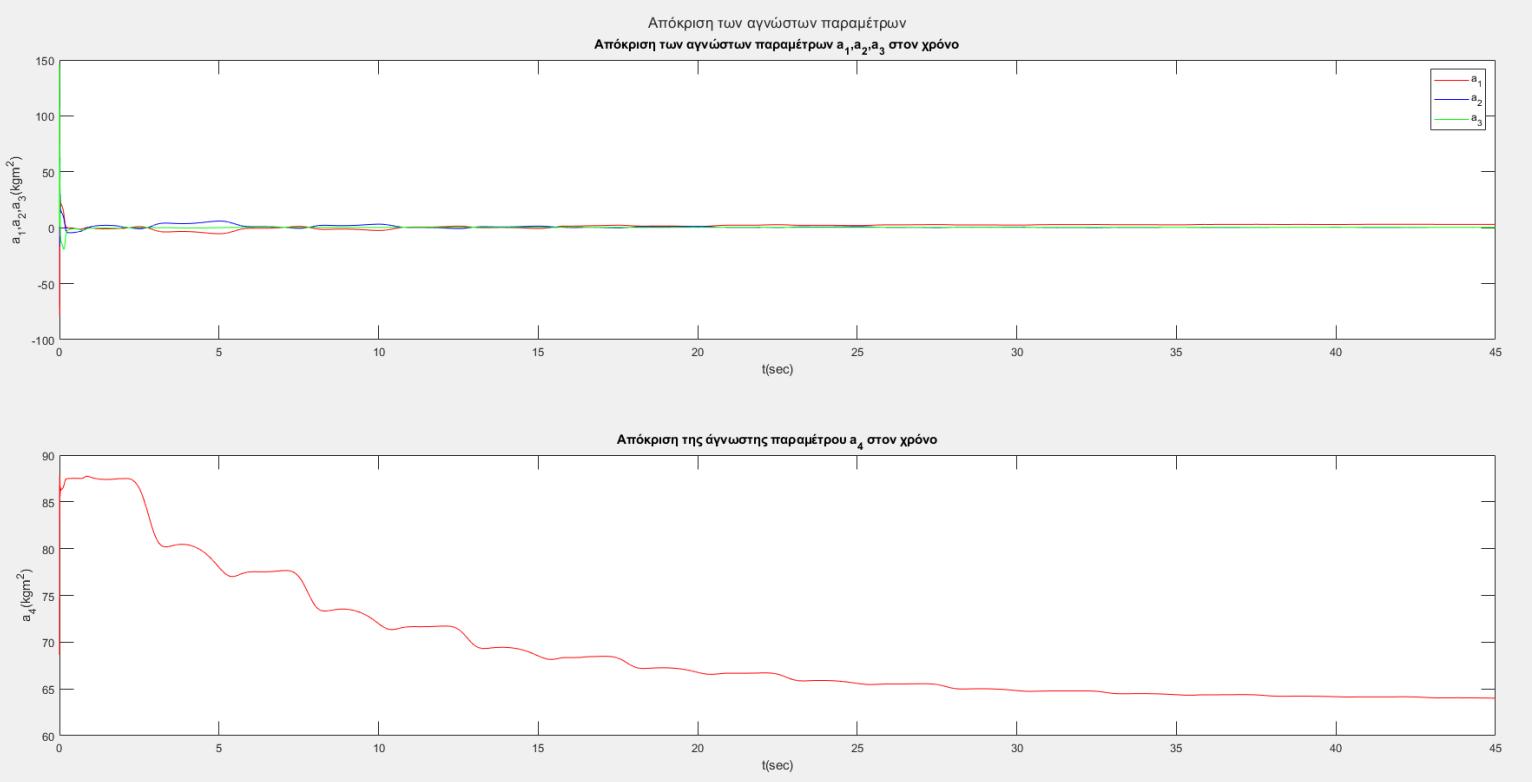
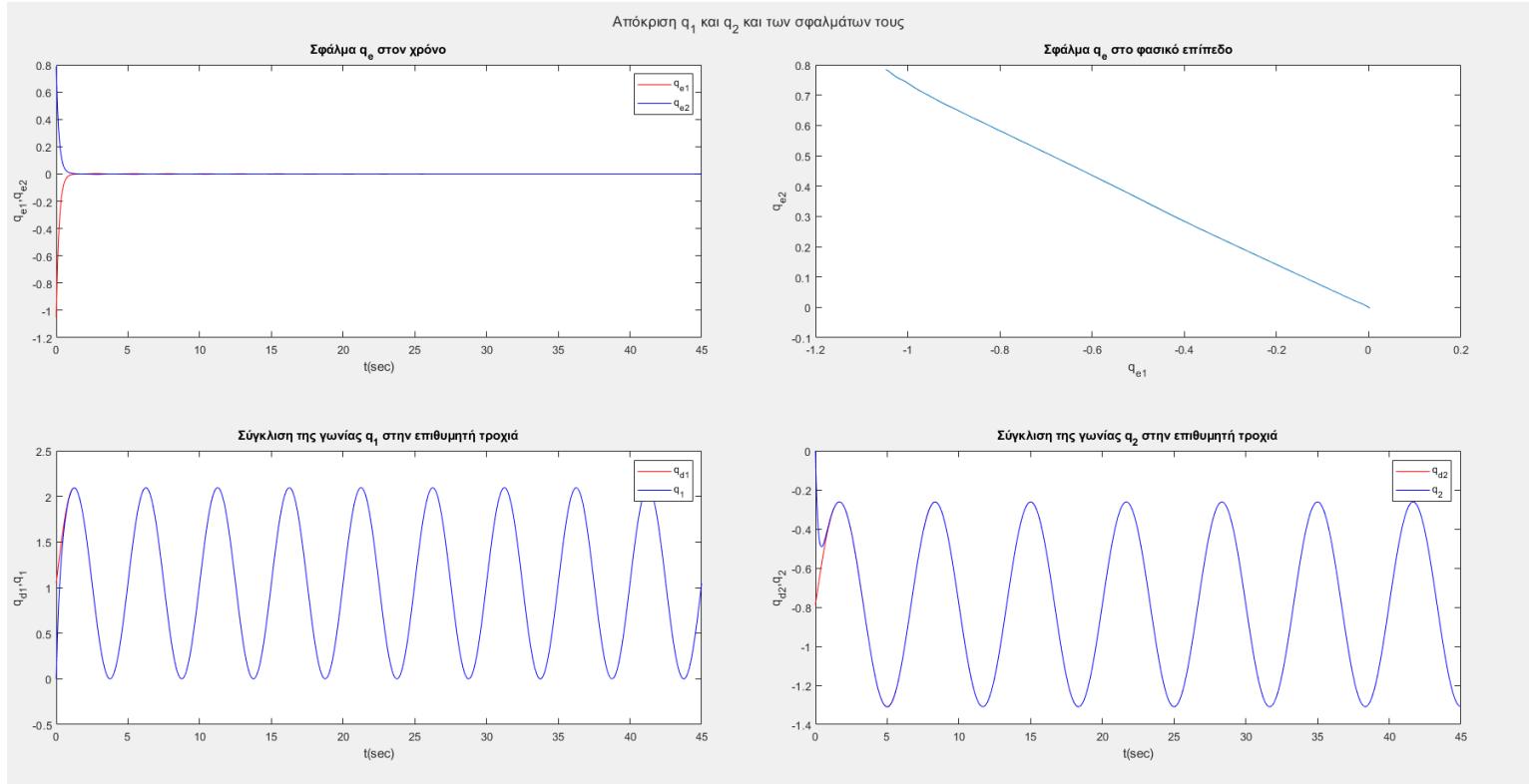
Έστω ότι δοκιμάζουμε τα εξής κέρδη για τους πίνακες K, Λ, Γ

$K = 400I_2, \Lambda = 5I_2$ και $\Gamma = 0.001I_4$ οπότε βλέπουμε στην συνέχεια τα σχετικά γραφήματα για τους δύο επιθυμητούς στόχους ελέγχου

Για τον στόχο A) παίρνουμε:

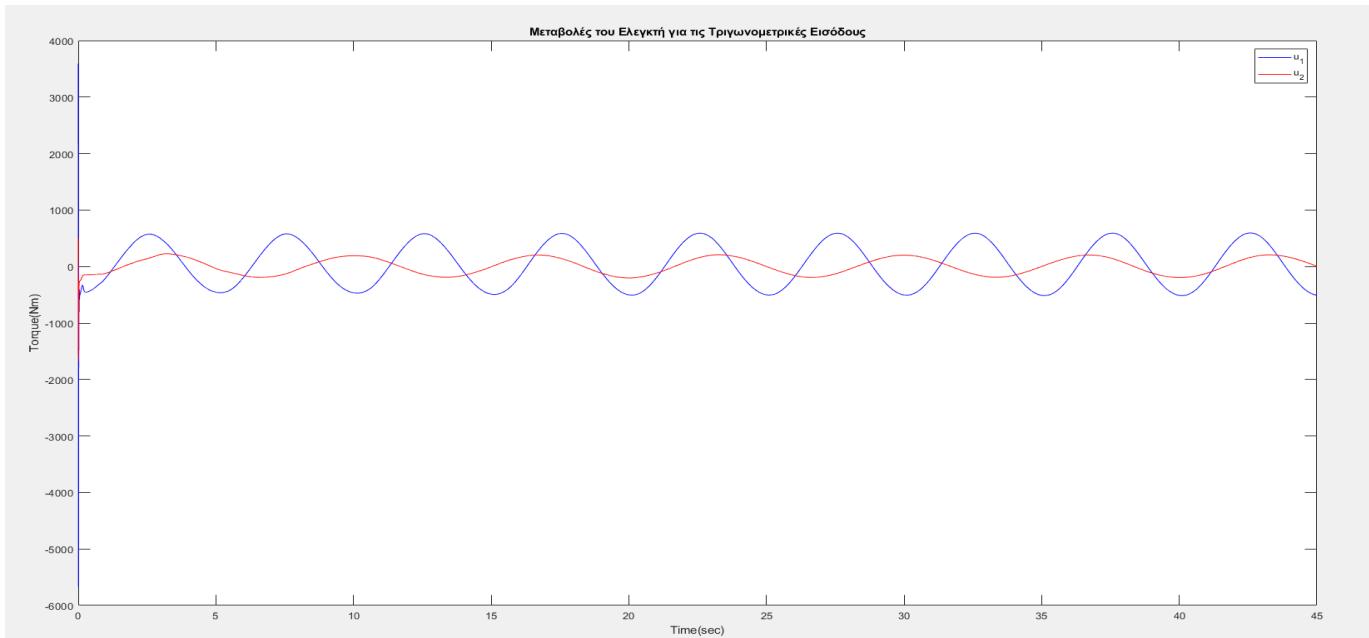
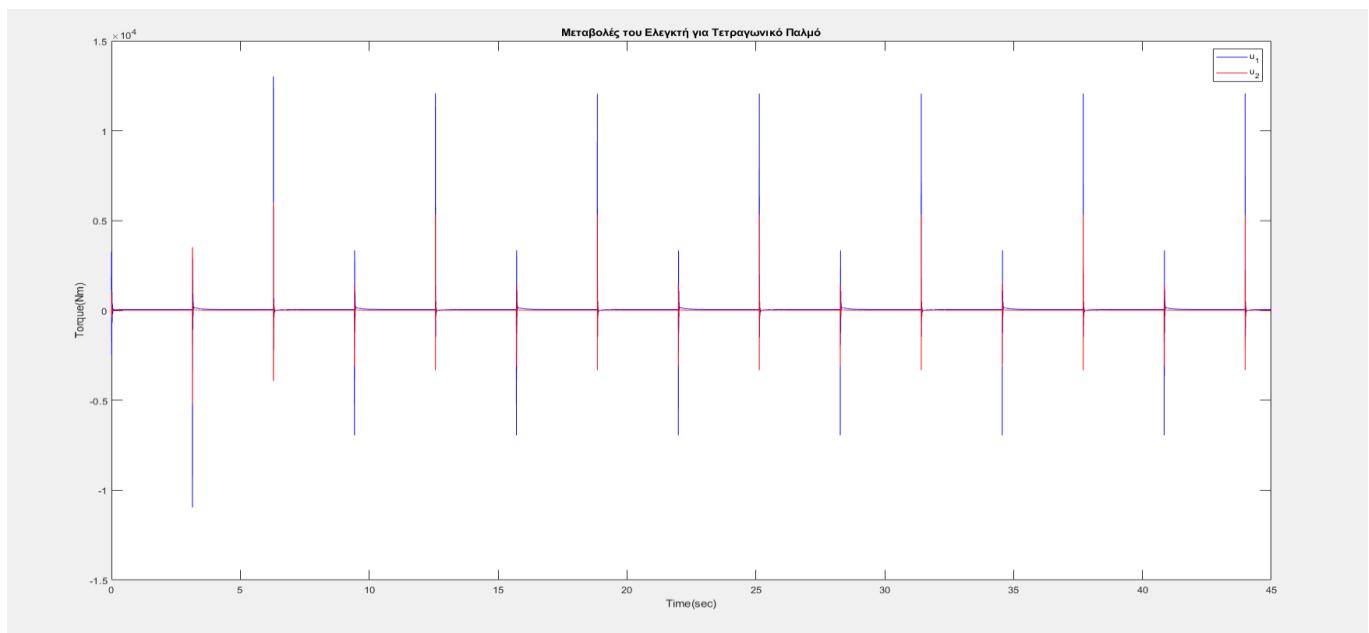


Αντίστοιχα για τον στόχο **B**) παίρνουμε:



Με αυτή την επιλογή των κερδών παρατηρούμε τώρα ότι το σφάλμα παρακολούθησης γίνεται μεγαλύτερο αλλά έχουμε επιτύχει την σύγκλιση των παραμέτρων σε μια σταθερή τιμή. Αυτό κυρίως φαίνεται στον δεύτερο στόχο ελέγχου όπου όπως και πριν οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις δεν έχουν ασυνέχειες και φαίνεται ότι οι παράμετροι συγκλίνουν πολύ κοντά στις πραγματικές τους τιμές, παρόλο που αυτό δεν ήταν ο στόχος μας. Επιπρόσθετα, βλέπουμε ότι στον τετραγωνικό παλμό οι παράμετροι του συστήματος ταλαντώνονται μεταξύ 2 σταθερών τιμών γεγονός που οφείλεται κυρίως στις ασυνέχειες αυτής της συνάρτησης. Ωστόσο, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι συγκλίνουν σε σταθερές τιμές και είναι φραγμένες μη δημιουργώντας έτσι πρόβλημα στον ελεγκτή μας.

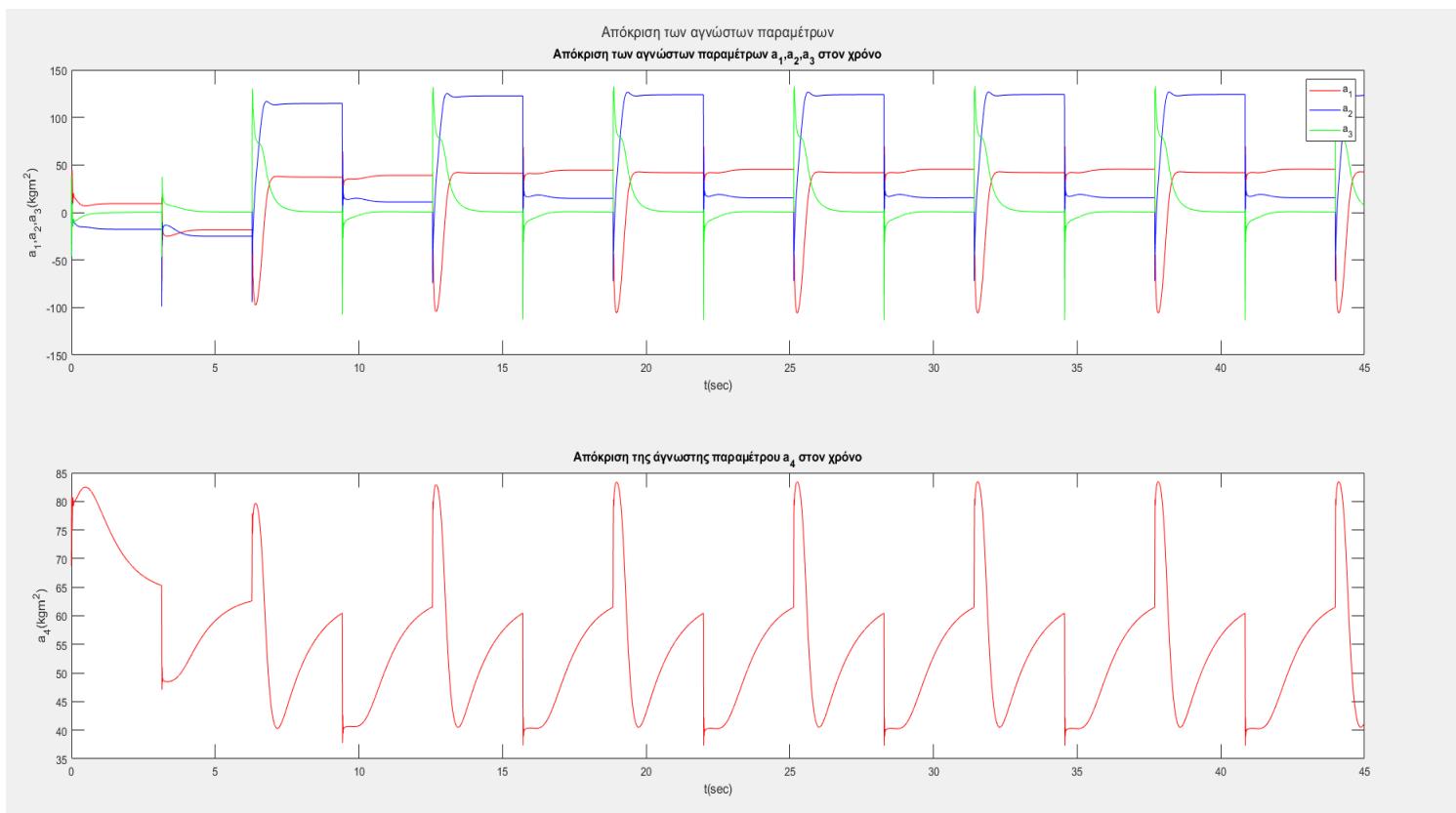
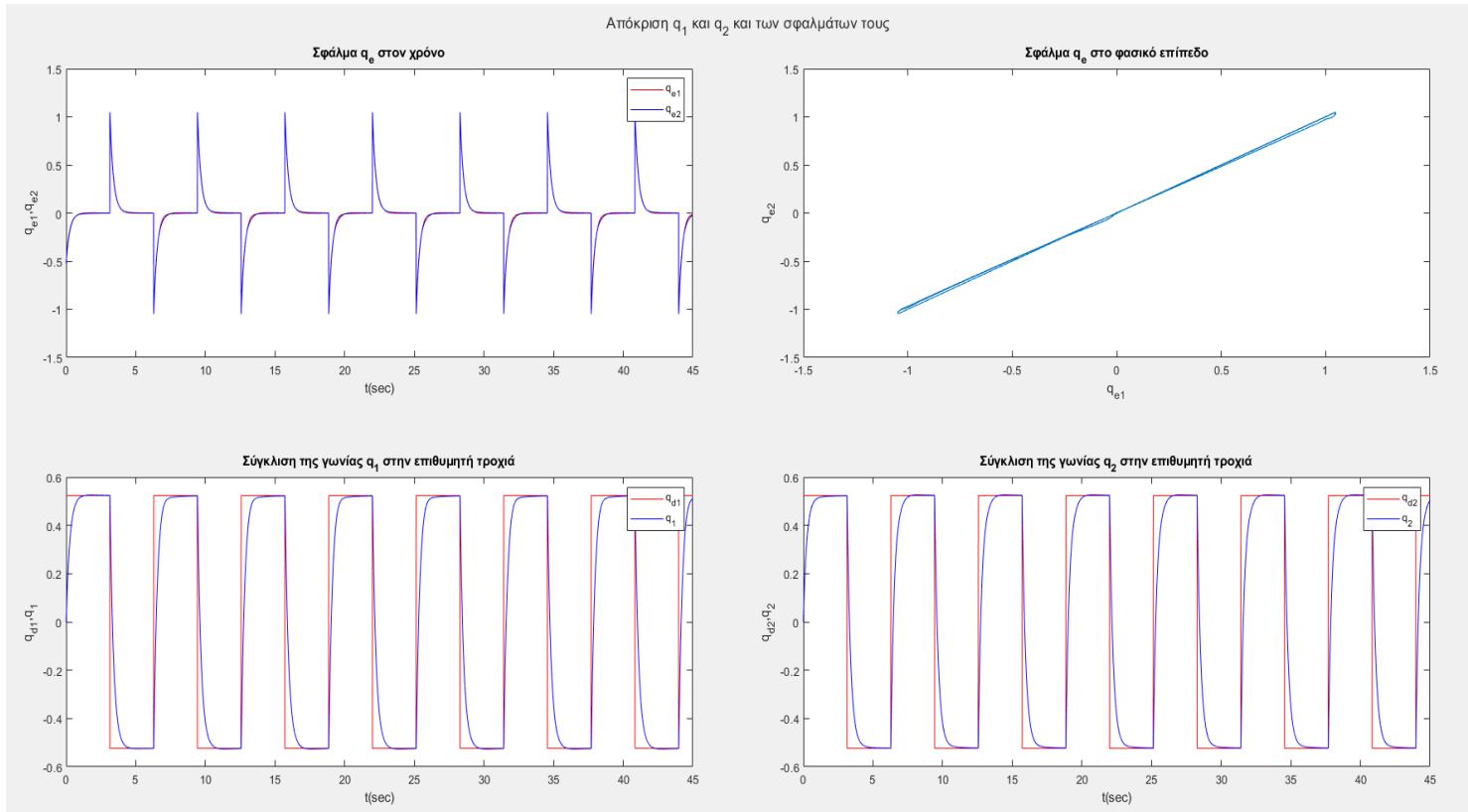
Συνεπώς, θεωρώ πως αυτή η επιλογή των πινάκων είναι η καταλληλότερη για να έχουμε ταυτόχρονα και σύγκλιση των παραμέτρων και να είναι φραγμένες αλλά και να έχουμε μικρό σφάλμα παρακολούθησης της επιθυμητής τροχιάς. Επιπλέον σχεδιάζω και τις αντίστοιχες τιμές του ελεγκτή για τον 2 επιθυμητούς στόχους.

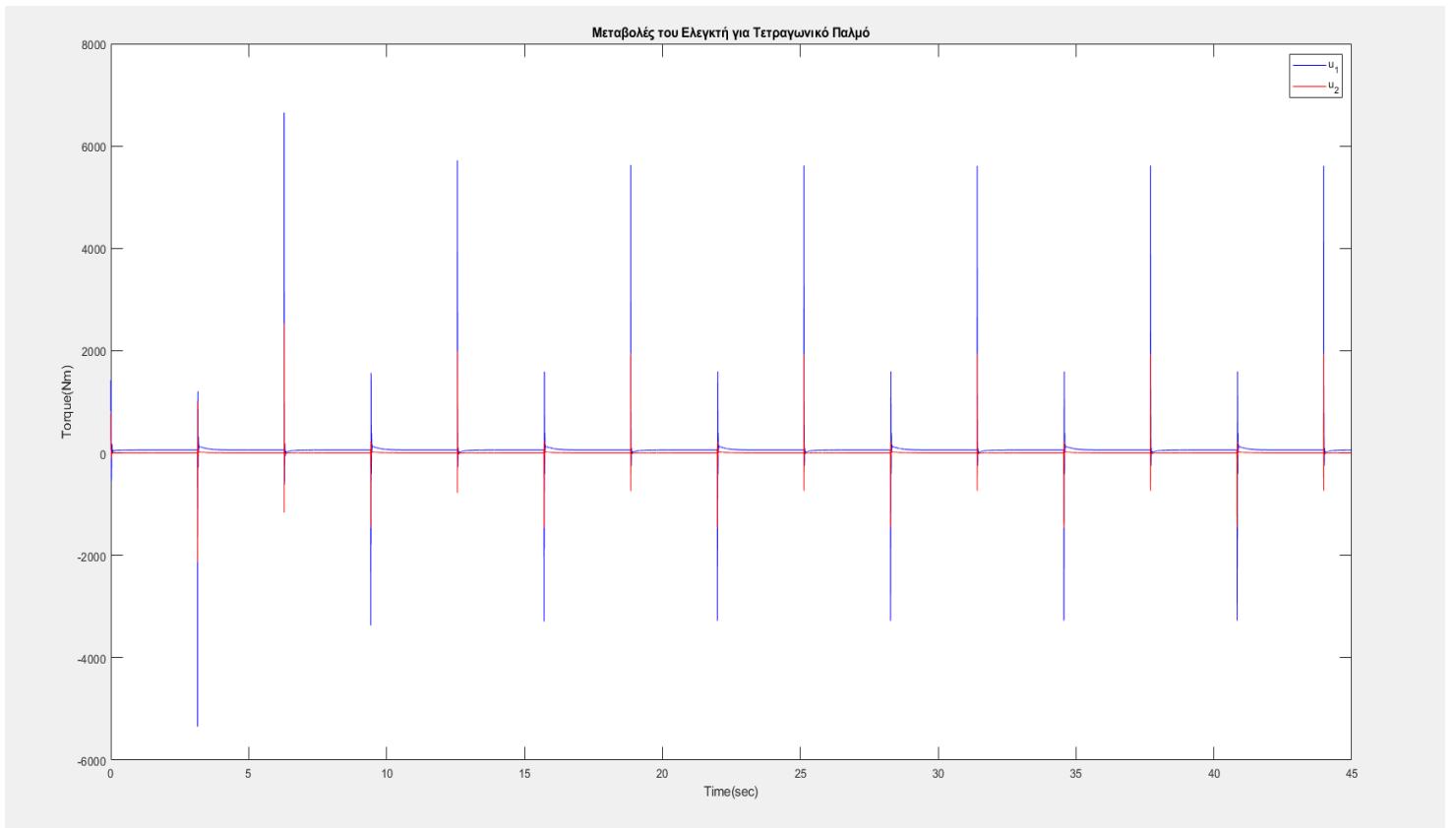


Έστω ότι δοκιμάζουμε τα εξής κέρδη για τους πίνακες Κ,Λ,Γ

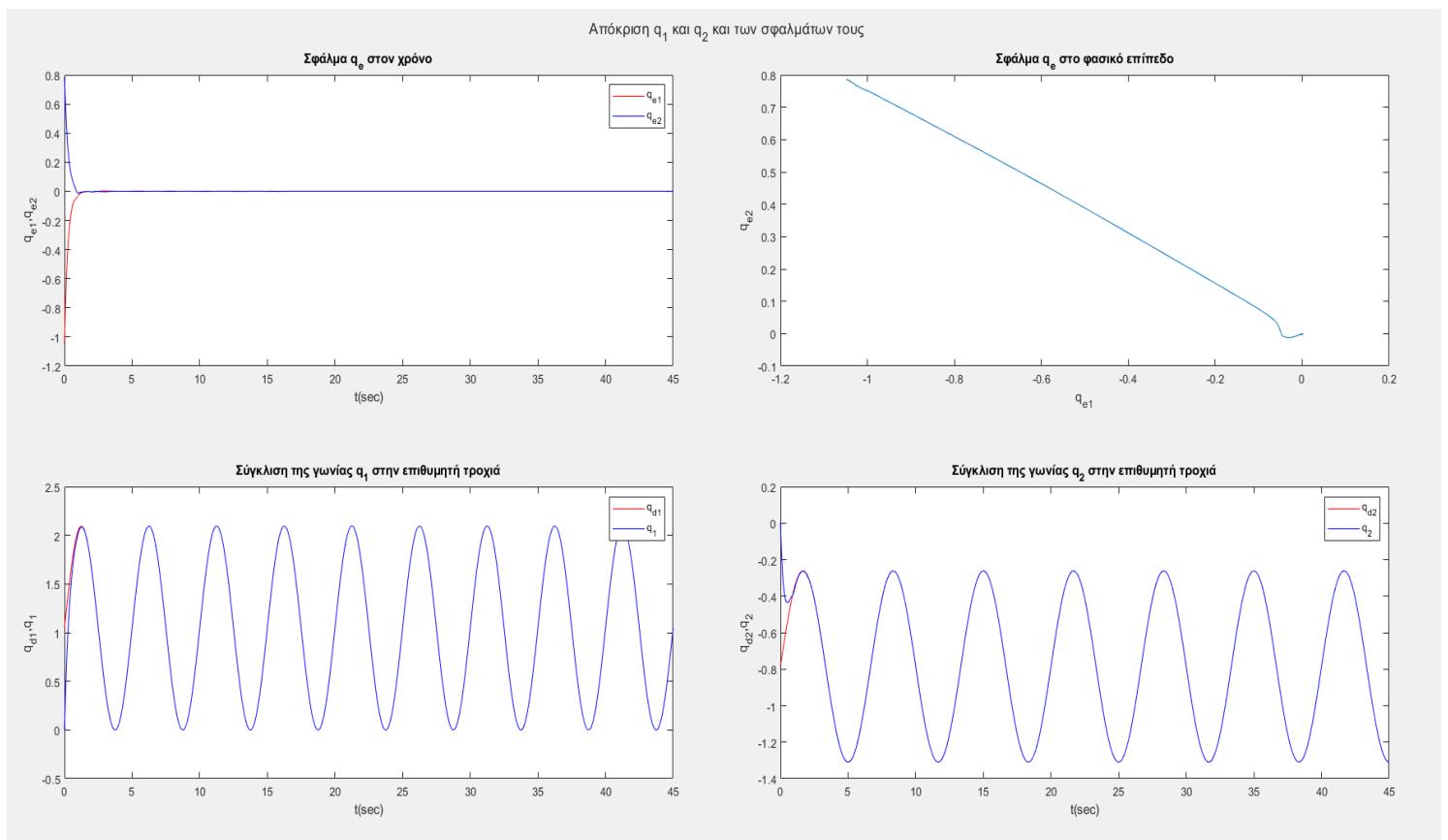
$K = 350I_2, \Lambda = 4I_2$ και $\Gamma = 0.001I_4$ οπότε βλέπουμε στην συνέχεια τα σχετικά γραφήματα για τους δύο επιθυμητούς στόχους ελέγχου

Για τον στόχο A) παίρνουμε:

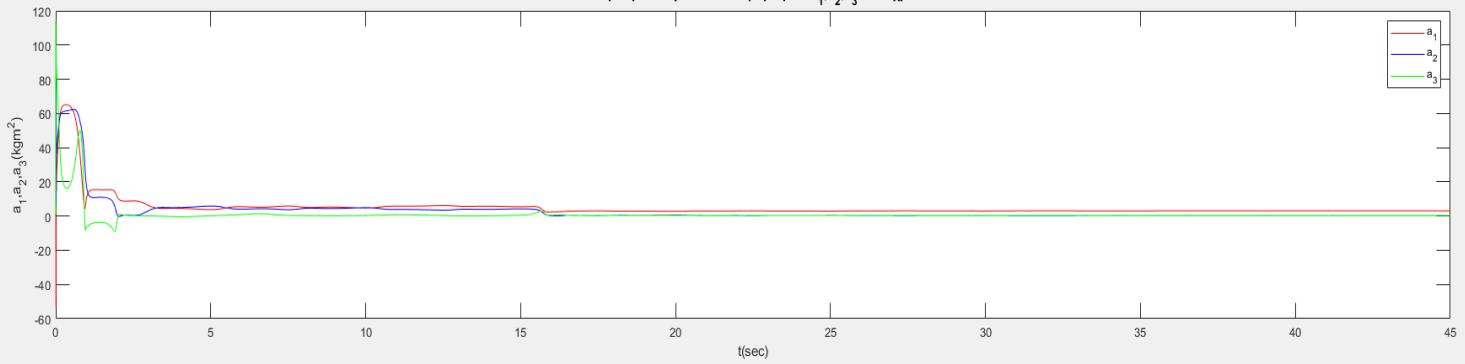




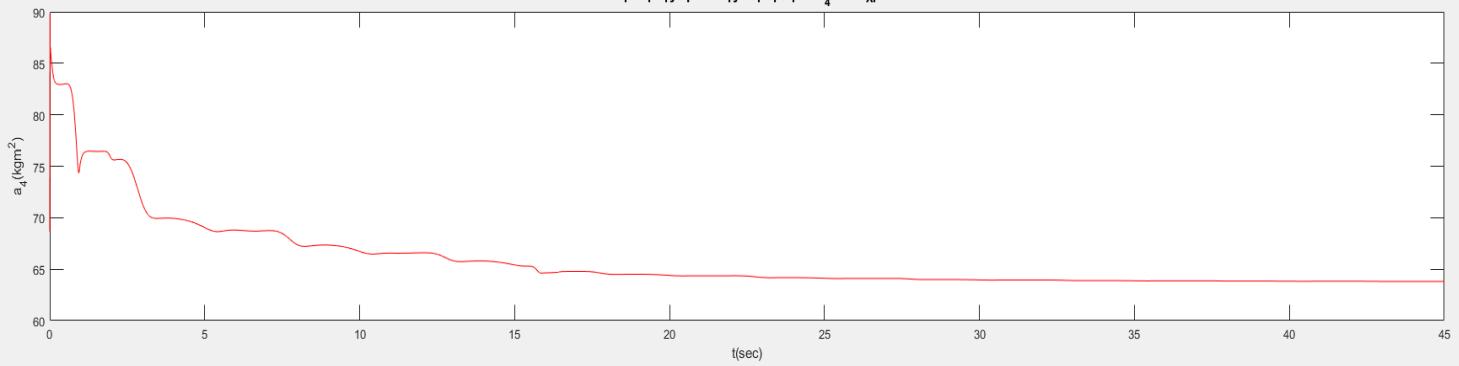
Αντίστοιχα για τον στόχο **B) παίρνουμε:**



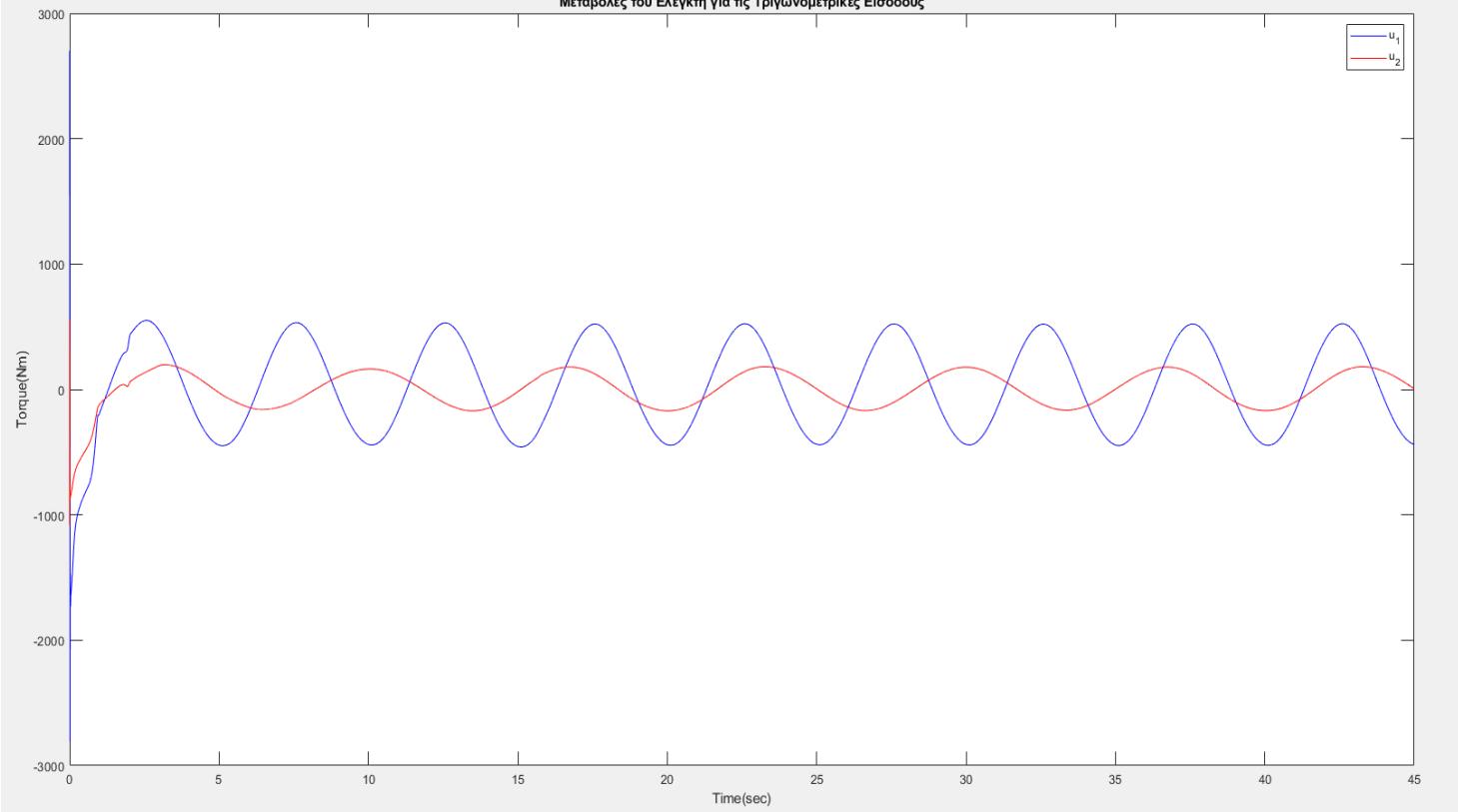
Απόκριση των αγνώστων παραμέτρων
Απόκριση των αγνώστων παραμέτρων a_1, a_2, a_3 στον χρόνο



Απόκριση της άγνωστης παραμέτρου a_4 στον χρόνο



Μεταβολές του Ελεγκτή για τις Τριγωνομετρικές Εισόδους



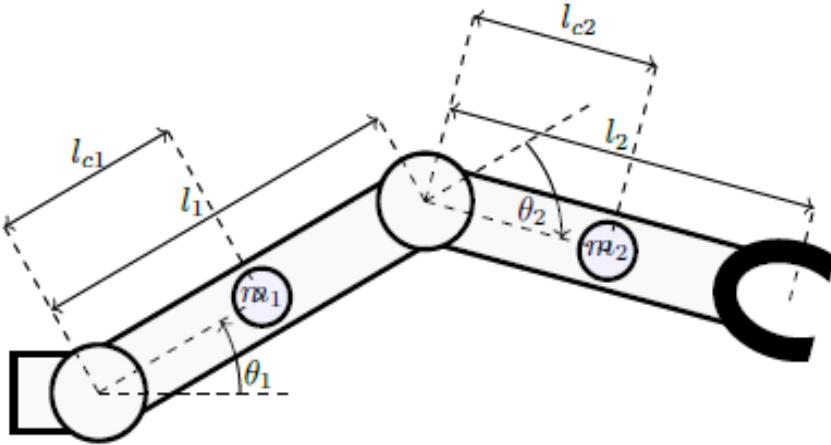
Με αυτή την επιλογή των κερδών παρατηρούμε τώρα ότι το σφάλμα παρακολούθησης γίνεται μεγαλύτερο αλλά έχουμε επιτύχει την σύγκλιση των παραμέτρων σε μια σταθερή τιμή. Αυτό κυρίως φαίνεται στον δεύτερο στόχο ελέγχου όπου όπως και πριν οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις δεν έχουν ασυνέχειες και φαίνεται ότι οι παράμετροι συγκλίνουν πολύ κοντά στις πραγματικές τους τιμές, παρόλο που αυτό δεν ήταν ο στόχος μας. Επιπρόσθετα, βλέπουμε ότι στον τετραγωνικό παλμό οι παράμετροι του συστήματος ταλαντώνονται μεταξύ 2 σταθερών τιμών γεγονός που οφείλεται κυρίως στις ασυνέχειες αυτής της συνάρτησης αλλά εδώ πέρα με αυτή την επιλογή που κάναμε για τους πίνακες βλέπουμε να έχουμε μια πιο απότομη και πιο μεγάλου πλάτους ταλάντωση των παραμέτρων. Ωστόσο, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι συγκλίνουν σε σταθερές τιμές σίγουρα για τις τριγωνομετρικές εισόδους και ότι θα είναι φραγμένες μη δημιουργώντας έτσι πρόβλημα στον ελεγκτή μας.

Συνεπώς, θεωρώ πως αυτή η επιλογή των πινάκων είναι η καταλληλότερη για να έχουμε ταυτόχρονα και σύγκλιση των παραμέτρων και να είναι φραγμένες αλλά και να έχουμε μικρό σφάλμα παρακολούθησης της επιθυμητής τροχιάς. Επιπλέον παρατηρώ από τα διαγράμματα εισόδου του ελεγκτή **u** πως με αυτές τις επιλογές απαιτείται μικρότερη είσοδος από ότι προηγουμένως προκειμένου το σύστημά μας να ακολουθήσει τους επιθυμητούς στόχους. Ωστόσο και εδώ φαίνεται ότι απαιτείται αρκετά μεγαλύτερη είσοδος για να μπορέσουμε να ακολουθήσουμε την επιθυμητή τροχιά του τετραγωνικού παλμού σε αντίθεση με την ροπή εισόδου που απαιτείται για να ακολουθήσουμε τις τριγωνομετρικές εισόδους.

Τέλος, παρατηρώ επίσης ότι για μικρότερες τιμές του πίνακα **K**, για παράδειγμα για $K = 200I_2$ και για λίγο μεγαλύτερες τιμές του πίνακα **L** για παράδειγμα για $L = 0.01I_4$ και για τον ίδιο πίνακα **A** βλέπω ότι έχω μικρότερες απαιτήσεις ροπής εισόδου για τον ελεγκτή ενώ επίσης η ταλάντωση των αγνώστων παραμέτρων που βρίσκονται στον εκτιμητή δεν είναι τόσο μεγάλη. (**Τα σχετικά γραφήματα για αυτές τις τιμές δεν παρατίθενται στην αναφορά αλλά μπορούν να φανούν από τους κώδικες που υπάρχουν ξεχωριστά για τον στόχο ελέγχου A και για τον στόχο ελέγχου B με την μέθοδο του προσαρμοστικού ελέγχου βασισμένου στην παθητικότητα**)

Τμήμα Β

Άσκηση 2)



- i. Αρχικά για να φέρουμε το σύστημα στην ζητούμενη μορφή της εκφώνησης δηλαδή στην μορφή $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u$, όπου $x = [q_1 \quad q_2 \quad \dot{q}_1 \quad \dot{q}_2]^T$ γράφουμε τον πίνακα βαρύτητας στην μορφή:

$$g(q) = G(q)q = \begin{bmatrix} \alpha_3 \frac{g \cos(q_1 + q_2)}{l} & \frac{a_4 \cos q_1}{q_2} \\ \alpha_3 \frac{g \cos(q_1 + q_2)}{l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

Επομένως, το σύστημα μας γίνεται τώρα $H(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q)q = u$ οπότε λύνοντας το σύστημα ως προς \ddot{q} για να βρούμε τις μεταβλητές \dot{x}_3, \dot{x}_4 αφού γνωρίζουμε ήδη, με τον τρόπο που θέσαμε τις μεταβλητές, ότι $\dot{x}_1 = x_3$ και $\dot{x}_2 = x_4$. Επομένως, το σύστημα που προκύπτει θα είναι το εξής :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ -H^{-1}G & -H^{-1}C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ H^{-1}(q) \end{bmatrix} u$$

Όπου τα στοιχεία μέσα στους πίνακες A, B είναι υπό-πίνακες **2x2**

- ii. Για τον σχεδιασμό του μοντέλου $\dot{x}_m = A_m x_m + B_m r$ ώστε να βρω να πληρούνται οι προδιαγραφές τις εκφώνησης και οι καταστάσεις q_1, q_2 να είναι αποσυζευγμένες θα

$$\text{θεωρήσω ότι } \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & c & 0 \\ 0 & b & 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ b_{m_1} & 0 \\ 0 & b_{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{d_1} \\ q_{d_2} \end{bmatrix} \text{ όπου } A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

είναι πίνακας **2x2** και είναι κοινός και για τους δύο διότι θέλω να πληρώ τις ίδιες προδιαγραφές και για το q_1 αλλά και για το q_2 . Επομένως θεωρώντας το ακόλουθο σύστημα :

$$\dot{z}_1 = Az_1 + B_1 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_{m_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{d_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Θα προσδιορίσω τις άγνωστες σταθερές του πίνακα **A** καθώς και τα κέρδη του πίνακα **B**

Μελετώντας το σύστημα στην συχνότητα για να βρω την συνάρτηση μεταφοράς του προκύπτουν οι εξισώσεις :

$$sX_1 = aX_3$$

$$sX_3 = bX_3 + b_{m_1}R$$

$$H_1(s) = \frac{X_1}{R} = \frac{b_{m_1}}{s^2 - bs - a}$$

Επειδή θέλουμε μηδενικό σφάλμα θέσης θα πάρουμε $e_{ssp} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} (R(s) - X_1(s))s = \lim_{s \rightarrow 0} (1 - H_1(s)) = 0 \Rightarrow b_{m_1} = -a$ Επίσης επειδή θέλουμε κρίσιμη απόσβεση με χρόνο αποκατάστασης $t_s = 1sec$ θα έχουμε

$$t_s = \frac{4}{\zeta * \omega_n} = 1 \Rightarrow \frac{4}{|b|} = 1 \Rightarrow |b| = 8 \text{ και } \omega_n = 4 \text{ αρα } -a = 16 (= \omega_n^2)$$

Άρα έστω $a = -16$, $b = -8$ και αρα $b_{m_1} = -a \Rightarrow b_{m_1} = 16$

$$\text{Άρα } A_1 = \begin{bmatrix} -16 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} \text{ και } B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 16 \end{bmatrix} \text{ ομοίως } B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Οπότε

$$\dot{x}_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -16 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & -16 & 0 & -8 \end{bmatrix} x_m + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} r$$

Για τον σχεδιασμό του προσαρμοστικού ελεγκτή μέσω του οποίου το σύστημα θα ακολουθεί το μοντέλο μας ορίζω το σφάλμα παρακολούθησης ως εξής : $x_e = x_m - x$

Οπότε $\dot{x}_e = \dot{x}_m - \dot{x} = A_m x_m + B_m r - Ax - Bu \Rightarrow \dot{x}_e = A_m x_e + A_m x - Ax + B_m r - Bu \Rightarrow \dot{x}_e = A_m x_e + (A_m - A)x + B_m r + BK_p x - BK_{p_m} r \Rightarrow \dot{x}_e = A_m x_e + (A_m - A + BK_p)x + (B_m - BK_{p_m})r$

$\dot{x}_e = A_m x_e + I_4 w_e$ όπου $w_e = (A_m - A + BK_p)x + (B_m - BK_{p_m})r$ Επίσης επιλέγω κατάλληλα την έξιδο y_e έτσι ώστε το σύστημα στον ευθύ βρόχο να είναι αυστηρά παθητικό εξόδου, άρα δηλαδή $y_e = Cx_e = B^T P x_e = Px_e$ όπου P είναι η λύση που προκύπτει από την εξίσωση **Lyaupinov** του μοντέλου $A_m^T P + PA_m = -Q$ για δεδομένο συμμετρικό και θετικά ορισμένο πίνακα Q . Θεωρώντας τον $Q = I_4$ ο πίνακας που προκύπτει είναι $P =$

$$\begin{bmatrix} 1.3125 & 0 & 0.0312 & 0 \\ 0 & 1.3125 & 0 & 0.0312 \\ 0.0312 & 0 & 0.0664 & 0 \\ 0 & 0.0312 & 0 & 0.0664 \end{bmatrix}.$$

ως

$$K_p = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ k_5 & k_6 & k_7 & k_8 \end{bmatrix} = [K_1 \quad K_2] \text{ τα κέρδη για τις μεταβλητές κατάστασης και } K_{p_m} = \begin{bmatrix} k_9 & k_{10} \\ k_{11} & k_{12} \end{bmatrix} \text{ τα κέρδη για την είσοδο αναφοράς.}$$

iii. Οπότε τώρα για να αποδείξω το σφάλμα παρακολούθησης του μοντέλου $x_e = x_m - x$ συγκλίνει ασυμπτωτικά στο μηδέν, θα χρησιμοποιήσω το θεώρημα

υπερευστάθειας το οποίο απαιτεί να αποδείξω ότι το σύστημα μου είναι παθητικό.

$$\text{Άρα αρκεί να δείξω ότι } \int_0^\tau -\mathbf{w}_e^T \mathbf{y}_e dt \geq 0$$

Επομένως φτιάχνω τους πίνακες

$$\mathbf{A}_m - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 16\mathbf{I}_2 + \mathbf{H}^{-1}\mathbf{G} + \mathbf{H}^{-1}\mathbf{K}_1 & -8\mathbf{I}_2 + \mathbf{H}^{-1}\mathbf{C} + \mathbf{H}^{-1}\mathbf{K}_2 \end{bmatrix} \text{ και}$$

$$\mathbf{B}_m - \mathbf{B}\mathbf{K}_{pm} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 16\mathbf{I}_2 - \mathbf{H}^{-1}\mathbf{K}_{pm} \end{bmatrix}$$

Οπότε το αρχικό ολοκλήρωμα για την απόδειξη της παθητικότητας γίνεται

$$-\int_0^\tau \mathbf{y}_e^T (\mathbf{A}_m - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}_p) \mathbf{x} dt - \int_0^\tau \mathbf{y}_e^T (\mathbf{B}_m - \mathbf{B}\mathbf{K}_{pm}) \mathbf{r} dt \text{ όπου για τα κέρδη βάζω}$$

$$\mathbf{K}_p = \mathbf{a} \int_0^\tau \mathbf{y}_e \mathbf{x}^T d\xi + \beta \mathbf{y}_e \mathbf{x}^T \text{ και } \mathbf{K}_{pm} = \mathbf{a} \int_0^\tau \mathbf{y}_e \mathbf{r}^T d\xi + \beta \mathbf{y}_e \mathbf{r}^T$$

Συνεπώς θα έχω $-\int_0^\tau \mathbf{y}_e^T (\mathbf{A}_m - \mathbf{A} + \mathbf{B}(\mathbf{a} \int_0^\tau \mathbf{y}_e \mathbf{x}^T d\xi + \beta \mathbf{y}_e \mathbf{x}^T)) \mathbf{x} dt$ και άρα για $\mathbf{f}(t) = \mathbf{A}_m - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{a} \int_0^\tau \mathbf{y}_e \mathbf{x}^T d\xi$ θα έχω $-\mathbf{B}\alpha \int_0^\tau \mathbf{f}(t) * \dot{\mathbf{f}}(t) dt = -\mathbf{B}\alpha (\frac{f^2(\tau)}{2} - \frac{f^2(0)}{2}) \geq 0$ το οποίο θα ισχύει άμα επιλέξουμε τα κέρδη του πίνακα \mathbf{a} τέτοια ώστε να είναι αρκετά μεγάλα για να θεωρούνται τα χρονικά μεταβαλλόμενα στοιχεία των πινάκων \mathbf{A}, \mathbf{B} και άρα οι παράγωγοι τους μηδενικές πρακτικά σταθερά και οι τιμές τους θα πρέπει να είναι αναγκαστικά αρνητικές έτσι ώστε το ολοκλήρωμα να βγαίνει θετικό. Επίσης με παρόμοιο τρόπο θα πρέπει να επιλέξουμε τις τιμές των κερδών του πίνακα β για να έχουμε ότι $-\int_0^\tau \mathbf{y}_e^T \mathbf{B} \beta \mathbf{y}_e \mathbf{x}^T \mathbf{x} dt \geq 0$. Συνεπώς $-\int_0^\tau \mathbf{y}_e^T (\mathbf{A}_m - \mathbf{A} + \mathbf{B}(\mathbf{a} \int_0^\tau \mathbf{y}_e \mathbf{x}^T d\xi + \beta \mathbf{y}_e \mathbf{x}^T)) \mathbf{x} dt \geq 0$ (Αυτό ισχύει διότι ο πίνακας \mathbf{B} αποτελείται από έναν μηδενικό και ένα θετικό ορισμένο πίνακα 2×2 οπότε άμα πολλαπλασιαστεί με έναν πίνακα 2×4 με θετικά εξ ολοκλήρου στοιχεία θα δώσει σαν γινόμενο σίγουρα έναν πίνακα ο οποίος θα περιέχει εξ ολοκλήρου θετικά ή μηδενικά στοιχεία (δηλαδή έναν θετικά ημι-ορισμένο πίνακα) ο οποίος μας αρκεί για την απόδειξη της παθητικότητας του συστήματος)

Ομοίως $-\int_0^\tau \mathbf{y}_e^T (\mathbf{B}_m - \mathbf{B}\mathbf{K}_{pm}) \mathbf{r} dt \geq 0$ με παρόμοια λογική όπως και προηγουμένως θα προκύψει ότι και αυτό το ολοκλήρωμα είναι θετικό θεωρώντας ότι $\mathbf{g}(t) = \mathbf{B}_m - \mathbf{B}\mathbf{a} \int_0^\tau \mathbf{y}_e \mathbf{x}^T d\xi$ και άρα θα έχω $-\int_0^\tau \mathbf{y}_e^T (\mathbf{B}_m - \mathbf{B}\mathbf{a} \int_0^\tau \mathbf{y}_e \mathbf{x}^T d\xi) \mathbf{r} dt \Rightarrow \mathbf{B}\alpha \int_0^\tau \mathbf{g}(t) * \dot{\mathbf{g}}(t) dt = \mathbf{B}\alpha (\frac{g^2(\tau)}{2} - \frac{g^2(0)}{2}) \geq 0$ επιλέγοντας τον πίνακα των κερδών σε αύτη την περίπτωση να έχει κέρδη θετικά και αρκετά μεγάλα για να μην παίζουν σημαντικό ρόλο στην υλοποίηση οι χρονικές μεταβολές που υπάρχουν στον πίνακα \mathbf{B} και άρα η παράγωγος του μηδενική. Επιπλέον θα ισχύει $\int_0^\tau \mathbf{y}_e^T \mathbf{B} \beta \mathbf{y}_e \mathbf{r}^T \mathbf{r} dt \geq 0$ επιλέγοντας σε αυτή την περίπτωση τα κέρδη του πίνακα β να είναι όλα θετικά και αρκετά μεγάλα για να μην παίζουν ρόλο οι χρονικές μεταβολές των στοιχείων του πίνακα \mathbf{B} . Επομένως ισχύει:

$$\int_0^\tau -\mathbf{w}_e^T \mathbf{y}_e dt = - \int_0^\tau \mathbf{x}^T (\mathbf{A}_m - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}_p)^T \mathbf{P} \mathbf{x}_e dt - \int_0^\tau \mathbf{r}^T (\mathbf{B}_m - \mathbf{B}\mathbf{K}_{pm})^T \mathbf{P} \mathbf{x}_e dt \geq 0$$

Άρα το σύστημα μας θα είναι παθητικό και συνεπώς από το θεώρημα υπερευστάθειας το σφάλμα παρακολούθησης $\mathbf{x}_e = \mathbf{x}_m - \mathbf{x}$ θα συγκλίνει ασυμπτωτικά στο μηδέν οπότε το σύστημα μας θα παρακολουθεί το μοντέλο με τα επιθυμητά χαρακτηριστικά.

iv. Παρατηρώντας την μορφή της τεχνητής εξόδου $y_e = Cx_e = B^T Px_e = Px_e$, όπου ο πίνακας P έχει προσδιοριστεί από την εξίσωση *Lyaupon* θεωρώντας το πίνακα Q ίσο

με τον μοναδιαίο προκύπτει ότι $y_e = \begin{bmatrix} 1.3125x_{e1} + 0.0312x_{e3} \\ 1.3125x_{e2} + 0.0312x_{e4} \\ 0.0312x_{e1} + 0.0664x_{e3} \\ 0.0312x_{e2} + 0.0664x_{e4} \end{bmatrix}$ και από την

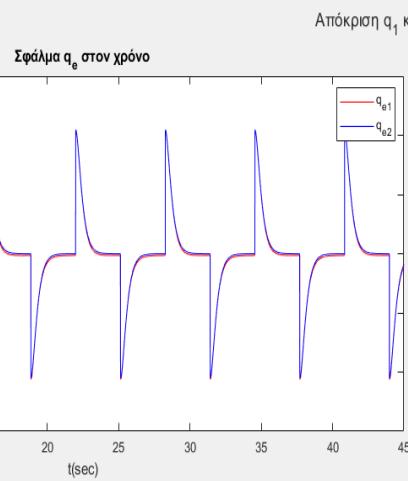
μορφή αυτή καταλήγω στο συμπέρασμα ότι οι πίνακες α, β θα πρέπει να είναι της μορφής $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ δηλαδή σαν να είναι αποσυζευγμένες οι καταστάσεις x_1, x_3 με τις x_2, x_4 . Επιπλέον, προκειμένου να ρυθμίσω την ταχύτητα σύγκλισης τους, τους πολλαπλασιάζω με έναν 2×2 διαγώνιο πίνακα ο οποίος θα έχει κατάλληλα κέρδη τέτοια ώστε να είναι αρκετά μεγάλα για να αγνοούνται οι χρονικές μεταβολές των παραμέτρων των πινάκων A, B . Παρακάτω, φαίνονται τα σχετικά γραφήματα για τους δύο στόχους ελέγχου που θέλουμε να επιτύχουμε.

Για τον **A**) στόχο ελέγχου δηλαδή για τον τετραγωνικό παλμό παίρνουμε τα εξής γραφήματα με κέρδη

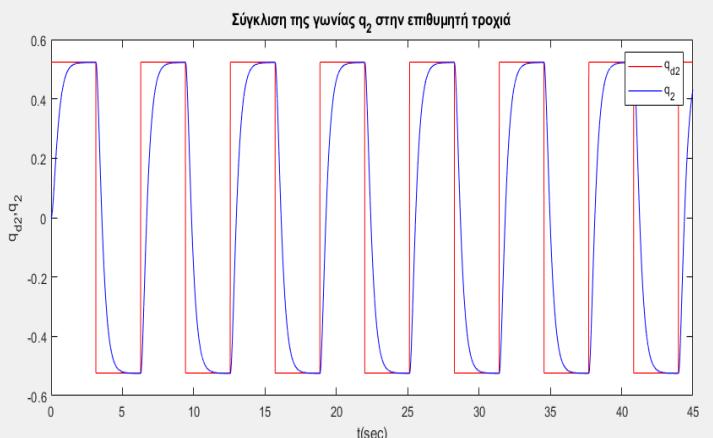
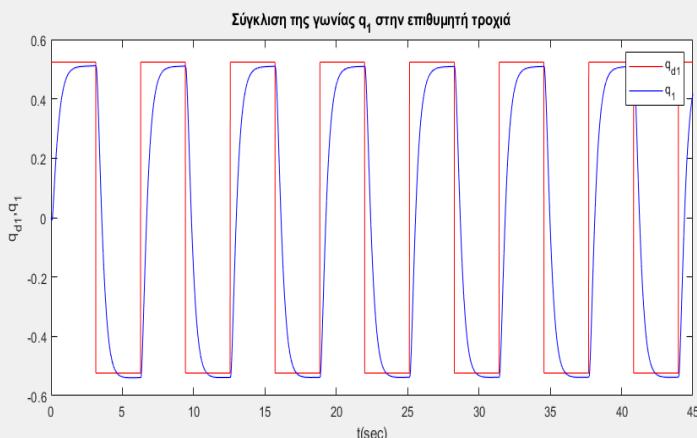
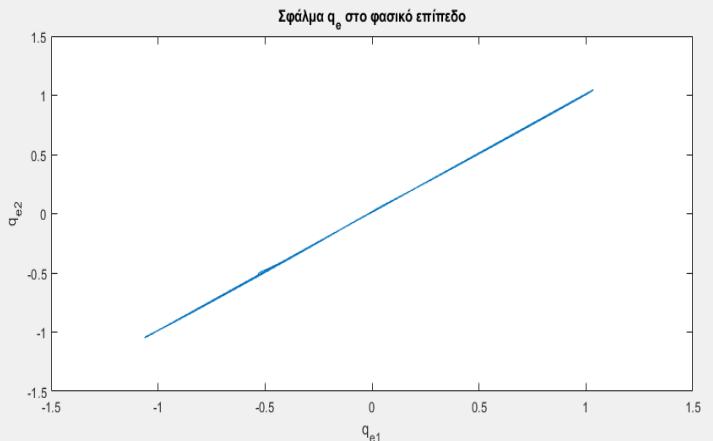
$$\alpha_1 = -\begin{bmatrix} 270 & 0 \\ 0 & 270 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\beta_1 = -\begin{bmatrix} 2500 & 0 \\ 0 & 2500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 270 & 0 \\ 0 & 270 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ και}$$

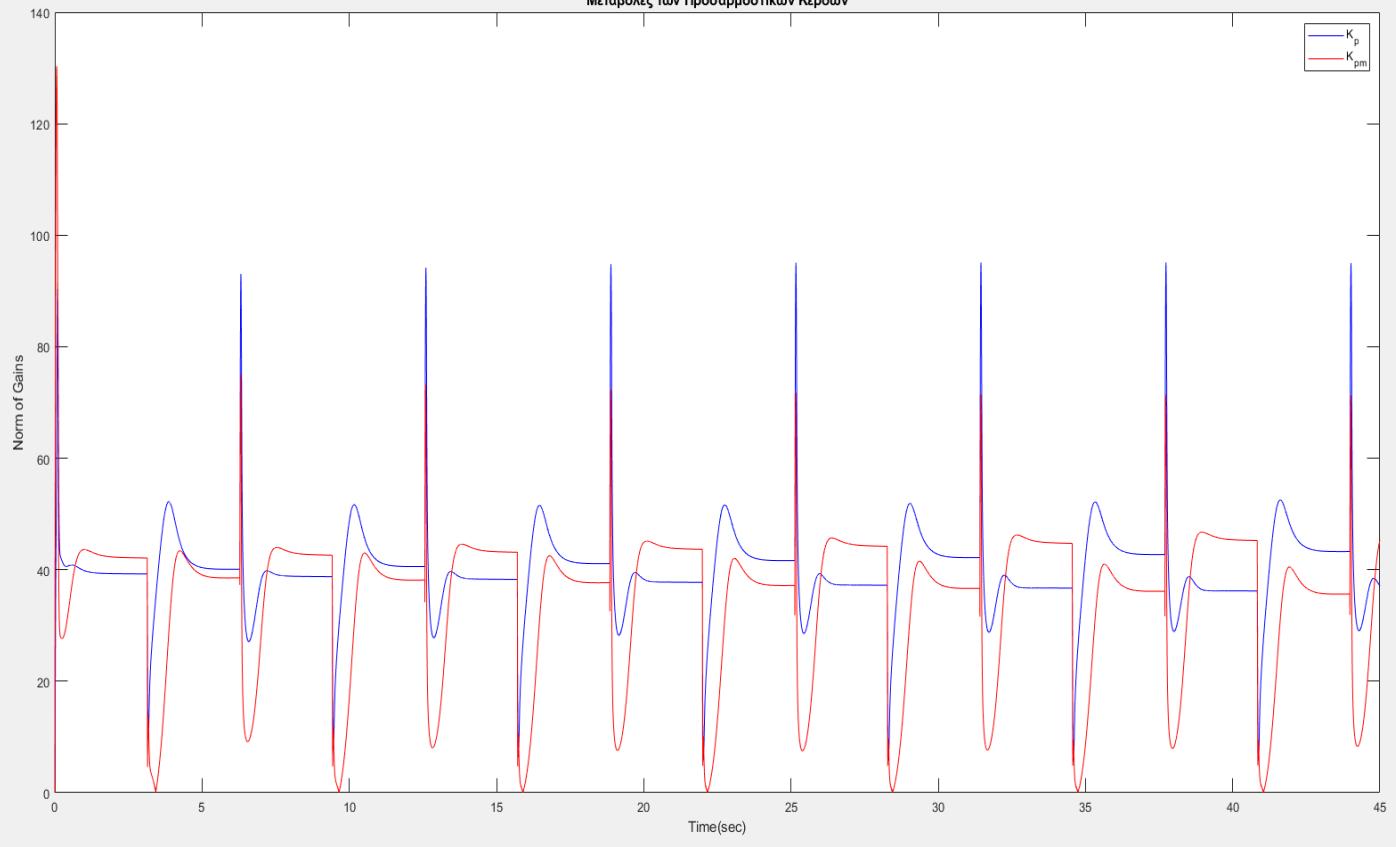
$$\beta_2 = \begin{bmatrix} 2500 & 0 \\ 0 & 2500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



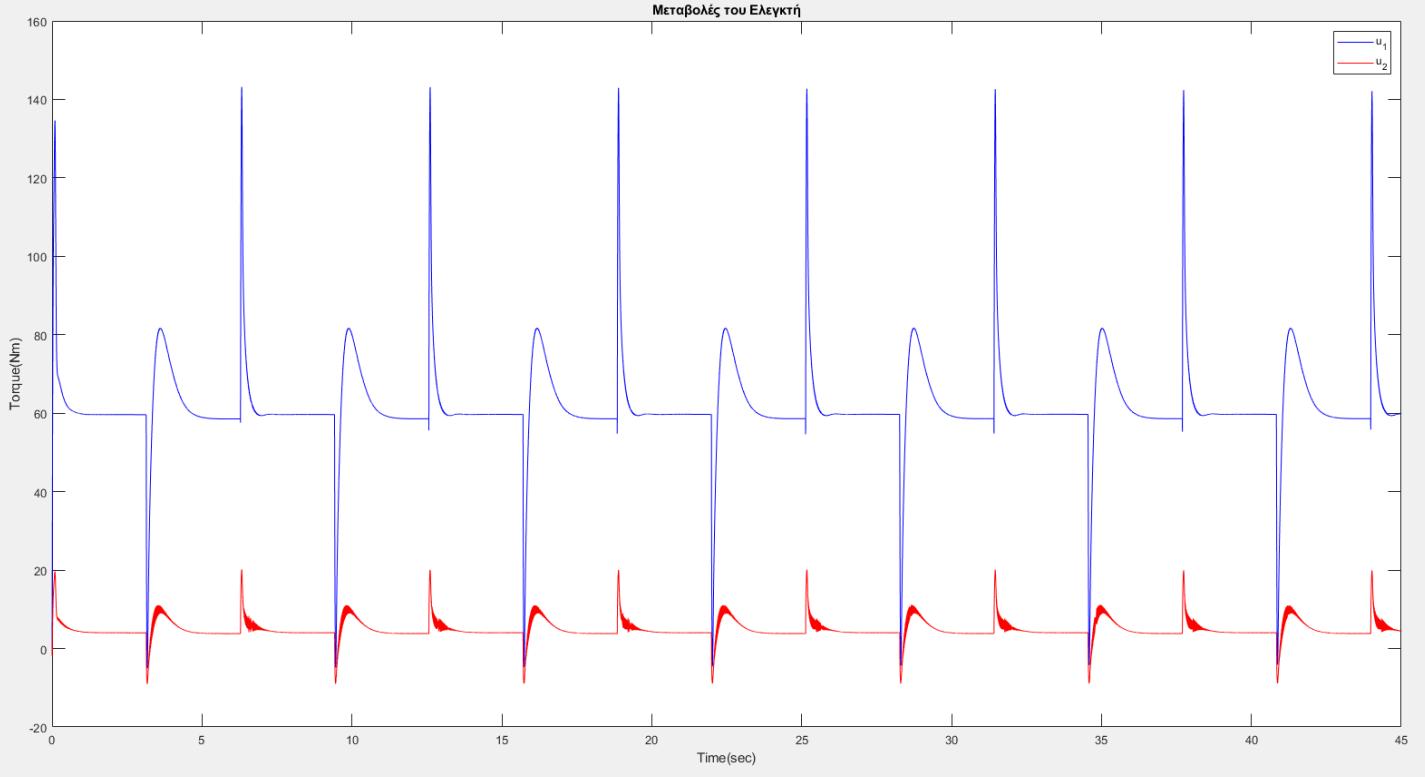
Απόκριση q_1 και q_2 και των σφαλμάτων τους



Μεταβολές των Προσαρμοστικών Κερδών



Μεταβολές του Ελεγκτή

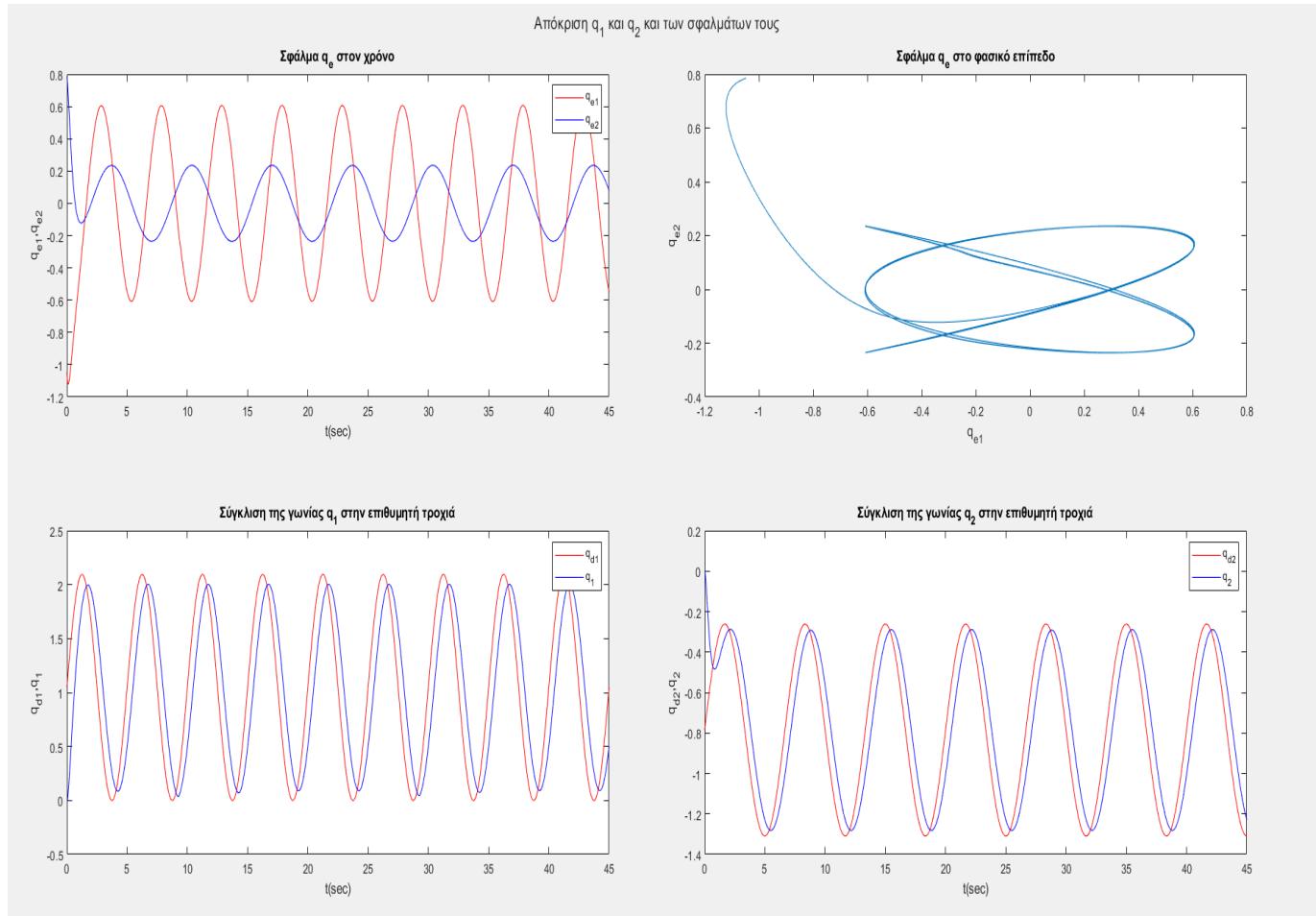


Για τον **B)** στόχο ελέγχου δηλαδή για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις παίρνουμε τα εξής γραφήματα με κέρδη

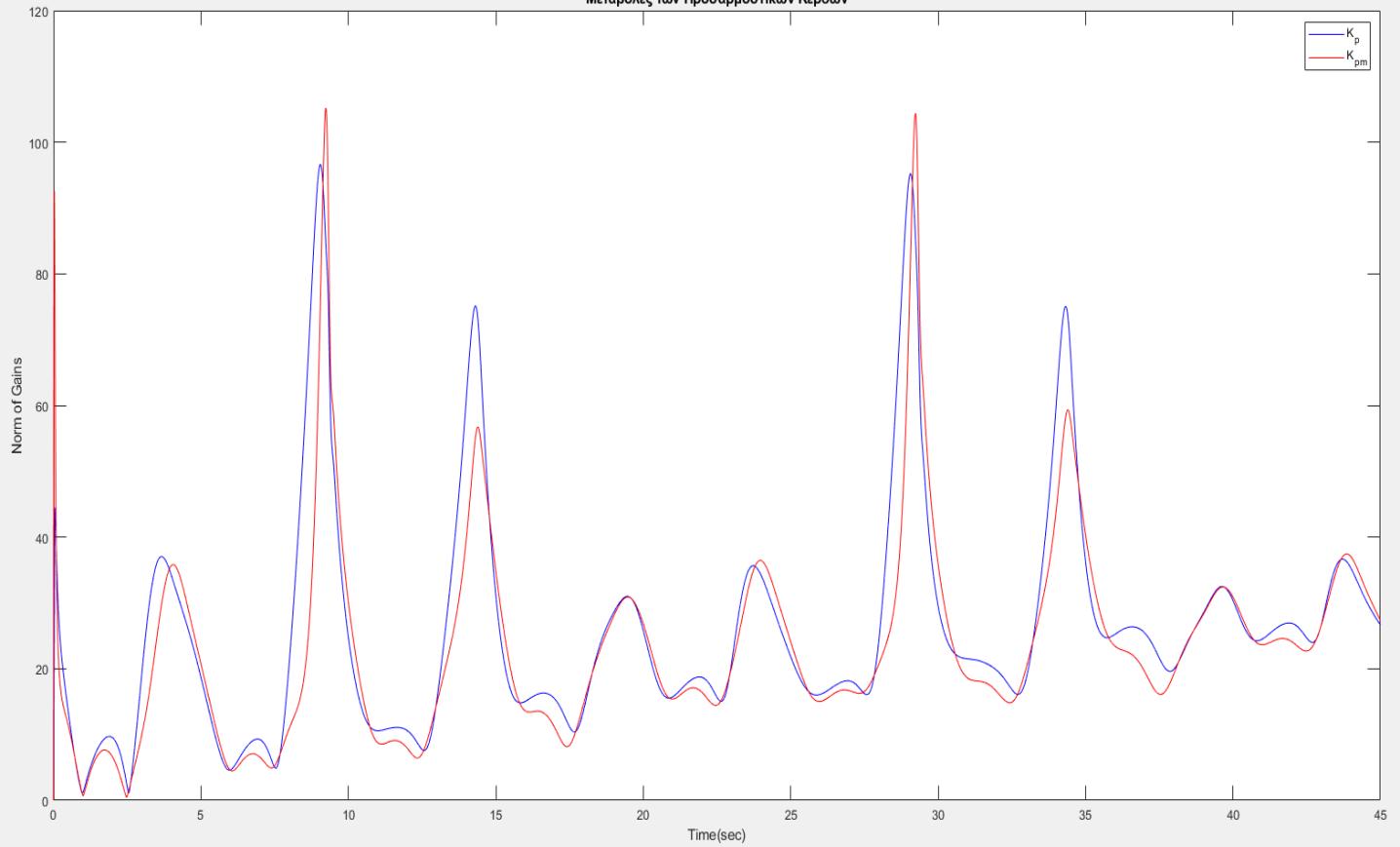
$$\alpha_1 = - \begin{bmatrix} 270 & 0 \\ 0 & 270 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\beta_1 = - \begin{bmatrix} 2500 & 0 \\ 0 & 2500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 270 & 0 \\ 0 & 270 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ και}$$

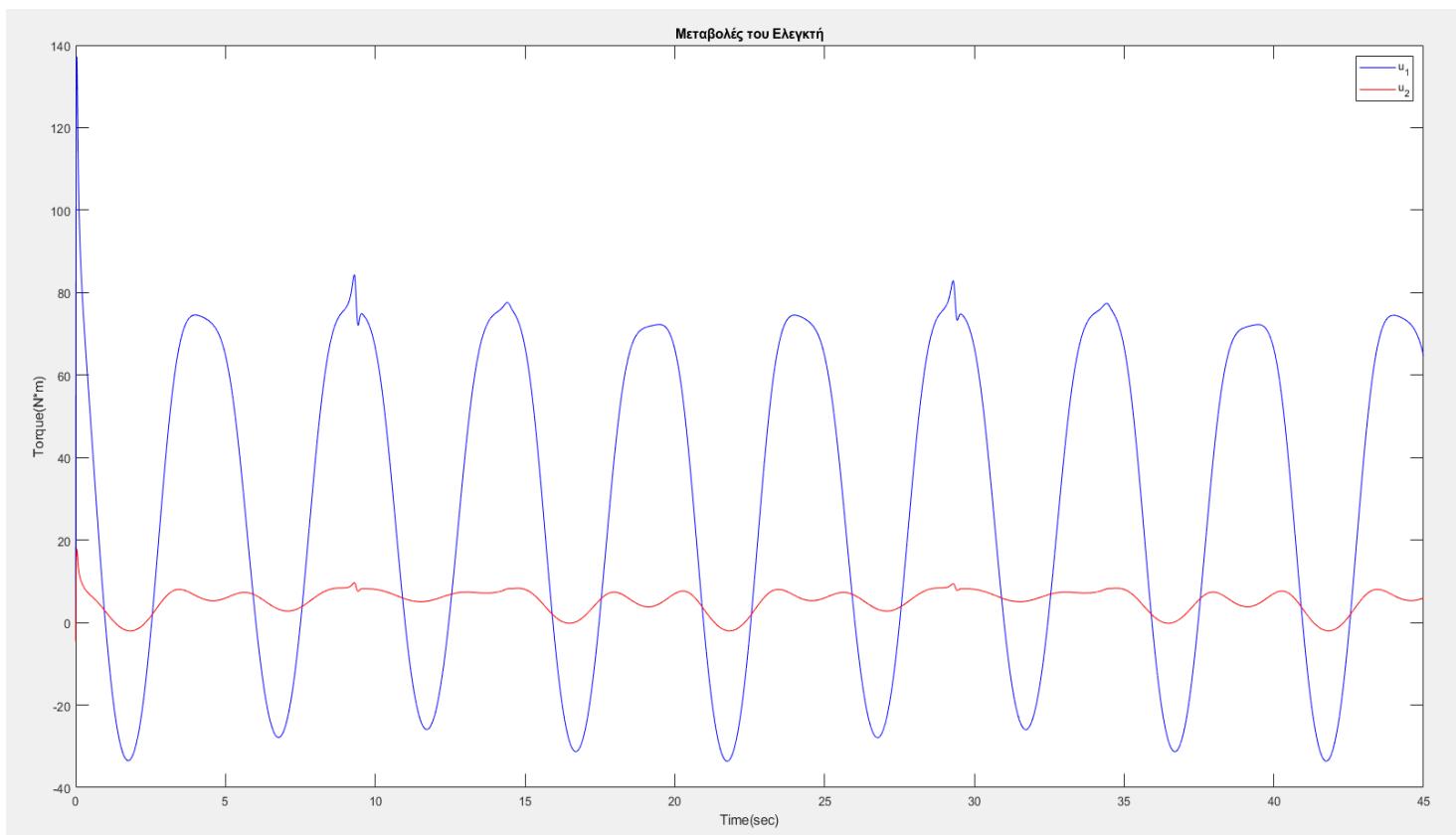
$$\beta_2 = \begin{bmatrix} 2500 & 0 \\ 0 & 2500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Μεταβολές των Προσαρμοστικών Κερδών



Μεταβολές του Ελεγκτή



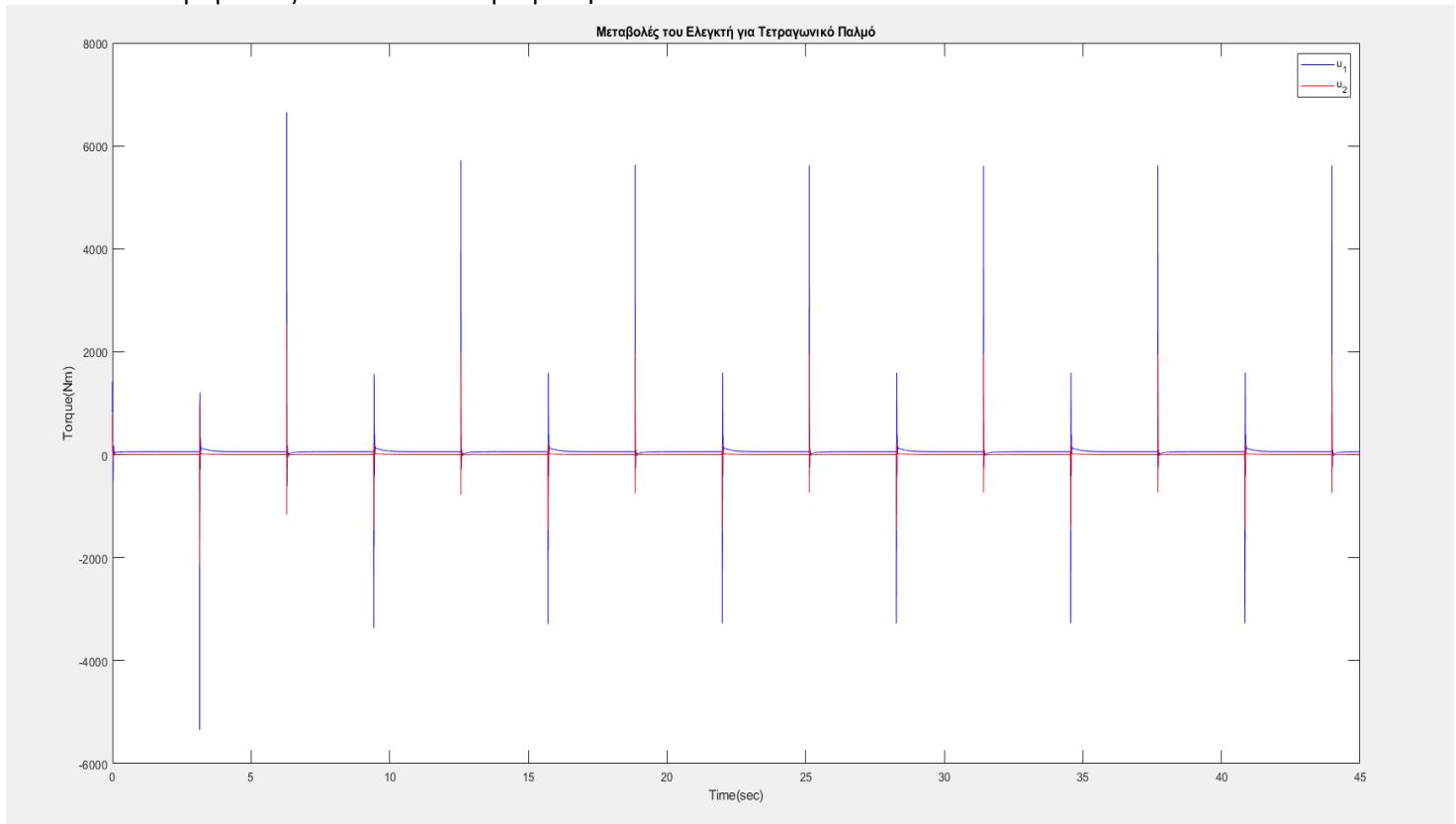
Από τις προσομοιώσεις βλέπουμε ότι το σύστημα μας ακολουθεί σε ικανοποιητικό βαθμό τους επιθυμητούς στόχους της εκφώνησης ενώ επίσης παρατηρούμε ότι για την υλοποίηση του δεν απαιτούνται τεράστιες ροπές εισόδου προκειμένου το σύστημά μας να ακολουθεί το μοντέλο. Επίσης, φαίνεται ότι και τα προσαρμοστικά κέρδη K_p, K_{pm} δεν παίρνουν πολύ μεγάλες τιμές και γενικά δεν αποκλίνουν καθώς περνάει ο χρόνος της προσομοίωσης αλλά βλέπουμε ότι ταλαντώνονται γύρω από ένα συγκεκριμένο εύρος τιμών το οποίο υποθέτουμε, από την μορφή που έχουν τα γραφήματα μέχρι την χρονική στιγμή των **45sec**, πως θα συνεχίσουν να έχουν αυτή την μορφή. Ωστόσο, στην αρχή της προσομοίωσης βλέπουμε ένα τεράστιο spike της εισόδου ελέγχου καθώς και τον προσαρμοστικών κερδών το οποίο οφείλεται λογικά στην ασυνέχεια που παρουσιάζει το σύστημά μας την χρονική στιγμή **t=0**. Συνεπώς, είναι φανερό πως το σύστημα μας για αυτή την επιλογή των πινάκων α, β συμπεριφέρεται όπως θέλουμε χωρίς να έχει πολύ μεγάλες απαιτήσεις σε ροπές εισόδου και σε προσαρμοστικά κέρδη τα οποία θα το κάνουν να συμπεριφέρεται σύμφωνα με το μοντέλο. Τέλος, οι χρονικές μετατοπίσεις που υπάρχουν στα σχήματα σύγκλισης των γωνιών με την επιθυμητή τροχιά είναι μάλλον αποτέλεσμα του χρόνου αποκατάστασης που θέλουμε να έχουμε στο μοντέλο και για αυτό τον λόγο τα σχήματα μας είναι μετατοπισμένα κατά **1sec** πιο πίσω

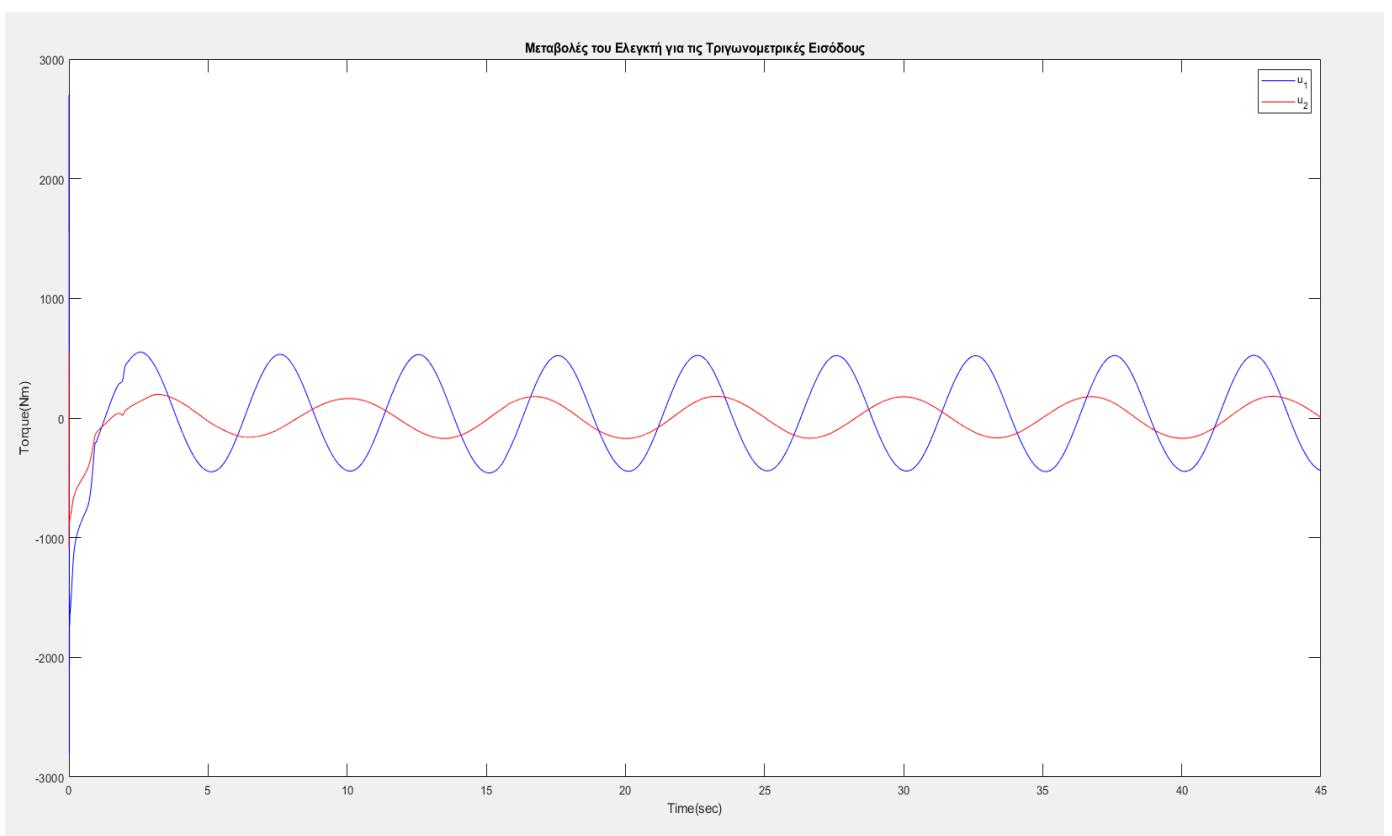
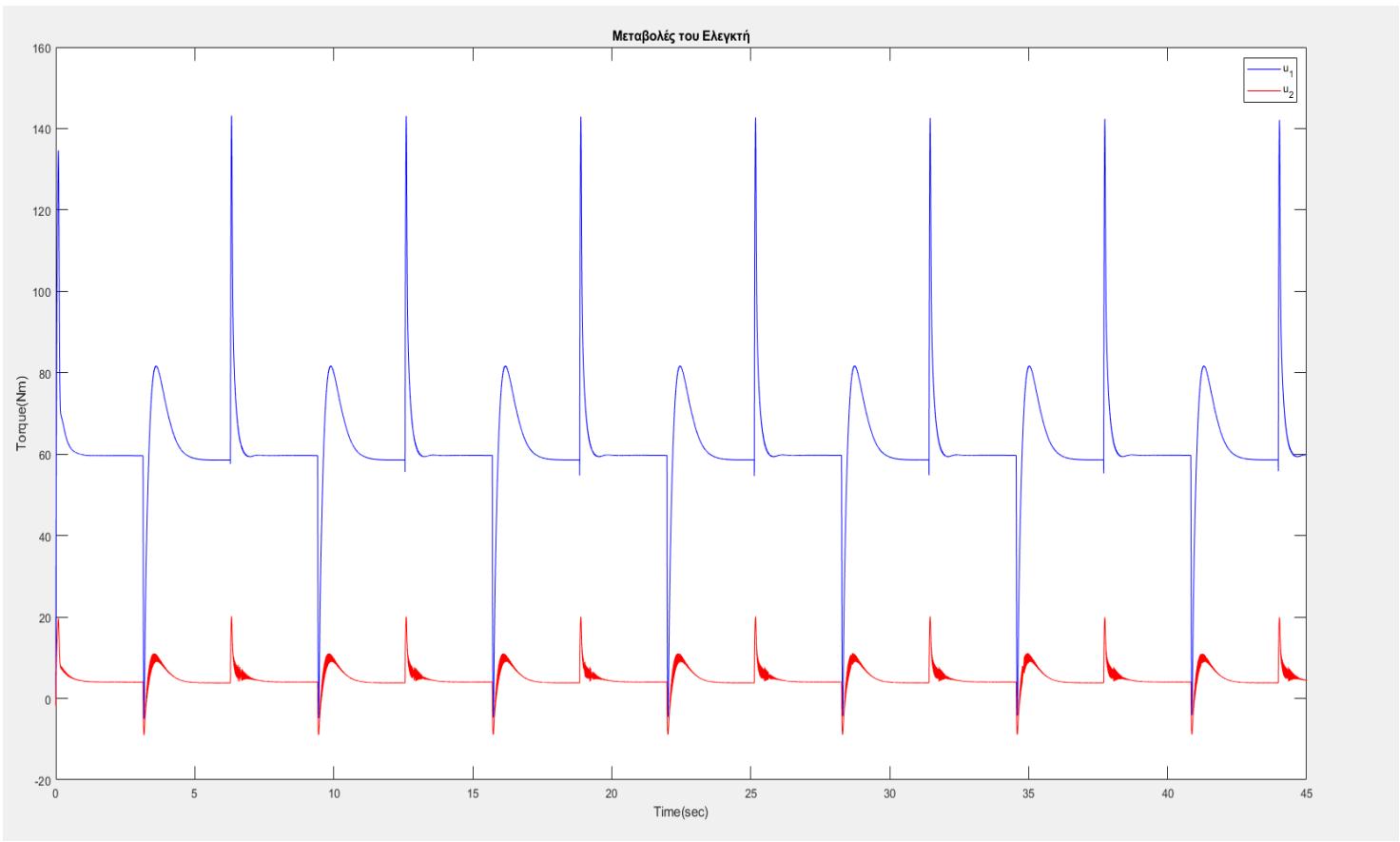
Τμήμα Β

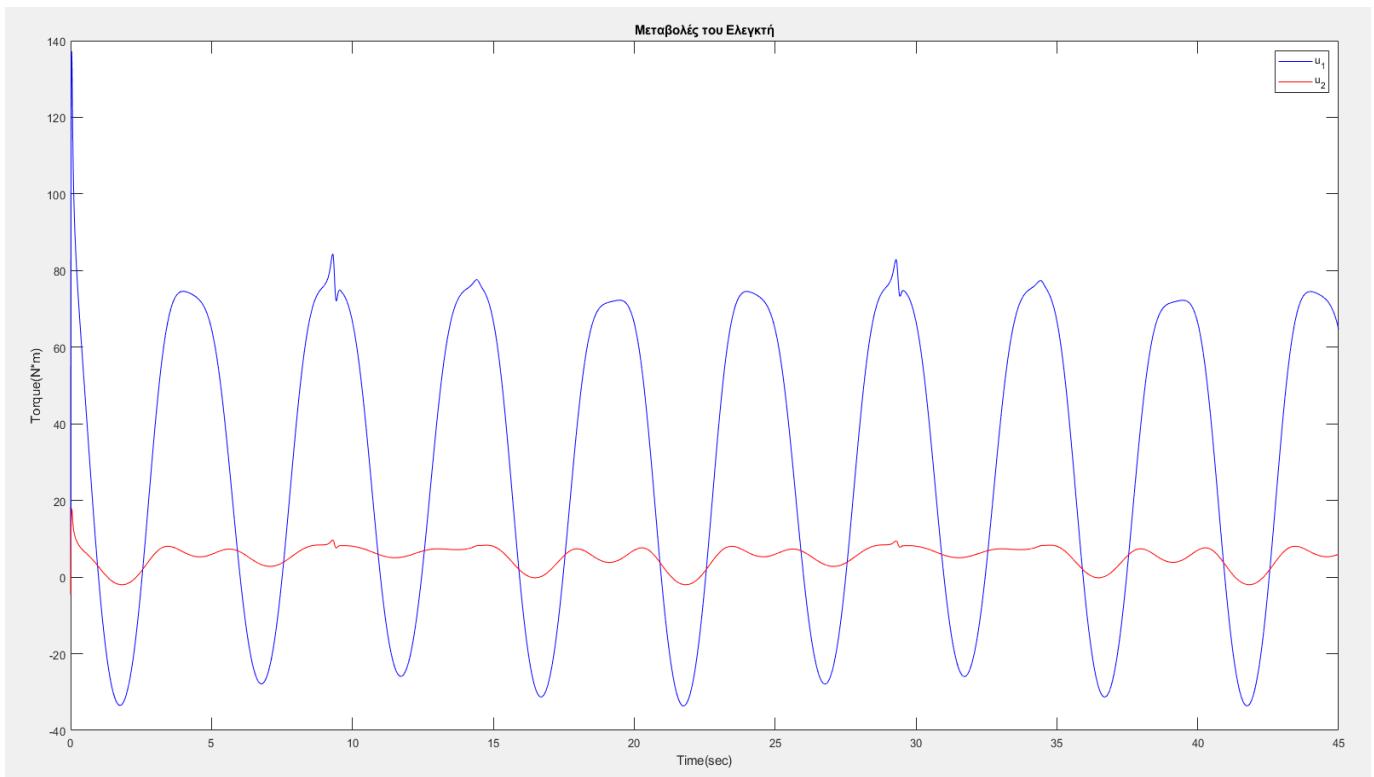
Άσκηση 3)

Είναι φανερό από τα παραπάνω διαγράμματα (αλλά και από τα παρακάτω που θα ακολουθήσουν για διευκόλυνση) ότι με την μέθοδο του Προσαρμοστικού Ελεγκτή Μοντέλου Αναφοράς απαιτείται αρκετά μικρότερη ροπή εισόδου σε σχέση με την μέθοδο του προσαρμοστικού ελέγχου βασισμένου στην παθητικότητα γεγονός που σημαίνει ότι συμφέρει περισσότερο για τον έλεγχο να χρησιμοποιήσουμε το ΠΕΜΑ παρά την άλλη μέθοδο

Παρακάτω φαίνονται ξανά τα διαγράμματα εισόδου **u** για τον πρώτο στόχο ελέγχου, δηλαδή για τον τετραγωνικό παλμό, των δύο μεθόδων έτσι ώστε να φανεί η διαφορά στις τάξεις μεγέθους που απαιτείται για ροπή εισόδου.







Επομένως ως προς αυτόν τον παράγοντα είναι προτιμότερος ο ελεγκτής που σχεδιάζεται με βάση τον Προσαρμοστικό Έλεγχο Μοντέλου Αναφοράς από ότι ο προσαρμοστικός ελεγκτής που βασίζεται στην παθητικότητα. Παρόλα αυτά, παρατηρούμε ότι ο χρόνος εκτέλεσης που απαιτείται είναι μεγαλύτερος στο ΠΕΜΑ κάτι που είναι λογικό και αναμενόμενο διότι με αυτή την μέθοδο προσπαθούμε να ακολουθήσουμε ένα συγκεκριμένο μοντέλο αναφοράς σε αντίθεση με την άλλη μέθοδο όπου κάτι τέτοιο δεν απαιτείται για τον σχεδιασμό του ελεγκτή μας. Τέλος, παρατηρούμε ότι με τον Προσαρμοστικό Ελεγκτή Μοντέλου Αναφοράς έχουμε μεγαλύτερο σφάλμα παρακολούθησης της τροχιάς από ότι με τον ελεγκτή βασισμένο στην παθητικότητα και αυτό διότι προσπαθεί ο πρώτος ελεγκτής να ακολουθήσει ένα συγκεκριμένο μοντέλο αναφοράς.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΚΩΔΙΚΕΣ:

Οι κώδικες για το τμήμα Α της εργασίας βρίσκονται στον φάκελο **section A**. Ο φάκελος αυτός περιέχει τις συναρτήσεις που καλείται η `ode45` καθώς επίσης και μικρότερα `scripts` για την κάθε βηματική και συνάρτηση ράμπας. Η **thema1_unit_step.m** περιέχει τα διαγράμματα για την βηματική για το πρώτο ερώτημα με το γραμμικό σύστημα, η **thema1_ramp.m** περιέχει τα διαγράμματα για την συνάρτηση ράμπας του γραμμικού συστήματος, η **thema2_unit_step.m** περιέχει τα διαγράμματα για την βηματική συνάρτηση του μη γραμμικού συστήματος με την συνάρτηση κορεσμού, η **thema2_ramp.m** περιέχει τα διαγράμματα για την συνάρτηση ράμπας με κλίση 1 του μη γραμμικού συστήματος, η **thema2_ramp_slope_1_5.m** τα διαγράμματα για την συνάρτηση ράμπας κλήσης 1.5 του μη γραμμικού συστήματος και τέλος η **thema2_ramp_slope_2.m** τα

διαγράμματα του μη γραμμικού συστήματος για την συνάρτηση ράμπας με κλίση 2. Επίσης υπάρχει και ένα βασικό script με όνομα **main.m** το οποίο παράγει όλα τα απαραίτητα γραφήματα που χρειάζονται στο τμήμα **A** της εργασίας δηλαδή τρέχει όλες τα προαναφερθέντα scripts.

Οι κώδικες για το τμήμα **B** της εργασίας βρίσκονται στον φάκελο **section B**. Ο φάκελος αυτός περιέχει τις συναρτήσεις που καλείται η **ode45** καθώς επίσης και μικρότερα scripts για την επίτευξη των δύο επιθυμητών στόχων ελέγχου και με τις δύο μεθόδους που ζητούνται στην εκφώνηση δηλαδή και με τον Προσαρμοστικό Έλεγχο Μοντέλου Αναφοράς αλλά και με τον προσαρμοστικό ελεγκτή βασισμένο στην παθητικότητα. Η **rectangular.m** περιέχει το script που ικανοποιεί τον πρώτο στόχο ελέγχου για τον προσαρμοστικό ελεγκτή βασισμένο στην παθητικότητα, η **trigonometric.m** περιέχει το script που ικανοποιεί τον δεύτερο στόχο ελέγχου για τον ελεγκτή βασισμένο στην παθητικότητα, η **rectangularMRCA.m** περιέχει το script που ικανοποιεί τον πρώτο στόχο ελέγχου για τον προσαρμοστικό ελεγκτή μοντέλου αναφοράς και τέλος η **trigonometricMRCA.m** περιέχει το script που ικανοποιεί τον δεύτερο στόχο ελέγχου για τον προσαρμοστικό ελεγκτή μοντέλου αναφοράς. Επίσης υπάρχει και ένα βασικό script με όνομα **main2.m** το οποίο παράγει όλα τα απαραίτητα γραφήματα που χρειάζονται στο τμήμα **B** της εργασίας δηλαδή τρέχει όλες τα προαναφερθέντα scripts.