Εργασία - Θεωρία Εκτίμησης και Ανίχνευσης

Θέμα 1ο

1.1)

Το κατώτερο όριο της διασποράς για την εκτίμηση του λ (το οποίο θεωρήσαμε ότι είναι ίσο με 2), είναι ($var(\hat{\lambda}) \geq \frac{\lambda^2}{N}$)το οποίο προκύπτει από το CRLB όπως φαίνεται από τις εξισώσεις παρακάτω.

$$p(x[n];\lambda) = \lambda e^{-\lambda x[n]} \; \eta \; pdf \; \mu ί\alpha\varsigma \; \mu ό\nu o \; \mu έ\tau\rho\eta\sigma\eta\varsigma$$

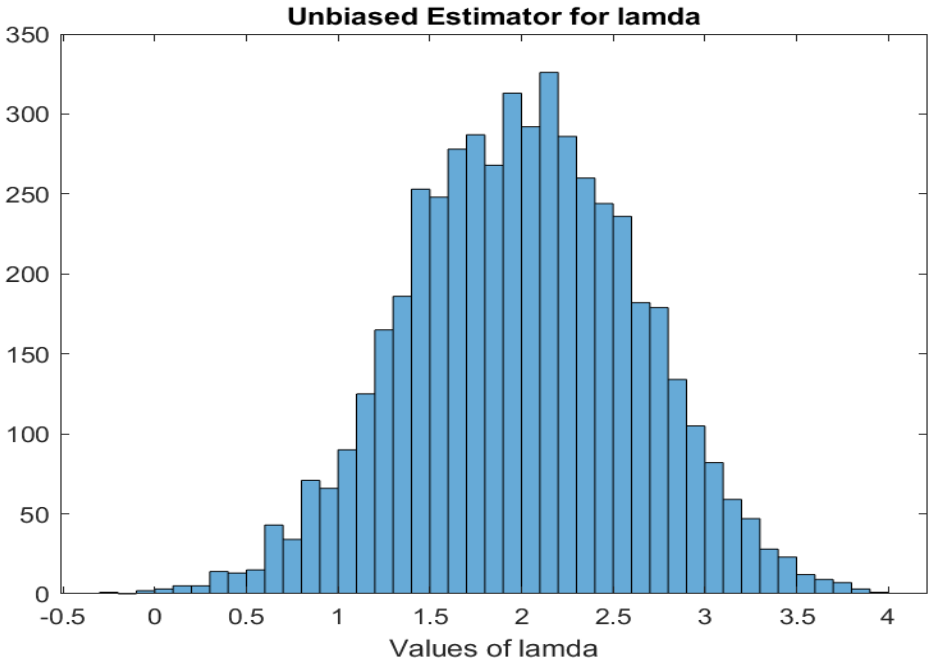
$$p(\vec{x};\lambda) = \prod_{n=0}^{N-1} p(x[n];\lambda) = \prod_{n=0}^{N-1} \lambda e^{-\lambda x[n]} \Longrightarrow \ln\big(p(\vec{x};\lambda)\big) = \ln\left(\prod_{n=0}^{N-1} p(x[n];\lambda)\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \ln\big(p(\vec{x};\lambda)\big) = \sum_{n=0}^{N-1} (ln\lambda - \lambda x[n])$$

$$\frac{\partial \ln(p(\vec{x};\lambda))}{\partial \lambda} = \sum_{n=0}^{N-1} (\frac{1}{\lambda} - x[n]) \Rightarrow \frac{\partial^2 \ln(p(\vec{x};\lambda)}{\partial x^2} = -\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\lambda^2} = -\frac{N}{\lambda^2}$$

Άρα το Fisher Information θα είναι : $I(\lambda) = -E_x\left[\frac{\partial^2 \ln(p(\vec{x};\lambda)}{\partial x^2}\right] = \frac{N}{\lambda^2}$ οπότε το CRLB προκύπτει ότι θα είναι $var(\hat{\lambda}) \geq \frac{1}{I(\lambda)} = \frac{\lambda^2}{N}$

Παρακάτω απεικονίζουμε το ιστόγραμμα ενός unbiased εκτιμητή με μέση τιμή ίση με λ, έτσι ώστε $E[\hat{\lambda}] = \lambda \; και \; var(\hat{\lambda}) = \frac{\lambda^2}{N}$



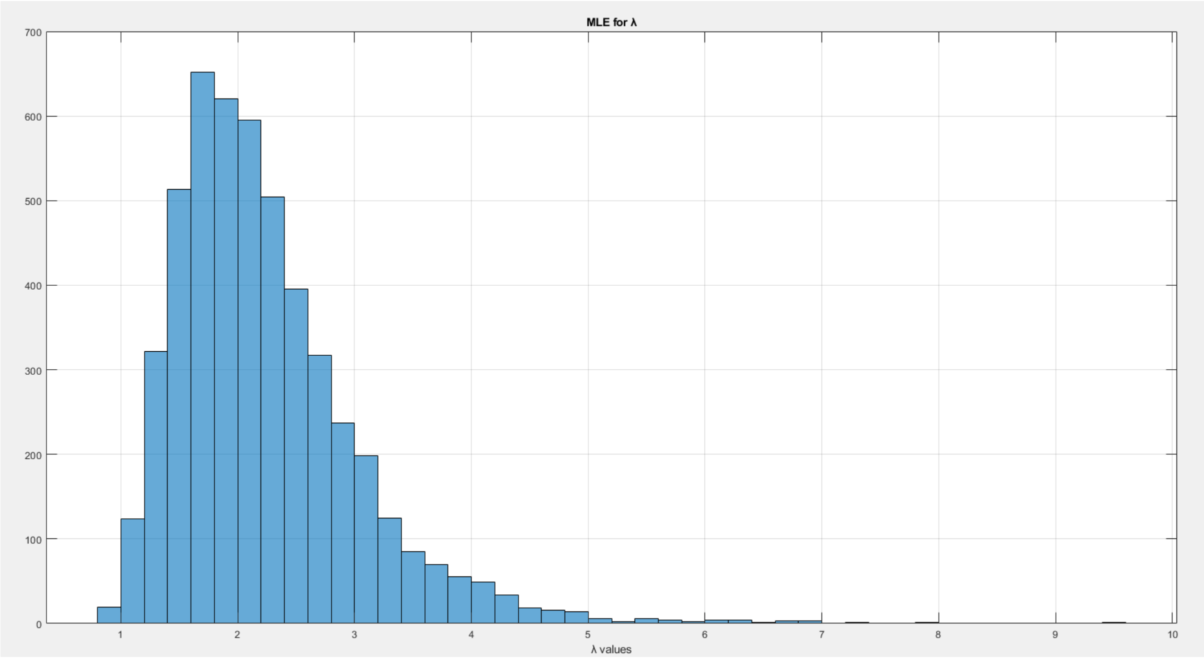
Κούνσολας Χρήστος(AEM 10345)
Δαρδαμπούνης Χρήστος-Αλέξανδρος (AEM 10335)

1.2)

Ο εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας της παραμέτρου λ δηλαδή ο MLE εκτιμητής που προκύπτει είναι ο εξής :

$$\frac{\partial \ln\big(p(\vec{x};\lambda)\big)}{\partial\lambda} = 0 \rightarrow \frac{\mathrm{N}}{\lambda} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \rightarrow \lambda = \frac{1}{\frac{1}{\mathrm{N}}\cdot\sum_{n=0}^{N-1} x[n]} \rightarrow \hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}}$$

Παρακάτω φαίνεται το ιστόγραμμα του για 5000 διαφορετικά πειράματα μέτρησης με 10 μετρήσεις ανά πείραμα :



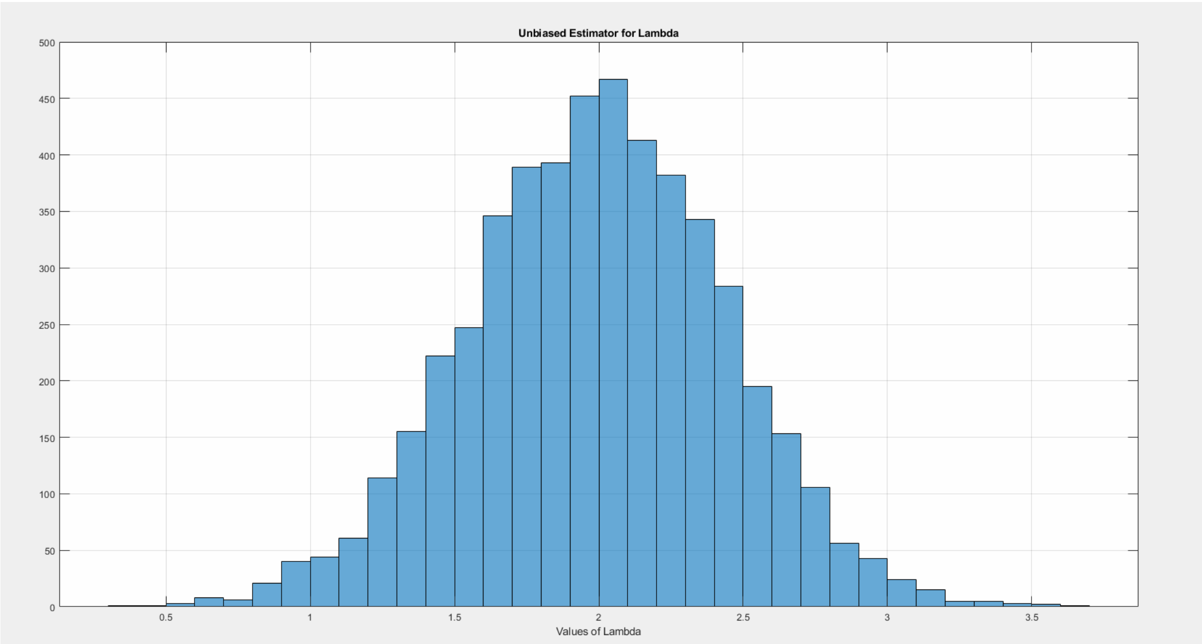
Παρατηρούμε ότι το παραπάνω ιστόγραμμα δεν μοιάζει με το ιστόγραμμα του αμερόληπτου εκτιμητή που προέκυψε από την εφαρμογή του CRLB θεωρήματος, ενώ ακόμα βλέπουμε πως υπάρχει μια σημαντική διαφορά μεταξύ της μέσης τιμής καθώς και της διασποράς του εκτιμητή αυτού με τις τιμές του εκτιμητή του ερωτήματος 1

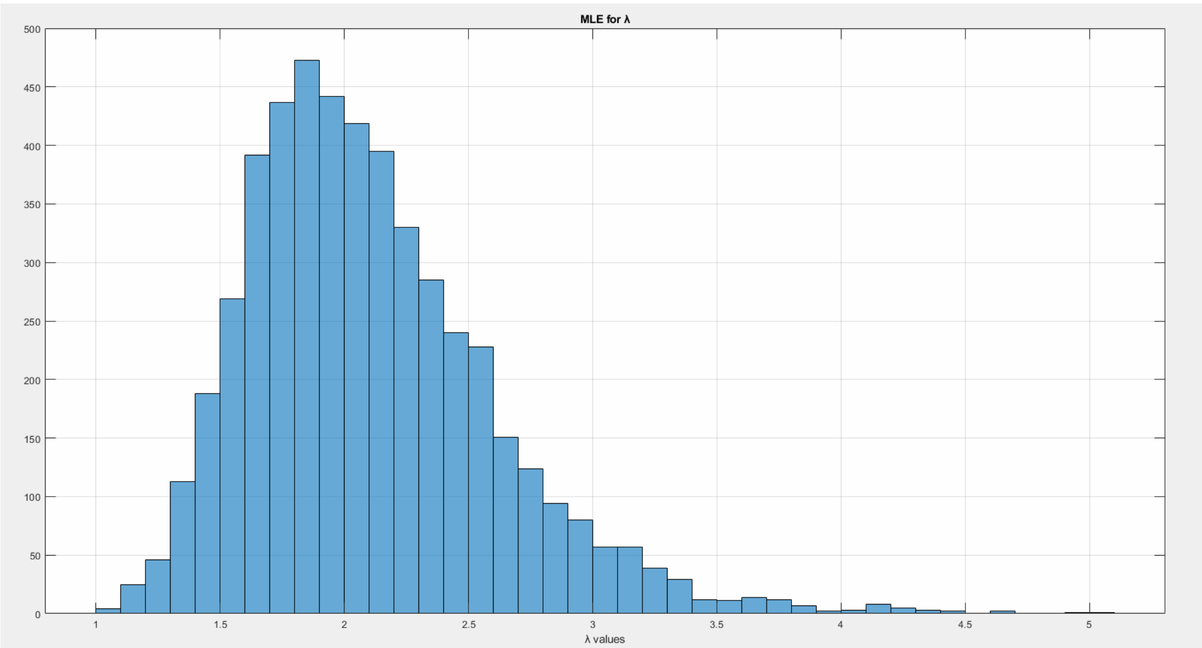
Η διαφορά ως προς την μέση τιμή είναι 0.200898301848954 ενώ ως προς την διασπορά είναι 0.201091080134255 από το οποίο μπορούμε να συμπεράνουμε πως οι εκτιμητές αυτοί διαφέρουν σημαντικά μεταξύ τους

Κούνσολας Χρήστος(AEM 10345)
Δαρδαμπούνης Χρήστος-Αλέξανδρος (AEM 10335)

1.3)

Τα ιστογράμματα των 2 εκτιμητών για 20 μετρήσεις ανά πείραμα φαίνονται παρακάτω και είναι τα εξής :

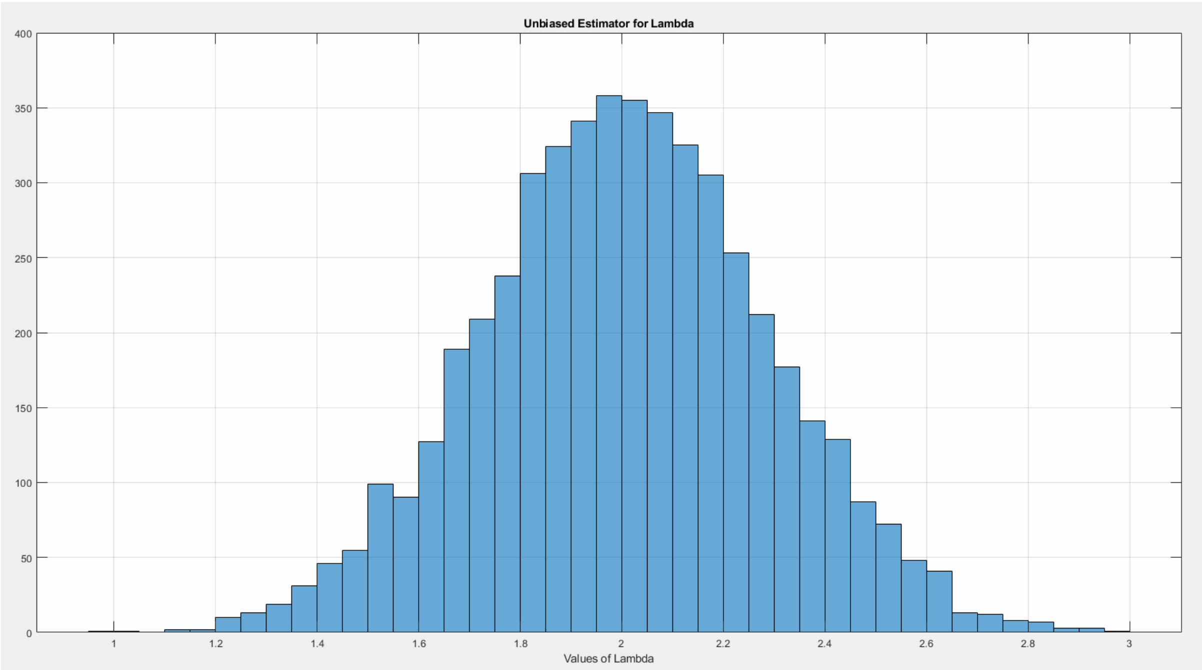


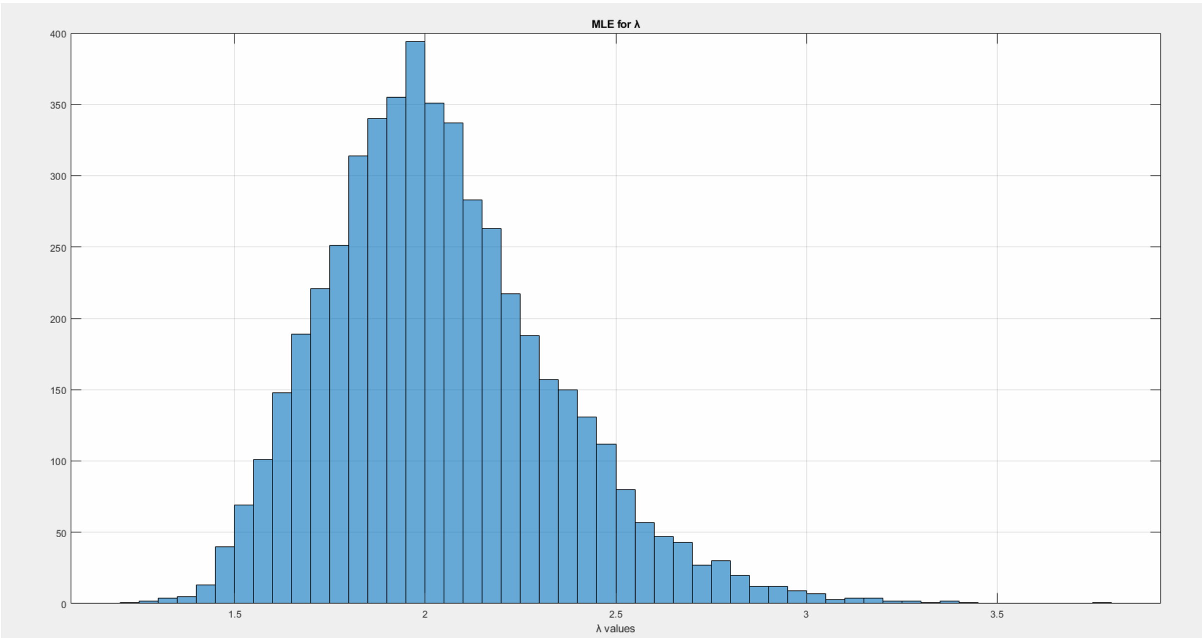


Η διαφορά ως προς την μέση τιμή είναι 0.102735177672882 ενώ ως προς την διασπορά είναι 0.0403195043887497 από το οποίο μπορούμε να συμπεράνουμε πως οι εκτιμητές αυτοί διαφέρουν σημαντικά μεταξύ τους

Κούνσολας Χρήστος(ΑΕΜ 10345)
Δαρδαμπούνης Χρήστος-Αλέξανδρος (ΑΕΜ 10335)

Τα ιστογράμματα των 2 εκτιμητών για 50 μετρήσεις ανά πείραμα φαίνονται παρακάτω και είναι τα εξής :

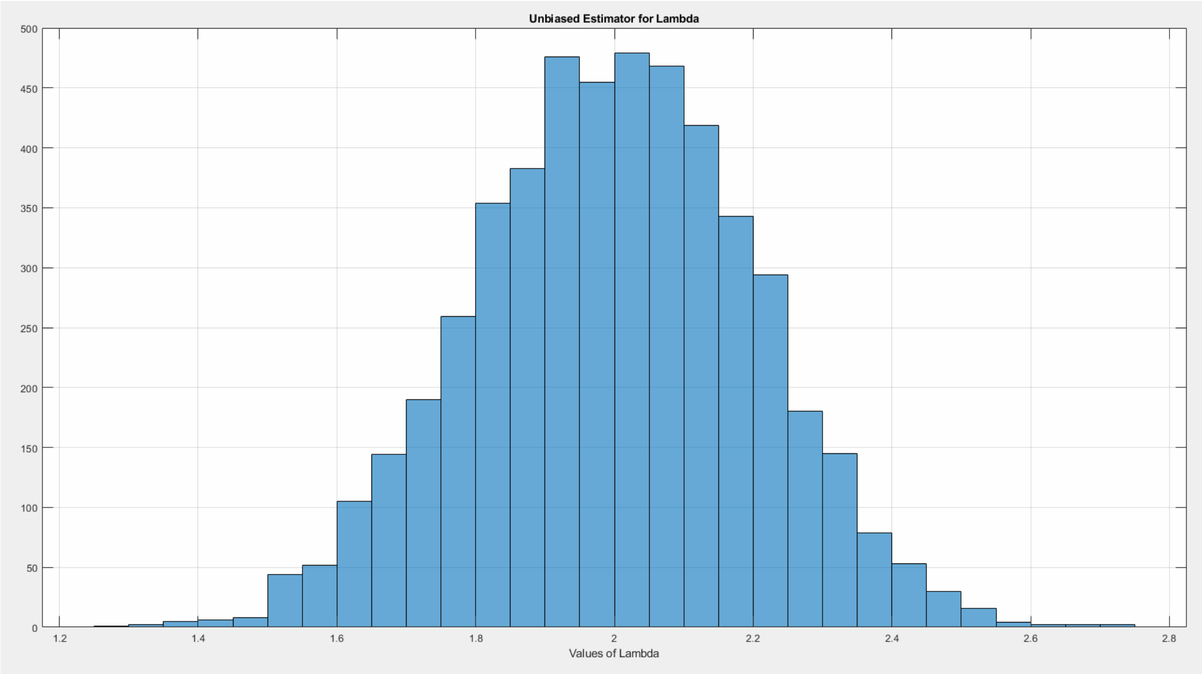


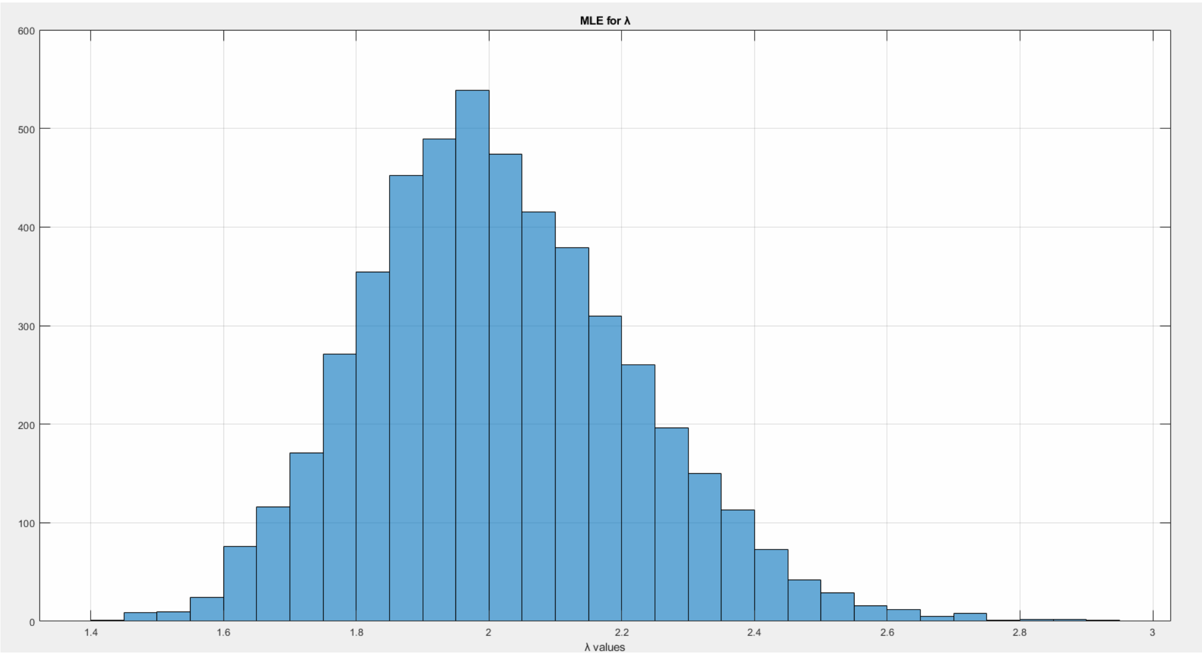


Η διαφορά ως προς την μέση τιμή είναι 0.0345362750278269 ενώ ως προς την διασπορά είναι 0.0110877439196012 από το οποίο μπορούμε να συμπεράνουμε πως οι εκτιμητές αυτοί διαφέρουν σημαντικά μεταξύ τους

Κούνσολας Χρήστος(ΑΕΜ 10345)
Δαρδαμπούνης Χρήστος-Αλέξανδρος (ΑΕΜ 10335)

Τα ιστογράμματα των 2 εκτιμητών για 100 μετρήσεις ανά πείραμα φαίνονται παρακάτω και είναι τα εξής :





Η διαφορά ως προς την μέση τιμή είναι 0.0185391018423022 ενώ ως προς την διασπορά είναι 0.000952671240978219 από το οποίο μπορούμε να συμπεράνουμε πως οι εκτιμητές αυτοί διαφέρουν σημαντικά μεταξύ τους.

Κούνσολας Χρήστος(ΑΕΜ 10345)
Δαρδαμπούνης Χρήστος-Αλέξανδρος (ΑΕΜ 10335)

Καθώς αυξάνεται ο αριθμός των μετρήσεων ανά πείραμα παρατηρούμε ότι ο MLE εκτιμητής πλησιάζει όλο και περισσότερο τον αμερόληπτο εκτιμητή με διασπορά ίση με αυτή που προβλέπει το CRLB. Αυτό το αποτέλεσμα ήταν αναμενόμενο καθότι από την θεωρία γνωρίζουμε πως όσο περισσότερο αυξάνονται οι μετρήσεις τόσο περισσότερο πλησιάζει ο MLE να γίνει efficient.

Θέμα 2ο

2.1)

Από τον τρόπο που μας δίνεται το σύστημα μέτρησης $x[n] = h\theta + w[n]$ μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι :

$x[0] = h \cdot \theta + w[0]$

$x[1] = h \cdot \theta + w[1]$

.

.

.

$x[N-1] = h \cdot \theta + w[N-1]$, Επομένως φτάνουμε στη μορφή $\overrightarrow{\mathbf{x}} = \mathbf{H}\theta + \overrightarrow{\boldsymbol{w}}$

Και άρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον LMMSE εκτιμητή για να προσδιορίσουμε μια εκτίμηση για την στοχαστική μεταβλητή θ. Επομένως, ο εκτιμητής που θα χρησιμοποιήσουμε δίνεται από τις διαφάνειες τις θεωρίας και είναι ο εξής :

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{x}] = \boldsymbol{\mu}_\theta + \boldsymbol{C}_\theta \boldsymbol{H}^T (\boldsymbol{H}\boldsymbol{C}_\theta \boldsymbol{H}^T + \boldsymbol{C}_w)^{-1} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{\mu}_\theta)$$

Όπου το $\boldsymbol{\mu_\theta}$ είναι βαθμωτό μέγεθος αφού επιθυμούμε να εκτιμήσουμε μια μόνο στοχαστική μεταβλητή, ο πίνακας $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{h}\begin{bmatrix}\mathbf{1}\\ \mathbf{1}\\ \vdots\\ \mathbf{1}\end{bmatrix}$ όπως προσδιορίστηκε προηγουμένως, $\boldsymbol{C_\theta} = \boldsymbol{var}(\boldsymbol{\theta})$ για τον ίδιο λόγο που και η μέση τιμή είναι βαθμωτό μέγεθος και τέλος $\boldsymbol{C_w} = \boldsymbol{\sigma^2 I}$ όπου $\boldsymbol{\sigma^2}$ η διασπορά του θορύβου.

2.2)

Ο MLE εκτιμητής για το παραπάνω σύστημα μέτρησης προκύπτει ότι είναι:

$$p(\vec{x};\theta) \;=\; \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{N}{2}}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\cdot\sum_{n=0}^{N-1}(x[n]\,-\,h\cdot\theta)^2} \Longrightarrow$$

$$\ln\big(p(\vec{x};\theta)\big) \;=\; -\ln(2\pi\sigma^2)^{\frac{\mathrm{N}}{2}} - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}(x[n]\;-\;h\cdot\theta)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial\ln\big(p(\vec{x};\theta)\big)}{\partial\theta} \;=+\frac{1}{\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}(x[n]\;-\;h\cdot\theta)^{\cdot}\,h \;\Rightarrow$$

$$\frac{\partial\ln\big(p(\vec{x};\theta)\big)}{\partial\theta} \;= 0 \;\Rightarrow$$

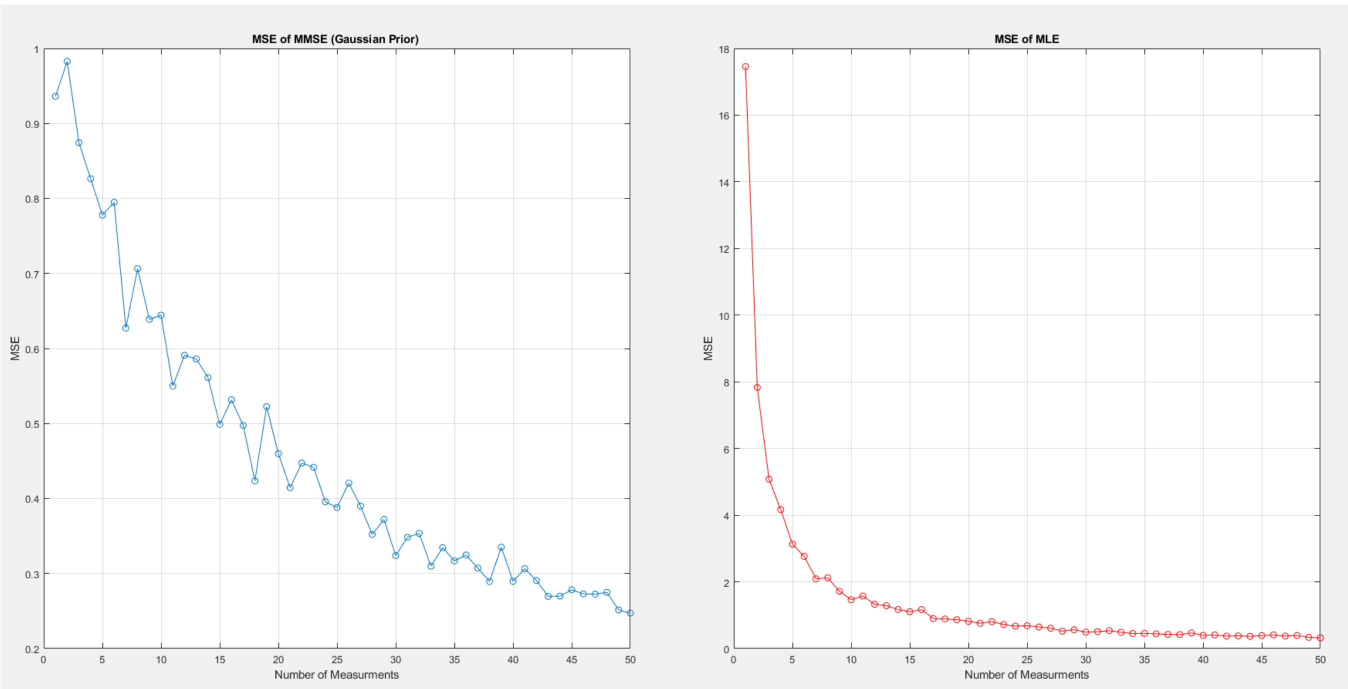
$$\sum_{n=0}^{N-1}(x[n]-h\cdot\theta)\cdot h \;=\; 0 \;\Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{N-1}x[n]-h\cdot\sum_{n=0}^{N-1}\theta \;=\; 0 \;\Rightarrow$$

$$\widehat{\theta_{\mathrm{MLE}}} \;=\; \frac{1}{h\cdot N}\cdot\;\sum_{n=0}^{N-1}x[n]$$

2.3)

Παρακάτω φαίνεται η σύγκλιση του μέσου τετραγώνου σφάλματος συναρτήσει του αριθμού των μετρήσεων που λαμβάνονται αν πείραμα για 500 πειράματα μέτρησης και μέγιστο αριθμό μετρήσεων ανά πείραμα 50.

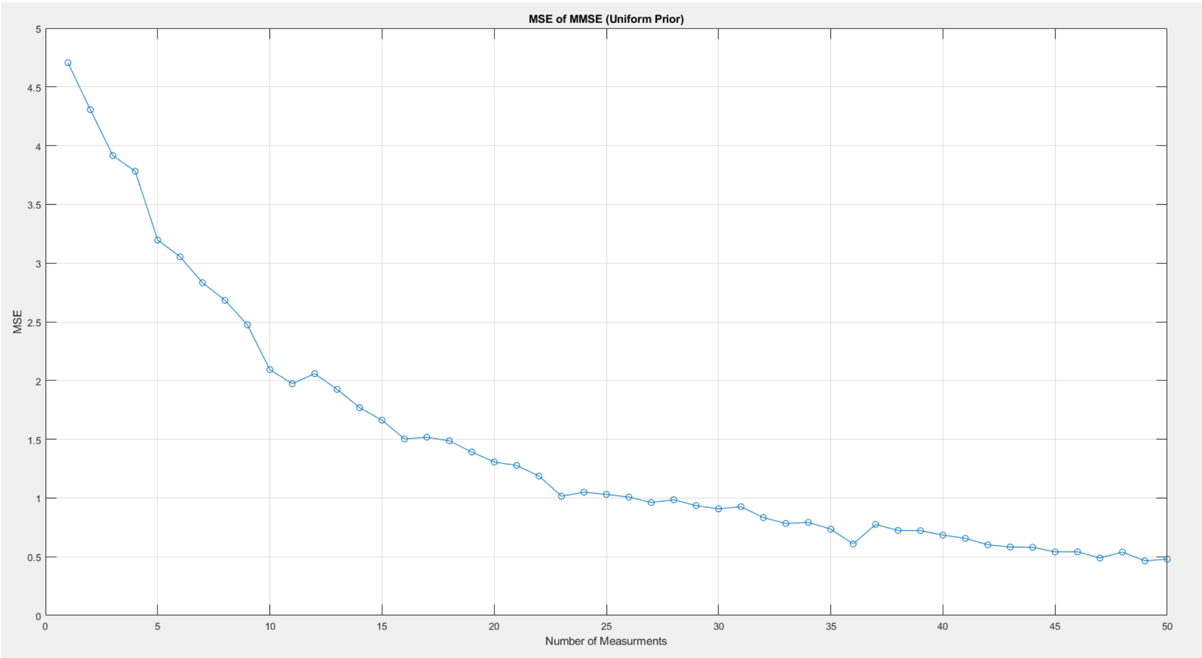


Κούνσολας Χρήστος(ΑΕΜ 10345)
Δαρδαμπούνης Χρήστος-Αλέξανδρος (ΑΕΜ 10335)

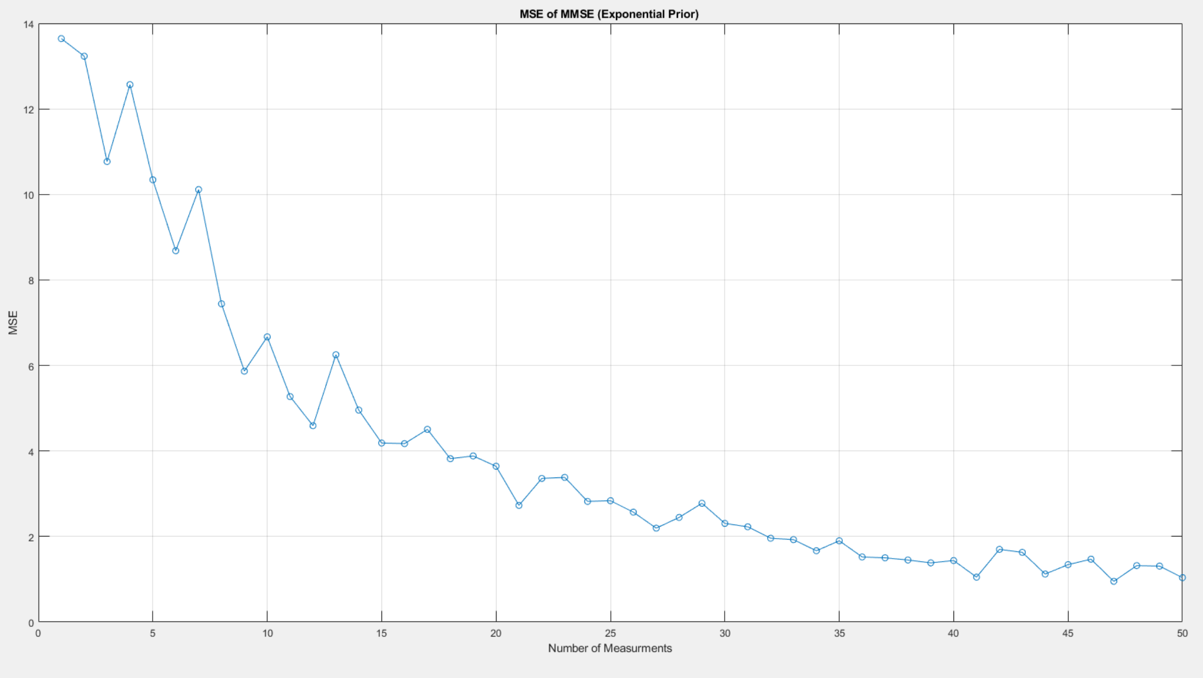
Παρατηρούμε ότι όσο περισσότερο αυξάνεται ο αριθμός των μετρήσεων τόσο περισσότερο μειώνεται το μέσο τετραγωνικό σφάλμα. Αυτή η παρατήρηση ισχύει και για τους δύο εκτιμητές όπου στην πρώτη περίπτωση εκτιμούμε μια στοχαστική παράμετρο και στην δεύτερη περίπτωση εκτιμούμε μια ντετερμινιστική μεταβλητή.

2.4)

Παρακάτω φαίνεται η εκτέλεση του MMSE για εσφαλμένες επιλογές για την κατανομή του θ. Πρώτα φαίνεται η εκτέλεση του για τιμές του θ που αντλήθηκαν από την ομοιόμορφη κατανομή και στην συνέχεια η εκθετική όπου παρουσιάζεται η σύγκλιση του μέσου τετραγωνικού σφάλματος συναρτήσει του αριθμού των μετρήσεων για τον MMSE.



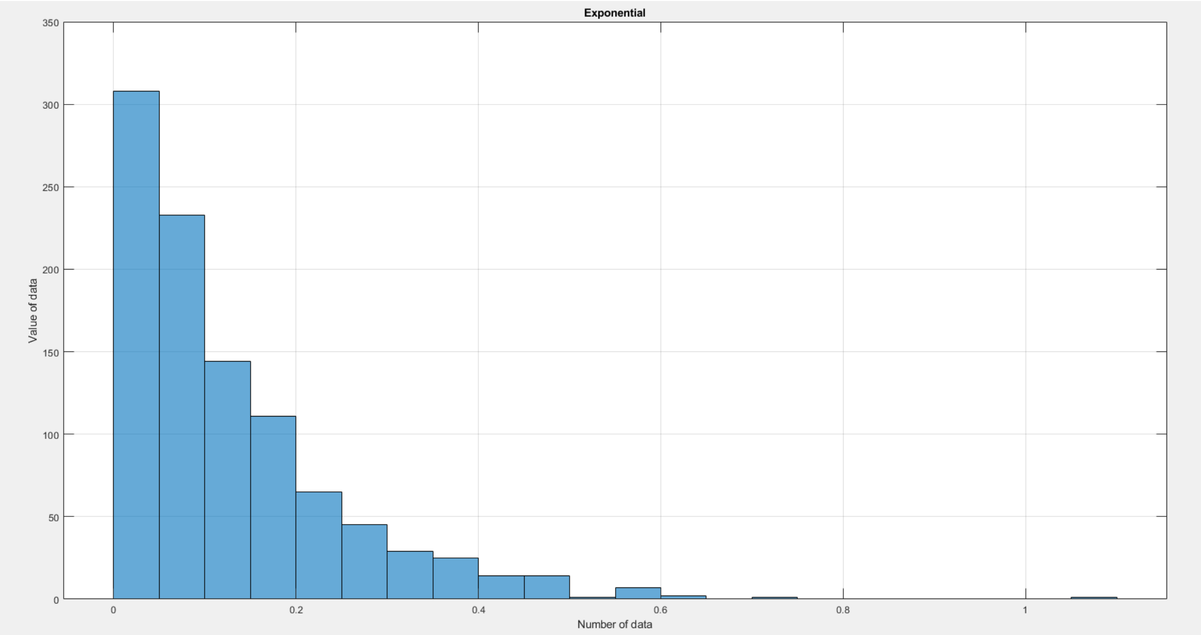
Παρακάτω φαίνεται επίσης η σύγκλιση του μέσου τετραγώνου σφάλματος για εκθετική a priori



Παρατηρούμε ότι με την επιλογή λανθασμένης a priori κατανομής για την στοχαστική μεταβλητή που θέλουμε να εκτιμήσουμε, έχουμε πιο αργή σύγκλιση του μέσου τετραγωνικού σφάλματος κάτι που ήταν αναμενόμενο καθότι αποδεικνύεται πως το B_{mse} παίρνει την ελάχιστη τιμή του όταν η prior είναι Gaussian, ενώ ο λόγος για τον οποίο καθώς αυξάνονται οι μετρήσεις έχουμε παρόμοια συμπεριφορά του B_{mse} και στις υπόλοιπες κατανομές είναι εξαιτίας του κεντρικού οριακού θεωρήματος.

Θέμα 3ο

Προκειμένου να μπορέσουμε να βρούμε από ποια κατανομή αντλήθηκαν τα δεδομένα που μας δίνονται στην εκφώνηση, αποφασίσαμε να εκτιμήσουμε την παράμετρο λ που εμφανίζεται και στις δύο κατανομές. Αρχικά, υποθέσαμε ότι τα δεδομένα μας αντλήθηκαν από εκθετική κατανομή, οπότε για να εκτιμήσουμε το λ χρησιμοποιήσαμε τον MLE εκτιμητή που βρήκαμε στο πρώτο θέμα για εκτιμητή του λ από εκθετική κατανομή. Στην συνέχεια αφού βρήκαμε την εκτίμηση του λ για αυτή την υπόθεσή μας, σχεδιάσαμε το ιστόγραμμα το οποίο φαίνεται παρακάτω και προήλθε από 1000 δείγματα από εκθετική κατανομή με μέση τιμή $\frac{1}{\hat{\lambda}}$ $όπου\ \hat{\lambda}$ είναι αυτό που εκτιμήσαμε:



Στην συνέχεια υποθέσαμε ότι τα δεδομένα μας αντλήθηκαν από μια Rayleigh κατανομή οπότε προσπαθήσαμε να εκτιμήσουμε πάλι την τιμή του λ βρίσκοντας τον MLE όπως φαίνεται παρακάτω:

$$p(x[n];\lambda) = \frac{x[n]}{\lambda^2} \cdot e^{-\frac{x[n]^2}{2\cdot\lambda^2}}$$

$$p(\vec{x};\lambda) = \prod_{n=0}^{N-1} p(x[n]\,;\,\lambda)$$

$$\Rightarrow \ln\big(p(\vec{x};\lambda)\big) = \ln\left(\prod_{n=0}^{N-1} p(x[n]\,;\,\lambda)\right) = \sum_{n=0}^{N-1} \ln\big(p(\mathrm{x[n]};\lambda)\big) \Rightarrow$$

$$\ln\big(p(\vec{x};\lambda)\big) = \sum_n \ln\left(\frac{x[n]}{\lambda^2} \cdot e^{-\frac{x^2[n]}{2\cdot\lambda^2}}\right) \Rightarrow$$

$$\ln\big(p(\vec{x};\lambda)\big) = \sum_n \ln\left(\frac{x[n]}{\lambda^2}\right) - \frac{x^2[n]}{2\lambda^2} \Rightarrow$$

$$\ln\big(p(\vec{x};\lambda)\big) = \sum_n \ln\left(\frac{x[n]}{\lambda^2}\right) \frac{x^2[n]}{2\cdot\lambda^2} = \sum\left(\ln(x\,[n]) - 2ln\lambda - \frac{x^{2[n]}}{2\lambda^2}\right) \Rightarrow$$

Κούνσολας Χρήστος(ΑΕΜ 10345)
Δαρδαμπούνης Χρήστος-Αλέξανδρος (ΑΕΜ 10335)

$$\frac{\partial \ln\left(p(\vec{x};\lambda)\right)}{\partial \lambda} = \sum_n \left(-\frac{2}{\lambda} + \frac{x^2[n]}{\lambda^3}\right) \Rightarrow$$

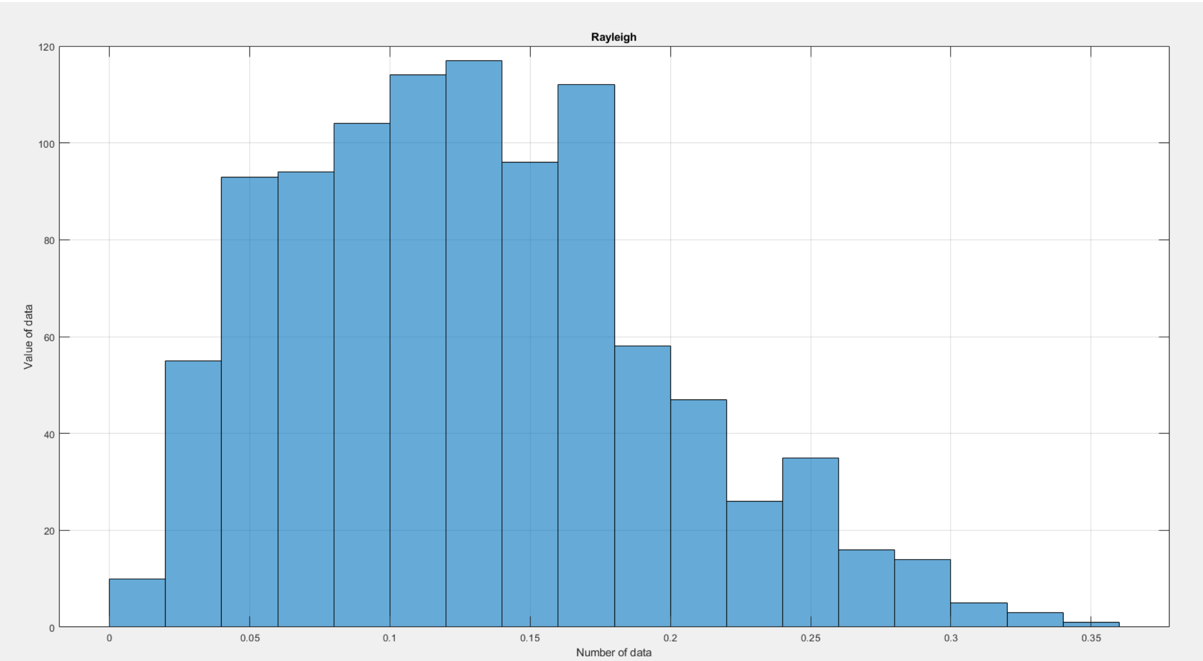
$$\frac{\partial \ln\left(p(\vec{x}\,;\,\lambda)\right)}{\vartheta \lambda} = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{N-1} \left(-\frac{2}{\lambda} + \frac{x^2[n]}{\lambda^3}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_n \frac{2}{\lambda} = \sum_n \frac{x^2[n]}{\lambda^3} \Longrightarrow \frac{2\mathrm{N}}{\lambda} = \frac{\sum_n x^2[n]}{\lambda^3} \Longrightarrow$$

$$\lambda^2 = \frac{1}{2\mathrm{N}} \sum_n x^2[n]$$

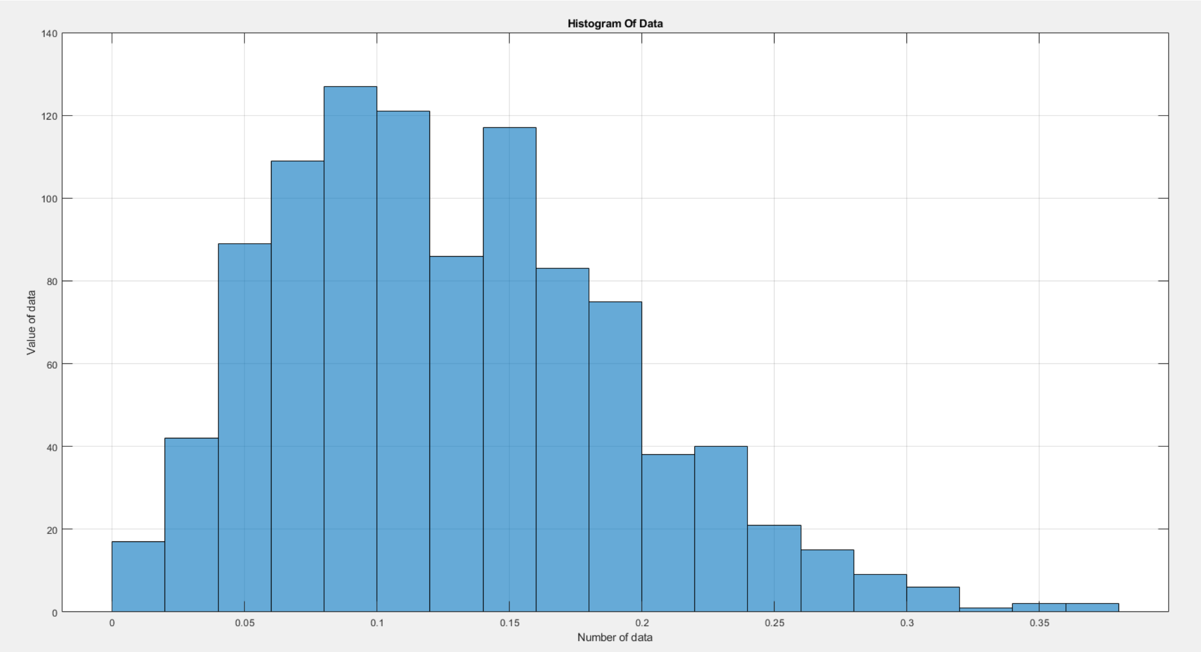
$$\Longrightarrow \hat{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{N}}} \sqrt{\sum_n x^2[n]}$$

Με αυτόν τον εκτιμητή που βρήκαμε σχεδιάσαμε το ιστόγραμμα το οποίο φαίνεται παρακάτω και προήλθε από 1000 δείγματα από Rayleigh κατανομή χρησιμοποιώντας το $\hat{\lambda}$ που είναι αυτό που εκτιμήσαμε:

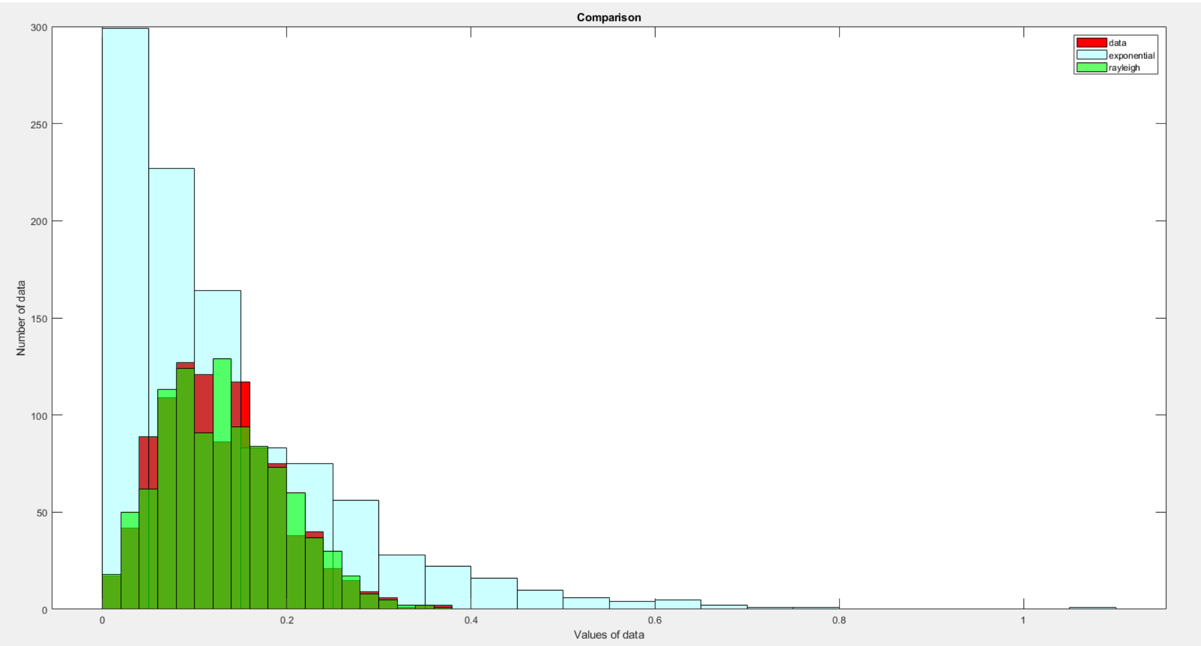


Κούνσολας Χρήστος(ΑΕΜ 10345)
Δαρδαμπούνης Χρήστος-Αλέξανδρος (ΑΕΜ 10335)

Αφού κάναμε όλη την παραπάνω δουλειά, σχεδιάσαμε και το ιστόγραμμα των δεδομένων που μας δίνονται στην εκφώνηση το οποίο είναι το εξής :



Από το οποίο φαίνεται ξεκάθαρα πως μοιάζει περισσότερο με ιστόγραμμα της Rayleigh κατανομής που παρουσιάσαμε προηγουμένως. Για περαιτέρω επαλήθευση του συμπεράσματος μας σχεδιάσαμε και το ακόλουθο γράφημα :



Από το οποίο φαίνεται ξεκάθαρα πως όντως τα δεδομένα που μας δίνονται στην εκφώνηση ακολουθούν Rayleigh κατανομή.

Κούνσολας Χρήστος(ΑΕΜ 10345)
Δαρδαμπούνης Χρήστος-Αλέξανδρος (ΑΕΜ 10335)