

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Οραση Υπολογιστών

8^ο Εξάμηνο - Ροή Σ

Πρώτη Σειρά Αναλυτικών Ασκήσεων

Δημήτρης Δήμος - 031 17 165
dimitris.dimos647@gmail.com



Αθήνα
Άνοιξη, 2021

Περιεχόμενα

Άσκηση 1.1: Σχηματισμός Εικόνων, Προοπτική Γεωμετρία	1
Ερώτημα (a)	1
(a.1)	1
(a.2)	1
Ερώτημα (b)	1
Άσκηση 1.2: Χρώμα	2
Ερώτημα (a): Άσκηση 5.8 (Κεφάλαιο 5)	2
(a)	2
(b)	3
Ερώτημα (b): Άσκηση 5.14 (Κεφάλαιο 5)	3
(a)	3
(b)	4
Άσκηση 1.3: 2Δ Gabor και Αρχή Αβεβαιότητας	5
Ερώτημα (α)	5
Ερώτημα (β)	6
Ερώτημα (γ)	7
Άσκηση 1.4: Ιδιότητες Μορφολογικών Φίλτρων για Σχήματα και Εικόνες	9
Ερώτημα (a)	9
(a.1)	9
(a.2)	9
Ερώτημα (b)	10
(b.1)	10
(b.2)	10
Ερώτημα (c)	10
(c.1)	10
(c.2)	10
Ερώτημα (d)	11
Άσκηση 1.5: Radon Transform and Reconstruction from Projections	12
Ερώτημα (a)	12
Ερώτημα (b)	13
Ερώτημα (c)	15
Βιβλιογραφία	18

Άσκηση 1.1: Σχηματισμός Εικόνων, Προοπτική Γεωμετρία

Ερώτημα (a)

(a.1)

Οι ευθείες l και l' τέμνονται στο σημείο R . Άρα, είναι συνεπίπεδες. Έστω P τυχαίο σημείο επί της l και P' η προβολή του πάνω στην l' . Τότε η ευθεία που ορίζουν τα σημεία P και P' είναι επίσης συνεπίπεδη με τις l και l' . Το σημείο V , ανήκει σε κάθε ευθεία PP' , επομένως ανήκει κι αυτό το επίπεδο των l και l' . Επιπλέον, η ευθεία l' διέρχεται από το σημείο Q , άρα και το Q ανήκει στο επίπεδο των l και l' . Κατά συνέπεια, στο ίδιο επίπεδο ανήκει και η ευθεία VQ .

Ωστόσο, το σημείο Q ανήκει στην ευθεία h και κάθε ευθεία που περνά από το V και κάποιο σημείο της h ανήκει σε επίπεδο που είναι παράλληλο στο Π . Άρα, η ευθεία VQ ανήκει σε επίπεδο παράλληλο στο Π .

Δηλαδή, έχουμε δείξει ότι οι ευθείες l και VQ είναι συνεπίπεδες και δεν έχουν κανένα κοινό σημείο. Άρα, οι VQ και l είναι παράλληλες.

Ομοίως, προκύπτουν παράλληλες και οι VQ και m .

Και τελικά συνεπάγεται ότι οι l και m είναι παράλληλες.

(a.2)

Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι $l \parallel VQ$ και από την εκφώνηση ότι $a \parallel h$. Αν θεωρήσουμε, λοιπόν, τις διευθύνσεις των ευθειών l, VQ, a, h στο ίδιο επίπεδο (πχ στο Pi) τότε η γωνία των l και a ισούται με τη γωνία των VQ και h (από γνωστό θεώρημα).

Αν, λοιπόν, η l (και η m , αφού δείξαμε ότι είναι παράλληλες) σχηματίζει γωνία 45° με την a , τότε και η γωνία των VQ και h θα είναι 45° . Άρα, το ορθογώνιο τρίγωνο VNQ θα έχει μία εκ των δύο μη ορθών γωνιών του ίση με 45° . Άρα, το τρίγωνο VNQ είναι ισοσκελές και οι πλευρές του VN και NQ είναι ίσες μεταξύ τους.

Επομένως, αν οι ευθείες l και m σχηματίζουν με την ευθεία a γωνία 45° (το οποίο είναι εφικτό με δύο ακριβώς τρόπους), τότε με γνωστές τις θέσεις Q και N του επιπέδου E , μπορούμε να υπολογίσουμε την απόσταση V από το σημείο N .

Σημειώνεται ότι οι θέσεις N και Q είναι αυτές στις οποίες η ευθεία h τέμνεται από τις εικόνες ευθειών του επιπέδου Π οι οποίες δημιουργούν με τον άξονα a γωνίες 90° και 45° , αντίστοιχα.

Ερώτημα (b)

Έστω O το κέντρο της σφαίρας και M η τομή της OV με το επίπεδο a . Η ευθεία OV είναι ο άξονας του κώνου. Έστω, επίσης, P τυχαίο σημείο της έλλειψης, P' η προβολή του στην ευθεία n και Q το συμμετρικό του ως προς την ευθεία. Θα δείξουμε πως και το Q ανήκει στην έλλειψη, οπότε η n θα είναι άξονας συμμετρίας της.

Είναι: $VN \perp a$, $PQ \in a$ με το N σημείο της VN που προβάλλεται στην PQ στο P' . Τότε, από το θεώρημα τριών καθέτων, και το σημείο V της VN προβάλλεται στην PQ στο P' . Καθώς το P' είναι το μέσον του PQ προκύπτει πως το VPQ είναι ισοσκελές με $VP = VQ$ (1).

Επίσης, το MP' είναι μεσοκάθετος του τμήματος PQ , άρα και το MPQ είναι ισοσκελές με $MP = MQ$ (2), και, φυσικά, $MV = MV$ (3).

Από τις (1)-(3) έχουμε πως τα τρίγωνα MVP, MVQ έχουν τρεις πλευρές ίσες και, άρα, είναι ίσα, οπότε οι γωνίες MVP και MVQ είναι ίσες (ως αντίστοιχες γωνίες), δηλαδή οι γωνίες OMP και OMQ είναι ίσες. Αφού, όμως, OV ο άξονας του κώνου και P σημείο του, η ισότητα των OMP και OMQ συνεπάγεται πως και το Q είναι σημείο του (από τον ορισμό του κώνου εκ περιστροφής).

Συνεπώς το Q , ως σημείο του κώνου στο επίπεδο a , θα ανήκει στα κοινά σημεία του κώνου με το a , δηλαδή στην έλλειψη.

Άσκηση 1.2: Χρώμα

Ερώτημα (a): Άσκηση 5.8 (Κεφάλαιο 5)

(a)

Γνωρίζουμε από τη θεωρία [1] ότι κάθε χρώμα του χώρου GHV μπορεί να εκφραστεί με προσθετικό ταίριασμα των πρωταρχικών χρωμάτων του χώρου XYZ. Έστω F τυχαίο χρώμα του χώρου GHV:

$$F \stackrel{H}{=} a_1X + a_2Y + a_3Z, \quad a_1, a_2, a_3 \geq 0$$

Στη συνέχεια οι tristimulus συνιστώσες μπορούν να κανονικοποιηθούν ως εξής [1]:

$$(x, y, z) = \left(\frac{X}{X+Y+Z}, \frac{Y}{X+Y+Z}, \frac{Z}{X+Y+Z} \right)$$

Και για τις πρωταρχικές συνιστώσες έχουμε:

$$x - \text{συνιστώσα}(Y = Z = 0) : (x_1, y_1, z_1) = (1, 0, 0)$$

$$y - \text{συνιστώσα}(X = Z = 0) : (x_2, y_2, z_2) = (0, 1, 0)$$

$$z - \text{συνιστώσα}(X = Y = 0) : (x_3, y_3, z_3) = (0, 0, 1)$$

Επιπλέον, ο χώρος CIE-xy προκύπτει αν προβάλουμε τον χώρο XYZ στο πραγματικό προβολικό επίπεδο. Αυτό σημαίνει ότι οι πρωταρχικές συνιστώσες που εκφράσαμε παραπάνω προβάλλονται στα εξής σημεία, αντίστοιχα, του χρωματικού διαγράμματος CIE-xy:

$$(x_1, y_1) = (1, 0)$$

$$(x_2, y_2) = (0, 1)$$

$$(x_3, y_3) = (0, 0)$$

Στη συνέχεια, θεωρούμε δύο σημεία (χρώματα) \mathbf{c}_1 και \mathbf{c}_2 . Τα σημεία αυτά ορίζουν μια ευθεία στον 3Δ χώρο XYZ. Έστω, \mathbf{c} σημείο (χρώμα) που κείται πάνω στην ευθεία $\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2$. Από τη θεωρία [1] γνωρίζουμε ότι:

$$\mathbf{c} = a \cdot \mathbf{c}_1 + b \cdot \mathbf{c}_2, \quad \text{με } a + b = 1 \text{ και } a, b \geq 0$$

Προβάλλουμε το σημείο στο CIE-xy επίπεδο και έχουμε:

$$\begin{aligned} (x_3, y_3) &= \left(\frac{X_3}{X_3 + Y_3 + Z_3}, \frac{Y_3}{X_3 + Y_3 + Z_3} \right) \\ &= \left(\frac{a \cdot X_1 + b \cdot X_2}{X_3 + Y_3 + Z_3}, \frac{a \cdot Y_1 + b \cdot Y_2}{X_3 + Y_3 + Z_3} \right) \\ &= a \left(\frac{X_1}{X_3 + Y_3 + Z_3}, \frac{Y_1}{X_3 + Y_3 + Z_3} \right) + b \left(\frac{X_2}{X_3 + Y_3 + Z_3}, \frac{Y_2}{X_3 + Y_3 + Z_3} \right) \\ &= a \frac{X_1 + Y_1 + Z_1}{X_3 + Y_3 + Z_3} \left(\frac{X_1}{X_1 + Y_1 + Z_1}, \frac{Y_1}{X_1 + Y_1 + Z_1} \right) + b \frac{X_2 + Y_2 + Z_2}{X_3 + Y_3 + Z_3} \left(\frac{X_2}{X_2 + Y_2 + Z_2}, \frac{Y_2}{X_2 + Y_2 + Z_2} \right) \\ &= a \frac{X_1 + Y_1 + Z_1}{X_3 + Y_3 + Z_3} (x_1, y_1) + b \frac{X_2 + Y_2 + Z_2}{X_3 + Y_3 + Z_3} (x_2, y_2) \end{aligned}$$

$$\implies (x_3, y_3) = a' \cdot (x_1, y_1) + b' \cdot (x_2, y_2)$$

Δηλαδή, κάθε σημείο της ευθείας $c_1 c_2$ προβάλλεται σε κάποιο σημείο της ευθείας που ορίζουν τα σημεία προβολής των c_1 και c_2 .

Συγκεντρωτικά, έχουμε δείξει ότι οι προβολές των πρωταρχικών συνιστωσών ορίζουν ένα τρίγωνο $(1,0)-(0,1)-(0,0)$ και κάθε σημείο που κείται πάνω σε ευθεία που ορίζεται από σημεία του χώρου XYZ προβάλλεται πάνω στην ευθεία που ορίζουν οι προβολές αυτών των σημείων, δηλαδή εντός του τριγώνου $(1,0)-(0,1)-(0,0)$.

(b)

Σύμφωνα με τη θεωρία [1], ο χρωματικός χώρος XYZ είναι γραμμικός. Αυτό συνεπάγεται πως το προσθετικό μίγμα δύο χρωμάτων εντός του GHV αντιστοιχεί σε σημείο επί της προβολής της ευθείας που ορίζουν αυτά τα δύο χρώματα στον χώρο CIE-xy.

Ανάλογα, αν θεωρήσουμε τρία χρώματα των οποίων οι προβολές ορίζουν τρίγωνο στον χώρο CIE-xy, τότε το οποιοδήποτε προσθετικό μίγμα τους προβάλλεται σε σημείο στον χώρο CIE-xy που βρίσκεται εντός του τριγώνου που ορίζουν τα τρία χρώματα που θεωρήσαμε.

Το γεγονός αυτό καθιστά την περιοχή GHV κυρτό σύνολο.

Εκφράζοντας τα παραπάνω με μαθηματικές σχέσεις, έχουμε:

$$c_1 = a_1 \cdot X + a_2 \cdot Y + a_3 \cdot Z, a_1, a_2, a_3 \geq 0$$

$$c_2 = a'_1 \cdot X + a'_2 \cdot Y + a'_3 \cdot Z, a'_1, a'_2, a'_3 \geq 0$$

Τότε θα έχουμε για λένα τρίτο χρώμα c_3 :

$$c_3 = b_1 c_1 + b_2 c_2 = (b_1 a_1 + b_2 a'_1)X + (b_1 a_2 + b_2 a'_2)Y + (b_1 a_3 + b_2 a'_3)Z, b_1, b_2 \geq 0$$

Εντελώς ανάλογα συμπεράσματα προκύπτουν και για την περίπτωση τριών χρωμάτων c_1, c_2, c_3 και του γραμμικού συνδυασμού τους $c = b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3$.

Ερώτημα (b): Άσκηση 5.14 (Κεφάλαιο 5)

(a)

Σκεφτόμαστε ως εξής:

Περιστρέφουμε τον μοναδιαίο RGB κύβο κατά τρόπο που ο άξονας που ενώνει τα σημεία $(0,0,0)$ και $(1,1,1)$ να γίνει κατακόρυφος (πρόκειται για τον αχρωματικό άξονα στον οποίο ισχύει $R=G=B$). Στον νέο σύστημα αξόνων και κατά μήκος του άξονα αυτού, ορίζουμε τη φωτεινότητα τύπου I ως μια βαθμωτή συνάρτηση $L(c)$ του αρχικού διανύσματος $c = (R, G, B)$.

$$L(c) = I = \frac{R + G + B}{3}$$

Το οριζόντιο επίπεδο που είναι κάθετο στον αχρωματικό άξονα είναι το χρωματικό επίπεδο. Προβάλλοντας το c πάνω στο χρωματικό επίπεδο και τον αχρωματικό άξονα, δημιουργούμε μια αναπαράσταση της αρχικής πληροφορίας:

$$c = c_d + c_p$$

όπου c_p : η προβολή στο επίπεδο, η οποία περιέχει την καθαρή χρωματική πληροφορία (Hue(H) και Chroma(C)).

Ορίζουμε, στη συνέχεια, τα χρωματικά επιπεδοσύνολα σε διάφορες στάθμες φωτεινότητας l ως:

$$\{c : L(c) \geq l\}$$

Στην παρούσα περίπτωση, όπου ισχύει ότι $L(c) = I = \frac{R+G+B}{3}$, ο χώρος HSI θα είναι ένα "διαμάντι", αποτελούμενο από δύο άνισες εξάεδρες πυραμίδες ($\frac{1}{3}$ η κάτω πυραμίδα και $\frac{2}{3}$ η άνω πυραμίδα), του οποίου ο άξονας συμμετρίας είναι ο αχρωματικός άξονας ($R=G=B$).

Ακόμη, οι 6 κορυφές του κύβου που παριστάνουν τα τρία πρωταρχικά χρώματα (R,G,B) και τα τρία δευτερεύοντα (Y,C,M) κείνται σε ένα επίπεδο κανονικό εξάγωνο, από το οποίο διέρχεται κάθετα ο αχρωματικός άξονας και βρίσκεται στο επίπεδο φωτεινότητας $L(c) = \frac{1}{3}$.

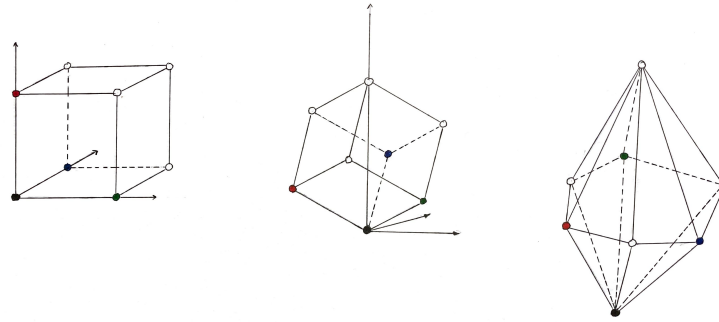


Figure 1: Οι άνω και κάτω κορυφές του διαμαντιού είναι το λευκό ($I = 1$) και το μαύρο ($I = 0$), αντίστοιχα. Η κοινή βάση των ανάποδων πυραμίδων είναι το επίπεδο $I = \frac{1}{3}$

Συνεπώς, στον χώρο (H, C, I) όλα τα χρωματικά επιπεδοσύνολα της $L(c)$ θα είναι κανονικά εξάγωνα κάθετα στον αχρωματικό άξονα. Στον χώρο (H, S, I) θα είναι κύκλοι κάθετοι στον αχρωματικό άξονα.

(b)

Για την περίπτωση του χρωματικού χώρου IHSL η φωτεινότητα ορίζεται ως $L_{IHSL}(c) = Y = 0.30R + 0.59G + 0.11B$. Ο χώρος (H, C, Y) είναι μια διπλή εξαγωνική πυραμίδα, όπου οι άξονες συμμετρίας έχουν διαφορετική κλίση ως προς τον αχρωματικό άξονα. Ακόμη, το επίπεδο των πρωταρχικών (R, G, B) και των δευτερευόντων (Y, C, P) χρωμάτων δεν είναι κάθετο στον αχρωματικό άξονα, αλλά διέρχεται από τρία σημεία του χώρου με διαφορετική φωτεινότητα Y . Έτσι, τα επιπεδοσύνολα της $L(c)$ θα είναι τομές αυτών των κεκλιμένων πυραμίδων με επίπεδα σταθερού Y . Στον χώρο IHSL θα είναι ελλείψεις.

Για τα πρωταρχικά και τα δευτερεύοντα χρώματα έχουμε:

$$\begin{aligned} L(Red) &= 0.30 & L(Yellow) &= \frac{0.30+0.59}{2} = 0.445 \\ L(Green) &= 0.59 & L(Cyan) &= \frac{0.59+0.11}{2} = 0.35 \\ L(Blue) &= 0.11 & L(Purple) &= \frac{0.30+0.11}{2} = 0.205 \end{aligned}$$

Άσκηση 1.3: 2Δ Gabor και Αρχή Αβεβαιότητας

Ερώτημα (α)

Θεωρούμε πραγματικά ή μιγαδικά σήματα $f(x, y)$ πεπερασμένης ενέργειας των οποίων το πλάτος φθίνει πιο γρήγορα από όσο αυξάνεται το πλάτος των \sqrt{x} και \sqrt{y} , δηλαδή $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |f(x, y)|\sqrt{x} = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} |f(x, y)|\sqrt{y} = 0$. Επιπλέον, θεωρούμε ότι είναι κεντραρισμένα στον χώρο και συχνότητα: $(x_c, y_c) = (u, v) = 0$.

Για την απόδειξη [2], κάνουμε χρήση της ανισότητας Cauchy-Schwarz για δύο συναρτήσεις ψ και ϕ :

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) \phi^*(t) dt \right|^2 \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)|^2 dt \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(t)|^2 dt \right)$$

Θέτοντας:

$$\psi(x, y) = x f(x, y) \quad \text{και} \quad \phi(x, y) = \frac{\partial f^*(x, y)}{\partial x}$$

θα έχουμε:

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x, y) \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx \right|^2 \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x, y)|^2 dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|^2 dx \right)$$

Υπολογίζουμε τους όρους της ανισότητας:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f \frac{\partial f}{\partial x} dx = \left[x |f|^2 \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} |f|^2 dx - \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{\partial f}{\partial x} f dx \Rightarrow$$

$$2 \int_{-\infty}^{+\infty} x f \frac{\partial f}{\partial x} dx = \left[x |f|^2 \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} |f|^2 dx \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f \frac{\partial f}{\partial x} dx = -\frac{1}{2} E_s$$

Στον παραπάνω υπολογισμό κάναμε χρήση της ιδιότητας $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |f(x, y)|\sqrt{x} = 0$.

Η πρώτη παρένθεση του δεύτερου μέλους της ανισότητας ισούται με $(\Delta x)^2 E_s$, όπως γίνεται φανερό από την δοθείσα σχέση της εκφώνησης που αφορά το $(\Delta x)^2$ θέτοντας $x_c = 0$, όπως έχουμε θεωρήσει.

Για τον δεύτερο όρο χρησιμοποιούμε τις σχέσεις Parseval:

$$2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |f|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |F|^2 d\omega_1, \quad 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_1^2 |F|^2 d\omega_1$$

Από τη δεύτερη εκ των οποίων συνεπάγεται ότι:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|^2 dx = \frac{(\Delta \omega_1)^2}{2\pi} E_f \xrightarrow{E_f = 2\pi E_s (\text{Parseval})} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|^2 dx = (\Delta \omega_1)^2 E_s$$

Τελικώς προκύπτει:

$$\left(-\frac{E_s}{2} \right)^2 \leq (\Delta x)^2 E_s (\Delta \omega_1)^2 E_s \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \Delta x \Delta \omega_1$$

Στο ίδιο πνεύμα αποδεικνύεται η αντίστοιχη σχέση για την διάσταση y :

$$\frac{1}{2} \leq \Delta y \Delta \omega_1$$

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των δύο σχέσεων προκύπτει η 2Δ Αρχή της Αβεβαιότητας:

$$\Delta x \Delta y \Delta \omega_1 \Delta \omega_2 \geq \frac{1}{4}$$

Ερώτημα (β)

Παρατηρούμε ότι το 2Δ μιγαδικό Gabor σήμα είναι διαχωρίσιμο σε δύο σήματα μίας μεταβλητής το καθένα.

$$\begin{aligned} h(x, y) &= \exp \left[-\frac{(x - x_c)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(y - y_c)^2}{2\sigma_2^2} \right] \exp[ju(x - x_c) + jv(y - y_c)] \\ &= \underbrace{\exp \left[-\frac{(x - x_c)^2}{2\sigma_1^2} \right] \exp[ju(x - x_c)]}_{h(x)} \underbrace{\exp \left[-\frac{(y - y_c)^2}{2\sigma_2^2} \right] \exp[jv(y - y_c)]}_{h(y)} \end{aligned}$$

Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι καθένα εκ των $h(x)$ και $h(y)$ προκύπτει από ένα σήμα της μορφής:

$$f(x) = \exp \left[-\frac{x^2}{2\sigma^2} \right]$$

το οποίο υφίσταται μετατόπιση στην συχνότητα: $\exp(jux)$ και στον χώρο: $x \rightarrow (x - x_c)$.

Επομένως, για το $h(x)$ έχουμε:

$$\exp \left[-\frac{x^2}{2\sigma_1^2} \right] \xLeftrightarrow{FT2} \sigma_1 \sqrt{2\pi} \exp \left(\frac{-\omega_1^2 \sigma_1^2}{2} \right)$$

Μετατόπιση στη συχνότητα:

$$\exp \left[-\frac{x^2}{2\sigma_1^2} \right] \exp(jux) \xLeftrightarrow{FT2} \sigma_1 \sqrt{2\pi} \exp \left(\frac{-(\omega_1 - u)^2 \sigma_1^2}{2} \right)$$

Μετατόπιση στον χώρο:

$$\exp \left[-\frac{(x - x_c)^2}{2\sigma_1^2} \right] \exp[ju(x - x_c)] \xLeftrightarrow{FT2} \sigma_1 \sqrt{2\pi} \exp \left(\frac{-(\omega_1 - u)^2 \sigma_1^2}{2} \right) \exp(-j\omega_1 x_c)$$

Δηλαδή ο 2Δ Μ/Σ Fourier του $h(x)$ είναι:

$$H(\omega_1) = \sigma_1 \sqrt{2\pi} \exp \left(-\frac{(\omega_1 - u)^2 \sigma_1^2}{2} \right) \exp(-j\omega_1 x_c)$$

Ομοίως για το $h(y)$ προκύπτει:

$$H(\omega_2) = \sigma_2 \sqrt{2\pi} \exp \left(-\frac{(\omega_2 - v)^2 \sigma_2^2}{2} \right) \exp(-j\omega_2 y_c)$$

Τελικώς, σύμφωνα με το θεώρημα του 2Δ Μ/Σ Fourier για τις 2Δ διαχωρίσιμες συναρτήσεις:

$$h(x)h(y) \xLeftrightarrow{FT2} H(\omega_1)H(\omega_2)$$

προκύπτει το ζητούμενο:

$$H(\omega_1, \omega_2) = H(\omega_1)H(\omega_2) \implies$$

$$H(\omega_1, \omega_2) = 2\pi\sigma_1\sigma_2 \exp \left(-\frac{(\omega_1 - u)^2 \sigma_1^2}{2} - \frac{(\omega_2 - v)^2 \sigma_2^2}{2} \right) \exp(-j\omega_1 x_c - j\omega_2 y_c)$$

Ερώτημα (γ)

Χρήσιμα Ολοκληρώματα

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt &= \left[\left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \right| \right]^{1/2} \\
&= \left[\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \right| \right]^{1/2} \\
&= \left[\left| \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr d\theta \right| \right]^{1/2} \xrightarrow[\frac{du}{du} = \frac{-r}{2} dr]{u = -r^2} \\
&= \left[\left| -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [e^{-r^2}]_0^{+\infty} d\theta \right| \right]^{1/2} \\
&= \sqrt{\pi} \\
&\Rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}} \tag{1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-at^2} dt &= -\frac{\partial}{\partial a} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2} dt \right] \xrightarrow[\frac{dt}{dt} = \frac{du}{\sqrt{a}}]{u = \sqrt{a}t} \\
&= -\frac{\partial}{\partial a} \left[a^{-1/2} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du}_{\sqrt{\pi}} \right] \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}} \\
&\Rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-at^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}}} \tag{2}
\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τις παρακάτω ποσότητες:

$$\begin{aligned}
\int \int |f(x, y)|^2 dx dy &= \int \int e^{-\frac{(x-x_c)^2}{\sigma_1^2}} e^{-\frac{(y-y_c)^2}{\sigma_2^2}} dx dy \\
&= \int e^{-\frac{(x-x_c)^2}{\sigma_1^2}} dx \int e^{-\frac{(y-y_c)^2}{\sigma_2^2}} dy \\
&= \int e^{-\left(\frac{x-x_c}{\sigma_1}\right)^2} dx \int e^{-\left(\frac{y-y_c}{\sigma_2}\right)^2} dy \\
&= \sigma_1 \sigma_2 \int e^{-a^2} da \int e^{-b^2} db \stackrel{(1)}{=} \\
&= \sigma_1 \sigma_2 \pi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \int |F(\omega_1, \omega_2)|^2 d\omega_1 d\omega_2 &= E_f \stackrel{\text{Parseval}}{=} 4\pi^2 E_s \\
&= 4\pi^2 \cdot \sigma_1 \sigma_2 \pi \\
&= 4\pi^3 \sigma_1 \sigma_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \int (x - x_c)^2 |f(x, y)|^2 dx dy &= \int \int (x - x_c)^2 e^{-\frac{(x-x_c)^2}{\sigma_1^2}} e^{-\frac{(y-y_c)^2}{\sigma_2^2}} dx dy \\
&= \int (x - x_c)^2 e^{-\frac{(x-x_c)^2}{\sigma_1^2}} dx \int e^{-\frac{(y-y_c)^2}{\sigma_2^2}} dy \\
&= \sigma_2 \sqrt{\pi} \int (x - x_c)^2 e^{-\left(\frac{x-x_c}{\sigma_1}\right)^2} dx \\
&= \sigma_2 \sqrt{\pi} \int \sigma_1^2 \left(\frac{x - x_c}{\sigma_1}\right)^2 e^{-\left(\frac{x-x_c}{\sigma_1}\right)^2} dx \\
&= \sigma_1^2 \sigma_2 \sqrt{\pi} \int \left(\frac{x - x_c}{\sigma_1}\right)^2 e^{-\left(\frac{x-x_c}{\sigma_1}\right)^2} dx \stackrel{x=\sigma_1 u + x_c}{dx=\sigma_1 du} \\
&= \sigma_1^3 \sigma_2 \sqrt{\pi} \int u^2 e^{-u^2} du \stackrel{(2)}{=} \\
&= \frac{\sigma_1^3 \sigma_2 \pi}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \int (\omega_1 - u)^2 |F(\omega_1, \omega_2)|^2 d\omega_1 d\omega_2 &= 4(\pi \sigma_1 \sigma_2)^2 \int \int (\omega_1 - u)^2 e^{-\sigma_1^2 (\omega_1 - u)^2} e^{-\sigma_2^2 (\omega_2 - v)^2} d\omega_1 d\omega_2 \\
&= 4(\pi \sigma_1 \sigma_2)^2 \int (\omega_1 - u)^2 e^{-\sigma_1^2 (\omega_1 - u)^2} d\omega_1 \int e^{-\sigma_2^2 (\omega_2 - v)^2} d\omega_2 \stackrel{t=\sigma_2(\omega_2-v)}{d\omega_2=dt/\sigma_2} \\
&= 4(\pi \sigma_1)^2 \sigma_2 \sqrt{\pi} \int (\omega_1 - u)^2 e^{-\sigma_1^2 (\omega_1 - u)^2} d\omega_1 \\
&= 4\pi^2 \sigma_2 \sqrt{\pi} \int [\sigma_1 (\omega_1 - u)]^2 e^{-\sigma_1^2 (\omega_1 - u)^2} d\omega_1 \stackrel{t=\sigma_1(\omega_1-u), (2)}{d\omega_1=dt/\sigma_1} \\
&= 2\pi^3 \frac{\sigma_2}{\sigma_1}
\end{aligned}$$

Επομένως, προκύπτουν:

$$\left. \begin{aligned}
(\Delta x)^2 &= \frac{\sigma_1^3 \sigma_2 \pi}{\sigma_1 \sigma_2 \pi} = \frac{\sigma_1^2}{2} \implies \Delta x = \frac{\sigma_1}{\sqrt{2}} \\
(\Delta \omega_1)^2 &= \frac{1}{2\sigma_1^2} = \frac{2\pi^3 \frac{\sigma_2}{\sigma_1}}{4\pi^3 \sigma_1 \sigma_2} \implies \Delta \omega_1 = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2}}
\end{aligned} \right\} \xRightarrow{(\times)} \Delta x \Delta \omega_1 = \frac{1}{2}$$

Εντελώς ανάλογα προκύπτει ότι: $\Delta y \Delta \omega_2 = \frac{1}{2}$.

Τελικώς, η αβεβαιότητα του 2Δ μιγαδικού Gabor σήματος $h(x, y)$ ισούται με:

$$A = \Delta x \Delta \omega_1 \Delta y \Delta \omega_2 = \frac{1}{4}$$

Άσκηση 1.4: Ιδιότητες Μορφολογικών Φίλτρων για Σχήματα και Εικόνες

Ερώτημα (a)

(a.1)

Ισχύει η δυϊκότητα των erosion και dilation [3]: $X \ominus B = (X^c \oplus B^s)^c$ (1)

Είναι:

$$\begin{aligned}
 (X^c \bullet B^s)^c &= \left[(X^c \oplus B^s) \ominus B^s \right]^c \\
 &\stackrel{(1)}{=} \left[(X \ominus B)^c \ominus B^s \right]^c \stackrel{(1)}{\xrightarrow[\substack{X \rightarrow (X \ominus B)^c \\ B \rightarrow B^s}]{}} \\
 &= \left[\left(((X \ominus B)^c)^c \oplus (B^s)^s \right)^c \right]^c \\
 &= ((X \ominus B)^c)^c \oplus (B^s)^s \\
 &= (X \ominus B) \oplus B \\
 &= X \circ B \quad \mathcal{Q.E.D.}
 \end{aligned}$$

(a.2)

Ως γνωστόν [3], ισχύουν:

$$X \oplus B = \bigcup_{y \in B} X_{+y}$$

$$X \ominus B = \bigcap_{y \in B} X_{-y}$$

επιπλέον, ισχύει εμφανώς:

$$\left. \begin{array}{l} \bigcup_{y \in B} X_{+y} \supseteq X_{+y} \quad \forall y \in B \\ \bigcap_{y \in B} X_{-y} \subseteq X_{-y} \quad \forall y \in B \end{array} \right\} \xrightarrow[\bigcap_{y \in B} X_{-y} = X \ominus B]{\bigcup_{y \in B} X_{+y} = X \oplus B} \left\{ \mathbf{0} \in B \implies X \ominus B \subseteq X \subseteq X \oplus B \right\} \quad (2)$$

Ακόμη θέτοντας στη (2) $X \longrightarrow X \ominus B$ και $X \longrightarrow X \oplus B$, αντίστοιχα, έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} (X \ominus B) \oplus B \supseteq (X \ominus B) \\ (X \oplus B) \ominus B \subseteq (X \oplus B) \end{array} \right\} \xrightarrow[\substack{(X \oplus B) \ominus B = X \bullet B \\ (X \ominus B) \oplus B = X \circ B}]{\mathcal{Q.E.D.}} \left\{ \mathbf{0} \in B \implies X \ominus B \subseteq X \circ B \subseteq X \subseteq X \bullet B \subseteq X \oplus B \right\} \quad \mathcal{Q.E.D.}$$

Ερώτημα (b)

(b.1)

Είναι:

$$(f \ominus A) \ominus B = \bigwedge_{a \in B} \left(\bigwedge_{b \in A} f(x + b + a) \right) = \bigwedge_{z \in (A \oplus B)} f(x + z) = f \ominus (A \oplus B) \quad \mathcal{Q.E.D.}$$

(b.2)

Για το ευθύ:

$$f = f \circ g \implies f = \underbrace{(f \ominus g)}_{=h} \oplus g \implies f = h \oplus g$$

Για το αντίστροφο:

Καταρχάς, ισχύει: $f \circ g \leq f \leq f \bullet g$ (3). Έστω:

$$f = h \oplus g \implies f \circ g = \left((h \oplus g) \ominus g \right) \oplus g = (h \bullet g) \oplus g \underset{(3)}{\geq} h \oplus g = f \implies f \circ g \geq f \quad (4)$$

Από (3) και (4) $\implies f = f \circ g \quad \mathcal{Q.E.D.}$ **Ερώτημα (c)**

(c.1)

Το γκρίζο φίλτρο που σχηματίζεται με υπέρθεση κατωφλίου από την γεννήτρια $\Phi_1 \cup \Phi_2$ ισούται με:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \sup \{ v \in \mathbb{R} : x \in \Phi_1[X_v(f)] \cup \Phi_2[X_v(f)] \} \\ &= \sup \{ v \in \mathbb{R} : \phi_1(f)(x) \geq v \text{ or } \phi_2(f)(x) \geq v \} \\ &= \sup \{ v \in \mathbb{R} : (\phi_1 \vee \phi_2)(f)(x) \geq v \} \end{aligned}$$

Επομένως: $(\phi_1 \vee \phi_2)(x) = \max[\phi_1(x), \phi_2(x)] \quad \mathcal{Q.E.D.}$

(c.2)

Το γκρίζο φίλτρο που σχηματίζεται με υπέρθεση κατωφλίου από την γεννήτρια $\Phi_2 \Phi_1(X) = \Phi_2(\Phi_1(X))$ ισούται με:

$$\begin{aligned} \phi(f)(x) &= \sup \{ v \in \mathbb{R} : x \in \Phi[X_v(f)] \} \\ &= \sup \{ v : x \in \Phi_2[\Phi_1[X_v(f)]] \} \\ &= \sup \{ v : x \in \Phi_2[X_v[\phi_1(f)]] \} \\ &= \sup \{ v : x \in X_v[\phi_2[\phi_1(f)]] \} \\ &= \phi_2(\phi_1(f))(x) = \phi_2 \phi_1(f) \quad \mathcal{Q.E.D.} \end{aligned}$$

Ερώτημα (d)

Καταρχάς, για τον τελεστή $\Phi(X)$ θα έχουμε:

$$\Phi(X) = X \circ B = (X \ominus B) \oplus B = \bigcup_{a \in B} \left(\bigcap_{b \in B} X_{a-b} \right)$$

έκφραση που μπορούμε να υπολογίσουμε αναλυτικά "με το χέρι" αφού το B είναι ένα 3-pixel τρίγωνο:

$$\begin{aligned} \Phi(X) &= \bigcup_{a \in B} \left(X_{a-(0,0)} \cap X_{a-(0,1)} \cap X_{a-(1,0)} \right) \\ &= (X_{(0,0)-(0,0)} \cap X_{(0,0)-(0,1)} \cap X_{(0,0)-(1,0)}) \cup \\ &\quad (X_{(0,1)-(0,0)} \cap X_{(0,1)-(0,1)} \cap X_{(0,1)-(1,0)}) \cup \\ &\quad (X_{(1,0)-(0,0)} \cap X_{(1,0)-(0,1)} \cap X_{(1,0)-(1,0)}) \implies \end{aligned}$$

$$\Phi(X) = (X_{(0,0)} \cap X_{(0,-1)} \cap X_{(-1,0)}) \cup (X_{(0,1)} \cap X_{(0,0)} \cap X_{(-1,1)}) \cup (X_{(1,0)} \cap X_{(1,-1)} \cap X_{(0,0)})$$

Έτσι η ζητούμενη boolean συνάρτηση είναι:

$$\beta(v_1, \dots, v_n) = u_{0,0}u_{0,-1}u_{-1,0} + u_{0,1}u_{0,0}u_{-1,1} + u_{1,0}u_{1,-1}u_{0,0}$$

Και το ισοδύναμο γκρίζο φίλτρο $\phi(f)(x, y)$ τελικά ισούται με:

$$\phi(f)(x, y) = \max \left\{ \begin{aligned} &\min\{f(x, y), f(x, y+1), f(x+1, 0)\}, \\ &\min\{f(x, y-1), f(x, y), f(x+1, y-1)\}, \\ &\min\{f(x-1, y), f(x-1, y+1), f(x, y)\} \end{aligned} \right\}$$

Τελικώς:

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} 2\pi & , x^2 + y^2 < 1 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Ερώτημα (b)

Εφόσον η δοθείσα εικόνα είναι διαχωρίσιμη σε δύο συναρτήσεις μιας μεταβλητής έκαστη, ο M/Σ Fourier της προκύπτει ως το γινόμενο των M/Σ Fourier των επιμέρους μονοδιάστατων συναρτήσεων.

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y) \xLeftrightarrow{FT^2} F(\omega_1, \omega_2) = F_1(\omega_1)F_2(\omega_2)$$

Κλιμακώνουμε με έναν παράγοντα $\frac{1}{\cos\theta}$ και $\frac{1}{\sin\theta}$, αντίστοιχα τις επιμέρους μονοδιάστατες συναρτήσεις:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\cos\theta|} f_1\left(\frac{x}{\cos\theta}\right) &\xLeftrightarrow{FT} F_1(\omega\cos\theta) \\ \frac{1}{|\sin\theta|} f_2\left(\frac{y}{\sin\theta}\right) &\xLeftrightarrow{FT} F_2(\omega\sin\theta) \end{aligned}$$

Στη συνέχεια, θεωρούμε τον M/Σ Radon της $f(x, y) : \mathcal{R}f(t, \theta) \triangleq p_\theta(t)$.

Σύμφωνα με το θεώρημα Projection-Slice ο M/Σ Fourier του $\mathcal{R}f(t, \theta)$, συμβολιζόμενος ως $P_\theta(\omega)$, σχετίζεται με τον M/Σ Fourier της $f(x, y)$ ως εξής:

$$P_\theta(\omega) = F(\omega\cos\theta, \omega\sin\theta) = F_1(\omega\cos\theta) \cdot F_2(\omega\sin\theta)$$

Επομένως, θα είναι:

$$F_1(\omega\cos\theta) \cdot F_2(\omega\sin\theta) \xLeftrightarrow{FT^{-1}} \frac{1}{|\cos\theta|} f_1\left(\frac{x}{\cos\theta}\right) * \frac{1}{|\sin\theta|} f_2\left(\frac{y}{\sin\theta}\right)$$

Και, συνεπώς:

$$p_\theta(t) = \frac{1}{|\cos\theta|} f_1\left(\frac{x}{\cos\theta}\right) * \frac{1}{|\sin\theta|} f_2\left(\frac{y}{\sin\theta}\right), \theta \in (0, \pi) - \{\pi/2\}$$

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε τις τιμές του $p_\theta(t)$ και για $\theta = 0$, $\theta = \pi/2$, $\theta = \pi$.

Σύμφωνα με το δοθέν κείμενο, για τον M/Σ Radon έχουμε:

$$p_\theta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \delta(x\cos\theta + y\sin\theta - t) dx dy$$

και λόγω της διαχωρισιμότητας της εικόνας:

$$p_\theta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)f_2(y)\delta(x\cos\theta + y\sin\theta - t) \, dx dy$$

Θέτοντας $\theta = 0$, παίρνουμε:

$$p_0(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)f_2(y)\delta(x-t) \, dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(y) \, dy \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\delta(x-t) \, dx}_{(f_1*\delta)(t)} = f_1(t) \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(y) \, dy$$

Θέτοντας $\theta = \pi/2$ παίρνουμε:

$$p_{\pi/2}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)f_2(y)\delta(y-t) \, dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) \, dx \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(y)\delta(y-t) \, dy}_{(f_2*\delta)(t)} = f_2(t) \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) \, dx$$

Θέτοντας $\theta = \pi$, παίρνουμε:

$$p_\pi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)f_2(y)\delta(-x-t) \, dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(y) \, dy \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\delta(-x-t) \, dx}_{f_1(-t)*\delta(t)} = f_1(-t) \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(y) \, dy$$

Εν τέλει, προκύπτει:

$$p_\theta(t) = \begin{cases} f_1(t) \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(y) \, dy & , \theta = 0 \\ f_2(t) \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) \, dx & , \theta = \pi/2 \\ f_1(-t) \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(y) \, dy & , \theta = \pi \\ \frac{1}{|\cos\theta|} f_1\left(\frac{x}{\cos\theta}\right) * \frac{1}{|\sin\theta|} f_2\left(\frac{y}{\sin\theta}\right) & , \theta \in (0, \pi) = \{\pi/2\} \end{cases}$$

Συνεχίζουμε, θεωρώντας το γινόμενο $H(x, y) = p_0(x) \cdot p_{\pi/2}(y)$.
Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} H(x, y) &= f_1(x)f_2(y) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(a)f_2(b) \, dadb \\ &= f(x, y) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(a, b) \, dadb \end{aligned} \quad (1)$$

$$(1) \implies \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} H(x, y) \, dxdy = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(a, b) \, dadb \right)^2 \quad (2)$$

Δηλαδή καταλήγουμε στο εξής συμπέρασμα:

$$(1) \implies f(x, y) = \frac{H(x, y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(a, b) \, dadb} \xrightarrow{(2)}$$

$$f(x, y) = \frac{H(x, y)}{\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} H(x, y) \, dxdy}},$$

γεγονός που επιβεβαιώνει ότι μπορούμε να ανακατασκευάσουμε πλήρως την αρχική εικόνα χρησιμοποιώντας μόνο δύο προβολές της: αυτή με $\theta = 0$ και αυτή με $\theta = \pi/2$.

Ερώτημα (c)

Χρήσιμες Ιδιότητες

- $G_\sigma(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right) \xleftrightarrow{FT2} \exp\left(-\frac{\sigma^2(\omega_1^2+\omega_2^2)}{2}\right)$
- $f(x - x_0, y - y_0) \xleftrightarrow{FT2} F(\omega_1, \omega_2) \exp\left(-j2\pi(\omega_1 x_0 + \omega_2 y_0)\right)$ (ιδιότητα χωρικής μετατόπισης)

Για να υπολογίσουμε τον Μ/Σ Radon ($\mathcal{R}f$) της 2Δ Gaussian συνάρτησης, βρίσκουμε πρώτα τον Μ/Σ Fourier του $\mathcal{R}f$ με χρήση των παραπάνω ιδιοτήτων και του θεωρήματος Fourier-Slice.

Από τις ιδιότητες που διατυπώσαμε παραπάνω προκύπτει ότι:

$$G_\sigma(x - x_0, y - y_0) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2\sigma^2}\right) \xleftrightarrow{FT2} \exp\left(-\frac{\sigma^2(\omega_1^2 + \omega_2^2)}{2}\right) \exp\left(-j2\pi(\omega_1 x_0 + \omega_2 y_0)\right)$$

Σύμφωνα με το θεώρημα Fourier-Slice, ο Μ/Σ Fourier του $\mathcal{R}f$ προκύπτει αν θέσουμε:

$$\omega_1 \longrightarrow \omega \cos\theta$$

$$\omega_2 \longrightarrow \omega \sin\theta$$

στον Μ/Σ Fourier της $G_\sigma(x - x_0, y - y_0)$:

$$\exp\left(-\frac{\sigma^2((\omega\cos\theta)^2 + (\omega\sin\theta)^2)}{2}\right)\exp\left(-j2\pi\underbrace{((\omega\cos\theta)x_0 + (\omega\sin\theta)y_0)}_{\omega t_0}\right) = \exp\left(-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}\right)\exp(-j2\pi\omega t_0)$$

$$\implies P_\theta(\omega) = \exp\left(-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}\right)\exp(-j2\pi\omega t_0)$$

Η $P_\theta(\omega)$ έχει τη μορφή του Μ/Σ Fourier μιας 1Δ Gaussian που έχει υποστεί μετατόπιση στον χρόνο:

$$\exp\left(-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}\right)\exp(-j2\pi\omega t_0) \xleftrightarrow{FT^{-1}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(t-t_0)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\implies p_\theta(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(t-t_0)^2}{2\sigma^2}\right), \quad t_0 = x_0\cos\theta + y_0\sin\theta$$

Καταλήξαμε, κατά αυτόν τον τρόπο στην παρακάτω σχέση:

$$G_\sigma(x-x_0, y-y_0) = \xleftrightarrow{\mathcal{R}f} G_\sigma(t-t_0) \quad (3)$$

Γνωρίζουμε, επιπλέον, ότι ισχύουν:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} G_\sigma(x-x_0, y-y_0) = \delta(x-x_0, y-y_0)$$

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} G_\sigma(t-t_0) = \delta(t-t_0)$$

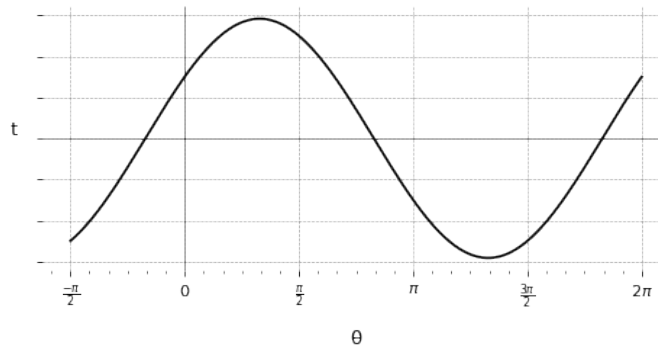
Άρα, η σχέση (3) στο όριο $\sigma \rightarrow 0$ γίνεται:

$$\delta(x-x_0, y-y_0) \xleftrightarrow{\mathcal{R}f} \delta(t-t_0)$$

Δηλαδή, ο Μ/Σ Radon μιας σημειακής μάζας στον χώρο είναι $\delta(t-t_0)$ και έχει μη μηδενική τιμή για $t = t_0$:

$$t = t_0 = x_0\cos\theta + y_0\sin\theta$$

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι για τις μη μηδενικές τιμές του, ο Μ/Σ Radon της $\delta(x-x_0, y-y_0)$ αντιστοιχεί σε μια ημιτονοειδή συνάρτηση στο πεδίο (t, θ) .



Για την αφιιτράριστη οπισθοπροβολή της $f(x, y) = \delta(x - x_0, y - y_0)$, έχουμε:

$$\tilde{f}(x, y) = f(x, y) * \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \delta(x - x_0, y - y_0) * \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \Rightarrow$$

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} +\infty & , (x, y) = (x_0, y_0) \\ \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} & , (x, y) \neq (x_0, y_0) \end{cases}$$

References

- [1] P.Maragos, "*Image Analysis and Computer Vision*", Chapter 5: Χρώμα.
- [2] P.Maragos, "*Image Analysis and Computer Vision*", Chapter 6: Image Linear Operators, pp.18-19, 2005.
- [3] P.Maragos, "*Image Analysis and Computer Vision*", Chapter 7: Τελεστές Δυαδικών Εικόνων και Σχημάτων, pp.6, 2005.