Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος – ΡΟΗ Σ 6º Εξάμηνο

3º Σύνολο Αναλυτικών Ασκήσεων 2019-2020

Ονοματεπώνυμο : Χρήστος Δημόπουλος

Αρ. Μητρώου : 3117037

Email Adress : chrisdim1999@gmail.com

Άσκηση 3.1 : (Τυχαία Διακριτά σήματα, Αυτοσυσχέτιση)

Δίνεται μια AR στοχαστική ανέλιξη που δημιουργείται από την εξίσωση διαφορών :

$$x[n] = \frac{1}{2} x[n-1] + v[n]$$

όπου $v[n]$ λευκός θόρυβος μεταβλητότητας $\delta_v^2 = 1$.

α) Όταν μια AR στοχαστική ανέλιξη ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση της μορφής :

$$x[n] = -a(1)x[n-1] - a(2)x[n-2] - \ldots - a(p)x[n-p] + w[n],$$

όπου $w[n]$ λευκός θόρυβος και p τάξη πρόβλεψης, τότε το μιγαδικό φάσμα ισχύος του $x[n]$ δίνεται από τον τύπο :

$$P_x(z) = \frac{\sigma_w^2}{A(z) \cdot A^*(1/z^*)} \quad , \text{ όπου } A(z) = 1 + \sum_{k=1}^{p} a(k) z^{-k}$$

(Πηγή : Monson Hayes SSPM – Chapter 7)

Στην προκειμένη περίπτωση : $\delta_v^2 = 1$, $a(1) = -1/2$, $a(i) = 0$, για $i = 2, 3, \ldots, p$

Επομένως :

$$\boxed{A(z) = 1 - \frac{1}{2} z^{-1}}$$

και

$$P_x(z) = \frac{1}{A(z)\,A(z^{-1})} = \frac{1}{(1-0.5z^{-1})(1-0.5z)} \Rightarrow \boxed{P_x(z) = \frac{-4z}{2z^2 - 5z + 2}}$$

B) $$P_x(z) = \frac{1}{(1-0.5z^{-1})(1-\frac{z}{2})} = \frac{-2z}{(z-0.5)(z-2)}$$

Διάσπαση σε μερικά κλάσματα:

$$\frac{-2z}{(z-0.5)(z-2)} = \frac{A}{z-0.5} + \frac{B}{z-2} \Rightarrow -2z = A(z-2) + B(z-0.5)$$

$$\Rightarrow -2z = (A+B)\cdot z - (2A+0.5B) \Rightarrow \begin{cases} A+B=-2 \\ 2A = -\frac{B}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+B=-2 \\ B=-4A \end{cases}$$

$$\Rightarrow -3A = -2 \Rightarrow \boxed{A = 2/3} \text{ και } \boxed{B = -8/3}$$

Επομένως:

$$P_x(z) = \frac{2}{3(z-0.5)} - \frac{8}{3(z-2)} = \frac{2z^{-1}}{3(1-0.5z^{-1})} - \frac{8z^{-1}}{3(1-2z^{-1})}$$

Γνωρίζουμε:

$$a^n u[n] \overset{\mathcal{Z}}{\rightleftarrows} \frac{1}{1-az^{-1}}, \ |z|>|a|$$

$$-a^n u[-n-1] \overset{\mathcal{Z}}{\rightleftarrows} \frac{1}{1-az^{-1}}, \ |z|<|a|$$

καθώς και $x[n-n_0] \overset{\mathcal{Z}}{\rightleftarrows} z^{-n_0} X(z)$ (time shifting)

Επειδή θέλουμε να ορίζεται το $P_x(e^{j\omega})$, θέλουμε τον μοναδιαίο κύκλο εντός της RoC του $\mathcal{Z}$ Μετασχηματισμού, δηλαδή RoC: $|0.5|<|z|<|2|$.

Επομένως:

$$r_x[k] = \mathcal{Z}^{-1}\{P_x(z)\} \Rightarrow \boxed{r_x[k] = (0.5)^{k-1} u[k-1]\frac{2}{3} + \frac{8}{3}\, 2^{k-1} u[-k]}$$

Το οποίο, μπορεί να γραφτεί ως: $r_x[k] = (\frac{1}{2})^k \cdot 2u[k-1]\cdot\frac{2}{3} + \frac{8}{3}\cdot 2^k (\frac{1}{2})\cdot u[-k]$

$$\Rightarrow r_x[k] = \frac{4}{3}\cdot\left[(\tfrac{1}{2})^k \cdot u[k-1] + (\tfrac{1}{2})^{-k}\cdot u[-k]\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{r_x[k] = \frac{4}{3}\cdot(\tfrac{1}{2})^{|k|}}$$

γ) Yule-Walker εξισώσεις:

$$r_x[k] + \sum_{\ell=1}^{p} a_p(\ell) r_x[k-\ell] = \sigma_v^2 |b(0)|^2 \delta[k] \quad , k \geq 0 \quad (\text{III})$$

Στην προκειμένη AR στοχαστική ανέλιξη έχουμε:

$\boxed{p=1}$, $\boxed{a(1) = -1/2}$, $\boxed{\sigma_v^2 = 1}$, $\boxed{|b(0)| = 1}$

Επομένως:

$$\begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(-1) \\ r_x(1) & r_x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \end{bmatrix} = \sigma_v^2 |b(0)|^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$ (Λόγω συμμετρίας ισχύει $r_x[k] = r_x[-k]$)

$$\Rightarrow \begin{cases} r_x(0) - \frac{1}{2} r_x(1) = 1 \\ r_x(1) - \frac{1}{2} r_x(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_x(0) - \frac{1}{4} r_x(0) = 1 \\ r_x(1) = \frac{1}{2} r_x(0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{r_x(0) = \frac{4}{3}} \\ \boxed{r_x(1) = r_x(-1) = \frac{2}{3}} \end{cases}$$

· Από την εξίσωση (III) για $k > 0$ ισχύει:

$$r_x[k] = -a(1) r_x[k-1]$$

· Άρα, για $k \geq 0$ έχουμε:

$$r_x[k] = \left[\frac{b^2(0)}{1 - a^2(1)}\right] \cdot (-a(1))^k = r_x(0) \cdot (-a(1))^k = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

· Αξιοποιώντας και τη συμμετρία $r_x[k] = r_x[-k]$ εν τέλει:

$$\boxed{r_x[k] = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}}$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι ίδιο με αυτό του ερωτήματος (β)!

Άσκηση 3.2 : (Τυχαία Διακριτά Σήματα, Φάσμα Ισχύος)

Δίνεται μια στοχαστική ανέλιξη x[n] με μηδενική μέση τιμή και αυτοσυσχέτιση:

$$r_x[k] = 26\left(\frac{1}{4}\right)^{|k|} + 5\left(\frac{1}{4}\right)^{|k-1|} + 5\left(\frac{1}{4}\right)^{|k+1|}$$

α) Γνωρίζουμε τις ιδιότητες:

$$a^{|n|} \overset{\mathcal{Z}}{\rightleftarrows} \frac{1-a^2}{(1-az^{-1})(1-az)}, \quad |a|<|z|<\frac{1}{|a|}$$

και $\quad x[n-n_0] \overset{\mathcal{Z}}{\rightleftarrows} z^{-n_0} X(z)$

Στην προκειμένη περίπτωση, για $|a| = \frac{1}{4}$ ο μοναδιαίος κύκλος εμπεριέχεται εντός της RoC.

Έχουμε:

$$P_x(z) = \mathcal{Z}\{r_x[k]\} = \frac{1-\frac{1}{16}}{\left(1-\frac{z^{-1}}{4}\right)\left(1-\frac{z}{4}\right)} \cdot \left[26 + 5z^{-1} + 5z\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{P_x(z) = \frac{15/16}{(1-0.25z^{-1})(1-0.25z)}\left[26+5z^{-1}+5z\right]}$$

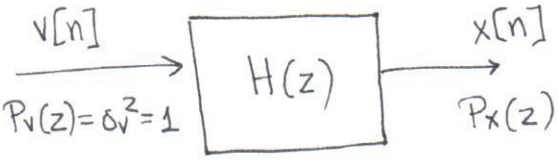
β) Ακριβώς επειδή ο μοναδιαίος κύκλος εμπεριέχεται στην RoC του $\mathcal{Z}$ - Μετασχηματισμού, μπορούμε να κάνουμε την αντικατάσταση $z = e^{j\omega}$, οπότε και λαμβάνουμε:

$$\boxed{P_x(e^{j\omega}) = \frac{15/16}{\left(1-\frac{e^{-j\omega}}{4}\right)\left(1-\frac{e^{j\omega}}{4}\right)} \cdot \left[26 + 5e^{-j\omega} + 5e^{j\omega}\right]}$$

<u>Σημείωση</u>: Κάνοντας χρήση του τύπου Euler cosx = $\frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}$ η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$\mathbf{Px(e^{j\omega})} = \frac{15\,[26+5\cos\omega]}{20-8\cos\omega}$$

γ) Καλούμαστε να σχεδιάσουμε ένα αιτιατό και ευσταθές φίλτρο $H(z)$, τέτοιο ώστε :



όπου $v[n]$: λευκός θόρυβος

Αρχικά, επιδιώκουμε τη φασματική παραγοντοποίηση του $P_x(z) = \dfrac{15/16\,(26+5z^{-1}+5z)}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z)}$

Για το τριώνυμο του αριθμητή:

$$26+5z^{-1}+5z \rightarrow 5z^2+26z+5$$

$$\Delta = 26^2-4\cdot 25 = 676-100 = 576$$

$$z_{1,2} = \frac{-26\pm 24}{10} \quad \begin{aligned} &\nearrow \boxed{z_1=-0.2} \\ &\searrow \boxed{z_2=-5} \end{aligned}$$

Δηλαδή $z_1 = 1/z_2$!

Επομένως :

$$P_x(z) = \left(\frac{15}{16}\right)\cdot\frac{(1+0.2z)(1+0.2z^{-1})\cdot 25}{(1-0.25z^{-1})(1-0.25z)} \Rightarrow \boxed{P_x(z) = \left(\frac{625}{16}\right)\frac{(1+0.2z)(1+0.2z^{-1})}{(1-0.25z^{-1})(1-0.25z)}}$$

Πλέον, δηλαδή, είναι της μορφής:

$$P_x(z) = \sigma_0^2\,\frac{B(z)\cdot B(z^{-1})}{A(z)\cdot A(z^{-1})}$$, όπου $\sigma_0^2 = \left(\frac{625}{16}\right)$, $B(z) = 1+0.2z$, $A(z) = 1-0.25z^{-1}$

Περνώντας τον λευκό θόρυβο $v[n]$ μέσα από το φίλτρο $H(z)$, θα προκύψει το σήμα $x[n]$ με φάσμα ισχύος : $P_x(z) = H(z)\cdot H^*(1/z^*)\cdot\cancel{\sigma_v^2}\rightarrow 1 \Rightarrow \boxed{P_x(z) = H(z)\cdot H^*(z^{-1})}$

Επομένως, θέλουμε :

$$H(z) = \sigma_0\,\frac{B(z)}{A(z)} \Longrightarrow \boxed{H(z) = \left(\frac{25}{4}\right)\cdot\frac{1+0.2z}{1-0.25z^{-1}}}$$

Περιοχή σύγκλισης (RoC) : $|z| > 0.25$

- Περιέχει τον μοναδιαίο κύκλο (ευσταθές)
- Περιέχει το $+\infty$ (αιτιατό)

Άσκηση 3.3: (Σύγκριση FIR vs IIR Wiener φίλτρων)

Έστω στοχαστική ανέλιξη $d[n]$ τύπου AR που δημιουργείται από την εξίσωση διαφορών:

$$d[n] = 0.7\, d[n-1] + w[n] \qquad (I)$$

όπου $w[n]$: λευκός θόρυβος μεταβλητότητας $\sigma_w^2 = 1$.

Παρατηρούμε το σήμα:

$$x[n] = d[n] + v[n] \qquad (II)$$

όπου $v[n]$: λευκός θόρυβος μεταβλητότητας $\sigma_v^2 = 1$ και ασυσχέτιστος με το σήμα $d[n]$.

α) Με τρόπο παρόμοιο της Άσκησης 3.1 προσδιορίζουμε την αυτοσυσχέτιση $r_d[k]$.

Ειδικότερα, από την (I) έχουμε $\sigma_w^2 = 1$ και $a(1) = -0.7$, $a(i) = 0$, $i = 2, 3, \ldots$

Επομένως: $A(z) = 1 - 0.7 z^{-1}$

και

$$P_d(z) = \frac{\sigma_w^2}{A(z)\, A^*(1/z^*)} = \frac{1}{(1-0.7z^{-1})(1-0.7z)} = \frac{z}{(z-0.7)(1-0.7z)}$$

Διάσπαση σε μερικά κλάσματα:

$$\frac{z}{(z-0.7)(1-0.7z)} = \frac{A}{z-0.7} + \frac{B}{1-0.7z} \Rightarrow z = (B - 0.7A)z + A - 0.7B \Rightarrow \begin{cases} A - 0.7B = 0 \\ B - 0.7A = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 0.7B \\ B - \frac{49}{100}B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{B = \frac{100}{51}} \\ \boxed{A = \frac{70}{51}} \end{cases}$$

Συνεπώς: $P_d(z) = \left(\frac{70}{51}\right)\cdot\left(\frac{1}{z-0.7}\right) + \left(\frac{100}{51}\right)\left(\frac{1}{1-0.7z}\right) = \left(\frac{70}{51}\right)\left(\frac{z^{-1}}{1-0.7z^{-1}}\right) + \left(\frac{100}{51}\right)\left(\frac{z^{-1}}{0.7\left(\frac{z^{-1}}{0.7}-1\right)}\right)$

οπότε:

$$r_d[k] = \mathcal{Z}^{-1}\{P_d(z)\} = \left(\frac{70}{51}\right)(0.7)^{k-1} u[k-1] + \left(\frac{100}{51}\right)\cdot\left(\frac{10}{7}\right)\cdot\left(\frac{10}{7}\right)^{k-1} u[-k]$$

$$\Rightarrow r_d[k] = \left(\frac{70}{51}\right)\left(\frac{10}{7}\right)\cdot(0.7)^k\cdot u[k-1] + \left(\frac{100}{51}\right)\cdot(0.7)^{-k} u[-k]$$

$$\Rightarrow \boxed{r_d[k] = \left(\frac{100}{51}\right)\cdot(0.7)^{|k|}} \simeq 1.96\cdot(0.7)^{|k|}$$

· Επίσης, ο θόρυβος $v[n]$ είναι μηδενικής μέσης τιμής και ασυσχέτιστος με το σήμα $d[n]$.

Επομένως: $\mathbb{E}\left[d[n] \cdot v^*[n-k]\right] = 0$

· Ετεροσυσχέτιση μεταξύ των σημάτων $d(n)$ και $x(n)$:

$$r_{dx}[k] = \mathbb{E}\left\{d[n]x^*[n-k]\right\} \overset{(II)}{=} \mathbb{E}\left\{d[n]d^*[n-k]\right\} + \cancelto{0}{\mathbb{E}\left\{d[n] \cdot v^*[n-k]\right\}}$$

$$\Rightarrow \boxed{r_{dx}[k] = r_d[k]}$$

· Αυτοσυσχέτιση του σήματος $x[n] = d[n] + v[n]$:

$$r_x[k] = \mathbb{E}\left\{x[n]x^*[n-k]\right\} = \mathbb{E}\left\{[d[n] + v[n]] \cdot [d^*[n+k] + v^*[n+k]]\right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{r_x[k] = r_d[k] + r_v[k]}$$

όπου $r_d[k] = \left(\frac{100}{51}\right)(0.7)^{|k|}$ και $r_v[k] = \sigma_v^2 \delta[k] = 1 \cdot \delta[k]$

β) Καλούμαστε να σχεδιάσουμε ένα βέλτιστο FIR-2 φίλτρο Wiener με συνάρτηση μεταφοράς:

$W(z) = w[0] + w[1]z^{-1}$ για την αποθορυβοποίηση του $x[n] = d[n] + v[n]$

Εξισώσεις Wiener-Hopf:

$$\begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(1) \\ r_x(1) & r_x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(0) \\ w(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{dx}(0) \\ r_{dx}(1) \end{bmatrix}$$

όπου:

· $r_x(0) = r_d(0) + r_v(0) = \left(\frac{100}{51}\right) + 1 \simeq 2.96$

· $r_x(1) = r_d(1) + \cancelto{0}{r_v(1)} = \left(\frac{100}{51}\right)(0.7) \simeq 1.372$

· $r_{dx}(0) = r_d(0) \simeq 1.96$

· $r_{dx}(1) = r_d(1) \simeq 1.372$

Επομένως:

$$\begin{bmatrix} 2.96 & 1.372 \\ 1.372 & 2.96 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(0) \\ w(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.96 \\ 1.372 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{w(0) \simeq 0.57} \quad \boxed{w(1) \simeq 0.2}$$

(επίλυση με χρήση λογισμικού)

Συνεπώς, η συνάρτηση μεταφοράς του Wiener φίλτρου είναι:

$$\boxed{W(z) = 0.57 + 0.2 z^{-1}}$$

ενώ η αντίστοιχη κρουστική του απόκριση θα είναι:

$$w[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{W(z)\} \Rightarrow \boxed{w[n] = 0.57\,\delta[n] + 0.2\,\delta[n-1]}$$

Το προσδοκητέο τετραγωνικό λάθος του εν λόγω φίλτρου θα είναι:

$$\xi_{fir_2} = \mathbb{E}\{|e[n]|^2\} = r_d[0] - w[0] r_d[0] - w[1] r_d[1]$$

$$\Rightarrow \xi_{fir_2} = 1.96 - 0.57 \cdot \overset{1.96}{\cancel{1.372}} - 0.2 \cdot \overset{1.372}{\cancel{0.96}} \Rightarrow \boxed{\xi_{fir_2} \simeq \cancel{0.9986}} \quad 0.5684$$

γ) Ομοίως καλούμαστε να σχεδιάσουμε ένα βέλτιστο FIR-3 φίλτρο Wiener με συνάρτηση μεταφοράς:

$$W(z) = w[0] + w[1] z^{-1} + w[2] z^{-2}$$

Εξισώσεις Wiener-Hopf:

$$\begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(1) & r_x(2) \\ r_x(1) & r_x(0) & r_x(1) \\ r_x(2) & r_x(1) & r_x(0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w[0] \\ w[1] \\ w[2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{dx}(0) \\ r_{dx}(1) \\ r_{dx}(2) \end{bmatrix}$$

όπου $r_{dx}(2) = r_d(2) = 0.96$

και

$r_x(2) = r_d(2) + \overset{\to 0}{\cancel{r_v(2)}} = 0.96$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2.96 & 1.372 & 0.96 \\ 1.372 & 2.96 & 1.372 \\ 0.96 & 1.372 & 2.96 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w[0] \\ w[1] \\ w[2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.96 \\ 1.372 \\ 0.96 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} w(0) \\ w(1) \\ w(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.56 \\ 0.17 \\ 0.06 \end{bmatrix}$$

(Επίλυση 3x3 συστήματος με python)

Επομένως, η συνάρτηση μεταφοράς του Wiener φίλτρου θα είναι:

$$\boxed{W(z) = 0.56 + 0.17 z^{-1} + 0.06 z^{-2}}$$

ενώ η αντίστοιχη κρουστική απόκριση:

$$\boxed{w(n) = 0.56\,\delta(n) + 0.17\,\delta(n-1) + 0.06\,\delta(n-2)}$$

Το προσδοκητέο τετραγωνικό λάθος του εν λόγω φίλτρου θα είναι:

$$\xi_{fir_3} = r_d[0] - w[0]\,r_d[0] - w[1]\,r_d[1] - w[2]\,r_d[2]$$

$$\Rightarrow \xi_{fir_3} = \xi_{fir_2} - w[2]\,r_d[2] = 0.5684 - 0.06 \cdot 0.96$$

$$\Rightarrow \boxed{\xi_{fir_3} = 0.5108}$$

δ) Τέλος, καλούμαστε να σχεδιάσουμε non-causal IIR φίλτρο Wiener. Η συνάρτηση μεταφοράς του εν λόγω φίλτρου θα είναι:

$$H_{nc}(z) = \frac{P_{dx}(z)}{P_x(z)}$$

. Όμως $P_{dx}(z) = P_d(z)$ και $P_x(z) = P_d(z) + P_v(z)$, καθώς τα σήματα $d[n]$ και $v[n]$ είναι ασυσχέτιστα.

Επομένως: $$H_{nc}(z) = \frac{P_d(z)}{P_d(z) + P_v(z)}$$

όπου:

$P_d(z)$: το φάσμα ισχύος του αθόρυβου σήματος $d[n]$

$P_v(z)$: το φάσμα ισχύος του λευκού θορύβου $v[n]$

Έχουμε, ήδη, υπολογίσει: $P_d(z) = \dfrac{z}{(z-0.7)(1-0.7z)}$, ενώ $r_v[k] = \sigma_v^2\,\delta[k] = \delta[k]$ οπότε $P_v(z) = 1$.

Συνεπώς:

$$\boxed{H_{nc}(z) = \frac{z}{z + (z-0.7)(1-0.7z)} = \frac{1}{1 + (1-0.7z^{-1})(1-0.7z)}}$$

Δηλαδή:

$$H_{nc}(z) = \frac{z}{-0.7z^2 + 2.49z - 0.7}$$

Κάνοντας χρήση της γλώσσας python, βρίσκουμε ότι οι ρίζες του τριωνύμου $-0.7z^2+2.49z-0.7$ είναι περίπου ίσες με $p_1 = 3.25$ και $p_2 = 0.308$ ενώ ισχύει $\boxed{p_1 = 1/p_2}$

Επομένως:

$$H_{nc}(z) = \frac{\cancel{z}}{-0.7(1-0.308z^{-1})(1-0.308z)\cdot\left(-\frac{1}{0.308}\right)\cancel{z}}$$

$$\Rightarrow \boxed{H_{nc}(z) = \frac{0.308}{0.7(1-0.308z^{-1})(1-0.308z)}}$$

Γνωρίζουμε (πλέον!) ότι:

$$a^{|k|} \overset{\mathcal{Z}}{\rightleftarrows} \frac{1-a^2}{(1-az^{-1})(1-az)}$$

έχουμε:

$$h_{nc}[n] = \frac{0.308}{0.7}\cdot\left(\frac{1}{1-0.308^2}\right)\cdot(0.308)^{|k|} \Rightarrow \boxed{h_{nc}[n] = \overset{0.4861}{\cancel{0.8627}}\cdot(0.308)^{|n|}}$$

Μέσο Τετραγωνικό σφάλμα:

$$\xi_{iir,nc} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_v(e^{j\omega})\,H_{nc}(e^{j\omega})\,d\omega = \frac{\sigma_v^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_{nc}(e^{j\omega})\,d\omega = \sigma_v^2 h_{nc}[0]$$

$$\Rightarrow \boxed{\xi_{iir,nc} = 0.4861}$$

Τελικώς: $\boxed{\xi_{iir,nc} < \xi_{fir_3} < \xi_{fir_2}}$

Άσκηση 3.4 (Υπολογιστική Εκτίμηση Φάσματος Ισχύος τυχαίων σημάτων):

Στόχος της άσκησης είναι η εκτίμηση του φάσματος ισχύος μιας τυχαίας διαδικασίας με δύο ελαφρώς διαφορετικές μη-παραμετρικές μεθόδους και η σύγκριση των αποτελεσμάτων σχετικά με την ικανότητα της κάθε μεθόδου να μην καλύπτει ασθενείς ημιτονοειδείς συνιστώσες που βρίσκονται κοντά σε ισχυρότερες. Οι δυο μέθοδοι που θα δοκιμαστούν είναι το **περιόδογραμμα** (periodogram) και το **modified periodogram**.

Εστω ένα τυχαίο σήμα x[n]. Το **Περιοδόγραμμα** ενός τμήματος $x_N[n] = x[n]w_R[n]$ μήκους N δειγμάτων, όπου $w_R[n]$ ένα ορθογώνιο παράθυρο στο διάστημα [0, ..., N − 1], ισούται με:

$P_{per}(e^{j\omega}) = \frac{1}{N}\left\lvert\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\omega n}\right\rvert^2$	Eq. (1)

Το **Τροποποιημένο Περιοδόγραμμα** (Modified Periodogram) χρησιμοποιεί ένα διαφορετικό (μη-ορθογώνιο) παράθυρο στο διάστημα [0, ..., N − 1] και ορίζεται ως:

$P_{per}(e^{j\omega}) = \frac{1}{NU}\left\lvert\sum_{n=0}^{N-1} x[n]w[n]e^{-j\omega n}\right\rvert^2$	Eq. (2)

Όπου:

$U = \frac{1}{N}\left\lvert\sum_{n=0}^{N-1} w[n]\right\rvert^2$ η ενέργεια του παραθύρου w[n], το οποίο επιλέγουμε να είναι Hamming.

Ως **εκτίμηση της στατιστικής μέσης τιμής** του κάθε περιοδογράμματος θα λάβετε τον αριθμητικό μέσο των περιοδογραμμάτων που θα προκύψουν επαναλαμβάνοντας **50 φορές** το κάθε πείραμα (με διαφορετική πραγματοποίηση του θορύβου κάθε φορά). Το σήμα που θα χρησιμοποιηθεί θα είναι το άθροισμα δύο ημιτόνων με τυχαία φάση, με παρουσία προσθετικού λευκού θορύβου v[n] μοναδιαίας μεταβλητότητας:

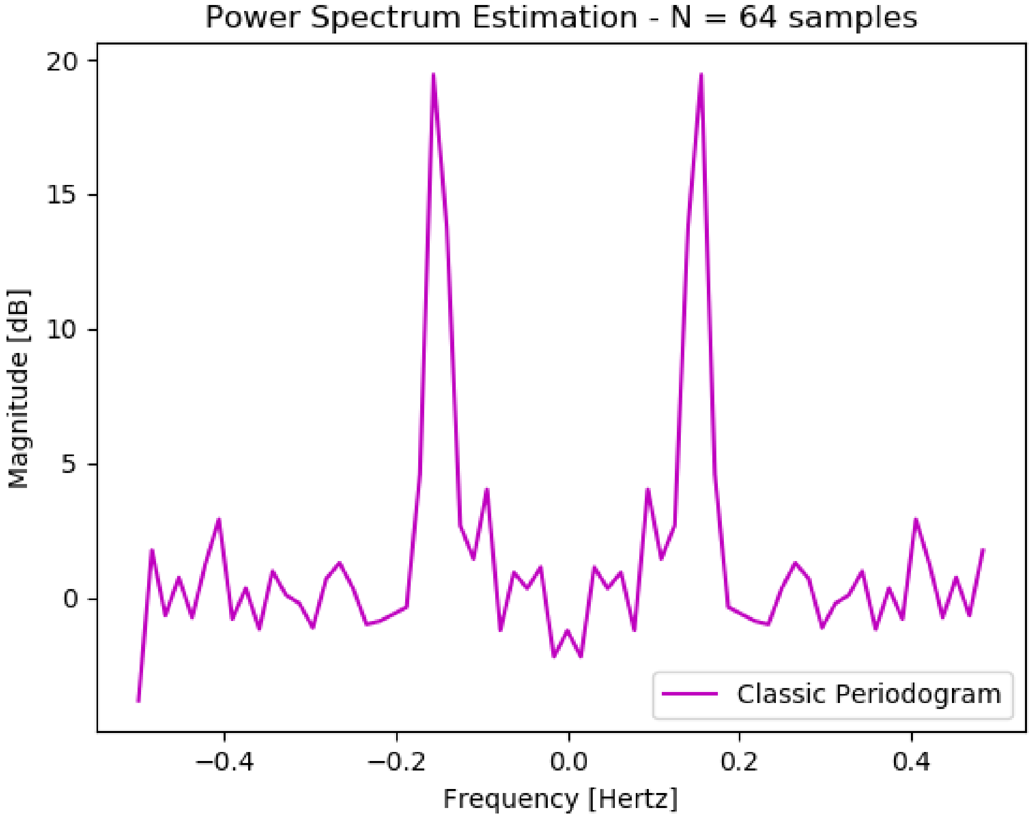
$x[n] = 0.1\sin(\omega_1 n + \phi 1) + \sin(\omega_2 n + \phi 2) + v[n]$	Eq. (3)

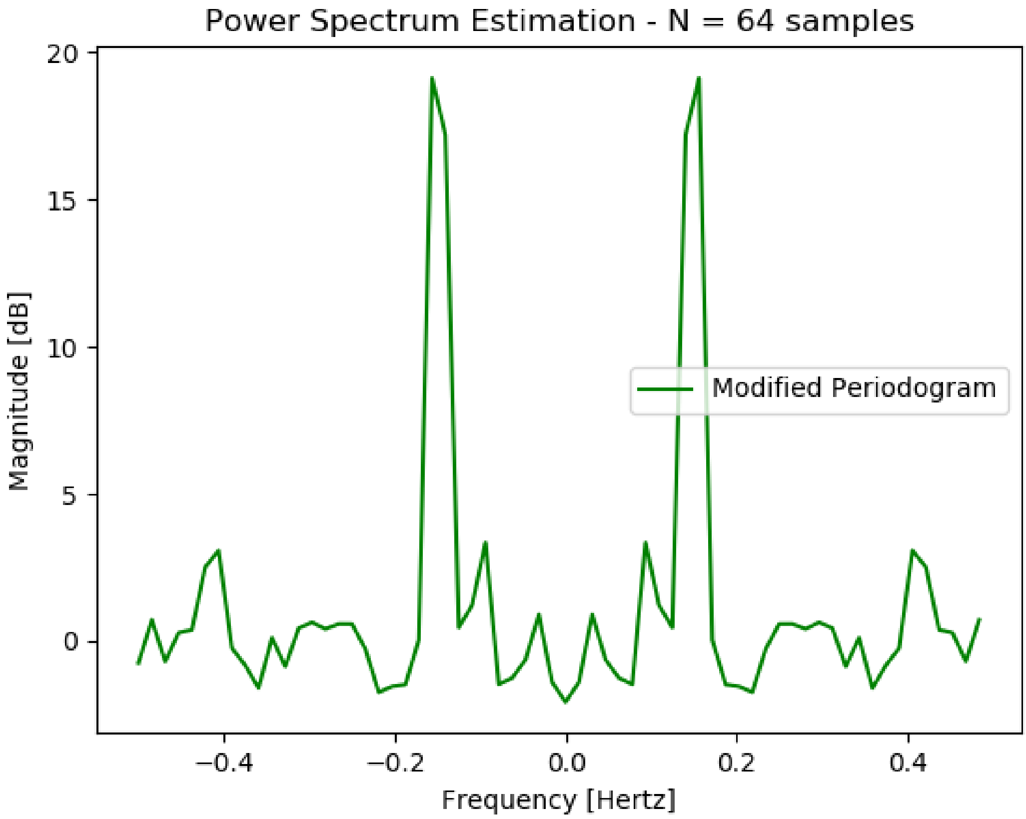
Όπου:

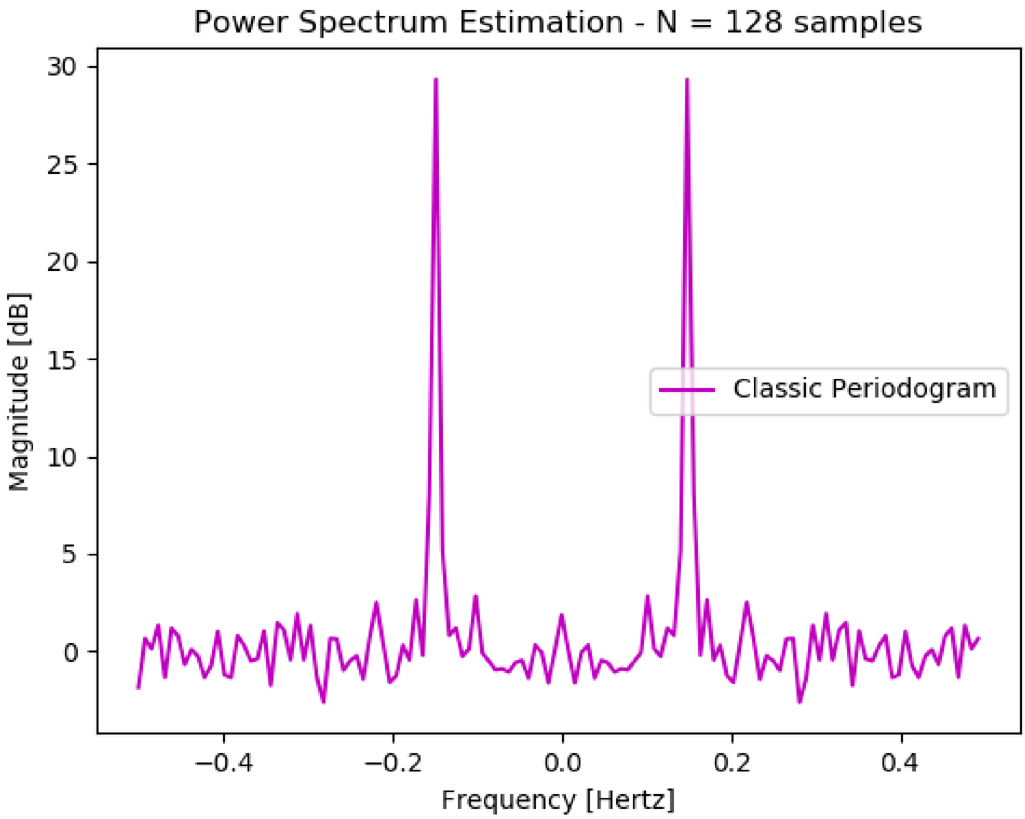
- ϕ1 και ϕ2 τυχαίες μεταβλητές ομοιόμορφα κατανεμημένες στο διάστημα [0, 2π].
- ω1 = 0.2π, ω2 = 0.3π.
- Το μήκος παραθύρου N = 128 και N = 64.

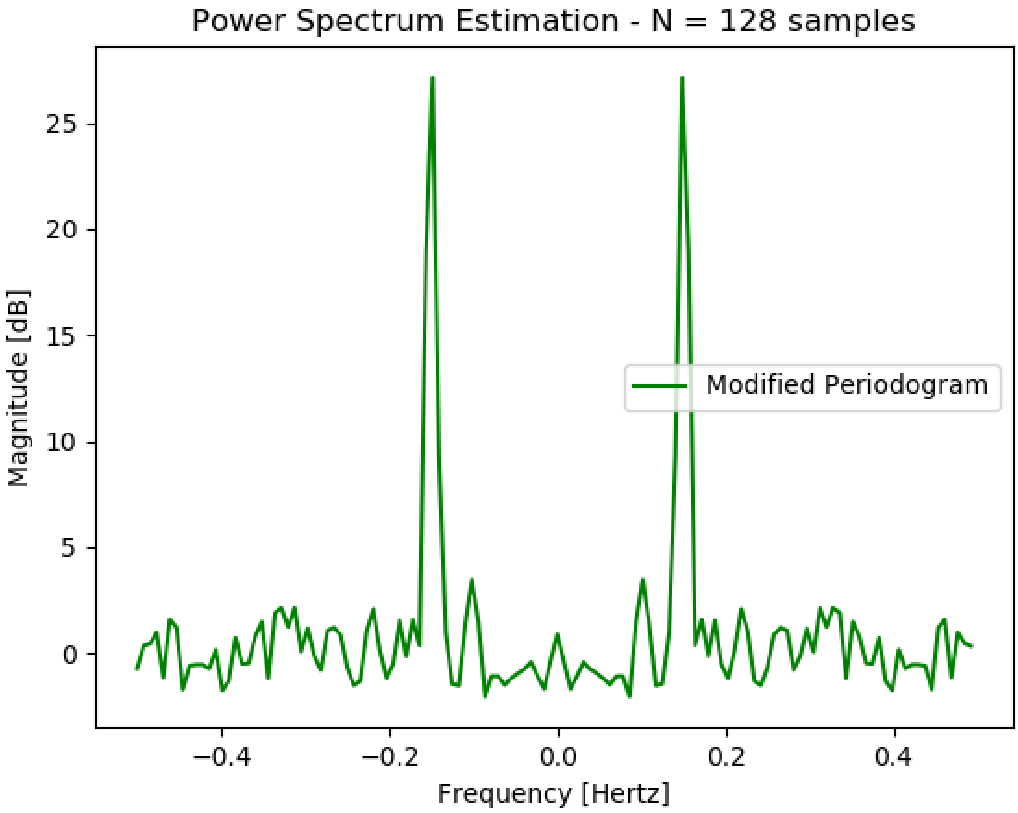
A) Ο κώδικας που δημιουργεί το σήμα x[n] και παράγει τις διαφορετικές εκτιμήσεις του φάσματος ισχύος με τις δύο μεθόδους Classic Periodogram / Modified Periodogram και τα δύο μήκη N = 64, 128 βρίσκεται στο αρχείο “*dsp20-hwk3.4.py*”

B) Παρακάτω, φαίνονται τα γραφήματα των εκτιμήσεων του φάσματος σε λογαριθμική κλίμακα (dB) σε συνάρτηση με τη συχνότητα f (Hz) και με τους τέσσερις τρόπους:


Power Spectrum Estimation - N = 64 samples
Magnitude [dB]
Frequency [Hertz]
Classic Periodogram
20
15
10
5
0
−0.4
−0.2
0.0
0.2
0.4


Power Spectrum Estimation - N = 64 samples
Magnitude [dB]
Frequency [Hertz]
Modified Periodogram
20
15
10
5
0
−0.4
−0.2
0.0
0.2
0.4


Power Spectrum Estimation - N = 128 samples
Classic Periodogram
Magnitude [dB]
Frequency [Hertz]
30
25
20
15
10
5
0
−0.4
−0.2
0.0
0.2
0.4


Power Spectrum Estimation - N = 128 samples
Modified Periodogram
Magnitude [dB]
Frequency [Hertz]
25
20
15
10
5
0
−0.4
−0.2
0.0
0.2
0.4

Γ) Παρατηρούμε ότι **το τροποποιημένο περιοδόγραμμα είναι πιο αποτελεσματικό από το κλασικό περιοδόγραμμα στην αντιμετώπιση του θορύβου**. Αυτό συμβαίνει διότι, το πρώτο χρησιμοποιεί παράθυρα Hamming, των οποίων οι πλευρικοί λοβοί είναι σημαντικά χαμηλότερου πλάτους συγκριτικά με αυτούς ενός τετραγωνικού παράθυρου (μέχρι και 30dB).

Από την άλλη μεριά, βέβαια, βλέπουμε ότι **το τροποποιημένο πειοδόγραμμα υστερεί ως προς τη συχνοτική ανάλυση (frequency resolution) σε σχέση με το κλασικό**, καθώς το τίμημα για την αντιμετώπιση του θορύβου είναι κύριοι λοβοί μεγαλύτερου εύρους. Συνεπώς, υπάρχει συνέπεια μεταξύ επιστημονικών μετρήσεων και του θεωρητικά αναμενόμενου.

Αξίζει να σημειωθεί ότι **η αύξηση του μήκους N** του χρησιμοποιούμενου παραθύρου, από 64 σε 128 δείγματα, φαίνεται να **βελτιώνει τη συχνοτική ανάλυση**, καθιστώντας λίγο πιο εφικτό τον εντοπισμό των δύο κύριων συχνοτικών συνιστωσών στις θέσεις $f1 = \omega1/2\pi = 0.1Hz$ και $f2 = \omega2/2\pi = 0.15Hz$.

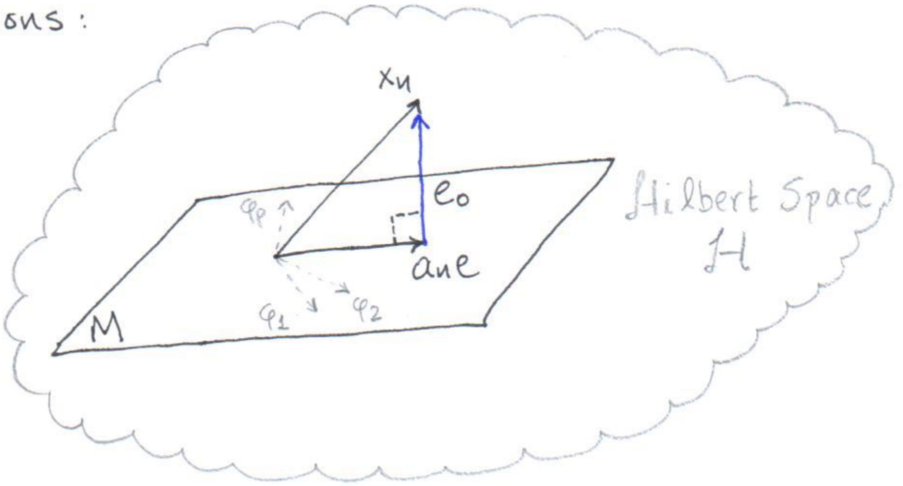
Παρατηρώντας, λοιπόν, τα παραπάνω διαγράμματα, εκείνο που φαίνεται να είναι πιο αποτελεσματικό στην εκτίμηση των δύο κοντινών συχνοτικών συνιστωσών διαφορετικού πλάτους, είναι το τέταρτο, δηλαδή η εκτίμηση φάσματος ισχύος με **τροποποιημένο περιοδόγραμμα για N = 128 δείγματα**. Ωστόσο, η συχνοτική συνιστώσα του ημίτονου χαμηλότερου πλάτους παραμένει κάπως δυσδιάκριτη, λόγω του θορύβου, ο οποίος δεν γίνεται να εξαλειφθεί πλήρως.

Άσκηση 3.5 : (PCA, SVD).

Δίνεται μια ακολουθία δεδομένων (τυχαία διανύσματα με μηδενικό μέσο) $x_n \in \mathbb{R}^d$, $n=1,\dots,N$ και θέλουμε να βρούμε μια κατεύθυνση, (μοναδιαίο) διάνυσμα $e \in \mathbb{R}^d$, και σταθερές a_n έτσι, ώστε, αν προσεγγίσουμε κάθε δεδομένο μας (διάνυσμα στήλης) x_n με ένα διάνυσμα $a_n e$, το συνολικό μέσο τετραγωνικό λάθος J να είναι ελάχιστο :

$$J(a_1,\dots,a_n,e) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\|x_n - a_n e\|^2 \ , \quad \|\cdot\| = \text{Euclidean norm}$$

a) Θεωρώντας γνωστό το e, θα προσδιορίσουμε τα βέλτιστα a_n μέσω μιας γεωμετρικής προσέγγισης :



Έστω χώρος Hilbert H, ο οποίος περιλαμβάνει τον χώρο M. Ο χώρος M περιλαμβάνει όλα τα διανύσματα εκείνα που ανήκουν στο επίπεδο που ορίζει η κατεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος $e \in \mathbb{R}^d$. Εμείς, καλούμαστε να προσεγγίσουμε το διάνυσμα x_n στον χώρο M με τρόπο, τέτοιον ώστε η ενέργεια του σφάλματος e_0^2 να είναι η ελάχιστη. Προκειμένου, λοιπόν, το μέτρο του διανύσματος e_0 να είναι το ελάχιστο δυνατόν, πρέπει το διάνυσμα e_0 να είναι <u>κάθετο</u> στον χώρο M. Με άλλα λόγια, η προσέγγιση $\tilde{x}_N \equiv a_n \cdot e$ θα είναι η <u>προβολή</u> του διανύσματος x_n στον χώρο M.

Επομένως, θα ισχύει :

$$\boxed{a_n = \langle x_n, e \rangle = x_n^T e}$$

προκειμένου, να ελαχιστοποιείται το τετραγωνικό σφάλμα.

β) $J(a_1, \dots, a_n, e) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \|x_n - a_n e\|^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\|x_n\|^2 - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\|a_n e\|^2$

$= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\|x_n\|^2 - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\|a_n\|^2$ (αφού $\|e\|=1$)

Όμως δείξαμε ότι $a_n = \langle x_n, e\rangle = x_n^T e$

οπότε :

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\|a_n\|^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(e^T x_n)(x_n^T e) = e^T \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n x_n^T e = e^T R_x e$$

όπου $R_x = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n x_n^T$: ο εμπειρικός πίνακας αυτοσυσχέτισης των δεδομένων

και εν τέλει :

$$\boxed{J_1(e) = -e^T R_x e + (1/N)\sum_{n=1}^{N}\|x_n\|^2}$$

γ) Στη συνέχεια, εκμεταλλευόμενοι τον περιορισμό $\|e\|=1 \Rightarrow e^H \cdot e = 1 \Rightarrow e^T \cdot e = 1$ (εφόσον πραγματευόμαστε πραγματικούς πίνακες), εφαρμόζουμε τη Μέθοδο του Πολλαπλασιαστή Lagrange, για να σχηματίσουμε τη συνάρτηση κόστους :

$$J = -e^T R_x e + (1/N)\sum_{n=1}^{N}\|x_n\|^2 - \lambda \cdot (e^T e - 1)$$

Έπειτα :

$$\frac{\partial J}{\partial e^*} = \frac{\partial\left(-e^T R_x e + (1/N)\sum_{n=1}^{N}\|x_n\|^2 - \lambda(e^T e - 1)\right)}{\partial e^*} = -R_x \cdot e - \lambda \cdot e$$

Θέλουμε : $\frac{\partial J}{\partial e^*} = 0 \Longrightarrow \boxed{-R_x \cdot e = \lambda \cdot e}$

Η παραπάνω σχέση υποδηλώνει ότι για να ελαχιστοποιήσουμε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της προσέγγισής μας, πρέπει να επιλέξουμε πολλαπλασιαστή Lagrange λ, ίσο με την μεγαλύτερη ιδιοτιμή λ_1 του πίνακα R_x, καθώς και το διάνυσμα ορθογώνιας βάσης e ίσο με το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα - έστω v_1 - του πίνακα R_x.

δ) Principal Component Analysis:

Αν θεωρήσουμε το διάνυσμα εισόδου x και την προσέγγιση αυτού $\tilde{x}$ στο χώρο που ορίζει μια ορθοκανονική βάση $\{e_1, \dots, e_p\}$, τότε η βέλτιστη προσέγγιση είναι:

$$\tilde{x} = \sum_{k=1}^{p} y_k \cdot e_k \,, \quad y_i = \langle x, e_i \rangle = e_i^H x$$

και το Mean Square Error:

$$J = \mathbb{E}\{\|x-\tilde{x}\|^2\} = \mathbb{E}\{\|x\|^2\} - \sum_{k=1}^{p} \mathbb{E}\{|y_k|^2\} = \sum_{i=p+1}^{d} e_i^H R_x e_i \,, \quad \text{όπου } d > p.$$

Ελαχιστοποιώντας το J υπό τον περιορισμό $e_i^H e_i = 1$, προσδιορίζουμε τη βέλτιστη ορθοκανονική βάση $\{e_1, \dots, e_d\}$ η οποία αποτελείται από τα ιδιοδιανύσματα του R_x:

$$R_x e_i = \lambda_i e_i \,, \quad i = 1, 2, \dots, d$$

Διατάσσουμε, δηλαδή, τις ιδιοτιμές ως $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_d$ επιλέγουμε τις p μεγαλύτερες ιδιοτιμές. Συγκρίνοντας τα παραπάνω με τα προηγούμενα ερωτήματα, προκύπτει ότι η λύση των (α), (β), (γ) συνιστά PCA τάξης $\boxed{p = 1.}$

ε) Singular Value Decomposition: του πίνακα $X_{N \times d}$ στοιβάζοντας τα διανύσματα x_n, $n = 1, \dots, N$ ως γραμμές

Έχουμε:

$$R_x = \frac{1}{N} X^T X = V \cdot \Lambda \cdot V^T \,, \quad \text{όπου } \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$$ διαγώνιος πίνακας ιδιοτιμών λ_k και V πίνακας με στήλες τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα v_k.

SVD: $X = U \Sigma V^T \rightarrow \boxed{R_x = V \frac{\Sigma^2}{N} V^T}$

όπου $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ με $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r$ και οι ιδιοτιμές $\boxed{\lambda_k = \sigma_k^2 / N}$.

Επομένως, οι ιδιοκατευθύνσεις είναι τα ιδιοδιανύσματα v_k και η k-οστή στήλη του XV είναι η k-οστή πρωτεύουσα συνιστώσα.

Όπως εξηγήθηκε και στο εργαστήριο,

Για τάξη $p = 1$, έχουμε: $\boxed{e = v_1}$ και $[a_1, a_2, \dots, a_N]^T = X \cdot v_1$

στ) Δίνονται τα εξής δεδομένα ($N = 4$, $d = 3$):

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.3 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \\ 0.3 \end{bmatrix}, \quad x_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Επομένως:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -0.1 & 0.2 \\ 1 & -0.3 & 0.5 \\ 0 & 0.1 & 0.3 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad X^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ -0.1 & -0.3 & 0.1 & -1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 & 1 \end{bmatrix}$$

οπότε:

$$R_x = \frac{1}{N} X^T X = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ -0.1 & -0.3 & 0.1 & -1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0.1 & 0.2 \\ 1 & -0.3 & 0.5 \\ 0 & 0.1 & 0.3 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow R_x = \begin{bmatrix} 5.4 & -1.08 & 1.14 \\ -1.08 & 0.222 & -0.228 \\ 1.14 & -0.228 & 0.276 \end{bmatrix}$$ (υπολογίστηκε με χρήση python)

Ο παραπάνω πίνακας έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = 5,85$, $\lambda_2 = 0.038$, $\lambda_3 = 0.00576$ και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα:

$$v_1^T = [-0.96 \quad 0.192 \quad -0.2]$$

$$v_2^T = [0.19 \quad -0.048 \quad -0.97]$$

$$v_3^T = [0.197 \quad 0.98 \quad -0.008]$$

Εν τέλει για $p = 1$ έχουμε:

$$\boxed{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = X \cdot v_1 = \begin{bmatrix} -1.019 \\ -1.119 \\ -0.042 \\ -5.196 \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{e = v_1 = \begin{bmatrix} -0.96 \\ 0.192 \\ -0.2 \end{bmatrix}}$$

Η επίλυση του παραπάνω προβλήματος γραμμικής άλγεβρας φαίνεται στο αρχείο 'dsp20_hwk3.5.py'