

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

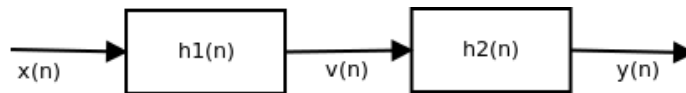
Επεξεργασία Φωνής και Φυσικής Γλώσσας

Χειμερινό εξάμηνο 2020-2021

1<sup>η</sup> Σειρά Αναλυτικών Ασκήσεων

Άσκηση 1

Θεωρήστε 2 χρονικά αμετάβλητα γραμμικά συστήματα, όπως φαίνονται στο παρακάτω σχήμα, δηλαδή η έξοδος του πρώτου συστήματος είναι η είσοδος του δεύτερου.



1. Δείξτε ότι η χρονική απόκριση του συνολικού συστήματος είναι

$$h(n) = h_1(n) * h_2(n) \quad (1)$$

2. Δείξτε ότι

$$h_1(n) * h_2(n) = h_2(n) * h_1(n) \quad (2)$$

άρα η συνολική χρονική απόκριση δεν εξαρτάται από την σειρά με την οποία εμφανίζονται τα συστήματα.

3. Θεωρείστε τη συνάρτηση

$$H(z) = \left( \sum_{r=0}^M b_r z^{-r} \right) \left( \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \right) = H_1(z) H_2(z) \quad (3)$$

δηλαδή σαν σειρά δυο συστημάτων. Γράψτε τις εξισώσεις διαφορών του ολικού συστήματος από αυτήν την οπτική.

4. Τώρα θεωρείστε τα δυο συστήματα του ερωτήματος (3) με την ανάποδη σειρά, δηλαδή:

$$H(z) = H_2(z) H_1(z) \quad (4)$$

Άσκηση 2

Όπως φαίνεται στην παρακάτω εξίσωση, η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι

$$R_n(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) w(n-m) x(m+k) w(n-k-m) \quad (5)$$

1. Ορίστε ότι

$$R_n(k) = R_n(-k) \quad (6)$$

δηλαδή ότι η  $R_n(k)$  είναι μια άρτια συνάρτηση του  $k$ .

2. Δείξτε ότι η  $R_n(k)$  μπορεί να εκφραστεί ως

$$R_n(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)x(m-k)h_k(n-m) \quad (7)$$

όπου

$$h_k(n) = w(n)w(n+k) \quad (8)$$

3. Υποθέστε ότι

$$w(n) = \begin{cases} \alpha^n & \text{if } n \geq 0 \\ 0 & \text{if } n < 0 \end{cases} \quad (9)$$

Βρείτε την χρουστική απόκριση  $h_k(n)$ .

4. Βρείτε το μετασχηματισμό  $z$  του  $h_k(n)$  από το προηγούμενο ερώτημα και εκφράστε το  $R_n(k)$  με αναδρομική συνάρτηση βάσει αυτού.

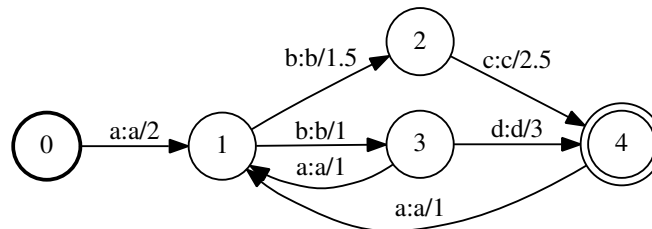
5. Επαναλάβετε τα βήματα (3) και (4) για

$$w(n) = \begin{cases} n\alpha^n & \text{if } n \geq 0 \\ 0 & \text{if } n < 0 \end{cases} \quad (10)$$

### Άσκηση 3

Για την μηχανή πεπερασμένης κατάστασης που ακολουθεί

1. Ποια είναι η κανονική έκφραση που αντιστοιχεί στην μηχανή ;
2. Ποια είναι η πιο πιθανή γραμματοσειρά που αποδέχεται η μηχανή εφόσον χρησιμοποιούμε τον τροπικό ημιδακτύλιο; ( tropical semiring collect operation is min, extend operation is +.) Σημείωση: το κόστος των (πιθανών) τελικών καταστάσεων συνυπολογίζεται μόνο εφόσον αυτή η κατάσταση είναι όντως τελική. Το κόστος μίας μη τελικής κατάστασης συνυπολογίζεται κάθε φορά που περνάμε από αυτήν. Το κόστος της κατάστασης 3 είναι 6 και της κατάστασης 4 είναι 0.
3. Ποιο είναι το κόστος της γραμματοσειράς abdababc;
4. Ποια είναι η ισοδύναμη ντετερμινιστική μηχανή χωρίς κόστος;
5. Ποια είναι η ισοδύναμη ντετερμινιστική μηχανή με κόστος;



### Άσκηση 4

Δίδεται το εξής αλφάβητο  $\Sigma = \{ A, G, C, T, E, F \}$ .

1. Σχεδιάστε τον μετατροπέα (transducer) που υλοποιεί την απόσταση Levenshtein, δηλαδή  $d(x,x) = 0$  και  $d(x,\varepsilon) = d(\varepsilon,x) = d(x,y) = 1$  όπου  $x$  και  $y$  είναι διαφορετικά γράμματα του αλφαβήτου  $\Sigma$ .
2. Ποια είναι η καλύτερη (ποιο φτηνή) αντιστοίχιση ανάμεσα στις γραμματοσειρές AECAGEF και TETCGAG; Πώς χρησιμοποιήσατε το μετατροπέα από την ερώτηση (1);
3. Ποια είναι η δεύτερη καλύτερη αντιστοιχία ανάμεσα στις γραμματοσειρές της ερώτησης (2);

#### Άσκηση 5

Δίνονται τα ακόλουθα τμήματα προτάσεων που χρησιμοποιούν το λεξικό  $L = \{\text{lovely, grand, mother, grandmother}\}$ :

... lovely mother grand grandmother lovely grandmother grand mother ... (4 φορές)  
 ... lovely mother lovely grandmother lovely ... (9 φορές)  
 ... mother grandmother mother... (3 φορές)  
 ... lovely grand lovely... (1 φορά)

1. Υπολογίστε το γλωσσικό μοντέλο bigram και την αντίστοιχη μηχανή πεπερασμένης κατάστασης με κόστος  $-\log P$ . Χρησιμοποιήστε back-off για τα bigrams που δεν παρατηρούνται στις παραπάνω προτάσεις.
2. Ποια είναι η πιο πιθανή σειρά από λέξεις για την πρόταση χωρίς κενά: lovelygrandmothergrand?

#### Άσκηση 6

Θεωρήστε ένα all pole μοντέλο με συνάρτηση μεταφοράς της μορφής

$$V(z) = \frac{1}{\prod_{k=1}^q (1 - c_k z^{-1})(1 - c_k^* z^{-1})} \quad (11)$$

όπου

$$c_k = r_k e^{j\theta_k} \quad (12)$$

Δείξτε ότι το αντίστοιχο cepstrum είναι

$$\hat{v}(n) = 2 \sum_{k=1}^q \frac{(r_k)^n}{n} \cos(\theta_k n) \quad (13)$$

#### Άσκηση 7

Θεωρήστε το απλό πρόβλημα linear regression,  $y = Wx + b$

1. Ποιά είναι η συνάρτηση σφάλματος του linear regression ;
2. Βρείτε τη λύση κλειστού τύπου για τις βέλτιστες παραμέτρους  $W, b$
3. Στην πράξη παρόλο που υπάρχει η λύση κλειστού τύπου, χρησιμοποιούμε επαναληπτικές μεθόδους (π.χ Gradient Descent) για τη λύση του προβλήματος linear regression. Γιατί συμβαίνει αυτό;
4. Εξάγετε τον κανόνα ανανέωσης των παραμέτρων με βάση τη μέθοδο Gradient Descent.

5. Σας δίνονται τρία δείγματα  $x = \{1, 2, 3\}$  και οι αντίστοιχες επισημειώσεις  $y = \{1.5, 2, 2.5\}$ . Σχεδιάστε στο επίπεδο τα ζεύγη  $(x_i, y_i)$ .
6. Σας δίνεται σαν αρχική κατάσταση  $(w_0, b_0) = (0, 0)$ . Υπολογίστε την τιμή της συνάρτησης κόστους από το ερώτημα 1.
7. Με βάση τις αρχικές συνθήκες του προηγούμενου ερωτήματος, υπολογίστε τις βέλτιστες τιμές με βάση τη λύση κλειστού τύπου.
8. Για τις αρχικές συνθήκες του ερωτήματος 6, εκτελέστε δύο επαναλήψεις της μεθόδου **Gradient Descent** με ρυθμό μάθησης 1. Σε κάθε επανάληψη υπολογίστε και το αντίστοιχο σφάλμα. Τί παρατηρείτε;