



Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης  
Πολυτεχνική Σχολή  
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

---

## Αναφορά Ενισχυτικού Εργαστηρίου

---

Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου II

Φιλιππίδης Χρήστος  
ΑΕΜ: 11090  
cfilippi@ece.auth.gr

May 16, 2025

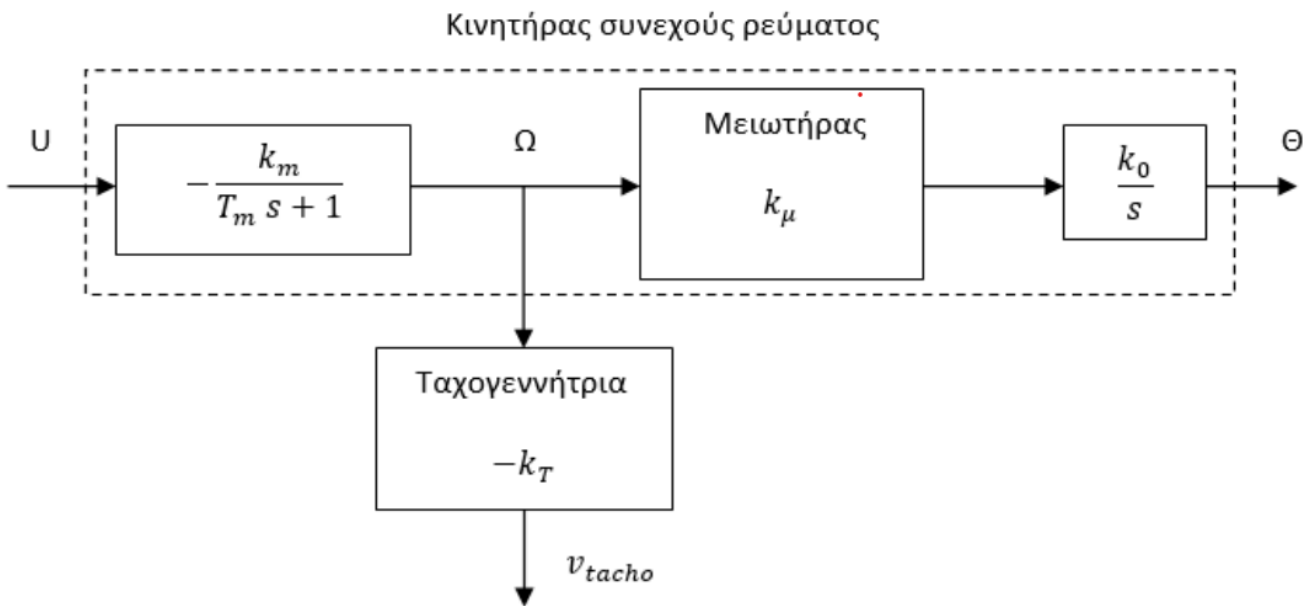
## Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Άσκηση 1</b>	<b>2</b>
1.1	Πειραματική εκτίμηση των $k_m, k_T, k_0, k_\mu, T_m$	2
<b>2</b>	<b>Άσκηση 2</b>	<b>4</b>
2.1	Θεωρητική Ανάλυση	4
2.2	Εργαστηριακά Αποτελέσματα	5
2.2.1	Ερώτημα 1	5
2.2.2	Ερώτημα 2	6
2.2.3	Ερώτημα 3	6
2.2.4	Ερώτημα 4	8
<b>3</b>	<b>Άσκηση 3</b>	<b>11</b>
3.1	Θεωρητική Ανάλυση	11
3.2	Εργαστηριακά Αποτελέσματα	12
<b>4</b>	<b>Άσκηση 4</b>	<b>14</b>
4.1	Θεωρητική Ανάλυση	14
4.2	Εργαστηριακά Αποτελέσματα	15
4.2.1	Ερώτημα 1	15
4.2.2	Ερώτημα 2	16

# 1 Άσκηση 1

## 1.1 Πειραματική εκτίμηση των $k_m, k_T, k_0, k_\mu, T_m$

Στόχος της πρώτης εργαστηριακής άσκησης του ενισχυτικού εργαστηρίου είναι η μοντελοποίηση ενός συστήματος ηλεκτρικού κινητήρα. Τα μετρητικά συστήματα είναι μια ταχογεννήτρια για τη μέτρηση της ταχύτητας του άξονα και ένα ποτενσιόμετρο για τη μέτρηση της θέσης του άξονα. Το δομικό διάγραμμα του συστήματος ηλεκτρικός κινητήρας συνεχούς ρεύματος – ταχογεννήτρια δίνεται στο Σχήμα 1, όπου  $U$  είναι η τάση εισόδου,  $\Omega$  η ταχύτητα περιστροφής της ταχογεννήτριας σε rpm,  $\Theta$  η θέση – τάση του άξονα του κινητήρα και  $V_{tacho}$  η τάση στην ταχογεννήτρια.



Σχήμα 1: Δομικό διάγραμμα συστήματος

Η μοντελοποίηση του συστήματος, λοιπόν, έγκειται στην εκτίμηση των παραμέτρων  $k_m, k_T, k_0, k_\mu, T_m$ . Για αρχή, συνδέσαμε την έξοδο από το SW1 στο INPUT TO POWER AMPLIFIER και τα probes του παλμογράφου στο σημείο TACHO και στην έξοδο του SW1. Ανοίγοντας, τώρα, τον διακόπτη SW1, διεγείραμε το σύστημα με μία τάση εισόδου 10VDC και καταγράψαμε τα αποτελέσματα στον παλμογράφο για να δούμε το διάγραμμα της ταχύτητας. Από αυτό πήραμε τις μετρήσεις  $V_{in} = 10V$  και  $V_T = 2.78V$ .

Από την συνάρτηση μεταφοράς  $\frac{V_{tacho}}{U} = \frac{k_m k_T}{T_m s + 1}$  στην μόνιμη κατάσταση ( $s = 0$ ) παίρνουμε ότι

$$k_m k_T = \frac{V_T}{V_{in}} = 0.278 \quad (1)$$

Για να υπολογίσουμε την παράμετρο  $T_m$ , βρήκαμε τη χρονική στιγμή κατά την οποία η απόκριση φτάνει στο 63,3% της μέγιστης τιμής της, δηλαδή στην τιμή  $V_m = V_T \cdot 63.3\% = 1.76V$ . Η οριζόντια απόσταση μεταξύ του άξονα y και του σημείου σταθεράς χρόνου είναι το  $T_m$  το οποίο τελικά ισούται με  $T_m = 0.47sec$ .

Η παράμετρος  $k_\mu$  αντιστοιχεί στο λόγο της γωνίας στροφής του «άξονα εξόδου» προς τη γωνία στροφής του άξονα του κινητήρα. Γι' αυτό, στρέφοντας με το χέρι το δισκόφρενο που φέρει ο άξονας του κινητήρα

για μία πλήρη στροφή, παρατηρήσαμε ότι ο «άξονας εξόδου» περιστρέφεται κατά 10 μοίρες.

$$\text{Άρα } k_{\mu} = \frac{10}{360} = \frac{1}{36}.$$

Επιλέγουμε μεταβλητές κατάστασης  $x_1 = \omega$  και  $x_2 = \theta$ , τότε από το δομικό διάγραμμα παίρνουμε:

$$\frac{\Theta}{\Omega} = k_{\mu} \cdot \frac{k_0}{s} \Rightarrow \dot{x}_2 = k_{\mu} k_0 x_1 \Rightarrow \frac{\Delta x_2}{\Delta t} = k_{\mu} k_0 \omega \quad (2)$$

Για να υπολογίσουμε το  $\frac{\Delta x_2}{\Delta t}$  συνδέσαμε τον παλμογράφο στη θέση MOTOR POSITION INVERTED και πατώντας το HOLD μπορέσαμε να μετρήσουμε την κλίση της πριονωτής κυματομορφής που εμφανίζεται, καθώς και την περίοδο  $T_{\text{εξόδου}}$  μίας πλήρους περιστροφής του άξονα εξόδου. Λάβαμε τις μετρήσεις  $\frac{\Delta x_2}{\Delta t} = \frac{11.3}{0.983} = 11.495$  και  $T_{\text{εξόδου}} = 0.983 \text{sec}$ .

Με μέθοδο των τριών μπορούμε να υπολογίσουμε το  $\omega_{\text{εξόδου}} = \frac{60}{T_{\text{εξόδου}}} = \frac{60}{0.983} = 61.037$ . Οι στροφές,

όμως, στην έξοδο είναι μειωμένες κατά  $\frac{1}{k_{\mu}} = 36$ , άρα  $\omega = 36 \cdot \omega_{\text{εξόδου}} = 36 \cdot 61.04 = 2197.33 \text{rpm}$

Οπότε από την Εξίσωση (2) έχουμε τελικά  $k_0 = \frac{\Delta x_2}{\Delta t k_{\mu} \omega} = \frac{11.3 \cdot 36}{0.983 \cdot 2197.33} = 0.188$

Τέλος, έχουμε ότι  $V_T = k_T \omega \Rightarrow k_T = \frac{V_T}{\omega} = \frac{2.78}{2197.33} = 1.27 \cdot 10^{-3}$

Και απο την Εξίσωση (1) βρίσκουμε ότι  $k_m = \frac{0.278}{k_T} = \frac{0.278}{1.27 \cdot 10^{-3}} = 218.89$

Συνοπτικά, η πειραματική εκτίμηση των ζητούμενων παραμέτρων είναι η εξής:

$$k_m = 218.89$$

$$k_T = 1.27 \cdot 10^{-3}$$

$$k_0 = 0.188$$

$$k_{\mu} = \frac{1}{36}$$

$$T_m = 0.47 \text{sec}$$

## 2 Άσκηση 2

### 2.1 Θεωρητική Ανάλυση

Γνωρίζουμε ότι ως προς την ταχύτητα του άξονα περιστροφής του ο κινητήρας είναι ένα ευσταθές σύστημα, διότι η ταχύτητα με την πάροδο του χρόνου παίρνει μια συγκεκριμένη τιμή. Αντίθετα, όμως, η θέση του άξονα μεταβάλλεται συνέχεια και, επομένως, ως προς τη θέση του άξονα το σύστημα είναι ασταθές. Σκοπός αυτής της άσκησης, είναι να καταστήσουμε το σύστημα ευσταθές και ως προς την θέση, χρησιμοποιώντας γραμμική ανάδραση καταστάσεων.

Όπως αναφέραμε προηγουμένως, επιλέγουμε μεταβλητές κατάστασης την ταχύτητα  $\omega$  και την θέση  $\theta$  του κινητήρα. Ως έξοδο του συστήματος επιλέγουμε την θέση, άρα  $y = \theta$ . Επομένως, με  $x_1 = \omega$  και  $x_2 = \theta$ , έχουμε από το δομικό διάγραμμα:

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{k_m}{T_m s + 1} U \Rightarrow X_1 T_m s + X_1 = k_m U \Rightarrow \dot{x}_1 = -\frac{1}{T_m} x_1 + \frac{k_m}{T_m} u \\ X_2 &= k_\mu \frac{k_0}{s} X_1 \Rightarrow X_2 s = k_\mu k_0 X_1 \Rightarrow \dot{x}_2 = k_\mu k_0 x_1 \\ y &= x_2 \end{aligned}$$

Δηλαδή, αν  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$  το διάνυσμα κατάστασης, το σύστημά μας είναι το

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du$$

Όπου

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_m} & 0 \\ k_\mu k_0 & 0 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} \frac{k_m}{T_m} \\ 0 \end{bmatrix} \\ C &= [0 \quad 1] \\ D &= [0] \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τώρα τον πίνακα ελεγχιμότητας

$$M = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} \frac{k_m}{T_m} & -\frac{k_m}{T_m^2} \\ 0 & \frac{k_\mu k_0 k_m}{T_m} \end{bmatrix}$$

Και επειδή  $\det(M) = \frac{k_m^2 k_\mu k_0}{T_m^2} = 1132.69 \neq 0$ , το σύστημά μας είναι ελέγξιμο. Έτσι, μπορούμε να επι-

λέγξουμε ελεγκτή  $u = -kx + k_r r$ , όπου  $k = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$ . Ο όρος  $-kx$  θα μας βοηθήσει ώστε η απόκριση του συστήματος κλειστού βρόχου να μην παρουσιάζει υπερύψωση και ο χρόνος αποκατάστασης να είναι ο μικρότερος δυνατός, ενώ ο όρος  $+k_r r$  θα μας βοηθήσει ώστε η θέση του κινητήρα να συγκλίνει σε μία συγκεκριμένη επιθυμητή τιμή.

Θεωρούμε ότι στην μόνιμη κατάσταση ισχύει  $\dot{x} = 0$  και απο θεωρία έχουμε

$$k_r = \frac{1}{Dk(A - Bk)^{-1}B + D - C(A - Bk)^{-1}B} \equiv k_2$$

Αντικαθιστώντας τον ελεγκτή μας  $u = -kx + k_2r$  στο αρχικό μας σύστημα, παίρνουμε το σύστημα

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1+k_mk_1}{T_m} & -\frac{k_mk_2}{T_m} \\ k_\mu k_0 & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} x + \begin{bmatrix} \frac{k_2 k_m}{T_m} \\ 0 \end{bmatrix} r$$

Με χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$P(s) = \det(sI - \tilde{A}) = s^2 + \frac{1 + k_mk_1}{T_m}s + \frac{k_mk_2k_\mu k_0}{T_m} = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$

Θέλουμε το σύστημα να είναι ευσταθές, άρα απο κριτήριο Routh-Hurwitz πρέπει

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1+k_mk_1}{T_m} > 0 \\ \frac{k_mk_2k_\mu k_0}{T_m} > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} k_1 > -\frac{1}{k_m} = -\frac{1}{218.89} = -4.57 \cdot 10^{-3} \\ k_2 > 0 \end{array} \right\}$$

Επίσης, θέλουμε το σύστημα να μην έχει υπερύψωση, δηλαδή  $\zeta \geq 1$ . Θέλουμε, όμως, και ο χρόνος αποκατάστασης να είναι ο μικρότερος δυνατός, οπότε πρέπει

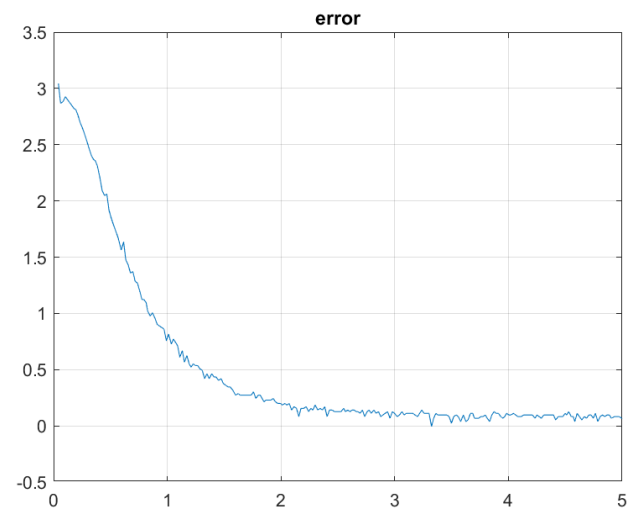
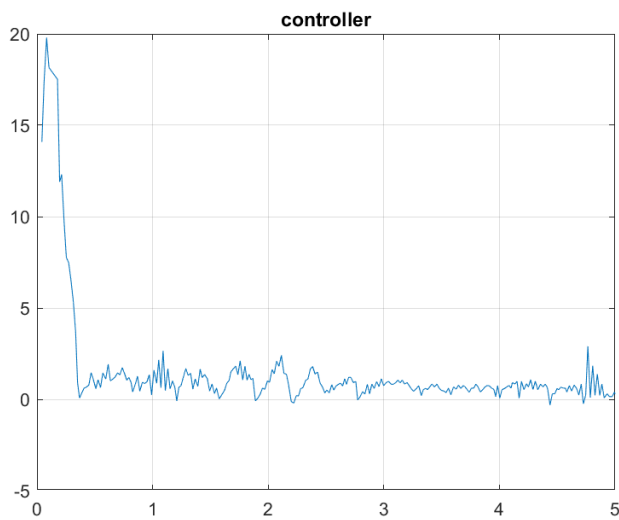
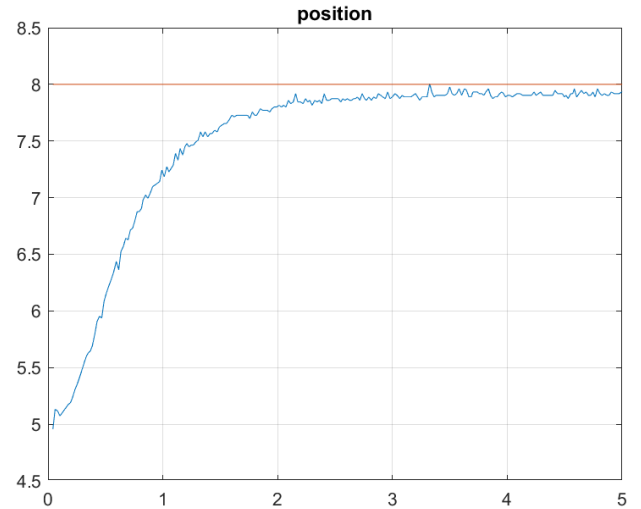
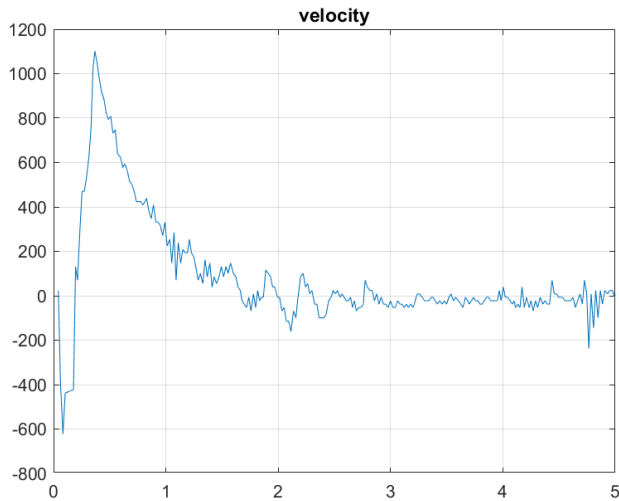
$$\zeta = 1 \Rightarrow \frac{1 + k_mk_1}{2\sqrt{T_mk_mk_2k_\mu k_0}} = 1 \Rightarrow 1 + 218.89k_1 = 1.47\sqrt{k_2} \quad (3)$$

## 2.2 Εργαστηριακά Αποτελέσματα

Βάση των παραπάνω περιορισμών, επιλέγουμε  $k_1 = 0.01$  και τότε από την Εξίσωση (3) έχουμε  $k_2 = 4.706$ .

### 2.2.1 Ερώτημα 1

Σημαντικό είναι να σημειώσουμε, ότι λόγω προβλήματος στον συγκεκριμένο κινητήρα τον οποίο μελετάμε, για τάση αναφοράς επιλέχθηκε η  $\theta_{ref} = 8V$  και ως αρχική θέση του κινητήρα η  $\theta_0 = 5V$ . Έτσι, έχουμε τα παρακάτω αποτελέσματα. Στο διάγραμμα της θέσης «position» μπορούμε να δούμε ότι το σύστημά μας συγκλίνει στην επιθυμητή  $\theta_{ref} = 8V$  χωρίς ταλαντώσεις και με καλό χρόνο αποκατάστασης.

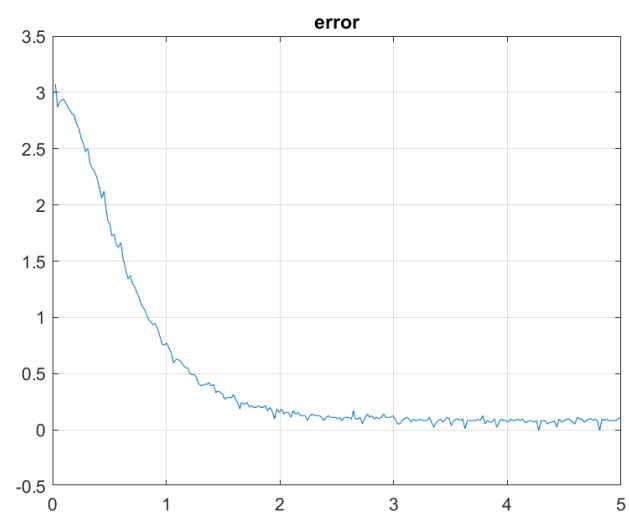
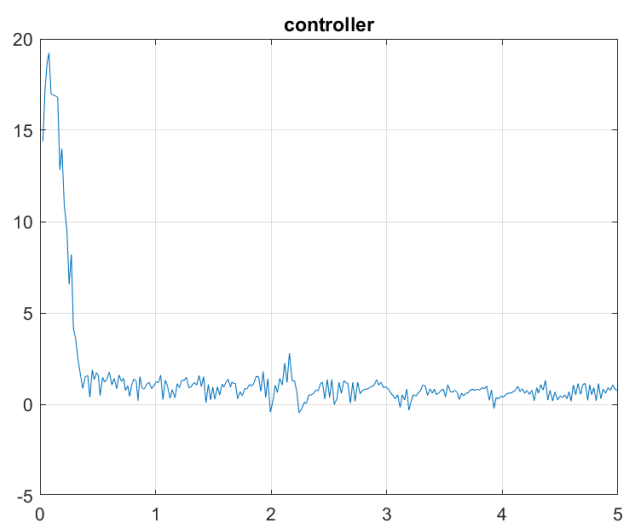
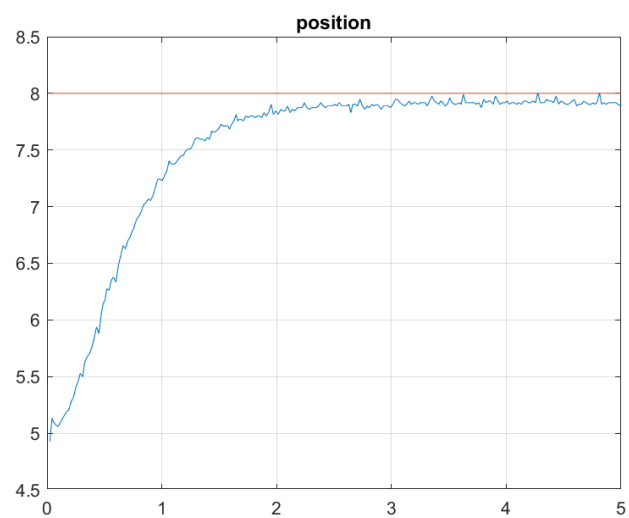
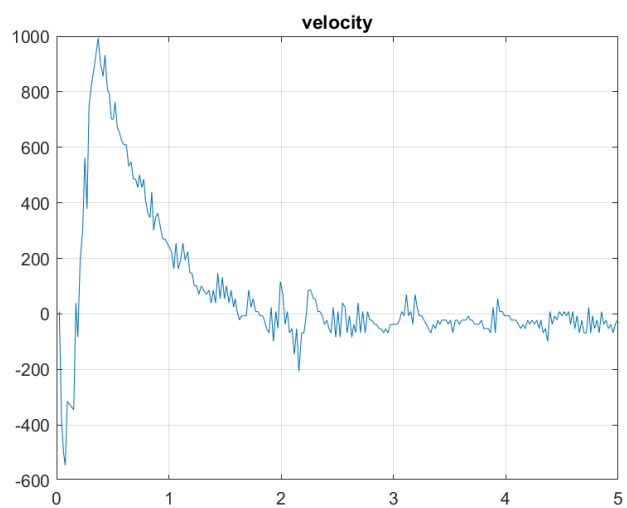


### 2.2.2 Ερώτημα 2

Είναι γεγονός ότι έχουμε σφάλμα στην μόνιμη κατάσταση, αφού δεν φτάνουμε ακριβώς στην επιθυμητή τιμή  $\theta_{ref} = 8V$ . Το σφάλμα αυτό οφείλεται στις τριβές που υπάρχουν και τις οποίες δεν έχουμε με κανένα τρόπο μοντελοποιήσει στο σύστημά μας. Για να το εξαλείψουμε, πάντως, θα μπορούσαμε να βάλουμε έναν ολοκληρωτή, ο οποίος όπως γνωρίζουμε καθιστά το σφάλμα θέσης μηδενικό.

### 2.2.3 Ερώτημα 3

Κατεβάζουμε το μαγνητικό φρένο του κινητήρα και επαναλαμβάνουμε τις μετρήσεις μας με τα ίδια κέρδη. Όπως παρατηρούμε στα ακόλουθα διαγράμματα, οι διαφορές είναι ελάχιστες. Ο λόγος είναι ότι το φρένο έχει απομαγνητιστεί, οπότε δεν δημιουργεί κάποια ουσιαστική διαφορά στο σύστημα. Κανονικά θα περιμέναμε να παρατηρήσουμε μια πιο αργή απόκριση. Είναι, πάντως, εμφανής μία μικρή αλλαγή στην ταχύτητα του κινητήρα, αφού χωρίς το φρένο είχε peak τα 1100rpm, ενώ το φρένο κατεβάζει αυτό το νούμερο στα 1000rpm, το οποίο είναι ένα λογικό αποτέλεσμα του φρεναρίσματος.

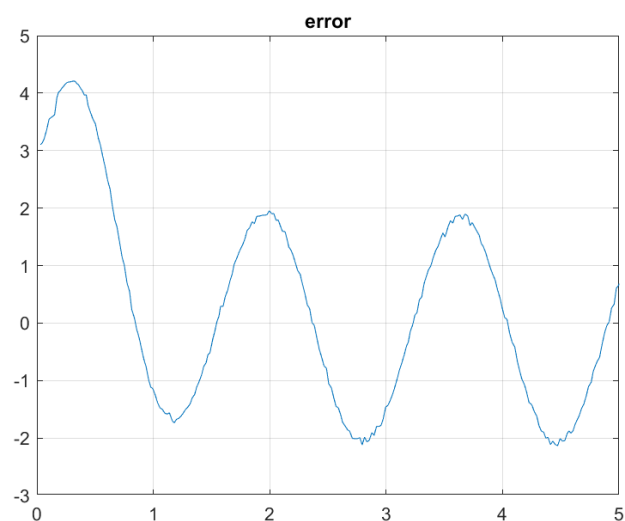
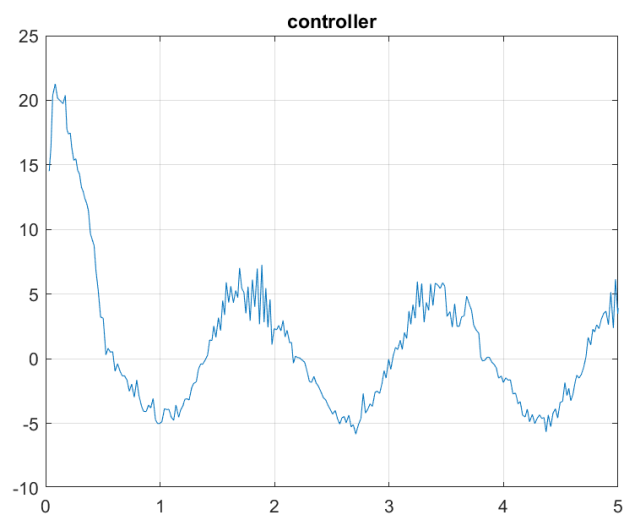
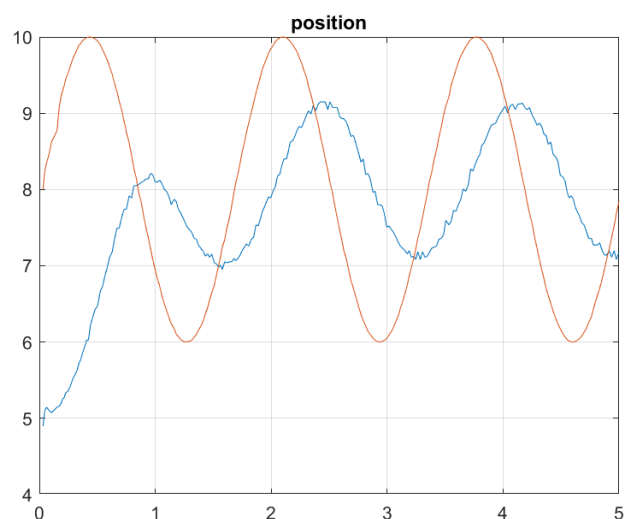
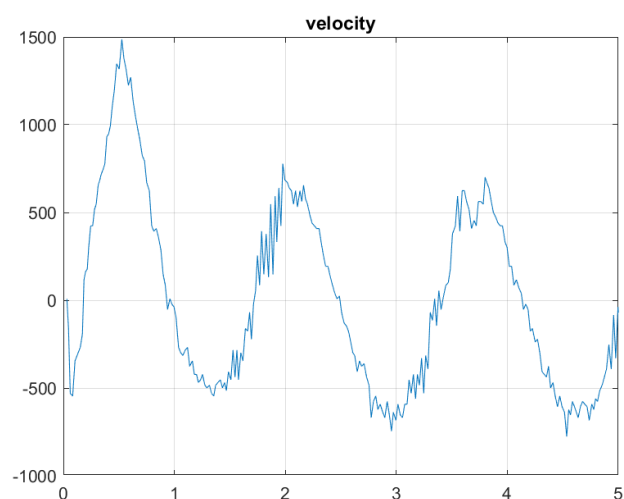




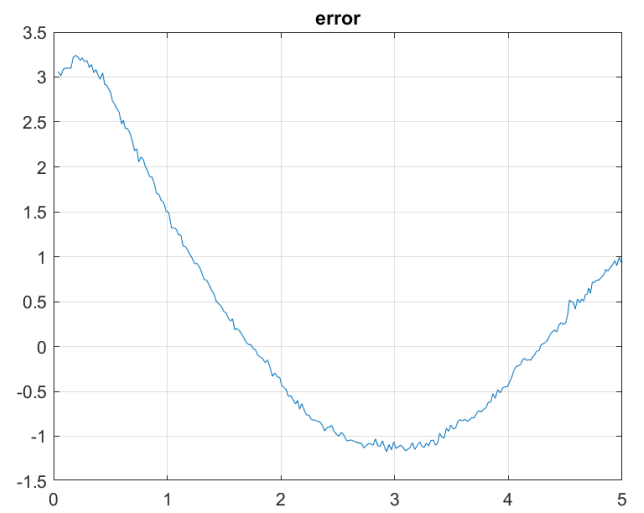
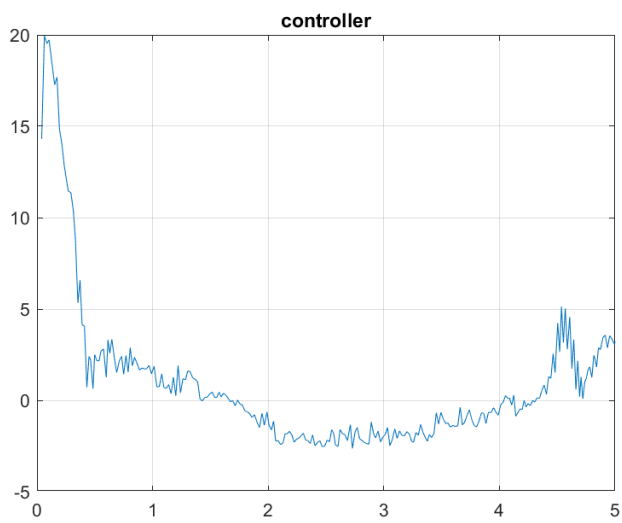
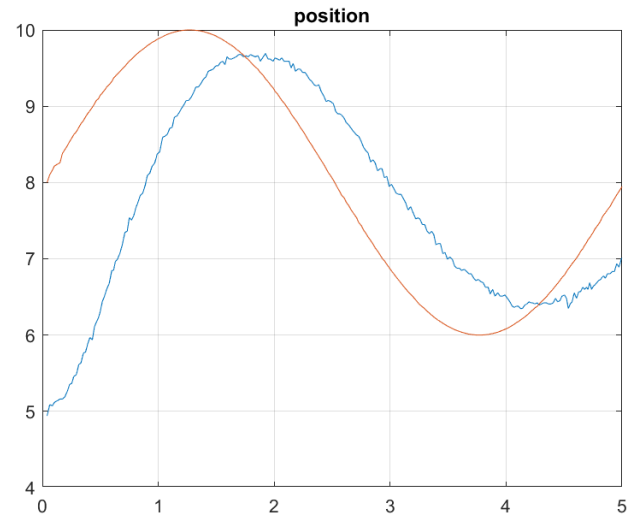
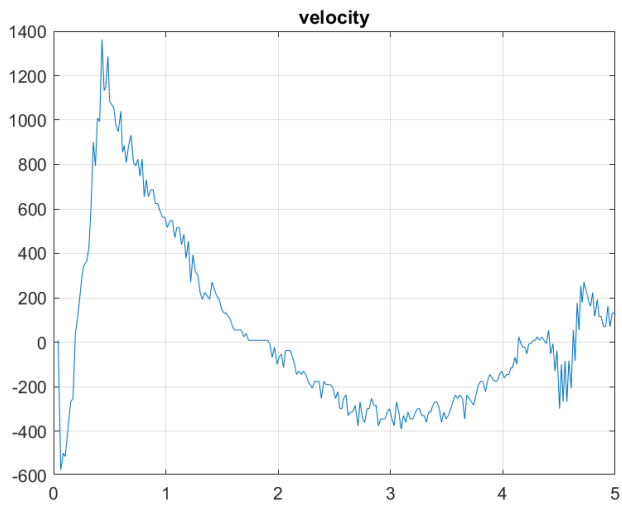
### 2.2.4 Ερώτημα 4

Ανεβάζουμε το μαγνητικό φρένο και επαναλαμβάνουμε με τα αρχικά μας κέρδη τον έλεγχο, μόνο που πλέον η επιθυμητή μας θέση είναι η  $\theta_{ref} = 8 + 2 \sin(\omega t)$ .

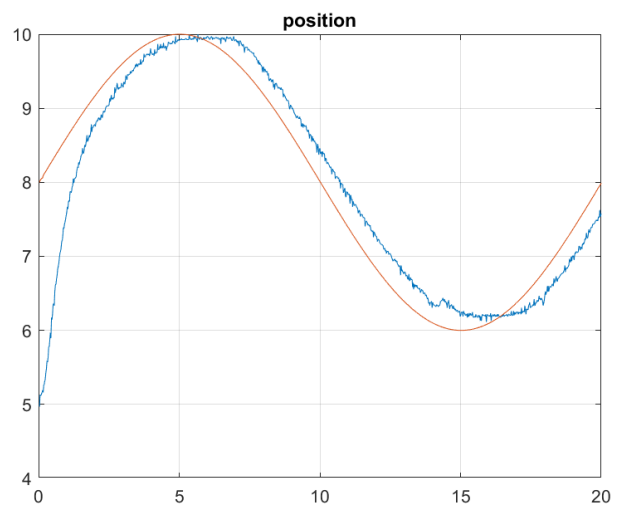
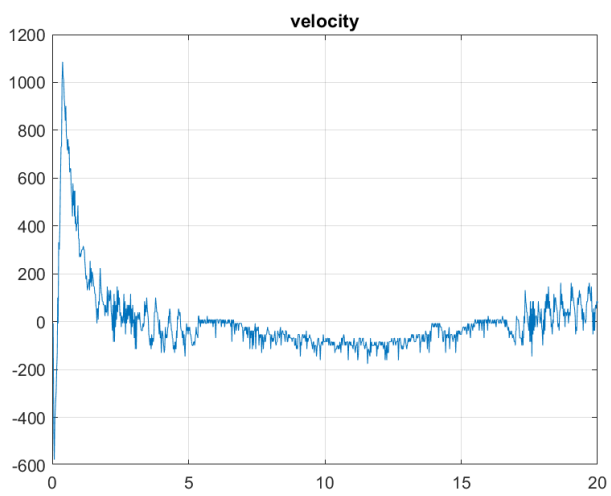
1. Για 3 περιόδους σε 5sec, δηλαδή  $\omega_1 = \frac{6\pi}{5} \text{ rad/s}$ , έχουμε

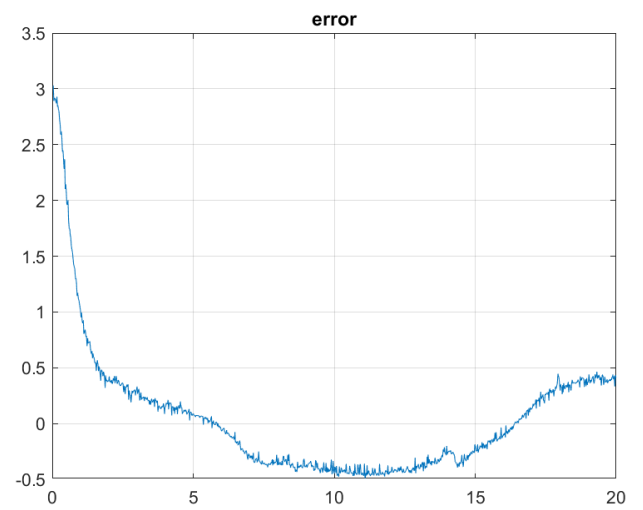
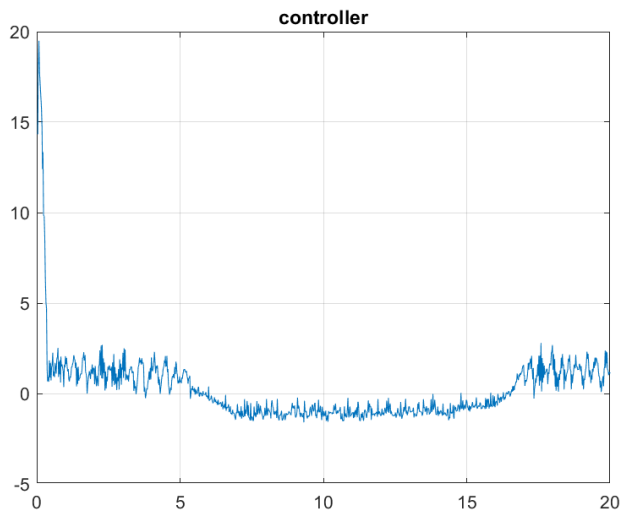


2. Για 1 περίοδο σε 5sec, δηλαδή  $\omega_2 = \frac{2\pi}{5} \text{ rad/s}$ , έχουμε



3. Για 1 περίοδο σε 20sec, δηλαδή  $\omega_3 = \frac{2\pi}{20} rad/s$ , έχουμε





Παρατηρούμε ότι τόσο στην  $\omega_1$ , όσο και στην  $\omega_2$ , δηλαδή σε μεσαίες συχνότητες, η απόκριση μεταβάλλεται ημιτονοειδώς με τον χρόνο. Βέβαια, στην μικρότερη εκ των δύο συχρότητα  $\omega_2 < \omega_1$  η έξοδος ακολουθεί πιο καλά την επιθυμητή έξοδο. Όμοια και στην μικρή συχνότητα  $\omega_3$ , η απόκριση προσεγγίζει πολύ καλά την  $\theta_{ref}$ , καλύτερα από τις άλλες δύο μεγαλύτερες συχνότητες.

### 3 Άσκηση 3

#### 3.1 Θεωρητική Ανάλυση

Αυτήν την φορά, αντί να χρησιμοποιήσουμε γραμμική ανάδραση καταστάσεων, θα αξιοποιήσουμε δυναμική ανάδραση καταστάσεων, για να επιτύχουμε απόσβεση των διαταραχών (δηλαδή του μαγνητικού φρένου) και σύγκλιση της θέσης του κινητήρα στην επιθυμητή τιμή. Γι' αυτό, ορίζουμε μια νέα μεταβλητή κατάστασης  $z$ , τέτοια ώστε  $\dot{z} = y - r = x_2 - r$ . Έτσι, το σύστημα γίνεται

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ \dot{z} &= y - r\end{aligned}$$

Δηλαδή, η τάξη του συστήματος αυξήθηκε. Στη σημείο ισορροπίας εξ' ορισμού θα ισχύει  $\dot{x} = 0$  και  $\dot{z} = 0 \Rightarrow y = x_2 = r$ , οπότε θα έχουμε φτάσει στο θεμιτό αποτέλεσμα. Άρα, αρκεί να φροντίσουμε το σύστημα να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές, διότι έτσι σίγουρα θα συγκλίνουμε στο σημείο ισορροπίας.

Ορίζουμε, λοιπόν, ελεγκτή  $u = -\tilde{k}\tilde{x}$ , όπου  $\tilde{k} = [k \quad k_i]$  και  $\tilde{x} = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$ . Ο όρος  $k_i r$  που είχαμε στην προηγούμενη άσκηση δεν χρειάζεται πλέον, αφού όπως είπαμε η έξοδος με τον τωρινό ελεγκτή θα είναι συγκεκριμένη. Επομένως,  $u = -kx - k_i z$  και το σύστημα γίνεται

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_m} & 0 & 0 \\ k_\mu k_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{k_m}{T_m} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} r \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_m} & 0 & 0 \\ k_\mu k_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{k_m}{T_m} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (-k_1 x_1 - k_2 x_2 - k_i z) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} r \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1+k_m k_1}{T_m} & -\frac{k_2}{T_m} & -\frac{k_i}{T_m} \\ k_\mu k_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} r\end{aligned}$$

Με χαρακτηριστικό πολυώνυμο

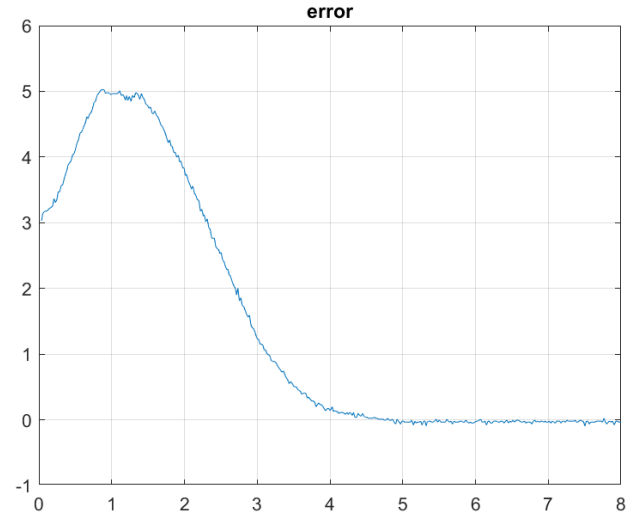
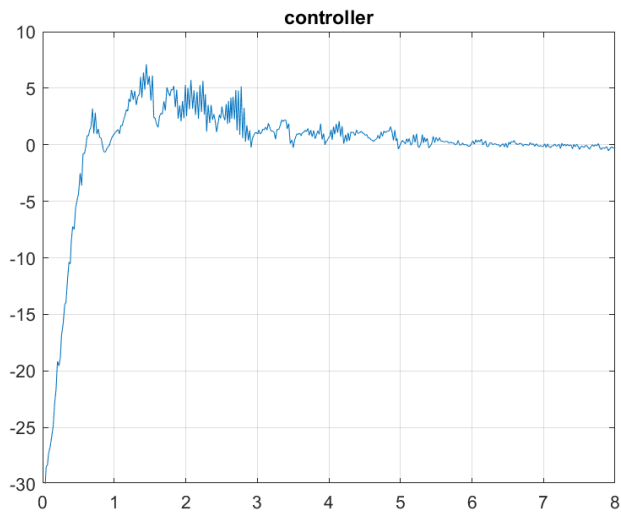
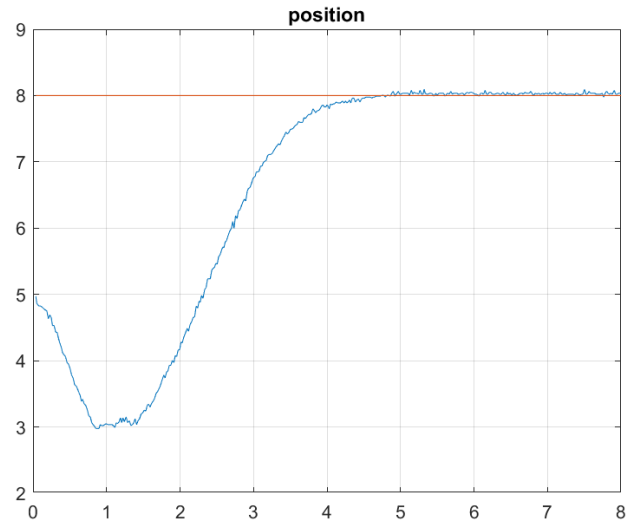
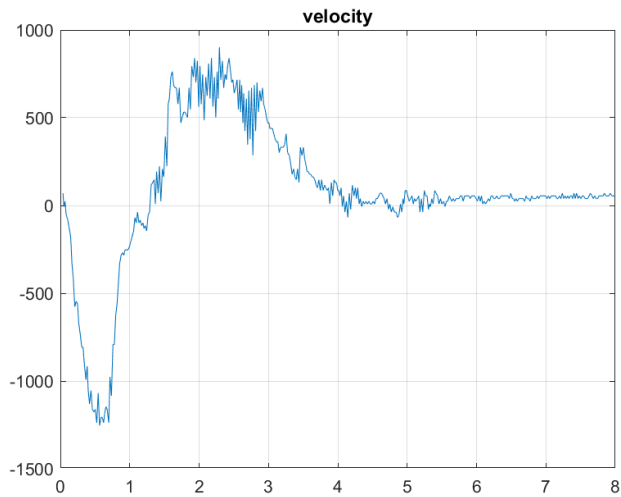
$$P(s) = \det(sI - \tilde{A}) = s^3 + \frac{1 + k_m k_1}{T_m} s^2 + \frac{k_\mu k_0 k_m k_2}{T_m} s + \frac{k_\mu k_0 k_m k_i}{T_m}$$

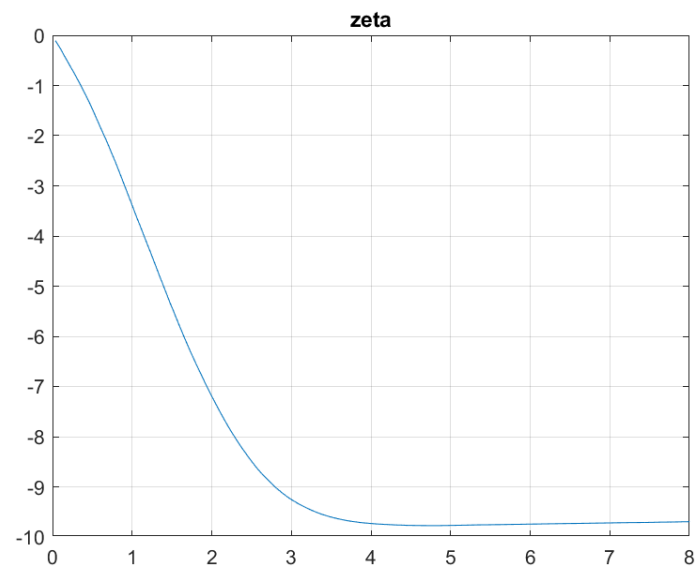
Θέλουμε το σύστημα να είναι ευσταθές, άρα απο κριτήριο Routh-Hurwitz πρέπει

$$\left. \begin{aligned} \frac{1+k_m k_1}{T_m} &> 0 \\ \frac{k_\mu k_0 k_m k_2}{T_m} - \frac{k_\mu k_0 k_m k_i}{1+k_m k_1} &> 0 \\ \frac{k_\mu k_0 k_m k_i}{T_m} &> 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} k_1 &> -\frac{1}{k_m} = -\frac{1}{218.89} = -4.57 \cdot 10^{-3} \\ k_i &< \frac{k_2(1+k_m k_1)}{T_m} \\ k_i &> 0 \end{aligned} \right\}$$

### 3.2 Εργαστηριακά Αποτελέσματα

Έπειτα από αρκετές δοκιμές για την επιλογή των κατάλληλων κερδών, καταλήξαμε στις τιμές  $k_1 = 0.01$ ,  $k_2 = 6$ ,  $k_i = 5$ , οι οποίες ικανοποιούν τους πιο πάνω περιορισμούς. Αυτές μας δίνουν τα παρακάτω αποτελέσματα. Παρατηρούμε ότι αν και ο χρόνος αποκατάστασης είναι πιο αργός από όταν χρησιμοποιήσαμε γραμμική ανάδραση καταστάσεων, το σφάλμα θέσης στην μόνιμη κατάσταση πλέον είναι μηδενικό. Αυτό δεν συνέβαινε προηγουμένως. Φυσικά, και εδώ φροντίσαμε ώστε να μην έχουμε υπερύψωση.





## 4 Άσκηση 4

### 4.1 Θεωρητική Ανάλυση

Σε αυτήν την άσκηση θα θεωρήσουμε ότι μπορούμε να μετρήσουμε μόνο τη θέση του κινητήρα. Γι'αυτό, θα σχεδιάσουμε ένα σύστημα εκτίμησης των μεταβλητών κατάστασης του συστήματος. Θα πρέπει, λοιπόν, να ελέγξουμε αν το σύστημά μας είναι παρατηρήσιμο. Υπενθυμίζουμε ότι οι πίνακες του συστήματός μας είναι οι

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_m} & 0 \\ k_\mu k_0 & 0 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} \frac{k_m}{T_m} \\ 0 \end{bmatrix} \\ C &= [0 \quad 1] \\ D &= [0] \end{aligned}$$

Και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο  $\det(sI - A) = s^2 + \frac{1}{T_m}s = s^2 + a_1s + a_2$

Οπότε ο πίνακας παρατηρησιμότητας είναι ο

$$W = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k_\mu k_0 & 0 \end{bmatrix}$$

Επειδή  $\det(W) = -k_\mu k_0 = -5.22 \cdot 10^{-3} \neq 0$ , το σύστημα είναι παρατηρήσιμο. Έχουμε γραμμικό παρατηρήσιμο σύστημα, άρα αν  $\hat{x}$  η εκτίμηση και  $\tilde{x} = x - \hat{x}$  το σφάλμα της εκτίμησης, ο παρατηρητής μας θα είναι της μορφής

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$$

Με διαφορική εξίσωση σφάλματος

$$\dot{\tilde{x}} = (A - LC)\tilde{x}$$

Όπου

$$L = W^{-1}\tilde{W} \begin{bmatrix} p_1 - a_1 \\ p_2 - a_2 \end{bmatrix} = W^{-1}\tilde{W} \begin{bmatrix} p_1 - \frac{1}{T_m} \\ p_2 - 0 \end{bmatrix}$$

Και

$$\tilde{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{T_m} & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Έπειτα από πράξεις, έχουμε τελικά

$$L = \begin{bmatrix} -407.47p_1 + 866.96 + 191.57p_2 \\ p_1 - 2.13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}$$

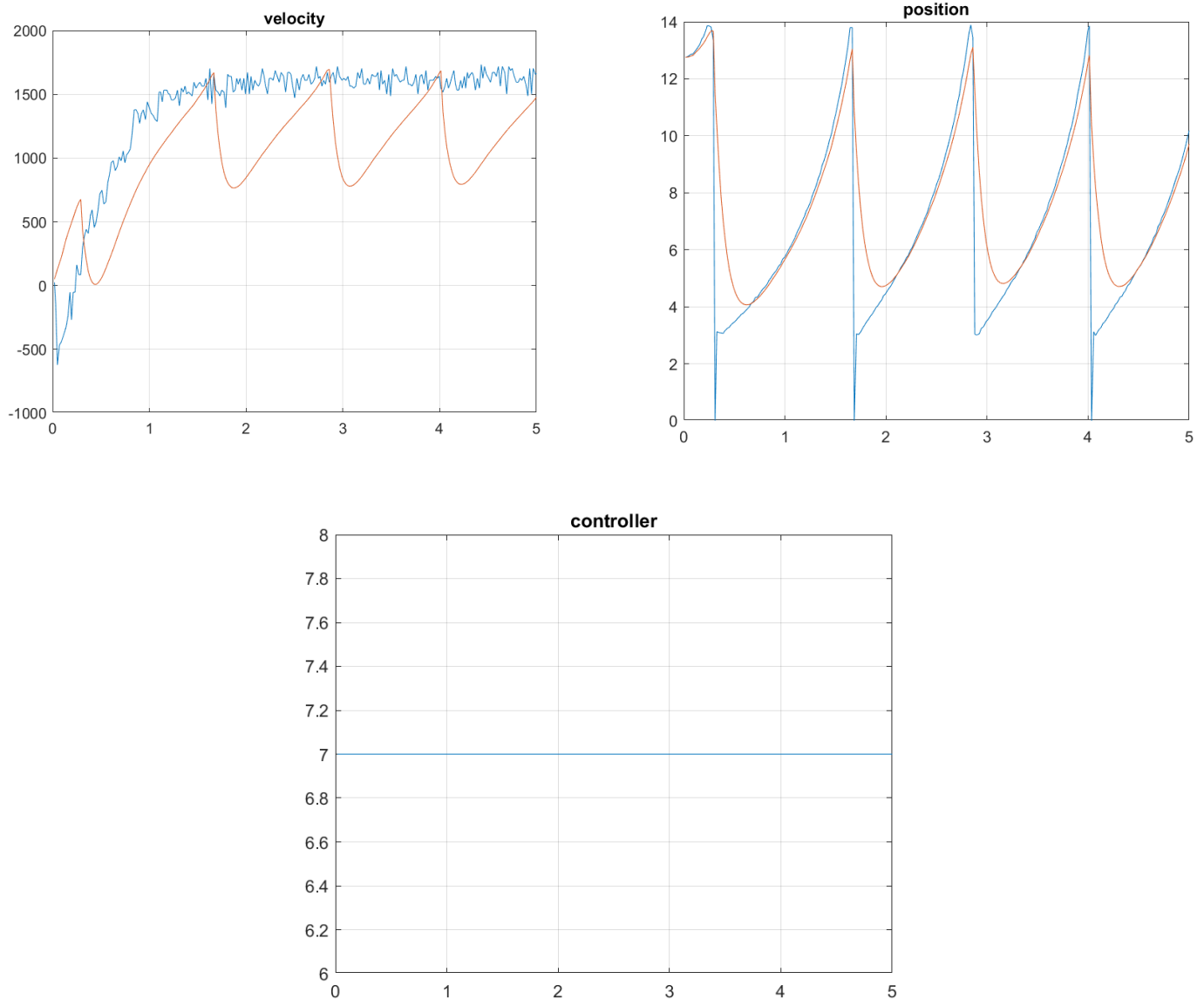
Σημαντικό είναι να σημειώσουμε ότι τα  $p_1, p_2$  υπολογίζονται από το επιθυμητό χαρακτηριστικό πολυώνυμο του παρατηρητή. Συγκεκριμένα, από το  $s^2 + p_1s + p_2$ . Αλλάζοντας τους πόλους  $s_1, s_2$  αυτού του πολυωνύμου, αλλάζουν και τα  $p_1, p_2$ , αφού  $p_1 = -s_1 - s_2$  και  $p_2 = s_1s_2$ . Φυσικά, για να έχουμε ευστάθεια πρέπει από κριτήριο Routh-Hurwitz να ισχύει  $p_1 > 0$  και  $p_2 > 0$ .

Στο Ερώτημα 2 μας ζητείται να σχεδιαστεί ελεγκτής γραμμικής ανάδρασης εξόδου, οπότε θα χρησιμοποιήσουμε τον  $u = -k\hat{x} + k_r r$  με κέρδη όπως αναγράφονται παρακάτω.

## 4.2 Εργαστηριακά Αποτελέσματα

### 4.2.1 Ερώτημα 1

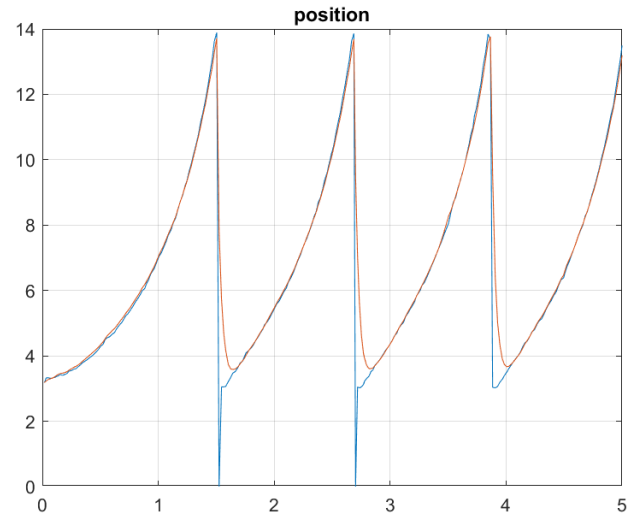
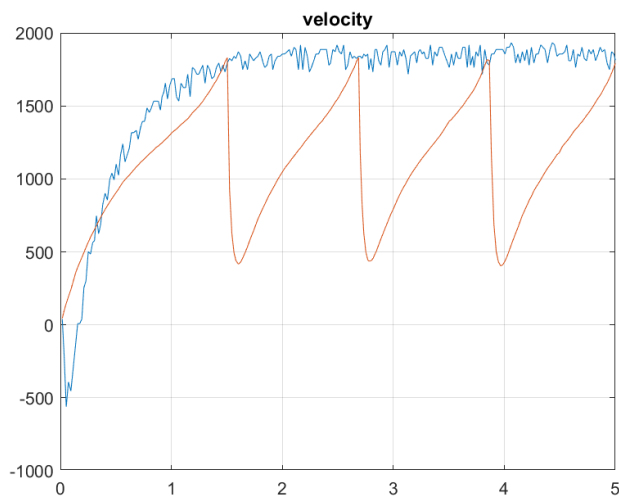
Για  $s_1 = -3$ ,  $s_2 = -10$  (δηλαδή  $L_1 = 1316.95$ ,  $L_2 = 27.87$ ) έχουμε τα παρακάτω αποτελέσματα. Οι εκτιμήσεις είναι με πορτοκαλί, ενώ οι πραγματικές μετρήσεις με μπλε. Παρατηρούμε ότι η εκτίμηση της θέσης είναι αρκετά ικανοποιητική (αναμενόμενο αφού αυτήν θεωρήσαμε ότι μπορούμε να μετρήσουμε), ενώ η εκτίμηση της ταχύτητας «δυσκολεύεται» λίγο να βρει και να διατηρήσει την πραγματική τιμή. Πάντως, οι μεγάλες πτώσεις της εκτιμώμενης ταχύτητας ανά 1 περίπου δευτερόλεπτο οφείλονται στο σφάλμα θέσης που προκαλείται από το «κενό» του ποτενσιόμετρου. Για τον μηδενισμό της πραγματικής τιμής της θέσης από την άλλη, ευθύνεται ο ελαττωματικός κινητήρας που μελετάμε.



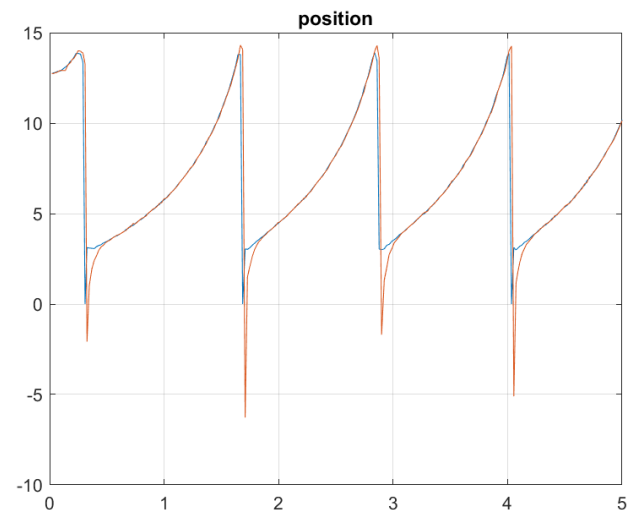
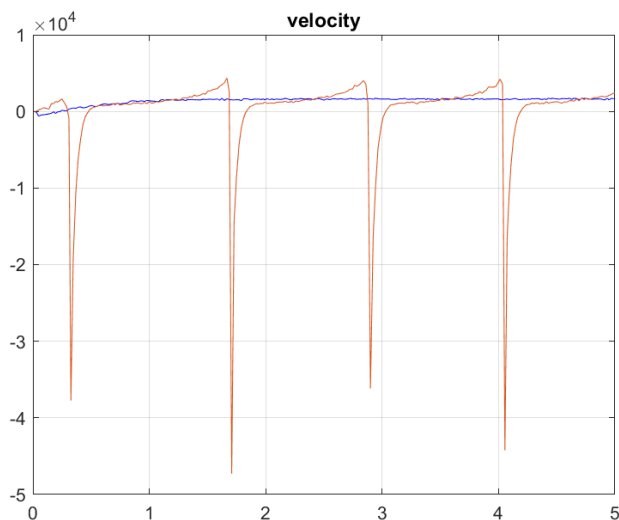
Ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα αποτελέσματα αν μετακινήσουμε τον έναν πόλο λίγο πιο αριστερά στο μιγαδικό επίπεδο. Συγκεκριμένα, για  $s_1 = -3$ ,  $s_2 = -25$  (δηλαδή  $L_1 = 3825.55$ ,  $L_2 = 72.87$ ) βλέπουμε παρακάτω αλλαγές τόσο στην ταχύτητα όσο και στην θέση. Όσον αφορά τη θέση, η εκτίμηση μας έχει σημαντική βελτίωση από πριν. Πλέον είναι πολύ πιο πιστή στην πραγματική τιμή. Η ταχύτητα, από την άλλη, δεν διατηρεί τόσο καλά την πραγματική τιμή όσο πριν. Ωστόσο, την ακολουθεί πιο γρήγορα



και με μικρότερο σφάλμα στην αρχή. Εν ολίγοις, ο πρώτος παρατηρητής ταχύτητας έχει πιο «μαλακή» απόκριση, αλλά θυσιάζει την ταχύτητα σύγκλισης, ενώ ο δεύτερος έχει γρήγορη εκτίμηση, αλλά όχι τόσο καλή διατήρηση στην συνέχεια.



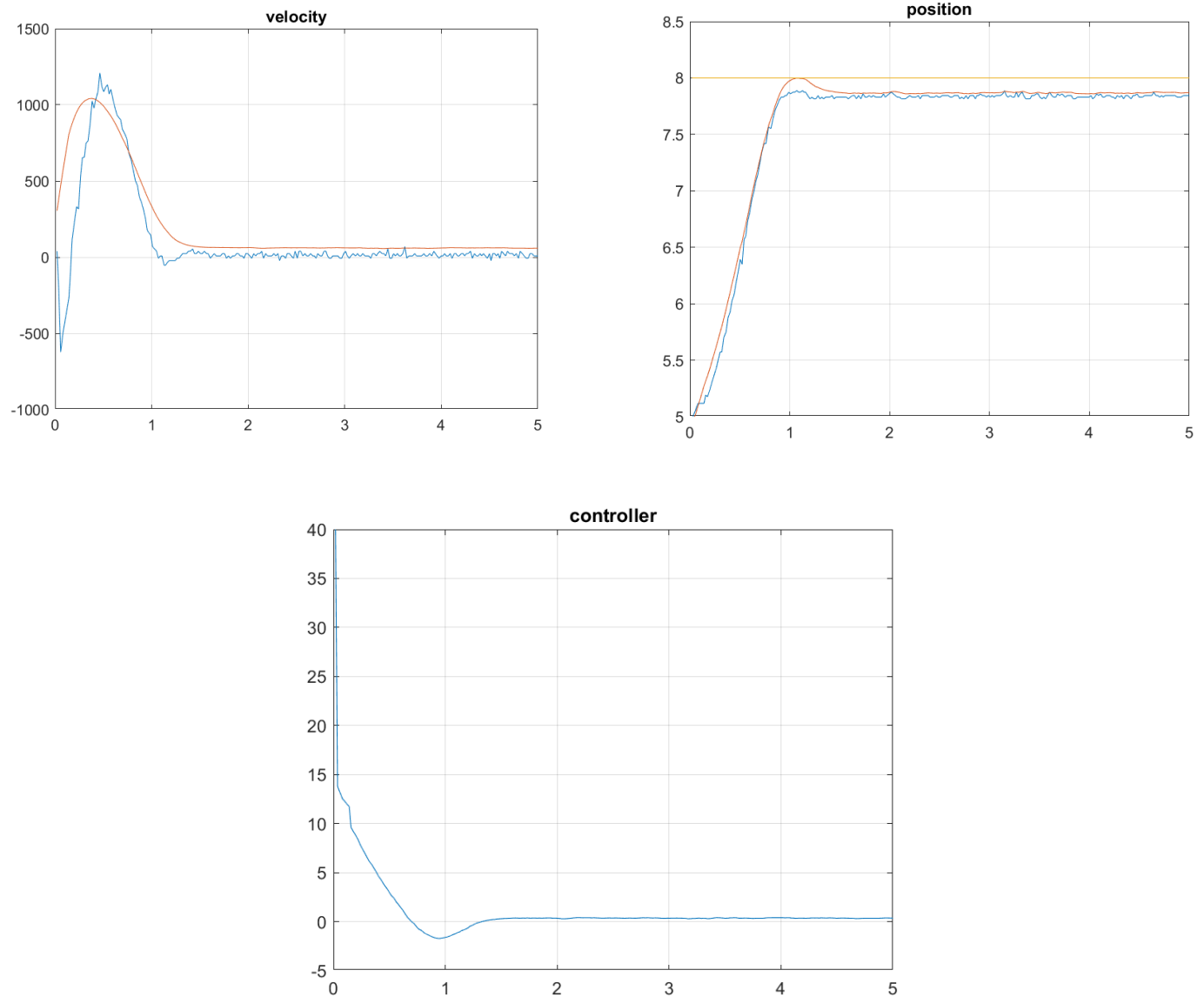
Πάντως, η βέλτιστη απόκριση δόθηκε για  $s_1 = -20$ ,  $s_2 = -50$  (δηλαδή  $L_1 = 163914.06$ ,  $55$ ,  $L_2 = 67.87$ ). Με αυτούς τους πολύ αρνητικούς πόλους, η ταχύτητα διατηρεί για πολύ μεγαλύτερο χρονικό διάστημα την πραγματική τιμή, αν και παρατηρούμε ότι σε κάποιες χρονικές τιμές την ξεπερνάει κιόλας. Η εκτίμηση της θέσης είναι λίγο χειρότερη, αλλά αποδεκτή. Γενικώς για  $u = 7$  είναι η καλύτερη απόκριση που πετύχαμε, αλλά το μειονέκτημά της φαίνεται στο επόμενο ερώτημα.



#### 4.2.2 Ερώτημα 2

Έπειτα από πληθώρα δοκιμών για τα ιδανικά κέρδη, καταλήξαμε στα  $k_1 = 0.005$ ,  $k_2 = k_r = 5$ , ενώ οι πόλοι διατηρήθηκαν στο  $s_1 = -3$ ,  $s_2 = -10$ . Η εκτίμησή μας είναι αρκετά καλή, αν και δεν απουσιάζει το σφάλμα σε αυτήν, πιο εμφανές στην ταχύτητα. Υπενθυμίζουμε ότι λόγω ελαττωματικού κινητήρα έχουμε  $\theta_0 = 5V$  και  $\theta_{ref} = 8V$ . Αναφορικά με την ερώτηση περί αλλαγής των πόλων του παρατηρητή  $s_1$ ,  $s_2$  και διατήρησης των πόλων (δηλαδή των κερδών) του ελεγκτή  $u$  μας, μπορούμε να σχολιάσουμε ότι όσο μετακινούμε προς τα αριστερά του μιγαδικού επιπέδου τους πόλους του παρατηρητή μας έχουμε ταχύτερη απόκριση. Αυτό, όμως, κάνει τον ελεγκτή πιο ευαίσθητο στον θόρυβο, αφού οποιοδήποτε

σφάλμα, όπως θόρυβος μέτρησης, ενισχύεται περισσότερο στην εκτίμηση. Από την άλλη, οι λιγότερο αρνητικοί πόλοι είναι μεν πιο ανθεκτικοί και σταθεροί στις εκτιμήσεις τους, αλλά παρέχουν πιο αργή σύγκλιση. Τελικά, ανάλογα με τις εκάστοτε απαιτήσεις του σχεδιαστή επιλέγονται και οι κατάλληλοι πόλοι.



Τα παραπάνω επιβεβαιώνονται από τα ακόλουθα αποτελέσματα για  $s_1 = -20$ ,  $s_2 = -50$  και  $k_1 = 0.005$ ,  $k_2 = k_r = 5$ , όπου αν και οι εκτιμήσεις είναι πολύ καλές, καλύτερες από πριν, βλέπουμε ότι ιδιαίτερα στην ταχύτητα υπάρχουν πολλά «σκαμπανεβάσματα» που προέρχονται από την ενίσχυση του θορύβου λόγω των πολύ αρνητικών πόλων του παρατηρητή.

