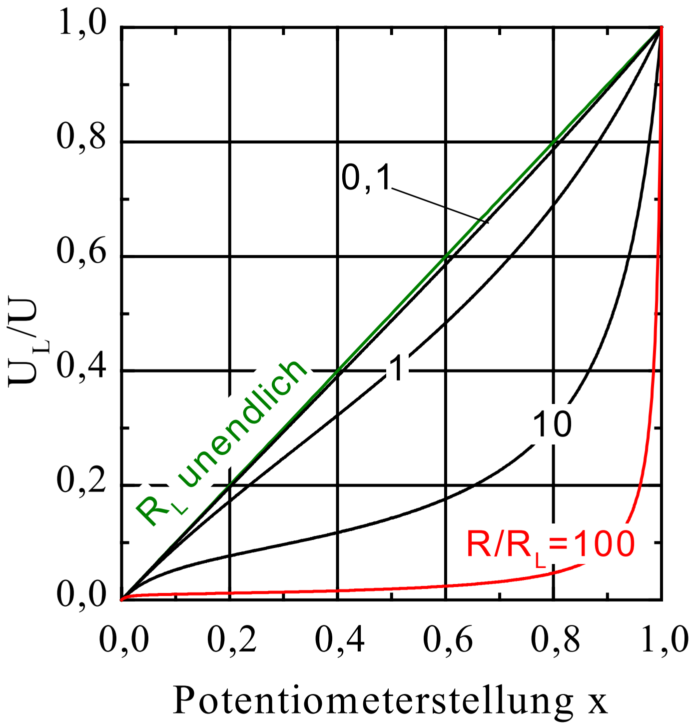
Grundlagen Elektrotechnik I

Laborversuch I-1.1

Spannungsteiler und Potentiometer, Ersatzspannungsquellen, Ersatzstromquellen

Dipl.-Ing. Ralf Schmidt, Dr. Andreas Seifert



Ideen, Ergänzungen, Kritik ausdrücklich erwünscht. Bitte an uns persönlich oder via E-Mail an: a.m.seifert@gmx.net

Berufsakademie Mosbach, Fachrichtung Mechatronik

Inhalt

Ausstattung

Folgende Geräte mit Zubehör stehen Ihnen zur Verfügung:

- Labornetzgerät mit einstellbarer Spannung und Strombegrenzung
- Digitalmultimeter
- Experimentierbrett und Widerstände
- 10-Gang-Wendelpotentiometer
- Widerstandsdekade (1 Ω -11 MΩ, 1 Watt)
- Messleitungen

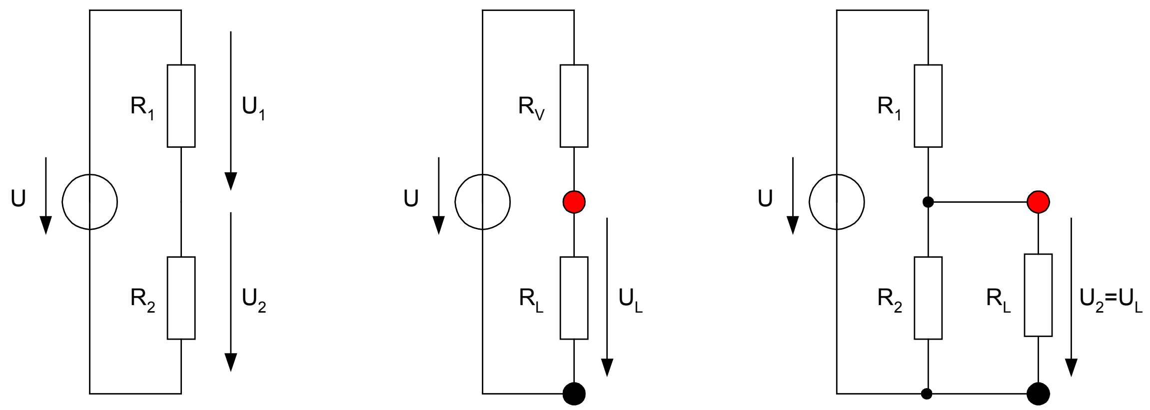
Diese Versuchsanleitung enthält insgesamt 8 Aufgaben, die nach Möglichkeit und in Ihrem eigenen Interesse vor der Durchführung der Versuche bearbeitet werden sollten.

Die Ergebnisse und die Auswertung der Versuche sollen in übersichtlicher Form dokumentiert werden; der Begleittext sollte so ausführlich wie nötig und so knapp wie möglich gehalten sein.

1 Motivation, Vorüberlegungen

1.1 Spannungsteiler

Ein Spannungsteiler besteht im einfachsten Fall aus zwei in Reihe geschalteten Ohmschen Widerständen. Über dem Widerstand R_1 kann dann die Teilspannung $U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U$, über dem Widerstand R_2 die Teilspannung $U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U$ abgegriffen werden.



a) „Ohmscher Spannungsteiler" allgemein b) Vorwiderstand c) Belasteter Spannungsteiler

Häufig tritt folgende Situation auf: An einem Lastwiderstand R_L soll eine gewünschte Spannung U_L eingestellt werden. Zur Verfügung steht jedoch nur eine Spannungsquelle mit höherer Spannung $U > U_L$. Dann hat man zwei verschiedene Möglichkeiten:

1.1.1 Verwendung eines Vorwiderstands

Bei dieser Variante ist der Lastwiderstand Bestandteil des eigentlichen Spannungsteilers. Es ist dann

►►► $$U_L = \frac{R_L}{R_V + R_L} U.$$

Wesentlicher Nachteil dieser Schaltung ist die im allgemeinen sehr starke Abhängigkeit der Spannung U_L vom Lastwiderstand.

1.1.2 Verwendung eines „separaten" Spannungsteilers

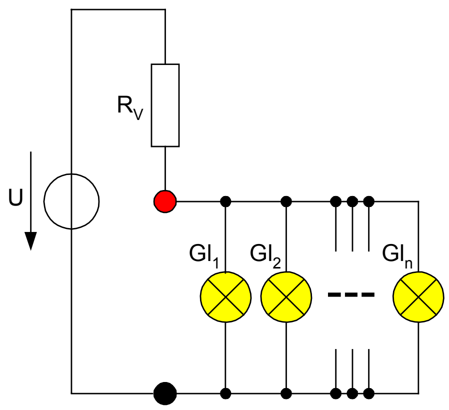
Diese Schaltung kann durch geeignete Wahl von R_1 und R_2 prinzipiell so ausgelegt werden, dass die gewünschte Ausgangsspannung in einem weiten Bereich zumindest näherungsweise unabhängig vom Lastwiderstand ist.

Es ist

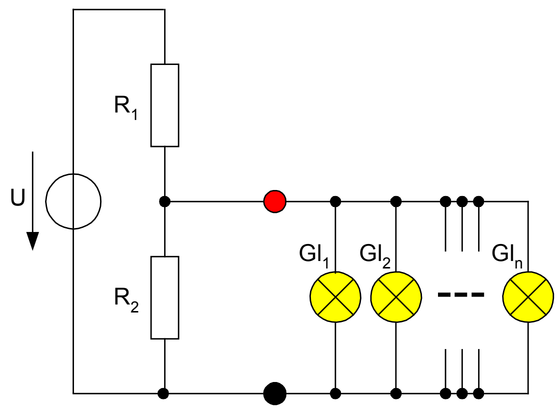
▶▶▶
$$U_L = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_L}} U \,.$$

Die Eigenschaften beider Schaltungsvarianten sollen zunächst im Rahmen einer „Fallstudie“ deutlicher herausgearbeitet werden.

1.1.3 „Fallstudie“



Variante A: n Glühlampen an Vorwiderstand



Variante B: n Glühlampen an Spannungsteiler

Aufgabe 1 (Vorbereitung):

Es sollen Miniaturglühlämpchen mit den Katalogdaten 3 V/50 mA an einer Versorgungsspannung $U = 12\ \text{V}$ betrieben werden. Um die Versorgungsspannung zu reduzieren, soll ein Vorwiderstand R_V (=Variante A) oder alternativ ein Spannungsteiler aus den Widerständen R_1 und R_2 (=Variante B) eingesetzt werden. Untersuchen Sie schrittweise die Eigenschaften beider Schaltungsvarianten:

Variante A:

a) Wie groß muss der Vorwiderstand gewählt werden, wenn ein einzelnes Lämpchen mit einer Spannung von 3 V betrieben werden soll?

b) Wie verändert sich die an den Lämpchen anliegende Spannung, wenn zu dem ersten Lämpchen weitere Lämpchen parallel geschaltet werden?

c) Legen Sie den Vorwiderstand nun von Anfang an so aus, dass vier parallel geschaltete Lämpchen mit 3 V betrieben werden.

d) Wie verändert sich die Spannung an den Lämpchen, wenn eins, zwei, drei Lämpchen ausfallen (z. B. durch „Herausdrehen“ oder durch Defekt)? Was passiert mit den/dem verbleibenden Lämpchen?

Variante B:

e) Wählen Sie zunächst die Widerstandswerte $R_1 = 600\,\Omega$ und $R_2 = 200\,\Omega$, und bestätigen Sie, dass im Leerlauf (kein Lämpchen angeschlossen) die gewünschte Spannung 3 V an den „Ausgangsklemmen“ (rot/schwarz) des Spannungsteilers anliegt.

f) Was passiert, wenn ein Lämpchen an diesen Spannungsteiler angeschlossen wird? Leuchtet es, oder leuchtet es nicht? Warum? Berechnen Sie die Spannung, die an dem Lämpchen anliegt!

g) Legen Sie nun (mit Hilfe der Gleichungen in Anhang A1) die Widerstände R_1 und R_2 des Spannungsteilers so aus, dass an einem angeschlossenen Lämpchen immerhin noch 95% der Leerlaufspannung zur Verfügung stehen.

h) Was passiert, wenn eins, zwei, drei weitere Lämpchen parallel hinzu geschaltet werden? Welche Spannung liegt dann jeweils an den Lämpchen an?

i) Legen Sie jetzt die Widerstände R_1 und R_2 des Spannungsteilers so aus, dass an vier angeschlossenen Lämpchen noch 95% der Leerlaufspannung zur Verfügung stehen.

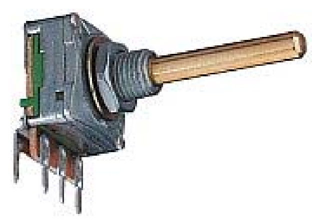
j) Wie verändert sich die Spannung an den Lämpchen, wenn eins, zwei, drei Lämpchen ausfallen (z. B. durch „Herausdrehen“ oder durch Defekt)? Was passiert mit den/dem verbleibenden Lämpchen? (vgl. mit „Variante A“)

Zusammenfassung:

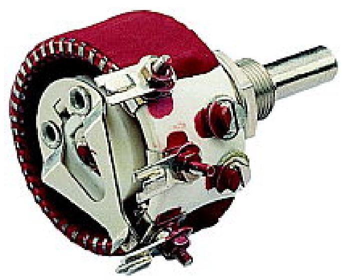
k) Wie bewerten Sie die Ergebnisse der von Ihnen durchgeführten „Gedankenexperimente“? Fassen Sie in Ihren eigenen Worten zusammen.

1.1.4 Potentiometer

Potentiometer sind **einstellbare Spannungsteiler** mit festem Gesamtwiderstand $R = R_1 + R_2$. Auf einer Widerstandsbahn gleitet ein beweglicher Schleifkontakt, dessen Position die Größe der Teilwiderstände R_1 und R_2 bestimmt. Die Widerstandsbahn ist kreisringförmig oder gerade ausgebildet. Beim **linearen Widerstandsverlauf** (auf den wir uns hier beschränken wollen) nimmt der Widerstand pro mm Bahnverlängerung um den gleichen Betrag zu bzw. ab. Daneben sind vor allem auch Potentiometer mit logarithmischem Widerstandsverlauf gebräuchlich.



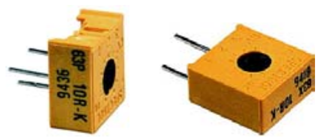
Drehpotentiometer
für Printmontage, linear 0,2 W, 200 V, log. 0,05 W, 150 V, Drehbereich 270°, Widerstand 1 kΩ bis 1 MΩ



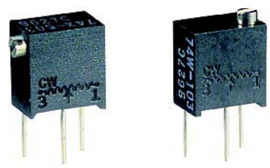
Drahtpotentiometer
20 Watt Linear Gehäuse-Ø 35 mm, Einbautiefe 26 mm, Zentralbefestigung M10, Achs-Ø 6 mm, Achslänge 24 mm.

Schiebepotentiometer
Schiebeweg 58 mm, Nennbelastbarkeit bei 40 °C: 0,4 W lin; 0,2 W log, Isolationsspannung 500 V/AC, Toleranz 20%

10-Gang-Wendel-Präzisions-Drahtpotentiometer, Typ 534
Toleranz: 5%, TK 20 ppm, Belastbarkeit: 2 W. Sehr hohe Linearität., Einstellbereich 10 Umdrehungen.



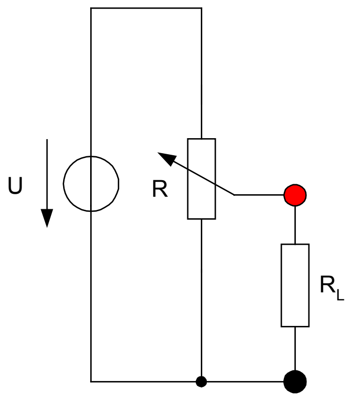
Trimm-Potentiometer
Cermet-Ausführung für erhöhte Anforderungen, RM 2,54/5,08 mm, Drehwinkel 270°, Toleranz 10%, TK 100 ppm, Belastbarkeit 0,5 W, Grenzspannung 300 V



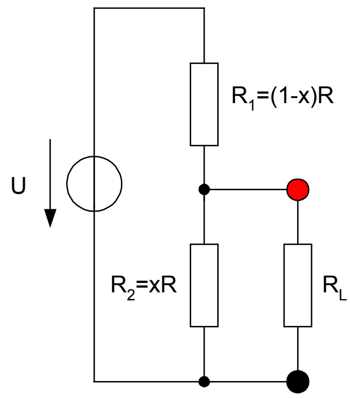
„Spindeltrimmer“
Cermet-Ausführung für erhöhte Anforderungen, Einstellbereich 12 Umdrehungen, Toleranz 10%, TK 100 ppm, Nennbelastbarkeit 0,25 Watt, Grenzspannung 600 V AC

Potentiometer, die für Justier- oder Abgleichzwecke mit Schraubendreher o. ä. eingestellt werden, nennt man **Trimmpotentiometer** oder einfach nur **„Trimmer“**.
Potentiometer können natürlich auch als **einstellbare Widerstände** eingesetzt werden. Dann wird entweder nur R_1 oder R_2 genutzt.

Bezeichnet man die Stellung des Schleifkontakts mit x ($0 \le x \le 1$), dann entspricht x=0 der Schleiferposition am „unteren“ und x=1 der Position am „oberen“ Anschlag. Für ein „lineares Potentiometer“ haben wir dann $R_1 = (1-x)\,R$ und $R_2 = x\,R$.



Potentiometer mit Lastwiderstand

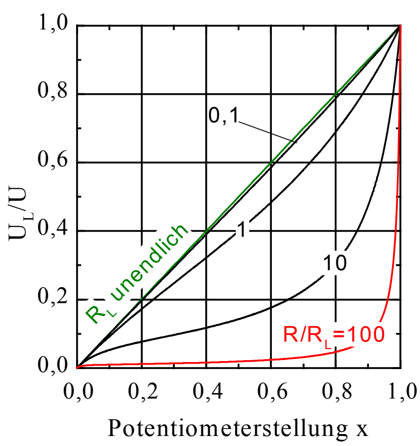


Ersatzschaltbild

Aufgabe 2 (Vorbereitung):

Wie verläuft die Ausgangsspannung beim unbelasteten Potentiometer in Abhängigkeit der Schleiferstellung x? Herleitung?

Spannungsverlauf in Abhängigkeit von der Schleiferposition (belastetes Potentiometer):



Mit $U_L = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2 + \dfrac{R_1 R_2}{R_L}} U$, $R_1 = (1-x)\,R$ und

$R_2 = x\,R$ folgt $U_L = \dfrac{xR}{(1-x)R + xR + \dfrac{x(1-x)R^2}{R_L}} U$ und

damit

▶▶▶ $$U_L = \frac{x}{1 + x(1-x)\dfrac{R}{R_L}} U$$

Aufgabe 3 (Vorbereitung):

Wie verläuft die Funktion $U_L = U_L(x)$ im
a) Grenzfall $R_L \to \infty$, b) Grenzfall $R_L \to 0$?

Belastbarkeit der Widerstandsbahn:

Die **maximale Verlustleistung**, die für ein Potentiometer angegeben wird, gilt stets für die **gesamte Widerstandsbahn**. Dieser Umstand verdient besondere Beachtung.

Beispiel:

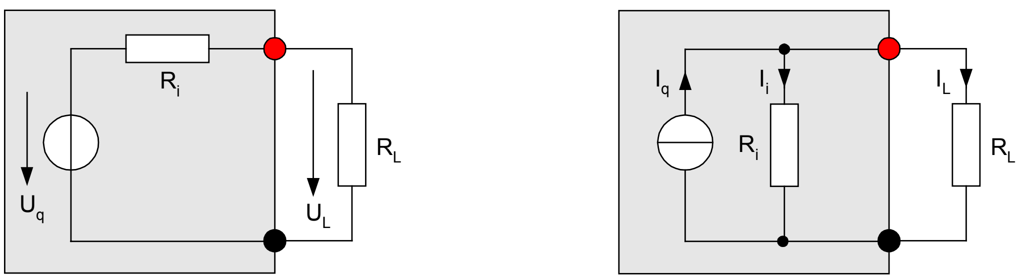
Ein Potentiometer ($R = 1\,\mathrm{k}\Omega$) sei mit $P_{ges} = 0{,}25\ \mathrm{W}$ belastbar. Im Leerlauf ($R_L \approx \infty$) kann das Potentiometer an einer Spannung von 12 V betrieben werden, denn die Verlustleitung entlang der gesamten Widerstandsbahn beträgt $\frac{(12\ \mathrm{V})^2}{1\ \mathrm{k}\Omega} = 0{,}144\ \mathrm{W} < 0{,}25\ \mathrm{W}$. Steht der Schleifer nun „nahe dem oberen Ende“ der Widerstandsbahn (beispielsweise $x = 0{,}95$), und tritt ein Kurzschluss ($R_L \approx 0\ \Omega$) auf, so wird der Widerstandsbereich R_2 nicht mehr belastet. Im Widerstandsbereich $R_1 = (1 - x)\,R = (1 - 0{,}95)\,1\,\mathrm{k}\Omega = 50\ \Omega$ wird nun allerdings die elektrische Leistung $\frac{(12\ \mathrm{V})^2}{50\ \Omega} = 2{,}88\ \mathrm{W}$ in Wärme umgesetzt. Das ist ein Vielfaches der Leistung, mit der die gesamte Widerstandsbahn belastet werden darf. Diese Leistung konzentriert sich nun aber auf einen kleinen Teilbereich von nur 5% der Gesamtbahn, der entsprechend mit nur maximal $0{,}25\ \mathrm{W} \cdot 5\% = 12{,}5\ \mathrm{mW}$ belastet werden dürfte:

Das Potentiometer wird unweigerlich zerstört.

Alle Schaltungen, in denen Potentiometer verwendet werden, müssen so ausgelegt werden, dass derartige Überlastungssituationen ausgeschlossen sind. In Anhang A2 wird insbesondere auch der allgemeine Fall beliebig großer Lastwiderstände $0 < R_L < \infty$ betrachtet.

1.2 Ersatzspannungs- und Ersatzstromquellen

Jeder beliebige lineare aktive Zweipol aus Ohmschen Widerständen und Spannungsquellen kann durch eine Ersatzspannungsquelle oder Ersatzstromquelle ersetzt werden, die an den beiden Klemmen dasselbe Verhalten aufweist wie die „Originalschaltung“.



Ersatzspannungsquelle Ersatzstromquelle

Reale Spannungsquellen und reale Stromquellen können ineinander umgewandelt werden. Das gilt selbstverständlich auch für Ersatzspannungs- und Ersatzstromquellen. Ob man im konkreten Fall die Darstellung der Originalschaltung als Ersatzspannungs– oder als Ersatzstromquelle bevorzugt, hängt vom Blickwinkel ab: Eine ideale Spannungsquelle liefert eine konstante Spannung unabhängig vom Lastwiderstand; eine ideale Stromquelle liefert dagegen einen konstanten Strom unabhängig vom Lastwiderstand.

Eine Schaltung wird zweckmäßig durch eine **Ersatzspannungsquelle** beschrieben, wenn die Spannung nur „wenig“ vom Lastwiderstand abhängt. Das ist immer dann der Fall, wenn der Innenwiderstand R_i der Ersatzquelle wesentlich kleiner ist als der Lastwiderstand R_L.

Eine Schaltung wird zweckmäßig durch eine **Ersatzstromquelle** beschrieben, wenn der abgegebene Strom nur „wenig“ vom Lastwiderstand abhängt. Das ist immer dann der Fall, wenn der Innenwiderstand R_i der Ersatzquelle wesentlich größer ist als der Lastwiderstand R_L.

1.2.1 Spannungsquelle: Tabellarische Übersicht

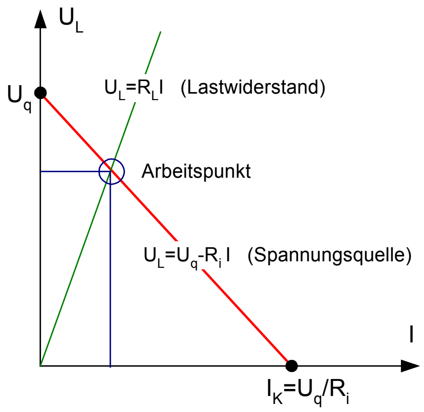
Es sind hier Lastspannung und –strom für eine (Ersatz-) Spannungsquelle tabelliert. Zum einen ist der allgemeine Fall für einen beliebig großen Lastwiderstands dargestellt. Zum anderen sind die Spannung und Strom für die beiden Grenzfälle $R_i << R_L$ und $R_i >> R_L$ tabelliert.

	Spannung	Strom
allgemein	$U_L = \frac{R_L}{R_i + R_L} U_q$	$I_L = \frac{1}{R_i + R_L} U_q$
$R_i << R_L$	$U_L \approx \frac{R_L}{R_L} U_q = U_q = \text{const}$ „Spannungsquelle“	$I_L \approx \frac{1}{R_L} U_q$
$R_i >> R_L$	$U_L \approx \frac{R_L}{R_i} U_q$	$I_L \approx \frac{1}{R_i} U_q = \text{const}$ „Stromquelle“

Aufgabe 4 (Vorbereitung):

Vollziehen Sie die Einträge in dieser Tabelle nach! Welche physikalische Größe ist im Fall $R_i \cong R_L$ nur wenig vom Lastwiderstand abhängig? Wie könnte man die Quelle in diesem Fall nennen?

1.2.2 Betriebskennlinie der Spannungsquelle



Die Quellenspannung U_q ist gleich der Summe aus dem Spannungsabfall U_i am Innenwiderstand R_i und der Klemmenspannung U_L an der Last, so dass ein linearer Zusammenhang zwischen Klemmenspannung und Laststrom besteht:

▶▶▶ $$U_L = U_q - R_i\, I$$

Stellt man U_L als Funktion von I dar, so erhält man eine Gerade mit der Steigung $-R_i$ und dem U_L-Achsenabschnitt U_q. Die Gerade schneidet die I-Achse beim Kurzschlussstrom $I = U_q / R_i$.

Ebenfalls dargestellt ist die Gerade, die den Zusammenhang zwischen Lastspannung und Laststrom „aus Sicht des Lastwiderstands“ herstellt.

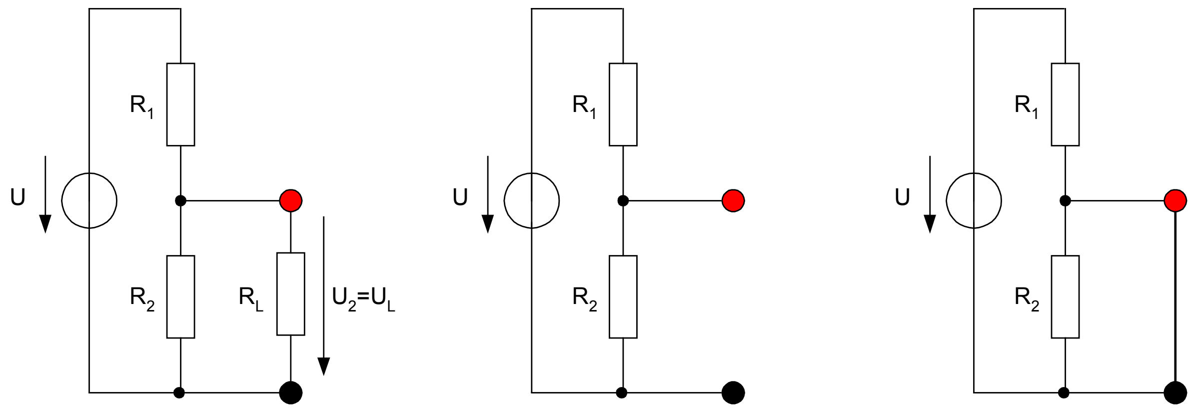
Die beiden Geraden schneiden sich im sogenannten **Arbeitspunkt**. Der Arbeitspunkt ist gewissermaßen die Schnittmenge der Eigenschaften der Spannungsquelle einerseits und des Lastwiderstands andererseits. Der Arbeitspunkt zeigt an, welche Spannungen und Ströme sich tatsächlich einstellen.

Aufgabe 5 (Vorbereitung):

Beschreiben Sie die Schaltungen (Vorwiderstand, belasteter Spannungsteiler) aus Abschnitt 1.1 durch ihre Ersatzspannungsquellen. Ermitteln Sie jeweils Leerlaufspannung, Innenwiderstand und Kurzschlussstrom.

Beschreiben Sie ebenso ein Potentiometer an der Spannung U durch eine Ersatzspannungsquelle. Wie hängen Leerlaufspannung und Innenwiderstand von der Schleiferposition x ab? Skizze des Funktionsverlaufs!

2 Laborversuche



a) belasteter Spannungsteiler allg. b) Leerlauf c) Kurzschluss

Aufgabe 6 (Vorbereitung, Labor):

Weisen Sie für alle Schaltungen, die von Ihnen aufgebaut und untersucht werden, nach, dass die beteiligten Bauteile und Geräte (hier insbesondere: Widerstände, Potentiometer, Widerstandsdekade) nicht überlastet werden.

Wie werden die Widerstände eines Spannungsteilers im Leerlauf und bei Kurzschluss belastet?

Machen Sie sich vor der Versuchsdurchführung unbedingt mit der Funktionsweise der Widerstandsdekade vertraut!

2.1 Experiment 1: Belasteter Spannungsteiler

Bauen Sie auf dem Steckbrett einen Spannungsteiler aus zwei Widerständen R_1 und R_2 auf. Als Lastwiderstand schließen Sie die Widerstandsdekade an die Ausgangsklemmen des Spannungsteilers an (Vorsicht!). Schließen Sie das Digitalvoltmeter so an, dass Sie die Spannung über dem Lastwiderstand messen können. Skizzieren Sie den Schaltplan!

Messen Sie die Spannung über der Last in Abhängigkeit vom Lastwiderstand. Variieren Sie R_L in „sinnvollen Schritten".

<u>Hinweis zur Wahl der Spannung und der Widerstände:</u>

Die Spannung am Netzgerät sollte nicht zu klein gewählt werden.
Es stehen momentan leider nicht alle Widerstandswerte für alle Gruppen zur Verfügung.
Messen Sie die Widerstandswerte zusätzlich mit dem Multimeter aus.

Stellen Sie Ihr Messergebnis schon während der Versuchsdurchführung grafisch dar – zumindest für einige Messwertepaare.

Berechnen Sie zu den Messwertepaaren den Laststrom und die Verlustleistung im Lastwiderstand.

Stellen Sie alle Größen als Funktion des Lastwiderstands linear (soweit sinnvoll) und doppelt-logarithmisch dar.

Tragen Sie außerdem die Lastspannung über dem Laststrom auf (Betriebskennlinie der Ersatzspannungsquelle) und ermitteln Sie aus etwa 10 charakteristischen Messwertepaaren die Ausgleichsgerade (Anhang A4). Wie groß sind Quellspannung, Innenwiderstand und Kurzschlussstrom der Ersatzspannungsquelle?

Vergleichen Sie alle experimentellen Ergebnisse mit der Theorie.

2.2 Experiment 2: Vorwiderstand

Entfernen Sie nach der Durchführung des Spannungsteiler-Experiments den Widerstand R_2. Lassen Sie R_1 unbedingt unverändert! R_1 übernimmt nun die Rolle des Vorwiderstands, der mit dem Lastwiderstand (Dekade) in Reihe geschaltet ist.

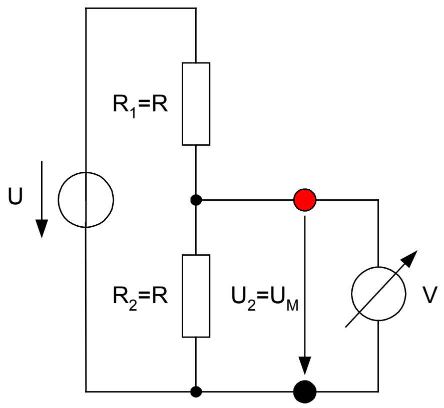
Gehen Sie hier auch bei der Auswertung in allen Punkten vor wie oben.

2.3 Experiment 3: Belastetes Potentiometer

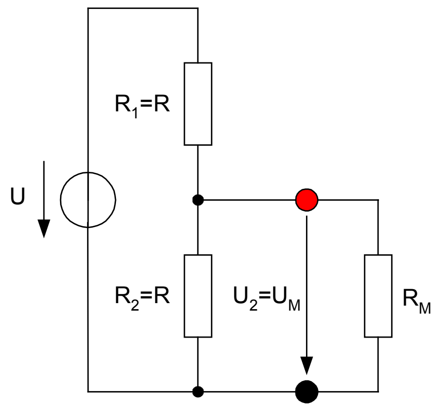
Schließen Sie das 10-Gang-Wendel-Präzisionspotentiometer ($10\,k\Omega$) an das Labornetzgerät (Spannung Ihrer Wahl) an, und belasten Sie den Ausgang des Potentiometers mit einem festen Widerstand Ihrer Wahl. Vorsicht! Arbeiten Sie vorher unbedingt Anhang A2 durch. Stellen Sie auch hier sicher, dass kein Bauteil überlastet wird.

Variieren Sie die Schleiferstellung x in geeigneten Intervallen, und tragen Sie die Lastspannung über der Schleiferstellung auf. Vergleichen Sie mit der Theorie.

2.4 Experiment 4: Innenwiderstand des Spannungsmessers



a) Voltmeter an Spannungsteiler



b) Ersatzschaltbild

Den Innenwiderstand R_M Ihres Digitalvoltmeters können Sie bestimmen, indem Sie einen **hochohmigen Spannungsteiler** aufbauen. Wählen Sie der Einfachheit halber $R_1 = R_2 = R$, und verwenden Sie zwei Widerstandsdekaden. Falls nicht genügend Dekaden vorhanden sind, bitte Absprache oder Zusammenarbeit mit „Nachbargruppe".

Um die Dekaden zu schützen, ist es hier besonders wichtig,
dass die Widerstände von Anfang an hochohmig eingestellt werden!

Mit $R_1 = R_2 = R$ folgt

$$U_M = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_M}} U = \frac{R}{2R + \frac{R^2}{R_M}} U = \frac{1}{2 + \frac{R}{R_M}} U .$$

Umstellen nach R_M liefert

▶▶▶ $$R_M = \frac{R}{\frac{U}{U_M} - 2}$$

Messen Sie die Voltmeter-Spannung U_M als Funktion des Widerstands $R_1 = R_2 = R$. Wählen Sie für R die Werte $1 - 10\ \mathrm{M\Omega}$.

Berechnen Sie mit der angegebenen Gleichung den Innenwiderstand R_M Ihres Digitalvoltmeters.

Anhang

A1 „Nützliche Dimensionierungsformel“ für Spannungsteiler

Die Spannung am Ausgang des unbelasteten Spannungsteilers kann aufgefasst werden als „Soll-Spannung“:

►►► $$U_{Soll} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U$$

Die Spannung an einem endlichen Lastwiderstand weicht von dieser Soll-Spannung mehr oder weniger ab und kann aufgefasst werden als „Ist-Spannung“

►►► $$U_{Ist} = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_L}} U$$

Bildet man auf beiden Seiten dieser Gleichung den Kehrwert, so erhält man

$$\frac{1}{U_{Ist}} = \frac{R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_L}}{R_2} \frac{1}{U} = \underbrace{\frac{R_1 + R_2}{R_2} \frac{1}{U}}_{1/U_{Soll}} + \frac{R_1}{R_L} \frac{1}{U}$$

und daraus

$$\frac{1}{U_{Ist}} = \frac{1}{U_{Soll}} + \frac{R_1}{R_L} \frac{1}{U}.$$

Bildet man den Kehrwert dieser Gleichung, folgt

$$U_{Ist} = \frac{1}{\frac{1}{U_{Soll}} + \frac{R_1}{R_L} \frac{1}{U}} = \frac{U_{Soll}}{1 + \frac{R_1}{R_L} \frac{U_{Soll}}{U}}$$

und daraus

►►► $$\frac{U_{Ist}}{U_{Soll}} = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_L} \frac{U_{Soll}}{U}}$$

bzw.

►►► $$R_1 = R_L \frac{U_{Soll}}{U} \left[\frac{1}{U_{Ist} / U_{Soll}} - 1 \right] \text{ und damit } R_2 = R_1 \frac{U_{Soll} / U}{1 - U_{Soll} / U}.$$

Beispiel:

Ein Spannungsteiler soll so dimensioniert werden, dass er eine Spannung von $U = 12\ \mathrm{V}$ auf $U_{Soll} = 9\ \mathrm{V}$ reduziert. Dabei soll bei einem Lastwiderstand von $R_L = 100\ \Omega$ noch 90 % der Soll-Spannung an der Last zur Verfügung stehen.

Lösung:

Das Teilungsverhältnis ist $\frac{U_{Soll}}{U} = \frac{9\ \mathrm{V}}{12\ \mathrm{V}} = 0{,}75$, das Verhältnis aus Ist-Spannung und Soll-Spannung ist $\frac{U_{Ist}}{U_{Soll}} = 90\% = 0{,}9$. Mit den hier hergeleiteten Gleichungen findet man dann

$$R_1 = R_L \frac{U_{Soll}}{U}\left[\frac{1}{U_{Ist}/U_{Soll}} - 1\right] = 100\ \Omega \cdot 0{,}75\left[\frac{1}{0{,}9} - 1\right] = \underline{\underline{8{,}3\ \Omega}}$$

und

$$R_2 = R_1 \frac{U_{Soll}/U}{1 - U_{Soll}/U} = 8{,}3\ \Omega \frac{0{,}75}{1 - 0{,}75} = \underline{\underline{24{,}9\ \Omega}}.$$

A2 Belastbarkeit eines Potentiometers

Am Widerstand $R_1 = (1-x)R$ fällt die Spannung

$$U_1 = U - U_L = U - \frac{x}{1 + x(1-x)\frac{R}{R_L}}U = \left[1 - \frac{x}{1 + x(1-x)(R/R_L)}\right]U$$

ab. Die Verlustleistung im Bereich R_1 der Widerstandsbahn ist daher

▶▶▶ $$P_1 = \frac{U_1^2}{R_1} = \frac{U^2}{R}\frac{1}{1-x}\left[1 - \frac{x}{1 + x(1-x)(R/R_L)}\right]^2.$$

Die Belastbarkeit entspricht dem Längenanteil der Bahn 1 an der gesamten Widerstandsbahn:

▶▶▶ $$P_{1,max} = (1-x)\ P_{ges,max}$$

Es sollte also immer $P_1 \le P_{1,max}$ bzw. $\frac{P_1}{P_{1,max}} \le 1$ sein.

Man erhält für beliebige Werte von R_L:

►►► $$\frac{P_1}{P_{1,max}} = \frac{U^2/R}{P_{ges,max}} \frac{1}{(1-x)^2} \left[1 - \frac{x}{1 + x(1-x)(R/R_L)}\right]^2 .$$

Spezialfälle:

a) Leerlauf: Lastwiderstand sehr groß, $R/R_L \cong 0$

Dann ist

$$\frac{P_1}{P_{1,max}} = \frac{U^2/R}{P_{ges,max}} \frac{1}{(1-x)^2} \left[1 - \frac{x}{1+0}\right]^2 = \frac{U^2/R}{P_{ges,max}}$$

b) Kurzschluss, Lastwiderstand sehr klein, $R/R_L \cong \infty$

$$\frac{P_1}{P_{1,max}} = \frac{U^2/R}{P_{ges,max}} \frac{1}{(1-x)^2} \left[1 - \frac{x}{\infty}\right]^2 = \frac{U^2/R}{P_{ges,max}} \frac{1}{(1-x)^2}$$

Die Belastbarkeitsgrenze wird erreicht bei $\frac{U^2/R}{P_{ges,max}} \frac{1}{(1-x_{max})^2} = 1$. Damit ist

$$x_{max} = 1 - \sqrt{\frac{U^2/R}{P_{ges,max}}}$$

Beispiel:

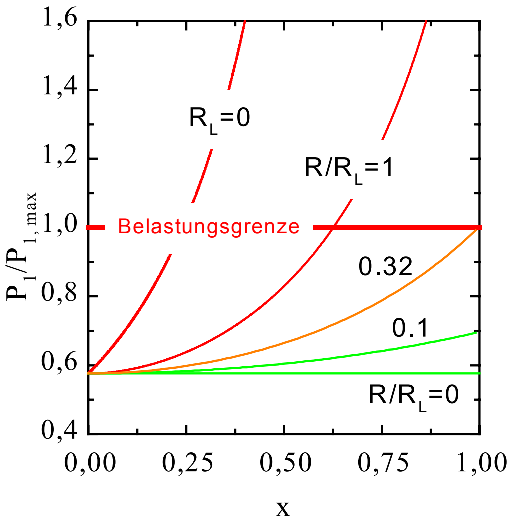
Wir betreiben ein Potentiometer $R = 1\,k\Omega$ an 12 V, maximale Belastbarkeit 0,25 W. Das Potentiometer darf im Leerlauf betrieben werden, denn die Verlustleitung über die gesamte Widerstandsbahn ist mit $\frac{(12V)^2}{1k\Omega} = 144mW < 250mW$ deutlich kleiner als die maximale Verlustleitung. Bei Kurzschluss am Potentiometerausgang tritt jedoch für

$$x > x_{max} = 1 - \sqrt{\frac{U^2/R}{P_{ges,max}}} = 1 - \sqrt{\frac{144\text{ mW}}{250\text{ mW}}} = 0{,}24$$

eine Überlastung der „oberen" Widerstandsbahn R_1 auf.

Bei Mittelstellung ($x = 0{,}5$) des Potentiometers ist

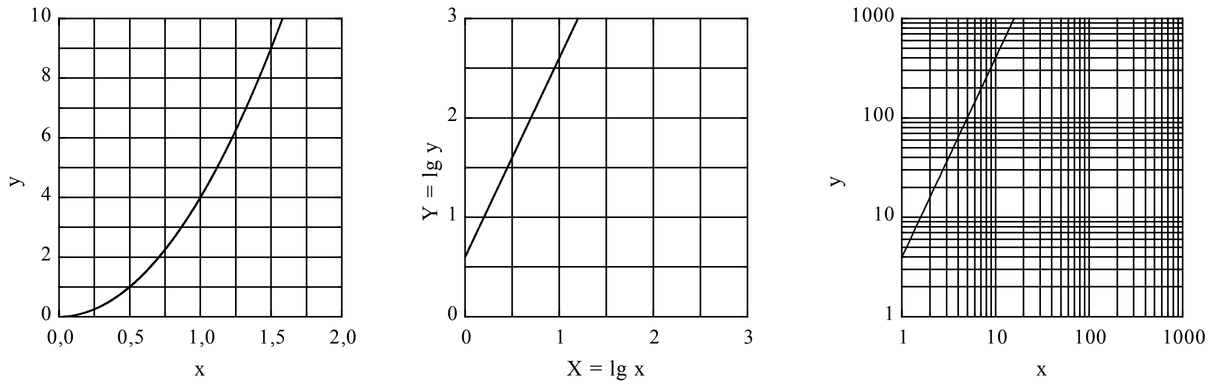
$$\frac{P_1}{P_{1,\max}} = \frac{U^2/R}{P_{\mathrm{ges},\max}} \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{144\,\mathrm{mW}}{250\,\mathrm{mW}} \frac{1}{(1-0{,}5)^2} = 2{,}3\,.$$



Die zulässige Verlustleistung ist also um mehr als 100% überschritten!

Der Abbildung kann man entnehmen, dass man nur für $R/R_L < 0{,}32$ (also für Lastwiderstände $R_L > \frac{1\,\mathrm{k}\Omega}{0{,}32} \approx 3{,}1\,\mathrm{k}\Omega$ über den gesamten Einstellbereich des Potentiometers unterhalb der Belastungsgrenze für R_1 bleibt.

A3 Logarithmische Darstellungen, Logarithmenpapier



Drei Darstellungsvarianten der Funktion $y = f(x) = 4x^2$

Die Gleichung

$$y = a\,x^m$$

beschreibt eine Potenzfunktion.

Beidseitiges Logarithmieren liefert

$$\underbrace{\lg y}_{Y} = \lg(a\,x^m) = \lg a + \lg x^m = \underbrace{\lg a}_{b} + m\,\underbrace{\lg x}_{X}$$

Mit der logarithmischen Achsenteilung $X = \lg x$ und $Y = \lg y$ folgt

$$Y = m\,X + b$$

Das ist eine Gleichung einer Geraden mit der

Steigung m

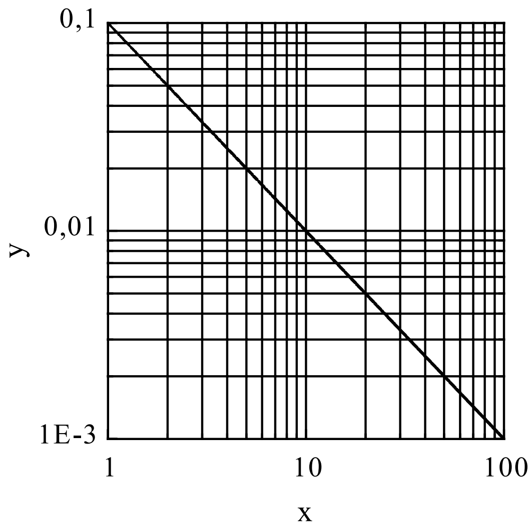
und dem

Y-Achsenabschnitt $b = \lg a$.

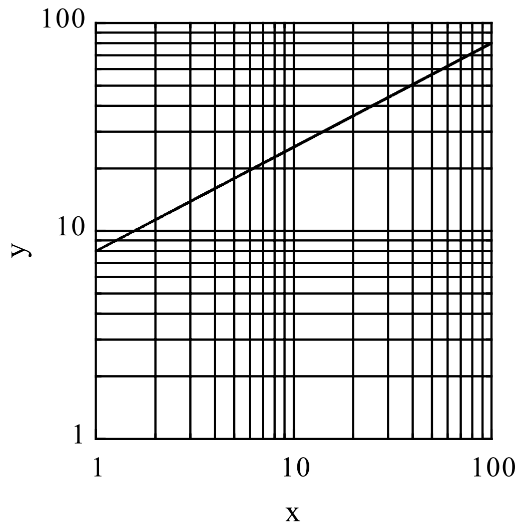
Trägt man eine Potenzfunktion doppeltlogarithmisch auf, so erhält man eine Gerade, aus deren Steigung und Achsenabschnitt die Parameter a und m der Potenzfunktion unmittelbar abgelesen werden können.

Aufgabe 7 (Vorbereitung):

Welche Potenzfunktionen sind unten dargestellt?

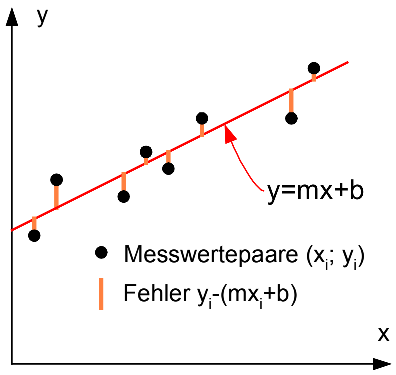


a)



b)

A4 Ausgleichsrechnung, Regressionsanalyse



Häufig begegnen Sie der folgenden Situation: Sie führen Messungen durch, um den Verlauf einer Funktion $y = f(x)$ zu untersuchen. Sie erhalten dann n Messwertepaare $(x_i; y_i)$ mit $i = 1, ..., n$. Gibt es ein theoretisches Modell, das den Zusammenhang zwischen x und y beschreibt, dann ist die Funktion f im allgemeinen bekannt. Die Funktion kann allerdings noch Parameter enthalten, die es bei der Auswertung zu bestimmen gilt. Hierzu bedient man sich der sogenannten **Ausgleichsrechnung** oder **Regressionsanalyse**.

Die Abbildung macht das am Beispiel einer Geraden $y = f(x) = mx + b$ deutlich: Sie wissen, dass Ihre Messwertepaare eine Gerade beschreiben sollten, kennen jedoch weder die Steigung m der Geraden noch den y-Achsenabschnitt b. Wären Sie in der Lage, absolut fehlerfreie Messungen durchzuführen, so würden im Fall der Geraden zwei Messwertepaare ausreichen, um Steigung und Achsenabschnitt zu ermitteln. Denn eine Gerade ist durch zwei Punkte eindeutig definiert.

Fehlerfreie Messungen gibt es jedoch nicht. Stellen Sie Ihre Messwertepaare in einem Koordinatensystem dar, so wird Ihr Messergebnis vielleicht wie in der Abbildung dargestellt aussehen.
Sie können nun die Gerade „per Augenmaß einzeichnen“ oder durch Rechnung ermitteln. Hierfür benötigen Sie eine Art „Gütekriterium“, das nach Gauß folgendermaßen formuliert wird: Die Parameter m und b sind so zu bestimmen, dass die Summe der Fehlerquadrate (vgl. Abbildung) minimal ist.

Wir haben als Fehler $y_i - mx_i - b$, die quadrierten Fehler sind dann $(y_i - mx_i - b)^2$. Für die Summe der Fehlerquadrate erhalten wir

$$S = (y_1 - mx_1 - b)^2 + (y_2 - mx_2 - b)^2 + ... + (y_n - mx_n - b)^2$$

oder kompakter

▶▶▶ $$S(m, b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - mx_i - b)^2 .$$

Die Fehlerquadratsumme ist also eine Funktion der unabhängigen Variablen m und b. Das Minimum dieser Funktion ergibt sich im Fall verschwindender partieller Ableitungen:

$$\frac{\partial S}{\partial m} = \sum_{i=1}^{n} \{2(y_i - mx_i - b)(-x_i)\} = 0 \text{ und } \frac{\partial S}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} \{2(y_i - mx_i - b)(-1)\} = 0$$

bzw.

$$m\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \text{und} \quad m\sum_{i=1}^{n} x_i + b\,n = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

Wir haben hier also ein lineares Gleichungssystem für m und b.

Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i \end{bmatrix}$$

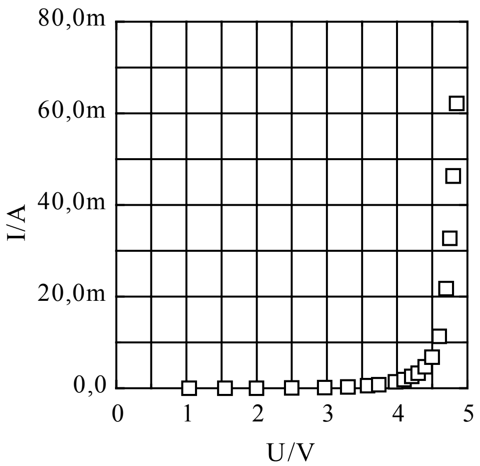
wird vorzugsweise mit der Cramerschen Regel gelöst und liefert

▶▶▶ $$N \equiv n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right]^2$$

▶▶▶ $$m = \frac{n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right]\left[\sum_{i=1}^{n} y_i\right]}{N}$$

▶▶▶ $$b = \frac{\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right]\left[\sum_{i=1}^{n} y_i\right] - \left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right]\left[\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right]}{N}$$

Beispiel:



Die Abbildung zeigt die Kennlinie einer in Sperrrichtung betriebenen Zenerdiode. Dem Sperrbereich und Knickbereich schließt sich oberhalb einer Spannung von etwa 4,7 V der eigentliche Arbeitsbereich der Diode an. In diesem Arbeitsbereich kann die Kennlinie zumindest näherungsweise linearisiert, d. h. durch eine Gerade angenähert werden.

Die Ausgleichsgerade soll ermittelt und daraus der differentielle Widerstand berechnet werden.

Rechenschema:

i	x_i bzw. U/V	y_i bzw. I/A	x_i^2	$x_i\ y_i$
1	04,70	0,0217	22,0900	0,101990
2	04,75	0,0327	22,5625	0,155325
3	04,80	0,0463	23,0400	0,222240
4	04,85	0,0621	23,5225	0,301185
$\sum_{i=1}^{n=4}$	19,10	0,1628	91,2150	0,780740

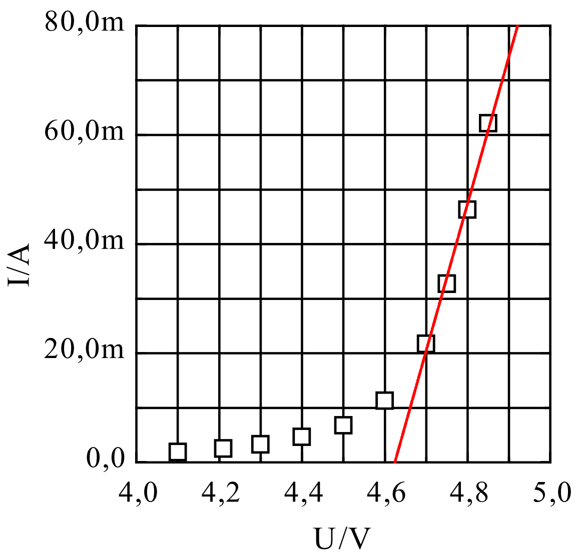
(Eigentliche Messwerte sind grau unterlegt.)

Mit $N = 4 \cdot 91{,}215\ \text{V}^2 - (19{,}10)^2\ \text{V}^2 = 0{,}05\ \text{V}^2$ ist

$$m = \frac{4 \cdot 0{,}78074\ \text{VA} - 19{,}10 \cdot 0{,}1628\ \text{VA}}{0{,}05\ \text{V}^2} = \frac{0{,}01348\ \text{VA}}{0{,}05\ \text{V}^2} = \underline{\underline{0{,}27\ \Omega^{-1}}}$$

$$b = \frac{91{,}215 \cdot 0{,}1628\ \text{V}^2\text{A} - 19{,}10 \cdot 0{,}78074\ \text{V}^2\text{A}}{0{,}05\ \text{V}^2} = \frac{-0{,}06233\ \text{V}^2\text{A}}{0{,}05\ \text{V}^2} = \underline{\underline{-1{,}2466\ \text{A}}}$$

Der differentielle Widerstand im Arbeitsbereich ist damit $r = \frac{dU}{dI} = \frac{1}{m} = \underline{\underline{3{,}7\ \Omega}}$.



Aufgabe 8 (Vorbereitung):

Versuchen Sie, das Rechenbeispiel im Detail nachzuvollziehen.