theorem]Frage

Vorlesung aus dem Sommersemester 2013

Transfinite Beweismethoden

PD. Dr. Schuster

Inhaltsverzeichnis

6.06.2013

References

1. A. Kertesz. Einführung in die Transfinite Algebra (main reference)
2. I. Kaplanski. Set Theory and Metric Spaces, AMS 2001
3. G. H. Moore. Zermelo's Axiom of Choice, Springer
4. T. Jech. The Axiom of Choice, North-Holland
5. H. Rubin, J. E. Rubin. Equivalents of the Axiom of Choice (I + II)
6. Erne einführung in die Ordinal...
7. H. Herrlich. Axoim of Choice
8. P. Howard, J.E. Rubin. Consequences of the Axiom of Choice
9. J.L. Bell, The Axiom of Choice

History and Motivation

- 1883: Cantor needed a well-order of $\mathcal{R}$, and considered the existence of such order as a "Denkgesetz".
- 1904: Zermelo proves that every set can be well-ordered, (WO). Zermelo used AC.
  $\mathrm{ZF} \vdash \mathrm{AC} \leftrightarrow \mathrm{WO}$
- Peano (1890) in a paper about Diff. Eq. explicitly avoids to use CC by using instead an algorithmic proof.
- $\geq$1904, Zermelo's paper proved? the so-called "Grundlagenkrise"
- 1905: Hamel proved with WO te existence of a basis for $\mathcal{R}$ as a $\mathcal{Q}$-vector space and he used this result to give the general solution of the functional equation $f(x+y) = f(x) + f(y)$ $(f\colon \mathcal{R} \to \mathcal{R})$
- WO made possible the use of transfinite induction (TI).
- Zorn (1935) put forward Zorn's Lemma, to make proofs shorter and more algebraic. (Kuratowski already introduced ZL in 1922)
- Teichmüller (1939) and Tukey (1940), Teichmüller-Tukey Principle (TT)
- Of course we know AC, TT, ZL, WO are equivalent.
- Raoult (1988): *Open Induction* (OI), equivalent to ZL and makes proofs even shorter.

- Coquand, Bergen (2004): Dependent choice can be replaced by a combinatorial form of OI.
- AC is problematic from a constructive point of view.

  $\mathrm{AC} + \mathrm{Pow} \vdash \mathrm{EM}$ (Dizconescu, 1970) (EM = Law of excluded middle ($\forall_x(P(x) \vee \neg P(x))$, Pow = Powerset axiom)
- Gödel 1940: $\mathrm{ZF} \nvdash \bot \to \mathrm{ZF} \nvdash \neg\,\mathrm{AC}$
- Cohen 1963: $\mathrm{ZF} \nvdash \bot \to \mathrm{ZF} \nvdash \mathrm{AC}$
- OI is an alternative to AC.
- **Hilbert's Programme (HP):** Justify the use of ideal objects (e.g. objects constructed by means of ZL or AC) and transfinite methods. Prove with finite methods, that the use of idealistic methods is consistent.
- Revised form of HP (Kreisel and Feferman): Eliminate the use of ideal objects and use only finite and constructive proof methods.
- Successful for a considerable part of commutative algebra (Lombardi, Coquand)

Preliminaries (1).

- partial order $\leq$ (reflexive, transitive, antisymmetric), $(X, \leq)$ is a poset.
- a chain, or total order or linear order is a partial order satisfying $x \leq y \vee y \leq x$
- on a poset $(X, \leq)$ we talk about minimal/maximal elements. e.g. x is minimal in $X \iff \forall_{y \in X}(y \leq x \to y = x)$ or equiv. $\neg\exists_{y \in X}(y \leq x \wedge y \neq x)$
- $(X, \leq)$ is a chain, x is minimal (maximal), then we say: x is the least (greatest) element.
- $\leq$ well-founded: every non-empty subset has a minimal element.
- ...
- WO: every set can be well-ordered.

  Beispiel. (i) $\mathcal{N}$ is well-ordered by $\leq$

  (ii) $\mathcal{Q}_+^0 = [0, +\infty) \cap \mathcal{Q}$. It is linearly ordered, has least element (0), but it's not well-founded. ($s = (\sqrt[2]{}, +\infty) \cap \mathcal{Q}$).

  (iii) Transfinite Induction (TI) on a poset X. Every progressive subset S of X equals X.

$$\underbrace{[}\ S - \text{progressive}]\forall_x[\forall_{y<x}(y \in S) \to (x \in S)] \to \underbrace{[}\ X = S]\forall_x(x \in S)$$

(iv) If $\leq$ is well-founded order, then TI holds on $(X, \leq)$. [If S progressive and $S \neq X$, then $R = X - S$ is non-empty and therefore it has a minimal element x, so that $x \in S$ since S is progressive. $\lightning$.]

(v) On $\mathcal{N}$, TI rewrites as: $\forall_n[\forall_{m<n}(m \in S) \to n \in S] \to \forall_n(n \in S)$.

Satz. *Any linearly independent subset $S \in V$, when V is a vector space over $\mathcal{K}$ can be extended to a base $S' \supset S$.*

Beweis. Consider a well-order on V, $\langle V_\alpha \mid \alpha \leq \overline{\alpha}\rangle$ ($\overline{\alpha}$ ordinal corresp to the well-order on V) We can define a (partial) function $f\colon \overline{\alpha} \to V$: $f(\alpha) =$ the least element of V that is not a linear combination of $f(\beta)$ with $\beta < \alpha$ in S. ...

- f injective
- $f(\overline{\alpha}) \cup S$ is linearly independent. suppose that a finite linear combination of el. of S and values of f equals 0, and we can assume all coefficients to be non-zero.

  This combination must induce some element of $f(\overline{\alpha})$, and let α_0 the maximal of the ordinals encountered. Then $f(\alpha_0)$ is a linear combination of S and elements of the form $f(\beta)$ $\beta < \alpha_0$. $\lightning$.

Since $\overline{\alpha}$ has the cardinality of V, f is defined as an initial segment of kind $[0, \alpha)$, with $f(\alpha)$ undefined. This means prec. that f that every element of V is linear combination of S and $(f(\beta){:}\beta < \alpha))$ □

In 1821: Cauchy addressed the following functional equation:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \qquad f\colon \mathcal{R} \to \mathcal{R}$$

Cauchy proved that all the continuous solutions are linear, of the form $f(x) = c \cdot x$ for some $c \in \mathcal{R}$. Hamel first proved that $\mathcal{R}$ has a $\mathcal{Q}$-basis. Suppose $f\colon \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ is additive. Then:

- $f(x_1 + \ldots + x_n) = f(x_1) + \ldots + f(x_n)$
- $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$ for all $n \in \mathcal{N}$
- Since $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) \to f(0) = 0$ Hence if $n \leq 0$, $0 = f(nx + (-n)x) = f(nx) - nf(x)$. So $f(nx) = nf(x)$ for all $n \in \mathcal{Z}$.

If $q = \frac{m}{n} \in \mathcal{Q}$, then $n \cdot q = m$ so that $n \cdot f(q) = m \cdot f(i)$, so that, posing $c = f(i)$, we have $f(q) = c \cdot q$. If f is continuous, then $f(x) = c \cdot x$ for all $x \in \mathcal{R}$. (Cauchy's Result). If x is real, $y = \frac{m}{n} \cdot x$, then $f(n \cdot y) = f(m \cdot x) \rightsquigarrow f(y) = \frac{m}{n} f(x)$. Hence f is $\mathcal{Q}$-linear. If we have a basis of $\mathcal{R}$ over $\mathcal{Q}$, say B, then each h is determined by its values on B.

Satz. *If $f\colon \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ is a non-continuous solution f of the Cauchy equation, then it's graph $G(f) = \{(x, f(x))\colon x \in \mathcal{R}\}$ is dense in $\mathcal{R}^2$*

Beweis. Let $(x,y) \in \mathcal{R}^2$ and U is a neighborhood of (x,y). Since f is a non-$\mathcal{R}$-linear solution, there exist $a, b \neq 0$ in $\mathcal{R}$, such thet $\alpha = \frac{f(a)}{a}$ and $\beta = \frac{f(b)}{b}$ are different. This means $u = (a, f(a)), v = (b, f(b))$ are ind., and therefore are a basis of $\mathcal{R}$. There exist $p, q \in \mathcal{R}$ sucht that $(x,y) = pu + qv$. Since $\overline{\mathcal{Q}^2} = \mathcal{R}^2$, we can find $\overline{p}, \overline{q} \in \mathcal{Q}$ such that $\overline{p}u + \overline{q}u \in U$. Therefore $\overline{p}u + \overline{p}v = (\overline{p}a + \overline{q}b, \overline{p}f(a) + \overline{q}f(b)) = (\overline{p}a + \overline{q}b, f(\overline{p}a + \overline{q}b)) \in U \cap G(f)$ □

Preliminaries: Zorn's Lemma. Let $(X, \leq)$ be a poset, $S \subseteq X$, $x \in X$.

- x an *upper bound* of S: $\forall_{s \in S}(s \leq x)$
- x *least upper bound* or *supremum* of S: $\forall_{u \in X}[\forall_{s \in S}(s \leq u) \leftrightarrow x \leq u]$, that is:
  (i) x is an upper bound of S. $(x = u, \leftarrow)$
  (ii) if $u \in X$ upper bound of S, then $x \leq u$ $(\rightarrow)$.
- *Common form of Zorn's Lemma*: If $X \neq \emptyset$ and every chain $C \subseteq X$ with $C \neq \emptyset$ has an upper bound, then X has a maximal element.
- We could chop $X \neq \emptyset$ together with $X \neq \emptyset$,[$\emptyset$is chain], or we can keep $X \neq \emptyset$ and every chain $C \subseteq X$, $C \neq \emptyset$ has a supremum.
- All of this can be reversed: Let $(X, \leq)$ be a poset. $D \subseteq X$ is called *directed*: $\forall_{x,y \in D}\exists_{z \in D}(x \in z \wedge y \leq z)$
- Every chain is a directed subset
- A maximal element of a directed subset is also its greatest element
- X directed complete: every directed subset $D \subseteq X$, with $D \neq \emptyset$, D has a supremum in X, we write the supremum as $\bigvee D$
- *dcpo*: directed complete partial order
- V Vectorspace, S Subspace. $V, S = \{W : W \leq V\}$ is a dcpo with $\leq$ as partial order with V as V. Exercise!
- A subset of a dcpo X is *closed* if $\bigvee D \in S$ for all $D \subseteq S$ non-empty directed subset.
- S is closed subset of the dcpo $(\mathcal{P}, \subseteq)$
- Here follows two equivalent formulations of Zorn's Lemma:
  - Every dcpo $X \neq 0$ has a maximal element
  - If X is a dcpo, then every closed subset $S \subseteq X$ with $S \neq 0$ has a maximal element.

13.06.2013

Definition. Sei $(x, \leq)$ partielle Ordnung, $D \subseteq X$ *gerichtet*, wenn jede endliche Teilmenge von D eine obere Schrankeun D hat. Dies ist gleichbedeutend mit $D \neq \emptyset$ und erfüllt die alte Definition, d.h. $\forall_{x,y \in D}\exists_{z \in D}(x \leq z \wedge y \leq x)$.

Lemma ((Kuratowski-)Zorn (ZL))**.** *Jeder dcpo $X \neq 0$ hat ein maximales Element. Äquivalent: Ist X ein dcpo und $S \subseteq X$ abgeschlossen, $S \neq 0$, so hat S ein max. Element*

Definition. Nun sei S eine Menge; $X = \mathcal{P}(S)$ mit $\subseteq$; $F, G \subseteq X$. F heißt *von endlichem Charakter*, wenn für alle $T \subseteq S$ gilt: $T \in F \iff \forall T_0 \subseteq T(T_0 \text{ endlich } \to T_0 \in F)$. G *von coendlichem Charakter*, wenn für alle $T \subseteq S$ gilt: $T \in G \subseteq \exists_{T_0 \subseteq T}(T_0 \text{ endlich } \wedge T_0 \in G)$. Falls $X = F \dot\cup G$, so gilt: F von endlichem Charakter $\iff$ G von coendlichem Charakter.

Lemma ((Teichmüller-)Tukey (TuL))**.** *Ist S eine Menge, und $F \subseteq \mathcal{P}(S)$, so gilt: $F \neq \emptyset \wedge F$ von endlichem Charakter $\to F$ hat maximales Element.*

Definition. Wieder sei X dcpo. $F \subseteq X$ *abgeschlossen*, wenn für jedes gerichtete $D \subseteq X$ gilt: $\underbrace{[}\ \forall_{x \in X}(x \in D \to x \in F) D \subseteq F \to \bigvee D \in F$. G *offen*, wenn für jedes gerichtete $D \subseteq X$ gilt: $\bigvee D \in G \to \underbrace{[}\ D \cap G \neq 0] \exists_{x \in X}(x \in D \wedge x \in G)$ ($X = F \dot\cup G \to F$ abg. $\iff$ G offen)

Lemma. *Es sei $X = \mathcal{P}(S)$, $F, G \subseteq X$.*

(a) F von endlichem Charakter $\to F$ abgeschlossen.

(b) G von coendlichem Charakter $\to G$ offen.

Beweis. nur (a). Es sei $D \subseteq X$ gerichtet mit $D \subseteq F$. Zu Zeigen: $\bigcup D \in F$. Es sei $T = \bigcup D$ und $T_0 \subseteq T$, T_0 endl. Dazu gibt es endl. $D_0 \subseteq D$ mit $T_0 \subseteq \bigcup D_0$. Da D gerichtet ist, hat D_0 eine obere Schranke $R \in D$. Dann $T_0 \subseteq R \in F$, also $T_0 \in F$, da T_0 endl. und F von endl. Charakter. □

Definition. Sei X wieder ein dcpo, $G \subseteq X$. G progressiv, wenn $\forall_{x \in X}[\forall_{y > x}(y \in G) \to x \in G$

Definition (Offene Induktion (OI))**.** Ist X ein dcpo und $G \subseteq X$ offen, so gilt: G progressiv $\to G = X$, d.h.

$$\forall_x[\forall_{y>x}(y \in G) \to x \in G] \to \forall_{x \in X}(x \in G)$$

OI ist TI für offene $G \subseteq X$ mit X dcpo.

Definition (Tukey-Induktion (TuI))**.** Ist S Menge, $G \subseteq \mathcal{P}(S)$, so gilt: G von coendl. Charakter $\wedge$ G progressiv $\to G = \mathcal{P}(S)$

Satz. *(a)* ZL $\iff$ OI

(b) TuL $\iff$ TuI

Beweis. Nur (a). X dcpo, $X = F \dot\cup G$, dann: $F = \emptyset \iff G = X$, F abgeschlossen $\iff$ G offen; F hat kein max. El. $\iff$ G progressiv.
ZL für X auch als: $S \subseteq X$ abgeschlossen, hat kein maximales Element $\to S = \emptyset$. OI für X: $G \subseteq X$ offen, progressiv $\to G = X$. □

1 Allgemeine Abhängigkeit

Definition. Es sei S eine Menge, sowie $\lhd \subseteq S \times \mathcal{P}(S)$. Stets seien $a, b, c \in S$ und $U, V, W \in S$. $\lhd$ *Überdeckung(srelation)*, wenn gelten:

- *Reflexivität*: $a \in U \to a \lhd U$
- *Transitivität*: $a \lhd U \wedge U \lhd V \to a \lhd V$

Wobei $U \lhd V$ steht für $\forall_{b \in U}(b \lhd V)$.

Bemerkung. *Eine Überdeckungsrelation ist das gleiche wie ein* Abschlußoperator $U \mapsto U^{\lhd}$ *auf* $\mathcal{P}(S)$*, mit den folgenden Axiomen:*

- Reflexivität*:* $U \subseteq U^{\lhd}$
- Transitivität*:* $U \subseteq V^{\lhd} \to U^{\lhd} \subseteq V^{\lhd}$

Korrespondenz $\lhd \leftrightsquigarrow \_^{\lhd}$*: Zu* $\lhd$ *definiere* $U^{\lhd} = \{a \in S : a \lhd U\}$. $a \lhd U \leftrightsquigarrow a \in U^{\lhd}$.
Alternatives Axiomensystem:

- *Reflexivität: wie oben.*
- *Monotonie:* $U \subseteq V \to U^{\lhd} \subseteq V^{\lhd}$
- *Idempotenz:* $U^{\lhd\lhd} \subseteq U^{\lhd}$*. (mit Refl. sogar =)*

[R+T $\to$ *M; T*$\to$*I; M+I*$\to$*T]*

Definition. Eine Überdeckungsrelation $\lhd$ heißt

- *unitär* oder *Schottsch*, wenn aus $a \lhd U$ folgt: $\exists_{b \in U}(a \lhd \{b\})$.
- *finitär* oder *Stonesch*, wenn aus $a \lhd U$ folgt: $\exists_{U_0 \subseteq U}(U_0 \text{ endlich} \wedge a \lhd U_0)$.

Eine finitäre Überdeckungsrelation $\lhd$ heißt *Abhängigkeitsrelation*, wenn $\lhd$ die *Abhängigkeitseigenschaft* hat, d.h. wenn für alle $a, b \in S$, $U \subseteq S$ gilt:

$$a \lhd U \cup \{b\} \to a \lhd U \vee b \lhd U \cup \{a\}$$

Ein $U \subseteq S$ heißt *($\lhd$-)abhängig*, wenn $\exists_{b \in U}(b \lhd U - \{b\})$.
U heißt *($\lhd$-)unabhängig*, wenn $\forall_{b \in U}(b \lhd U - \{b\}$.

Bemerkung. *U abhängig* $\to U \neq \emptyset$*; $\emptyset$ unabhängig.*

Beispiel. (a) S Menge; $a \lhd U \equiv a \in U$, d.h. $U^{\lhd} = U$; Dann $\lhd$ unitär und jedes $U \subseteq S$ ist unabhängig.

(b) S Vektorraum; $U^{\lhd} = (U)$ der von U erzeugte Untervektorraum. $\lhd$ unitär; "(un)abhängig" ist "linear (un)abhängig" (!)

(c) $R \subseteq S$ komm. Ringe; für $U \subseteq S$ sei $R[U]$ die *Ringadjunktion* von U an R in S, d.h.

$$R[U] = \bigcup_{n \geq 0} \{f(u_1, \ldots, u_n) \colon f \in R[X_1, \ldots, X_n]; u_1, \ldots, u_n \in U\}$$

$U^{\lhd} = \overline{R[U]}^S$ ganzer Abschluß von $R[U]$ in S, d.h. $a \lhd U \iff a^n = r_1 a^{n-1} + \ldots + r_{n-1}^a + r_n$ für geeignete $n \geq 1$; $r_1, \ldots, r_n \in R[U]$.

Dann: $\lhd$ finitäre Überdeckungsrelation. R, S Körper, $R(U)$ statt $R[U] \to \lhd$ Abhängigkeitsrelation und "$\lhd$-(un)abhängigkeit" ist "algebraisch (un)abhängig". Siehe B.L. van der Warden, (Moderne) Algebra I, §64.

Definition. Nun sei $\lhd$ wieder eine allgemeine Abhängigkeitsrelation. U *erzeugt* S, wenn $S \lhd U$, d.h. $\forall_{b \in S}(b \lhd U)$. U *Basis*, wenn U unabhängig, und U erzeugt S.
In den Beispielen (b) und (c) ist eine Basis eine Vektorraumbasis bzw. eine Tanszendenzbasis. U ist *maximal unabhängig* genau dann, wenn jedes $V \subseteq S$ mit $V \supsetneq U$ abhängig ist (*), sowie U unabhängig ist.

Lemma. *U maximal unabhängig $\iff$ U Basis*

Beweis. "$\Rightarrow$" (gilt i.a. nicht für $\lhd$ nur Überdeckungsrelation): Zeige: (*) $\wedge$ S $/\!\lhd U \to U$ abhängig. Nehme $b \in S$ mit b $/\!\lhd U$. Speziell b $/U$, d.h. $U \subsetneq U \cup \{b\}$. Nach (*) ist $U \cup \{b\}$ abhängig, d.h. es gibt $a \in U \cup \{b\}$ mit $a \lhd (U \cup \{b\}) - \{a\}$. Sofort folgt $a \neq b$ [$a = b \to b \lhd U$ $\lightning$]. Also $a \lhd (U - \{a\}) \cup \{b\}$. Nach Abhängigkeitseigenschaft ist dann $a \lhd U - \{a\}$, damit U abhängig, da ja $a \in U$ wegen $a \neq b$, oder $b \lhd (U - \{a\}) \cup \{a\}$, d.h. $b \lhd U$. $\lightning$.
"$\Leftarrow$": Nur zu Zeigen: (*). Ist $V \supsetneq U$, etwa $b \in V - U$, so ist $U - \{b\} = U$ und $b \lhd U$, also $b \lhd U - \{b\}$ und damit $b \lhd V - \{b\}$, also V abhängig. □

Satz. *Zu jedem unabhängigen $U \subseteq S$ gibt es eine Basis W mit $W \supseteq U$.*

Beweis mit ZL. Verwende obiges Lemma. Es sei $G = E \cap F$, wobei $E = \{V \subseteq S \colon V \supseteq U\}$ und $F = \{V \subseteq S \colon V \text{unabhängig}\}$ ein maximales Element W von G ist die gewünschte Basis. Zu Zeigen: $G \neq \emptyset$ und G dcpo. Nun ist $U \in G$. Ist $D \subseteq G$ gerichtet, so ist $\bigcup D \in E$, da $D \neq \emptyset$, sowie $\bigcup D \in F$, da F abgeschlossen, da F von endl. Charakter (Lemma oben). □