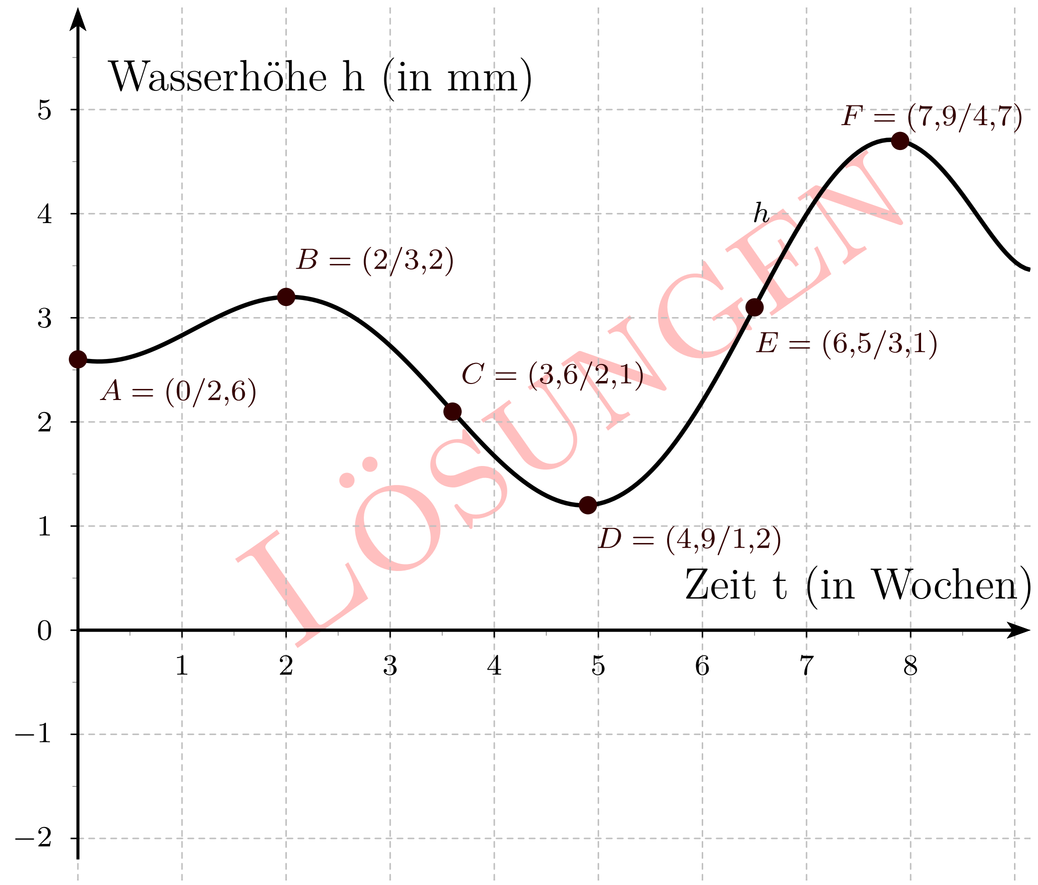
01 - MAT - AN 1.1, AN 1.3, AN 3.3 - Wasserstand eines Bergsees - BIFIE Aufgabensammlung

1. Die Funktion h beschreibt die Wasserhöhe eines Bergsees in Abhängigkeit von der Zeit t. Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion h. ____/0



Aufgabenstellung:

(a) Bestimme den Wert des Differenzenquotienten des Wasserstand s im Intervall $[0; 2]$ und beschreibe in Worten, was dieser Wert angibt! Um wie viel Prozent ist die Wasserhöhe während der ersten zwei Wochen gestiegen.

(b) Was beschreibt die erste Ableitungsfunktion h' der Funktion h? Betimme näherungsweise den Wert des Differenzialquotienten der Wasserhöhe zum Zeitpunkt $t = 6$ und beschreibe in Worten, was dieser Wert angibt!

(c) Was beschreibt die zweite Ableitungsfunktion h'' der Funktion h? Wann etwa nimmt die Wasserhöhe am stärksten zu?

Lösungserwartung:

(a) $\frac{3{,}2-2{,}6}{2-0} = 0{,}3 \rightarrow$ Bis zum Ende der zweiten Woche nimmt die Wasserhöhe im Mittel pro Woche um 0,3 m zu.

$3{,}2 : 2{,}6 \approx 1{,}23 \rightarrow$ Der Wasserstand nahm um ca. 23 % zu.

(b) Durch die erste Ableitungsfunktion h' ist die Änderungsgeschwindigkeit der Wasserhöhe bestimmt.

$h'(6) \approx 1{,}6 \rightarrow$ Das bedeutet, dass nach sechs Wochen die momentane Änderungsrate 1,6 m pro Woche beträgt.

(c) Die zweite Ableitungsfunktion h'' beschreibt das Monotonieverhalten der Änderungsrate der Wasserhöhe bzw. die momentane Änderungsrate der Änderungsgeschwindigkeit der Wasserhöhe. Die Wasserhöhe nimmt nach ca. 6,5 Wochen am stärksten zu.

---

02 - MAT - WS 2.3, WS 3.2, WS 3.3 - Aufnahmetest - BIFIE Aufgabensammlung

2. Eine Universität führt für die angemeldeten Bewerber/innen einen Aufnahmetest durch. Dabei werden zehn Multiple-Choice-Fragen gestellt, wobei jede Frage vier Antwortmöglichkeiten hat. Nur eine davon ist richtig. Wer mindestens acht Fragen richtig beantwortet, wird sicher aufgenommen. Wer alle zehn Fragen richtig beantwortet, erhält zusätzlich ein Leistungsstipendium. Die Ersteller/innen dieses Tests geben die Wahrscheinlichkeit, bei zufälligem Ankreuzen aller Fragen aufgenommen zu werden, mit 0,04158 % an. Nimm an, dass Kandidat K alle Antworten völlig zufällig ankreuzt. _____/0

Aufgabenstellung:

(a) Nenne zwei Gründe, warum die Anzahl der richtig beantworteten Fragen unter den vorliegenden Angaben binomialverteilt ist!

Gib einen möglichen Grund an, warum in der Realität das Modell der Binomialverteilung hier eigentlich nicht anwendbar ist!

(b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass Kandidat K nicht aufgenommen wird! Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Kandidat K ein Leistungsstipendium erhält!

Lösungserwartung:

(a) Dieser Aufgabenteil ist durch sinngemäßes Angeben von mindestens zwei der vier angeführten Gründe richtig gelöst:

Die Anzahl der richtig beantworteten Fragen ist unter den vorliegenden Angaben binomialverteilt, weil

- es nur die beiden Ausgänge „richtig beantwortet" und „falsch beantwortet" gibt
- das Experiment unabhängig mit $n = 10$ Mal wiederholt wird
- die Erfolgswahrscheinlichkeit dabei konstant bleibt
- es sich dabei um ein „Bernoulli-Experiment" handelt

Der zweite Aufgabenteil ist korrekt gelöst, wenn ein Grund (sinngemäß) angeführt wird, z. B.:

- Eine Bewerberin/ein Bewerber, die/der sich für ein Studium interessiert, wird sicher nicht beim Aufnahmetest zufällig ankreuzen.
- Sobald Kandidat K auch nur eine Antwortmöglichkeit einer Frage ausschließen kann, wäre die Voraussetzung für die Binomialverteilung verletzt. Genau aus diesem Grund wird die Universität mit zehn Multiple-Choice-Fragen nicht das Auslangen finden, da die Erfolgswahrscheinlichkeit für kompetenzbasiertes Antworten sicher wesentlich höher ist als 0,25.
- Die Unabhängigkeit der Wiederholung des Zufallsexperiments ist sicher dadurch verletzt, dass die einzelnen Kandidatinnen und Kandidaten aufgrund ihrer Vorbildung unterschiedliche Erfolgswahrscheinlichkeiten für die Beantwortung der einzelnen Fragen aufweisen. Somit kann unter diesen Voraussetzungen niemals von einer unabhängigen Wiederholung mit Zählen der Anzahl der Erfolge im Sinne eines Bernoulli-Experiments gesprochen werden.

Es sind auch weitere eigenständige Lösungen denkbar.

(b) Für die Lösung ist keine Binomialverteilung nötig, da das gesuchte Ereignis das Gegenereignis zur „Aufnahme“ darstellt. Somit beträgt die (von den Testautorinnen und Testautoren) angegebene Wahrscheinlichkeit:

$$P(\text{Ablehnung}) = 1 - P(\text{Aufnahme}) = 1 - 0{,}0004158 = 0{,}9995842$$

Die Ablehnung des Kandidaten K ist somit praktisch sicher.

Auch hier ist keine Binomialverteilung nötig, da ein Zufallsexperiment mit einer Erfolgswahrscheinlichkeit von 0,25 zehnmal unabhängig wiederholt wird, wobei bei jeder Wiederholung ein „Erfolg“ eintritt.

Die Wahrscheinlichkeit beträgt somit $P(\text{Leistungsstipendium}) = 0{,}25^{10} \approx 0$.

---

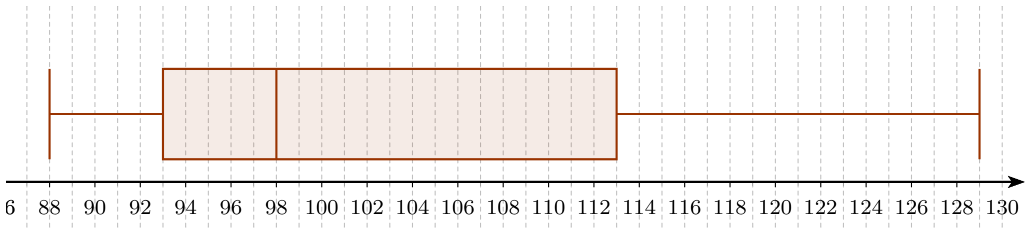
03 - MAT - WS 1.1, WS 1.3, WS 3.1, WS 3.2, WS 3.3 - Section Control - BIFIE Aufgabensammlung

3. Der Begriff Section Control (Abschnittskontrolle) bezeichnet ein System zur Überwachung von Tempolimits im Straßenverkehr, bei dem nicht die Geschwindigkeit an einem bestimmten Punkt gemessen wird, sondern die Durchschnittsgeschwindigkeit über eine längere Strecke. Dies geschieht mithilfe von zwei Überkopfkontrollpunkten, die mit Kameras ausgestattet sind. Das Fahrzeug wird sowohl beim ersten als auch beim zweiten Kontrollpunkt fotografiert. ____/0

Die zulässige Höchstgeschwindigkeit bei einer bestimmten Abschnittskontrolle beträgt 100 km/h. Da die Polizei eine Toleranz kleiner 3 km/h gewährt, löst die Section Control bei 103 km/h aus. Lenker/innen von Fahrzeugen, die dieses Limit erreichen oder überschreiten, machen sich strafbar und werden im Folgenden als „Temposünder“ bezeichnet.

Eine Stichprobe der Durchschnittsgeschwindigkeiten von zehn Fahrzeugen ist in der nachfolgenden Tabelle aufgelistet und im abgebildeten Boxplot dargestellt.

v in km/h	88	113	93	98	121	98	90	98	105	129



Aufgabenstellung:

(a) Bestimme den arithmetischen Mittelwert $\overline{x}$ und die empirische Standardabweichung s der Durchschnittsgeschwindigkeiten in der Stichprobe! Kreuze die zutreffende(n) Aussage(n) zur Standardabweichung an!

Die Standardabweichung ist ein Maß für die Streuung um den arithmetischen Mittelwert.	⊠
Die Standardabweichung ist immer ca. ein Zehntel des arithmetischen Mittelwerts.	
Die Varianz ist die quadrierte Standardabweichung.	⊠
Im Intervall $[\overline{x} - s; \overline{x} + 2]$ der obigen Stichprobe liegen ca. 60 % bis 80 % der Werte.	⊠
Die Standardabweichung ist der arithmetische Mittelwert der Abweichung von $\overline{x}$.	

(b) Bestimme aus dem Boxplot (Kastenschaubild) der Stichprobe den Median sowie das obere und untere Quartil! Gib an, welche zwei Streumaße aus dem Boxplot ablesbar sind! Bestimme auf deren Werte!

(c) Die Erfahrung zeigt, dass die Wahrscheinlichkeit, ein zufällig ausgewähltes Fahrzeug mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von mindestens 103 km/h zu erfassen, 14 % beträgt. Berechne den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ der Temposünder unter fünfzig zufällig ausgewählen Fahrzeuglenkern! Berechne, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass die Anzahl der Temposünder unter fünfzig Fahrzeuglenkern innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert, d.h. im Intervall $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$ liegt!

Lösungserwartung:

(a) Richtige Lösungen siehe oben. Zusätzliche Information:

$$\overline{x} = \frac{1}{10} \cdot \sum_{i=1}^{10} x_i = 103{,}3\,km/h$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{9} \cdot \sum_{i=1}^{10} (x_i - \overline{x})^2} = 13{,}6\,km/h$$

(b) Daten aus dem Boxplot:

Median ... 98 km/h

unteres Quartil ... 93 km/h

oberes Quartil ... 113 km/h

Spannweite ... 41 km/h

Quartilsabstand ... 20 km/h

(c) Lösung mittels Binomialverteilung

$\mu = n \cdot p = 50 \cdot 0{,}14 = 7$

$\sigma = \sqrt{\mu \cdot (1-p)} = 2{,}45$

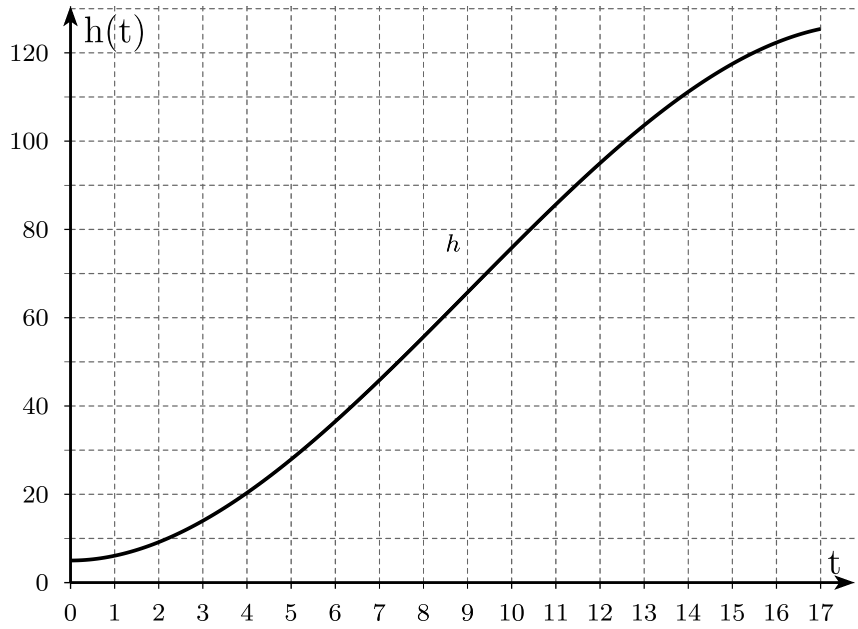
$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = P(5 \leq X \leq 9) = P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) = 0{,}1286 + 0{,}1570 + 0{,}1606 + 0{,}1406 + 0{,}1068 = 0{,}6936 = 69{,}36\,\%$

---

04 - MAT - AG 2.3, AN 1.3, AN 2.1, AN 3.3 - Wachstum einer Pflanze - BIFIE Aufgabensammlung

4. Manche einjährige Nutz- und Zierpflanzen wachsen in den ersten Wochen nach der Pflanzung sehr rasch. Im Folgenden wird nun eine spezielle Sorte betrachtet. Die endgültige Größe einer Pflanze der betrachteten Sorte hängt auch von ihrem Standort ab und kann im Allgemeinen zwischen 1,0 m und 3,5 m liegen. Pflanzen dieser Sorte, die im Innenbereich gezüchtet werden, erreichen Größen von 1,0 m bis 1,8 m. ____/0

   In einem Experiment wurde der Wachstumsverlauf dieser Pflanze im Innenbereich über einen Zeitraum von 17 Wochen beobachtet und ihre Höhe dokumentiert. Im Anschluss wurde die Höhe h dieser Pflanze in Abhängigkeit von der Zeit t durch eine Funktion h mit $h(t) = \frac{1}{24} \cdot (-t^3 + 27t^2 + 120)$ modelliert. Dabei bezeichnet t die Anzahl der Wochen seit der Pflanzung und $h(t)$ die Höhe zum Zeitpunkt t in Zentimetern. Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion h im Beobachtungszeitraum $[0; 17]$.



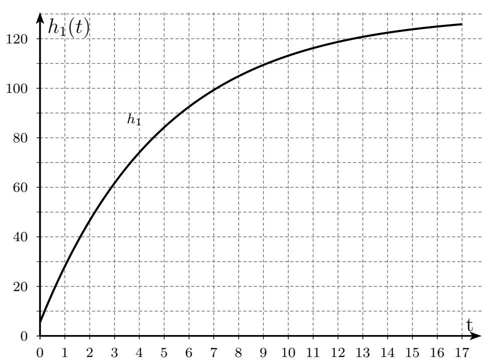
Aufgabenstellung:

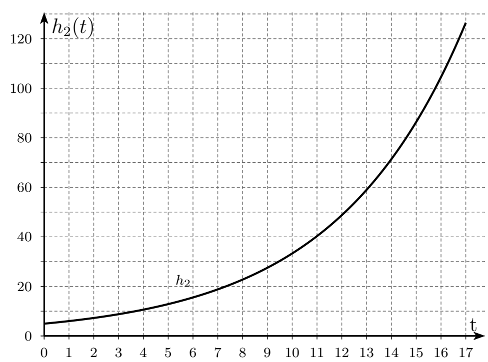
(a) Berechne den Wert des Quotienten $\frac{h(13)-h(9)}{4}$ und den Wert von $h'(9)$! Gib an, welche Bedeutung die beiden berechneten Ergebnisse im gegebenen Kontext haben!

(b) Zeige durch Rechnung, dass die Funktion h im gegebenen Intervall keinen lokalen Hochpunkt hat! Begründe deine Rechenschritte.

(c) Für das Wachstum der beobachteten Pflanze ist auch die entsprechende Düngung von Bedeutung. Im gegebenen Fall wurde die Pflanze zwei Wochen vor dem Zeitpunkt des stärksten Wachstums gedüngt. Ermittle diesen Zeitpunkt durch Rechnung! Begründe deine Überlegungen!

(d) Im selben Zeitraum wurde das Höhenwachstum von zwei weiteren Pflanzen der gleichen Sorte beobachtet und modelliert. Die nachstehenden Abbildungen zeigen die Graphen der entsprechenden Funktionen h_1 und h_2.





Vergleiche das Krümmungsverhalten der Funktionen h, h_1 und h_2 im Intervall $[0; 17]$ und interpretiere es im Hinblick auf das Wachstum der drei Pflanzen!

Lösungserwartung:

(a)

$$\frac{h(13) - h(9)}{4} \approx 9{,}47$$

$$h'(t) = \frac{1}{24} \cdot (-3t^2 + 54t) = \frac{1}{8} \cdot (-t^2 + 18t)$$

$h'(9) \approx 10{,}13$

Die mittlere Wachstumsgeschwindigkeit im Zeitintervall $[9; 13]$ beträgt rund $9{,}5\,cm$ pro Woche. Die momentane Wachstumsgeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 9$, d.h. nach 9 Wochen beträgt rund $10{,}1\,cm$ pro Woche.

(b) In einem lokalen Hochpunkt muss die Tangente an den Graphen horizontal sein, d.h., die 1. Ableitung muss den Wert 0 haben.

$$h'(t) = \frac{1}{24} \cdot (-3t^2 + 54t) = \frac{1}{8} \cdot (-t^2 + 18t)$$

$t \cdot (-t + 18) = 0$

$t_1 = 0, t_2 = 18$

Die Funktion hat an der Stelle $t = 0$ ein lokales Minimum und an der Stelle $t = 18$ ein lokales Maximum. Der Wert $t = 18$ liegt nicht im Beobachtungsintervall, d.h., die Funktion hat im gegebenen Intervall keinen lokalen Hochpunkt.

(c) $h''(t) = \frac{1}{4} \cdot (-t + 9)$

Die Kurve ist für $t < 9$ linksgekrümmt, d.h., die Wachstumsgeschwindigkeit nimmt zu. Die Kurve ist für $t > 9$ rechtsgekrümmt, d.h., die Wachstumsgeschwindigkeit nimmt ab. Daher ist die Wachstumsgeschwindigkeit nach 9 Wochen am größten. Die Pflanz wurde also am Beginn der 8. Woche gedüngt.

Ein weiterer Lösungsansatz wäre, das Maximum der Wachstumsfunktion (also von h') zu bestimmen.

(d) Die Funktion h_1 ist rechtsgekrümmt, die Funktion h_2 ist linksgekrümmt, das Krümmungsverhalten der Funktion h ändert sich. Das bedeutet, die Wachstumsgeschwindigkeit derjenigen Pflanze, die durch h_1 beschrieben wird, wird immer kleiner (sie wächst immer langsamer) und die Wachstumsgeschwindigkeit derjenigen Pflanze, die durch h_2 beschrieben wird, wird immer größer (sie wächst immer schneller).

Im Vergleich dazu ändert sich das Monotonieverhalten der Wachstumsgeschwindigkeit bei derjenigen Pflanze, die durch h beschrieben wird, an der Stelle $t = 9$ [vgl. c)].

---

05 - MAT - WS 2.2, WS 3.1, WS 3.3 - Mathematikschularbeiten - BIFIE Aufgabensammlung

5. Wenn in der Oberstufe in einem Semester höchstens zwei Mathematikschularbeiten vorgesehen sind, muss jede versäumte Schularbeit nachgeholt werden. Ein Mathematiklehrer hat auf Basis seiner langjährigen Erfahrung die untenstehende Tabelle erstellt. Dabei beschreibt $h(n)$ die relative Häufigkeit, dass bei einer Schularbeit insgesamt n Schüler/innen fehlen. ____/0

n	0	1	2	3	4	5	6	7	>7
$h(n)$	0,15	0,15	0,2	0,3	0,1	0,05	0,03	0,02	0

Aufgabenstellung:

(a) Gib an, mit wie vielen Fehlenden der Mathematiklehrer im Durchschnitt bei jeder Schularbeit rechnen muss!

Lässt sich aus dem errechneten Durchschnittswert mit Sicherheit behaupten, dass bei jeder Mathematikschularbeit mindestens eine Schülerin/ein Schüler fehlt? Begründe deine Antwort!

(b) Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an!

Es kann nie passieren, dass acht Schüler/innen bei einer Schularbeit fehlen.	
Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Mathematikschularbeit niemand fehlt, ist gleich groß wie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Schülerin/ein Schüler fehlt.	⊠
Die Wahrscheinlichkeit, dass drei Schüler/innen bei einer Mathematikschularbeit fehlen, ist größer als die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens zwei oder mindestens vier Schüler/innen fehlen.	
Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Schularbeit nachgeholt werden muss, weil mindestens eine Schülerin/ein Schüler fehlt, beträgt 85 %.	⊠
Im Durchschnitt muss eine von vier Schularbeiten pro Jahr nicht nachgeholt werden.	

In einer bestimmten Klasse werden im kommenden Schuljahr vier Schularbeiten (zwei pro Semester) geschrieben.

Gib einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Anzahl der Mathematikschularbeiten dieser Klasse, die aufgrund fehlender SchülerInnen nachgeholt werden müssen, berechnet werden kann!

$P(X = k) = \binom{4}{k} \cdot 0{,}85^k \cdot 0{,}15^{4-k}$ mit $k = 0,1,2,\ldots,4$

Lösungserwartung:

(a) Im Durchschnitt muss der Mathematiklehrer mit 2,42 Fehlenden rechnen.

Eine auf ganze Zahlen gerundete Antwort ist nicht korrekt, da der Erwartungswert nur statistische Aussagekraft hat und somit die Rundung die Aussage verändert.

Daraus lässt sich aber nicht mit Sicherheit behaupten, dass bei jeder Mathematikschularbeit jemand fehlt, da es sich dabei um eine statistische Kenngröße handelt, die keine konkrete Aussage über die einzelne Schularbeit erlaubt.

Eine Schülerantwort, die darauf abzielt, dass es entsprechend der empirischen Häufigkeitsverteilung mit 15 %iger Häufigkeit zu keinem Fehlen kommt, ist als nicht korrekt zu bewerten, da in der Aufgabenstellung verlangt wird, den Erwartungswert zu interpretieren.

(b) siehe oben.

---

06 - MAT - WS 2.2, WS 3.1, WS 3.2 - Ärztliche Untersuchung an einer Schule - BIFIE Aufgabensammlung

6. Eine Schulärztin hat die Untersuchung der Oberstufenschüler/innen einer Schule abgeschlossen. Die Auswertung der Ergebnisse ist in den nachstehenden Abbildungen grafisch dargestellt. ____/0

Von den einzelnen Klassen wurde dabei folgende Schüleranzahl erfasst:

Klasse	5A	5B	6A	6B	7A	7B	8A	8B
weiblich	18	22	20	16	16	15	12	18
männlich	14	9	7	9	10	11	13	8
gesamt	32	31	27	25	26	26	25	26

Aufgabenstellung:

(a) Geben Sie auf Basis der erhobenen Daten einen Term zur Berechnung der Wahscheinlichkeit für folgendes Ereignis an, wobei angenommen wird, dass die angegebenen Prozentsätze unabhängig von der Schulstufe sind:

„In den 5. Klassen gibt es höchstens 2 Raucherinnen.“

In dieser Schule wurden die Schüler/innen nicht nach Klassen geordnet untersucht, sondern jede/r entschied selbst, wann sie/er zur Schulärztin ging (zufällige Reihenfolge angenommen).

Wie viele Schüler/innen musste die Schulärztin untersuchen, um mit absoluter Sicherheit mindestens eine Raucherin/einen Raucher aus den 5. Klassen zu finden, wenn sie weiß, dass es in den 5. Klassen mindestens eine/n davon gibt?

(b) Auf Basis der oben angeführten Daten wurde für die Burschen eines Jahrgangs der folgende statistische Kennwert ermittelt:

$$\mu = n \cdot p = 23 \cdot 0{,}34 = 7{,}82$$

Was drückt dieser Kennwert aus? Interpretieren Sie diesen Kennwert im gegebenen Zusammenhang und nutzen Sie dabei sowohl die grafische Abbildung der Untersuchungsergebnisse als auch die tabellarische Übersicht über die Klassenschülerzahlen.

Ist der so errechnete Kennwert aussagekräftig? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösungserwartung:

(a) X ... Anzahl der Raucherinnen aus allen 5. Klassen

X ... Binomialverteilung mit $n = 40, p = 0{,}42$

$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) =$

$= \binom{40}{0} \cdot 0{,}42^0 \cdot 0{,}58^{40} + \binom{40}{1} \cdot 0{,}42^1 \cdot 0{,}58^{39} + \binom{40}{2} \cdot 0{,}42^2 \cdot 0{,}58^{38}$

Da in der Angabe nur statistische Aussagen gemacht werden, aufgrund derer nicht mit Sicherheit behauptet werden kann, ob es mehr als eine

Raucherin/einen Raucher in den 5. Klassen gibt, müssen alle Schüler/innen untersucht werden, um mit Sicherheit eine Raucherin/einen Raucher in der 5. Klasse zu finden.

(b) In allen 5. Klassen zusammen gibt es 23 Burschen. Der Prozentsatz der Burschen mit einer Körpergröße von über 175 cm beträgt 34 %.

Somit drückt der berechnete Wert $\mu = n \cdot p = 23 \cdot 0{,}34 = 7{,}82$ die Anzahl der zu erwartenden Burschen in den 5. Klassen mit einer Körpergröße von über 175 cm aus.

Wesentlich für die Richtigkeit der Antwort sind:

- sinngemäße Formulierung für „Erwartungswert“
- Burschen aus 5. Klassen mit über 175 cm Körpergröße

Eine Rundung auf 8 ist in diesem Zusammenhang als falsch zu werten, da es sich bei μ nur um einen statistischen Kennwert und nicht um einen realen Ausgang eines Zufallsexperiments handelt.

Da die Daten für die gesamte Oberstufe ausgewertet sind und Schüler/innen während der Oberstufe noch wachsen, werden voraussichtlich weniger so große Schüler in den 5. Klassen zu finden sein. Somit ist der errechnete Erwartungswert nicht aussagekräftig bzw. sinnvoll.

Wesentlich für die Richtigkeit der Antwort ist die sinngemäße Darstellung einer der folgenden Interpretationen:

- Die unabhängige Wiederholung (im Sinne des Bernoulli-Experiments) ist nicht gegeben.
- Die verwendete Wahrscheinlichkeit (über 175 cm Körpergröße) bzw. relative Häufigkeit ist auf die beobachtete Eigenschaft (Bursch aus 5. Klassen) nicht anzuwenden.

Die Burschen/Jugendlichen wachsen im Laufe der Oberstufe, daher ist die relative Häufigkeit auf diese Gruppe nur eingeschränkt übertragbar.

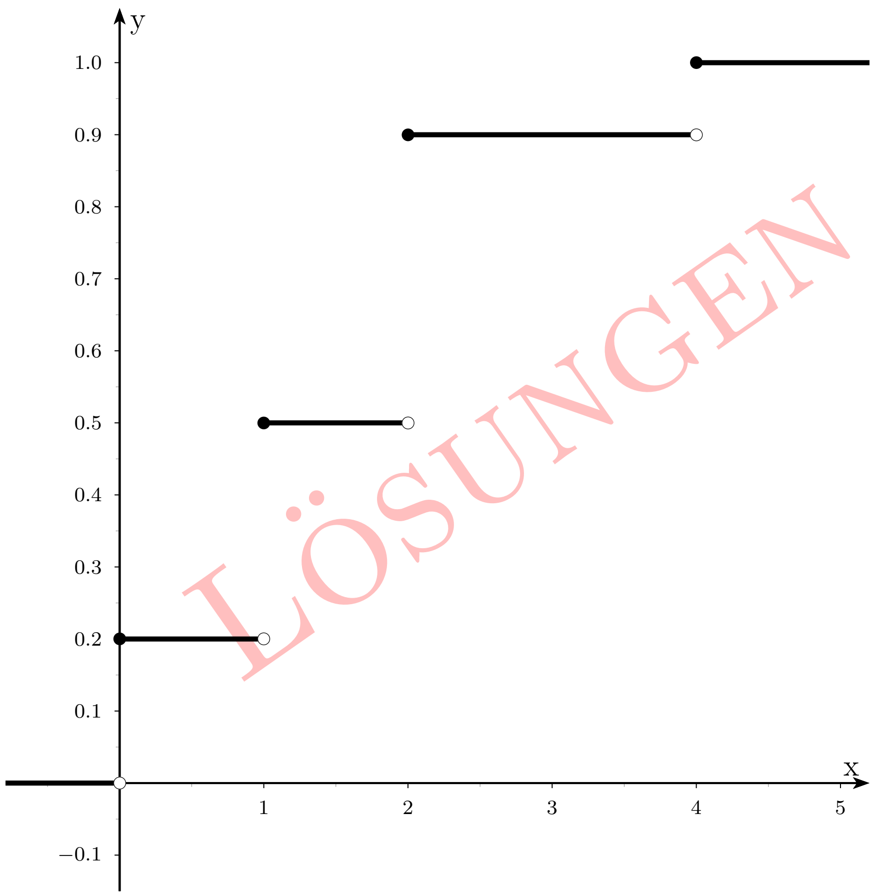
---

07 - MAT - FA 1.4, WS 3.1 - Glücksrad - BIFIE Aufgabensammlung

7. Auf einem Jahrmarkt werden nach dem Drehen eines Glücksrades € 0, € 1, € 2 oder € 4 ausbezahlt.Jedes Mal, bevor das Rad gedreht wird, ist eine Spielgebühr e (in €) zu entrichten. ____/0

Der Spielbetreiber hat für mathematisch Interessierte den Graphen einer sogenannten kumulativen Verteilungsfunktion F mit $F(x) = P(X \leq x)$ angegeben. Die Zufallsvariable X gibt dabei die Größe des auszuzahlenden Betrags an. Aus der Abbildung lassen sich die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Auszahlungsbeträge ermitteln, wobei die Variable x angibt, welche Werte die Zufallsvariable X annimmt, d.h. wie groß die einzelnen auszuzahlenden Beträge sind.

Bei diesem Spiel sind sie, wie oben angegeben, € 0, € 1, € 2 oder € 4.



Aufgabenstellung:

(a) Ermittle mithilfe der Graphik die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X und trag die entsprechenden Werte in der nachstehenden Tabelle ein!

Ausbezahlungsbetrag x in €	0	1	2	4
P(X=x)	0,2	0,3	0,4	0,1

Begründe, warum die Funktion F monoton steigend ist und warum das Maximum von F immer 1 sein muss!

(b) Der Erwartungswert von X beträgt bei diesem Spiel € 1,50, d. h., im Mittel beträgt der auszuzahlende Betrag € 1,50.

Versetze dich in die Lage des Spielbetreibers. Wie groß wählst du den Betrag der Spielgebühr e pro Drehung mindestens, wenn du die Größe des Erwartungswerts von X kennst? Gib eine Begründung für deine Wahl an!

Die Zufallsvariable Y gibt die Höhe des (tatsächlichen) Gewinns aus der Sicht der Spielerin/des Spielers an.

Welche Werte y wird der Gewinn in Abhängigkeit von e bei den bekannten Auszahlungsbeträgen € 0, € 1, € 2 oder € 4 annehmen?

Vervollständige die Tabelle und gib die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y an!

Gewinn y in €	$0 - e$	$1 - e$	$2 - e$	$4 - e$
$P(Y = y)$	0,2	0,3	0,4	0,1

Lösungserwartung:

(a) Tabelle: siehe oben!

Eine kumulierte Verteilungsfunktion entsteht durch Summenbildung der Einzelwahrscheinlichkeiten. Da die Einzelwahrscheinlichkeiten definitionsgemäß immer größer oder gleich 0 sein müssen, ist die Funktion F monoton steigend. Das Maximum muss 1 sein, da die Summe aller Einzelwahrscheinlichkeiten einer Wahrscheinlichkeitsverteilung 1 ergeben muss.

(b) Tabelle: siehe oben!

e muss größer als € 1,50 sein, da der Spielbetreiber auf lange Sicht einen Gewinn und keinen Verlust erzielen möchte, der sich aus $e - 1{,}5 > 0$ errechnet.

---

08 - MAT - AG 1.2, FA 1.2, FA 1.4, FA 1.7, FA 3.3 - Haber'sche Regel - BIFIE Aufgabensammlung

8. Abhängig von der Dosis von Giftgasen und der Dauer ihrer Einwirkung kann es zu toxischen Wirkungen bei lebenden Organismen kommen. Diesen Zusammenhang untersuchte der deutsche Chemiker Fritz Haber. Die nach ihm benannte Haber'sche Regel $c \cdot t = W$ (mit $W =$ konstant) beschreibt den Zusammenhang ____/0

zwischen toxischen Wirkungen W (in $mg \cdot min \cdot L^{-1}$ oder $ppm \cdot min$), der Einwirkzeit t (in min) der Verabreichung und der Wirkkonzentration c (in ppm oder $mg \cdot L^{-1}$) eines Giftstoffes.

Die toxische Wirkung kann eine Erkrankung (beispielsweise Krebs) hervorrufen oder den Tod des diesem Gift ausgesetzten Lebewesens bedeuten. Nicht am Erbgut angreifende Gifte zeigenerst dann eine Wirkung W, wenn eine für das Gift spezifische Konzentration (Schwellenkonzentration e) erreicht wird. Zum Beispiel hat Kohlenmonoxid keinen schädlichen Effekt, wenn seine Konzentration unter einem Wert von $5ppm$ liegt. Für Gifte mit einer Schwellenkonzentration e wird die Haber'sche Regel abgewandelt dargestellt: $(c - e) \cdot t = W$ (mit $W =$ konstant).

Aufgabenstellung:

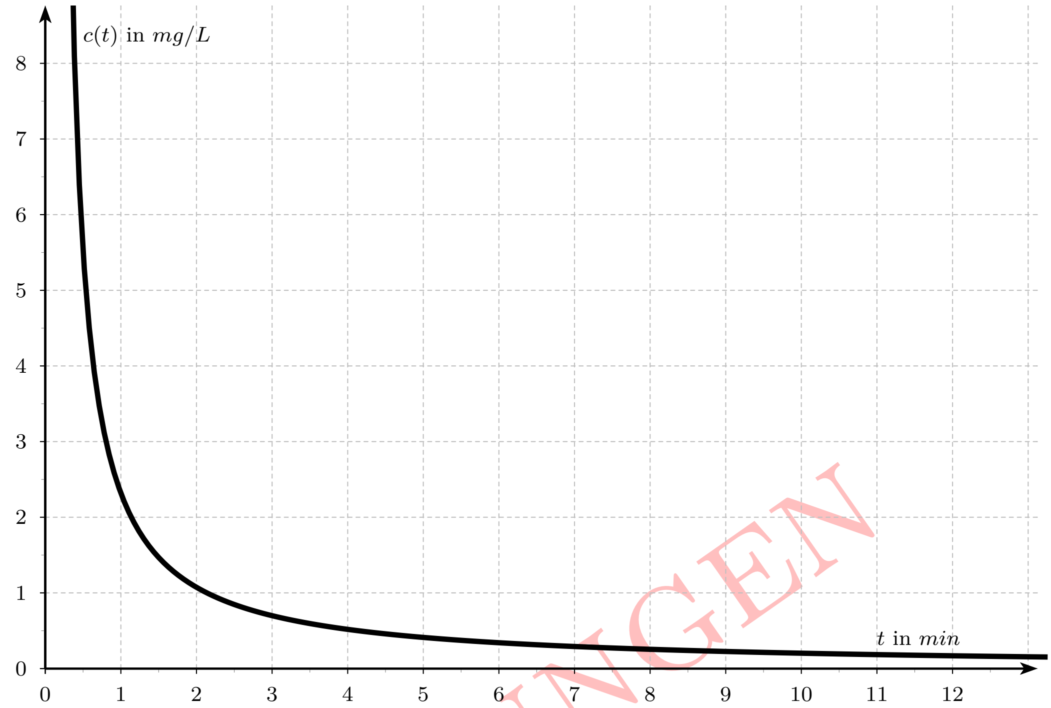
(a) Die Haber'sche Regel $c \cdot t = W$ (mit $W =$ konstant) kann als Funktion c in Abhängigkeit von der Variablen t geschrieben werden.

Kreuze die zutreffende Aussage an!

Bei der Funktion c handelt es sich um eine lineare Funktion f vom Typ $f(x) = k \cdot x + d$ mit $k, d \in \mathbb{R}$.	
Bei der Funktion c handelt es sich um eine Potenzfunktion f vom Typ $f(x) = a \cdot x^z$ mit $z \in \mathbb{Z}$.	⊠
Bei der Funktion c handelt es sich um eine Potenzfunktion f vom Typ $f(x) = a \cdot x^n + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.	
Bei der Funktion c handelt es sich um eine Polynomfunktion f vom Typ $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$ mit $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.	
Bei der Funktion c handelt es sich um eine Exponentialfunktion f vom Typ $f(x) = a \cdot b^x$ bzw. $f(x) = a \cdot e^{\lambda \cdot x}$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+, \lambda \in \mathbb{R}$.	
Bei der Funktion c handelt es sich um eine konstante Funktion f vom Typ $f(x) = a$ mit $a \in \mathbb{R}$.	

Phosgen ist ein sehr giftiges Gas. Ein Lebewesen wird für eine Zeitdauer von 10 Minuten diesem Giftgas in einer Wirkkonzentration von 0,3 mg/L ausgesetzt. Gib jene Wirkkonzentration in mg/L an, mit der in nur einer Minute die gleiche toxische Wirkung erreicht wird.

(b) Stelle den Zusammenhang zwischen der Wirkkonzentration c (in mg/L) und der Einwirkzeit t (in min) für eine Wirkung von $W = 2\,mg \cdot min \cdot L^{-1}$ dar!



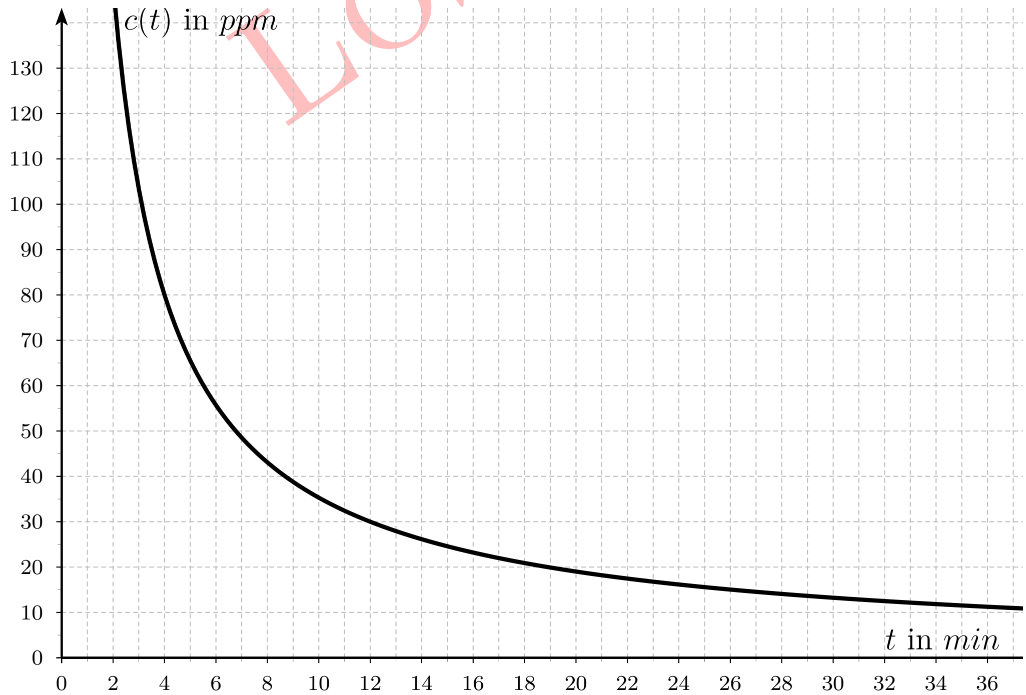
Ergänze die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine mathematisch korrekte Aussage entsteht!

Die Größen c und t in der Haber'sche Regel $c \cdot t = W$ (mit $W =$ konstant) sind zueinander _____1_____ , weil _____2_____ dieselbe Wirkung W erzielt wird.

①	
direkt proportional	☐
indirekt proportional	☒
weder indirekt noch direkt proportional	☐

②	
bei Erhöhung der Einwirkzeit t auf das $n-$Fache und Reduktion der Konzentration c auf den $n-$ten Teil	☒
bei Erhöhung der Einwirkzeit t auf der $n-$Fache und beliebiger Konzentration c	☐
bei Erhöhung der Einwirkzeit t auf das $n-$Fache und Erhöhung der Konzentration c auf den $n-$Fache	☐

(c) Ein nicht näher bezeichnetes Giftgas hat eine natürliche Schwellenkonzentration von $e = 5\,ppm$. Bei einer Einwirkzeit von $10\,min$ liegt die tödliche Dosis (letale Dosis) bei etwa $c = 35\,ppm$. Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Konzentration c in Abhängigkeit von der Einwirkzeit t bei der letalen Dosis.



Lies aus dem Graphen die letale Dosis des angegebenen Giftes für einen

Menschen bei einer Einwirkzeit von 20 Minuten ab! Interpretiere das Ergebnis im Vergleich zu den Angabewerten!

(d) Die abgewandelte Haber'sche Regel $(c - e) \cdot t = W$ (mit W = konstant) kann als eine Funktion c in Abhängigkeit von der Einwirkzeit t geschrieben werden.

Kreuze die zutreffende(n) Aussage(n) an!

Der Wert e ist im Funktionsterm der Funktion c eine additive Konstante.	☒
Der Wert e ist im Funktionsterm der Funktion c eine multiplikative Konstante.	
Der Wert e ist im Funktionsterm der Funktion c eine von t abhängige Variable.	
Der Wert e ist im Funktionsterm der Funktion c nicht mehr vorhanden, weil der Wert e bei der Umformung wegfällt.	
Der Wert e ist im Funktionsterm der Funktion c immer gleich groß wie W.	

Die Haber'sche Regel ohne Schwellenkonzentration lautet $c \cdot t = W$, die Form mit Schwellenkonzentration e und mit derselben biologischen Wirkungskonstante W lautet $(c - e) \cdot t = W$. Woran erkennt man an der graphischen Darstellung beider Funktionen c mit $c(t)$, um welche es sich handelt? Begründe!

Lösungserwartung:

(a) Funktionsterm: $c(t) = \frac{W}{t}$. Multiple Choice: siehe oben

$W = c \cdot t = 0{,}3\,\frac{mg}{L} \cdot 10\,min = 3\,mg \cdot min \cdot L^{-1}$

$\rightarrow c(t) = \frac{3}{t} \Rightarrow c(1) = 3$

Die Konzentration beträgt $3\,mg/L$. (Der Rechengang sowie die Einheiten sind für das Erreichen des Punktes nicht von Bedeutung.

(b) Funktion und Lückentext: siehe oben

(c) Die letale Dosis beträgt für eine Einwirkzeit von 20 Minuten zirka $20\,ppm$. Verdoppelt sich die Einwirkzeit, so halbiert sich die letale Dosis hier nicht. Durch das Vorhandensein einer Schwellenkonzentration von $5\,ppm$ liegt das Ergebnis höher als die Hälfte von $35\,ppm$.

(d) Funktionsterm: $c(t) = \frac{W}{t} + e$. Multiple Choice: siehe oben

Der Wert e ist im Funktionsterm der Funktion c eine additive Konstante, dadurch wird der Graphe der Funktion $c(t) = \frac{W}{t}$ entlang der y-Achse verschoben.

Die Haber'sche Regel ohne Schwellenkonzentration lautet $c \cdot t = W$ und hat als Funktion c mit $c(t)$ gesehen die beiden Achsen als Asymptoten.

Die Haber'sche Regel mit Schwellenkonzentration $(c - e) \cdot t = W$ mit derselben biologischen Wirkungskonstante W besitzt statt der x-Achse an der Stelle $y = e$ eine Asymptote. Der Graph der Funktion ist entlang der y-Achse um den Wert e verschoben. (Adäquate Antworten sind als richtig zu werten.)

---

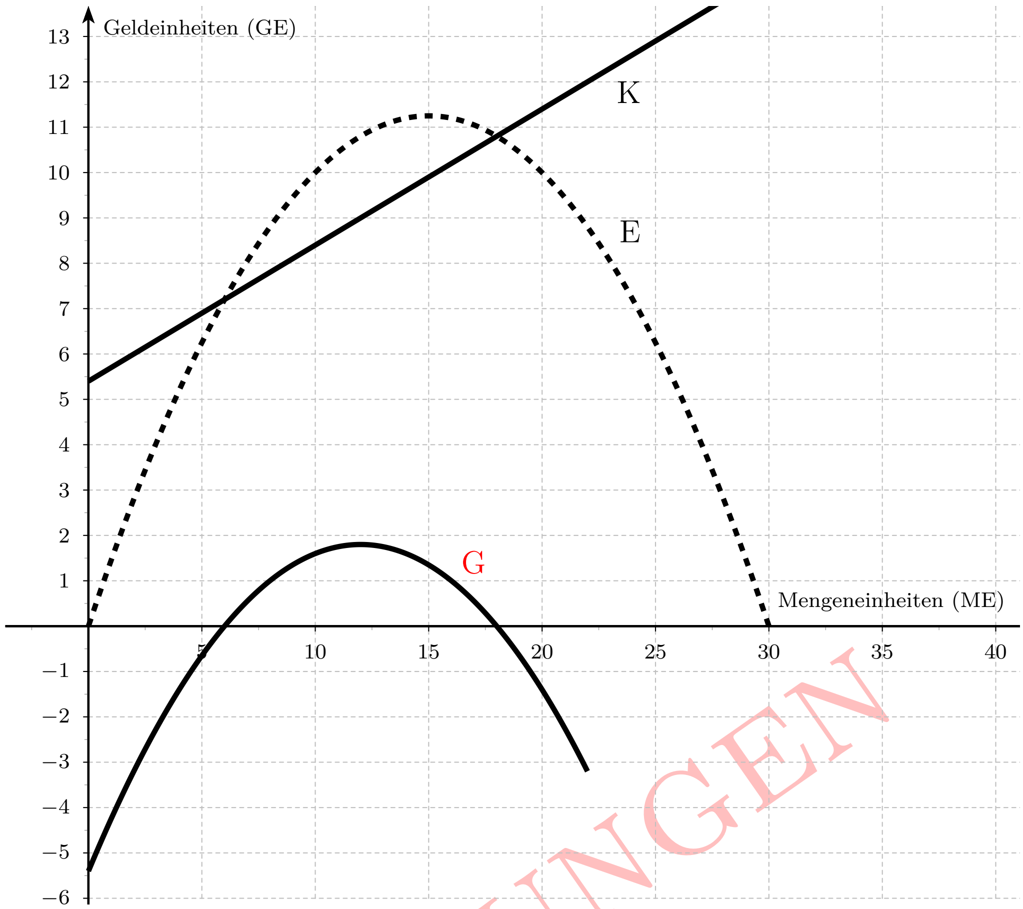
09 - MAT - AG 2.3, FA 1.4, FA 1.6, FA 1.7, FA 2.3 - Gewinnfunktion - BIFIE Aufgabensammlung

9. In einem Unternehmen werden die Entwicklungen der Kosten K und des Erlöses E in Geldeinheiten (GE) bei variabler Menge x in Mengeneinheiten (ME) beobachtet. Als Modellfunktionen werden die Erlösfunktion E mit $E(x) = -0{,}05 \cdot x^2 + 1{,}5 \cdot x$ und eine Kostenfunktion K mit $K(x) = 0{,}3 \cdot x + 5{,}4$ angewendet. Alle produzierten Mengeneinheiten werden vom Unternehmen abgesetzt. ____/0

Aufgabenstellung:

(a) Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte der Funktionsgraphen von E und K! Beschreibe, welche Informationen die Koordinaten dieser Schnittpunkte für den Gewinn des Unternehmens liefern!

(b) Zeichne den Graphen der Gewinnfunktion G in die untenstehende Abbildung ein! Markiere in der Abbildung den Gewinn im Erlösmaximum!



(c) Berechne den zu erwartenden Gewinn, wenn 13 Mengeneinheiten produziert und abgesetzt werden!

Bei der gegebenen Kostenfunktion K gibt der Wert 5,4 die Fixkosten an. Im folgenden werden Aussagen getroffen, die ausschließlich die Änderungen der Fixkosten in Betracht ziehen. Kreuze die für den gegebenen Sachverhalt zutreffende(n) Aussage(n) an!

Eine Senkung der Fixkosten bewirkt eine breitere Gewinnzone, d.h., der Abstand zwischen den beiden Nullstellen der Gewinnfunktion wird größer.	☒
Eine Veränderung der Fixkosten hat keine Auswirkung auf diejenigen Stückzahl, bei der der höchste Gewinn erzielt wird.	☒
Eine Erhöhung der Fixkosten steigert die Höhe des maximalen Gewinns.	
Eine Veränderung der Fixkosten hat keine Auswirkung auf die Höhe des maximalen Gewinns.	
Eine Senkung der Fixkosten führt zu einer Erhöhung des Gewinns.	☒

Lösungserwartung:

(a) $-0{,}05 \cdot x^2 + 1{,}5 \cdot x = 0{,}3 \cdot x + 5{,}4$

$-0{,}05 \cdot x^2 + 1{,}2 \cdot x - 5{,}4 = 0$

Die Lösung der quadratischen Gleichung führt zu den Lösungen $x_1 = 6$ und $x_2 = 18 \rightarrow S_1\,(6/7{,}2)$ und $S_2\,(18/10{,}8)$.

Reflexion beispielsweise:

Für die Mengen x_1 und x_2 sind Erlös und Kosten jeweils gleich groß, der Gewinn ist daher null.

Für die Stückzahlen x_1 und x_2 wird kein Gewinn erzielt.

Für den Stückzahlbereich $(x_1; x_2)$ wird ein Gewinn erzielt.

(b) Eine der möglichen Markierungen für den Gewinn reicht in der Lösung aus. Lösungsvorschlag siehe Grafik oben.

$G(x)$ einzeichnen, Markierung des Gewinns

(c) $G(x) = -0{,}05 \cdot x^2 + 1{,}2 \cdot x - 5{,}4$

$G(13) = 1{,}75$ GE (Geldeinheiten)

Lösungen Multiple Choice: siehe oben

---

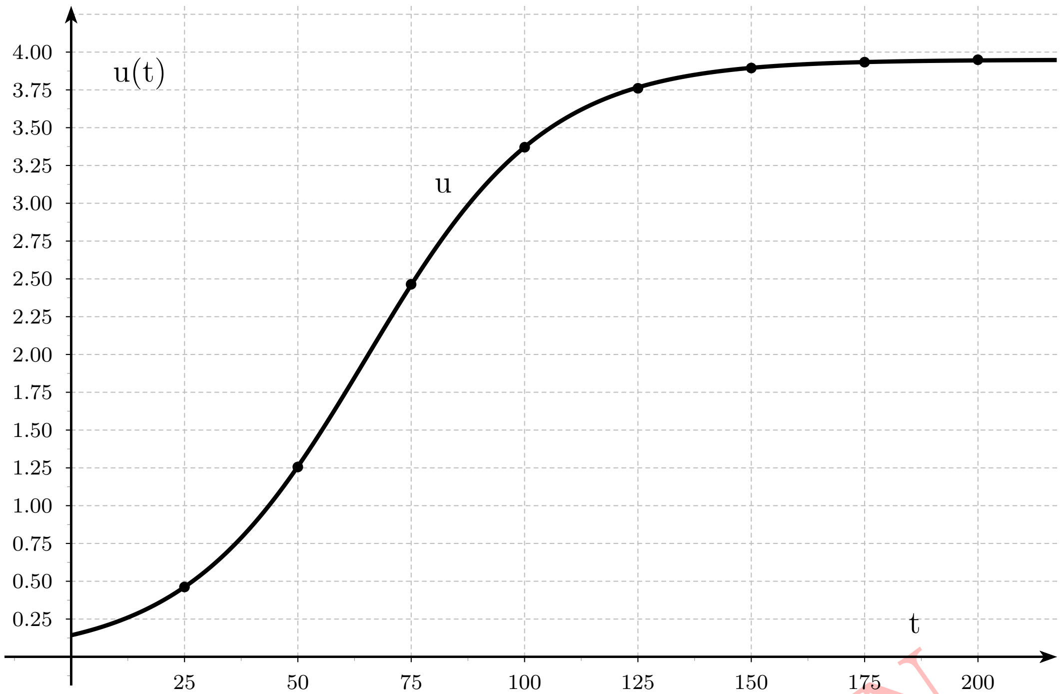
10 - MAT - AN 1.2, AN 1.3, FA 1.5, FA 5.1, FA 5.3 - Baumwachstum - BIFIE Aufgabensammlung

10. An einem gefällten Baum kann anhand der Jahresringe der jeweilige Umfang des Baumstamms zu einem bestimmten Baumalter ermittelt werden. Die Untersuchung eines Baumes ergab folgende Zusammenhänge zwischen Alter und Umfang: ____/0

Alter t (in Jahren)	25	50	75	100	125	150	175	200
Umfang u (in Metern)	0,462	1,256	2,465	3,370	3,761	3,895	3,934	3,950

Der Zusammenhang zwischen Alter und Umfang kann durch eine Wachstumsfunktion u beschrieben werden, wobei der Wert $u(t)$ den Umfang zum Zeitpunkt t angibt.

In der nachstehenden Graphik sind die gemessenen Werte und der Graph der Wachstumsfunktion u veranschaulicht.



Aufgabenstellung:

(a) Innerhalb der ersten 50 Jahre wird eine exponentielle Zunahme des Umfangs angenommen. Ermitteln Sie aus den Werten der Tabelle für 25 und 50 Jahre eine Wachstumsfunktion für diesen Zeitraum!

Begründe mittels einer Rechnung, warum dieses Modell für die darauffolgenden 25 Jahre nicht mehr gilt.

(b) Berechne den Differenzenquotienten im Zeitintervall von 75 bis 100 Jahren! Gib an, was dieser Wert über das Wachstum des Baumes aussagt!

Erläutere, was die 1. Ableitungsfunktion u' im gegebenen Zusammenhang beschreibt!

(c) Schätze mithilfe der Grafik denjenigen Zeitpunkt ab, zu dem der Umfang des Baumes am schnellsten zugenommen hat! Gib den Namen des charakteristischen Punktes des Graphen der Funktion an, der diesen Zeitpunkt bestimmt!

Beschreibe, wie dieser Zeitpunkt rechnerisch ermittelt werden kann, wenn die Wachstumsfunktion u bekannt ist!

(d) Die beiden Wachstumsfunktionen f und g mit $f(t) = a \cdot q^t$ und $g(t) = b \cdot e^{k \cdot t}$ beschreiben denselben Wachstumsprozess, sodass $f(t) = g(t)$ für alle t gelten muss. Gib die Zusammenhänge zwischen den Parametern a und b beziehungsweise q und k jeweils in Form einer Gleichung an!

Gib an, welche Werte die Parameter q und k annehmen können, wenn die

Funktionen f und g im Zusammenhang mit einer exponentiellen Abnahme verwendet werden!

Lösungserwartung:

(a) $f(t) = a \cdot q^t \rightarrow 1{,}256 = a \cdot q^{50}$ bzw. $0{,}462 = a \cdot q^{25}$
$\rightarrow$ (Division) $2{,}71861 = q^{25} \rightarrow q \approx 1{,}0408 \rightarrow a = \frac{0{,}462}{q^{25}} \rightarrow a \approx 0{,}17$
$\rightarrow$ (näherungsweise) $f(t) = 0{,}17 \cdot 1{,}0408^t$ bzw. $f(t) = 0{,}17 \cdot e^{0{,}04 \cdot t}$ da $\ln(1{,}0408) \approx 0{,}04$

Begründung dafür, dass das Modell für die nächsten 25 Jahre nicht passend ist: Nach dem Modell gilt $f(75) = 0{,}17 \cdot 1{,}0408^{75} \approx 3{,}412$. Dieser Wert weicht signifikant vom gemessen Wert ab und spricht daher gegen eine Verwendung des exponentiellen Modells in den nächsten 25 Jahren.

(b) Differenzenquotient: $\frac{3{,}370 - 2{,}465}{100 - 75} \approx 0{,}036$

Die durchschnittliche Zunahme zwischen 75 und 100 Jahren beträgt 3,6 cm pro Jahr.

Die 1. Ableitungsfunktion gibt die momentane Wachstumsrate an.

(c) Der charakteristische Punkt ist der Wendepunkt. Die Wendestelle der Funktion bestimmt den Zeitpunkt für das maximale jährliche Wachstum des Baumumfangs. Am schnellsten nimmt der Baum bei etwa 65 Jahren an Umfang zu (Lösungsintervall $[55; 75]$).

Die Nullstelle der 2. Ableitungsfunktion bestimmt in diesem Fall denjenigen Zeitpunkt, zu dem der Baumumfang am schnellsten zunimmt.

(d) $f(0) = a$ und $g(0) = b$, daraus folgt: a und b sind gleich.

Da $q^t = e^{k \cdot t}$ gilt, folgt $\ln(q) = k$ bzw. $q = e^k$.

Bei einer Zerfallsfunktion muss $0 < q < 1$ bzw. $k < 0$ gelten.

---

11 - MAT - FA 1.6, FA 1.7, FA 2.1, AN 3.3 - Erlös und Gewinn - BIFIE Aufgabensammlung

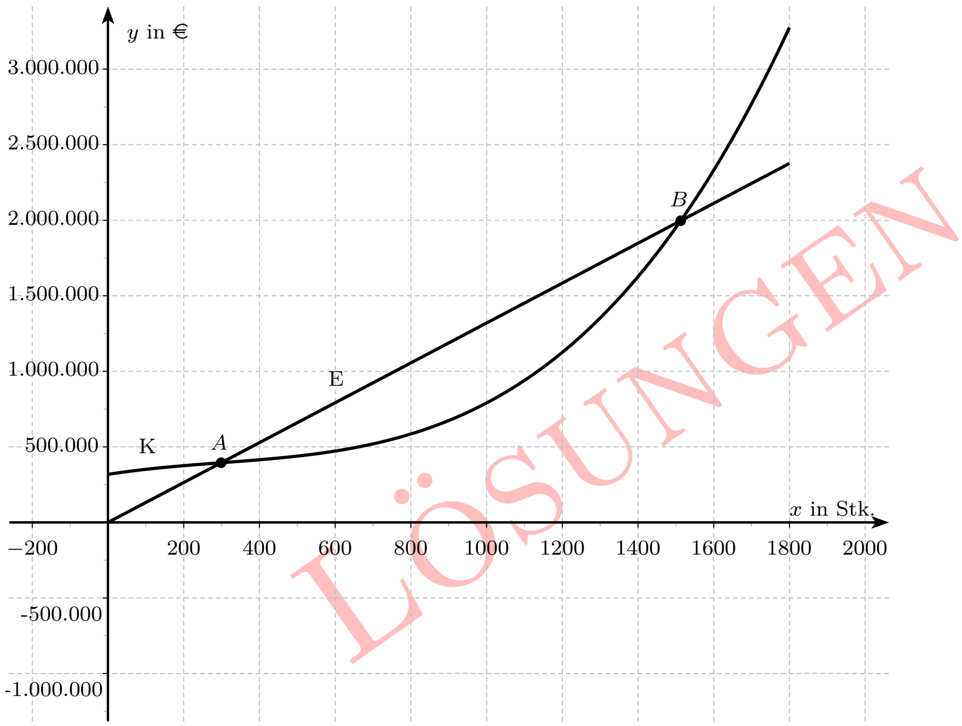
11. Eine Digital-Spiegelreflexkamera wird zu einem Stückpreis von € 1.320 angeboten. ____/0

Ein Produktionsbetrieb kann monatlich maximal 1.800 Stück dieser Kamera produzieren. Es wird dabei angenommen, dass der Verkaufspreis unabhängig von der verkauften Stückzahl x konstant gehalten wird und alle produzierten Kameras auch verkauft werden. Die Funktion K mit

$$K(x) = 0{,}00077x^3 - 0{,}693x^2 + 396x + 317900$$

beschreibt die Gesamtkosten K für die Produktion in Abhängigkeit von der produzierten Stückzahl x.

Die Graphen der Kostenfunktion K und der Erlösfunktion E sind in der nachstehenden Grafik dargestellt.



Aufgabenstellung:

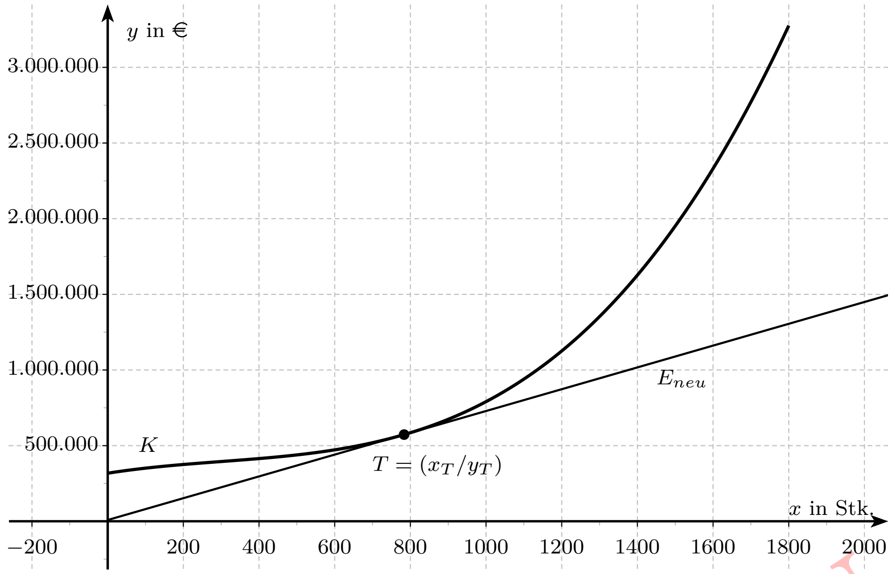
(a) Zeichne in der obigen Abbildung den Graphen der Gewinnfunktion G ein!

Eine Stückpreisänderung wurde vorgenommen und hat bewirkt, dass der Break-even-Point bei einer geringeren Stückzahl erreicht wird. Gib an, wie der Stückpreis verändert wurde und welchen Einfluss diese Veränderung auf die Lage der Nullstellen der Gewinnfunktion G und den Gewinnbereich hat!

(b) Erstelle die Gleichung der Gewinnfunktion G!

Berechne diejenige Stückzahl, bei der der Gewinn maximal wird!

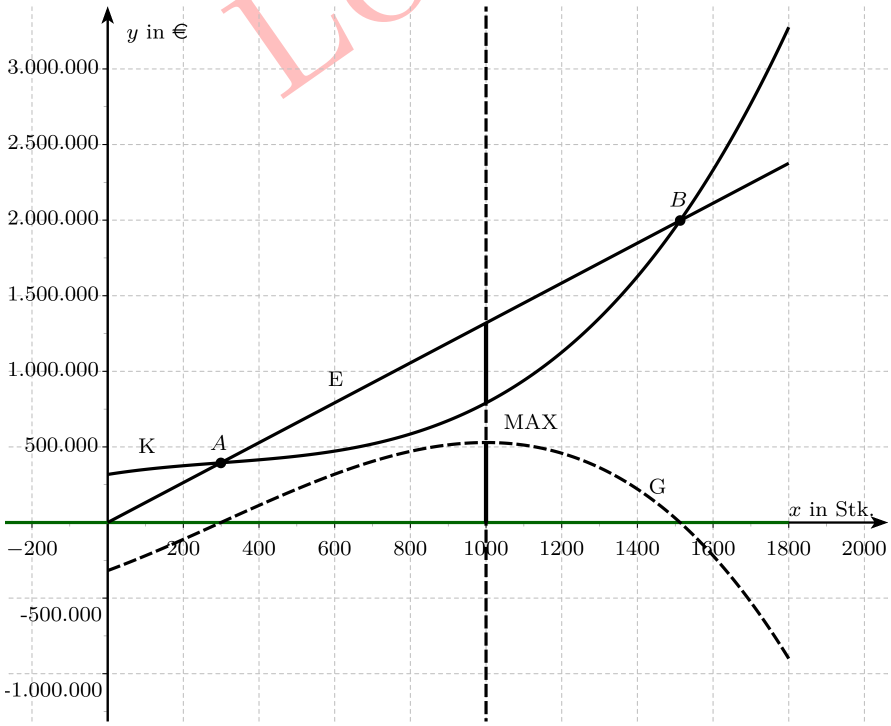
(c) In der nachstehenden Grafik wurde die Erlösfunktion so abgeändert, dass die Graphen der Kostenfunktion K und der Erlösfunktion E_{neu} einander im Punkt T berühren. Bestimme die Gleichung der Erlösfunktion E_{neu}!



Interpretiere die Koordinaten des Punktes T im gegebenen Kontext und erkläre, welche Auswirkung die Änderung der Erlösfunktion auf den Gewinnbereich hat!

Lösungserwartung:

(a) Graph der Gewinnfunktion:



Der Stückpreis muss erhöht werden. Die Nullstellen liegen weiter auseinander, das heißt, der Gewinnbereich wird größer.

(b) Gewinnfunktion:

$G(x) = E(x) - K(x)$

$G(x) = 1320x - (0{,}00077x^3 - 0{,}693x^2 + 396x + 317900)$

$G(x) = -0{,}00077x^3 + 0{,}693x^2 + 924x - 317900$

Bedingung für maximalen Gewinn:

$G'(x) = 0 \to G'(x) = -0{,}00231x^2 + 1386x + 924$

$-0{,}00231x^2 + 1{,}386x + 924 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{-1{,}386 \pm \sqrt{1{,}386^2 + 4 \cdot 0{,}00231 \cdot 924}}{-0{,}00462} \to$

$(x_1 = -400); x_2 = 1000$

Der maximale Gewinn wird bei einer Stückzahl von 1000 erzielt.

(c) Die Gleichung der Erlösfunktion E_{neu} lautet:

$E_{neu}(x) = \frac{y_T}{x_T} \cdot x$

Nur bei der Produktionsmenge von x_T Stück wird genau kostendeckend produziert. Kosten und Erlös betragen je € y_T. Bei dieser Produktionsmenge ist es nicht möglich, mit Gewinn zu produzieren.

---

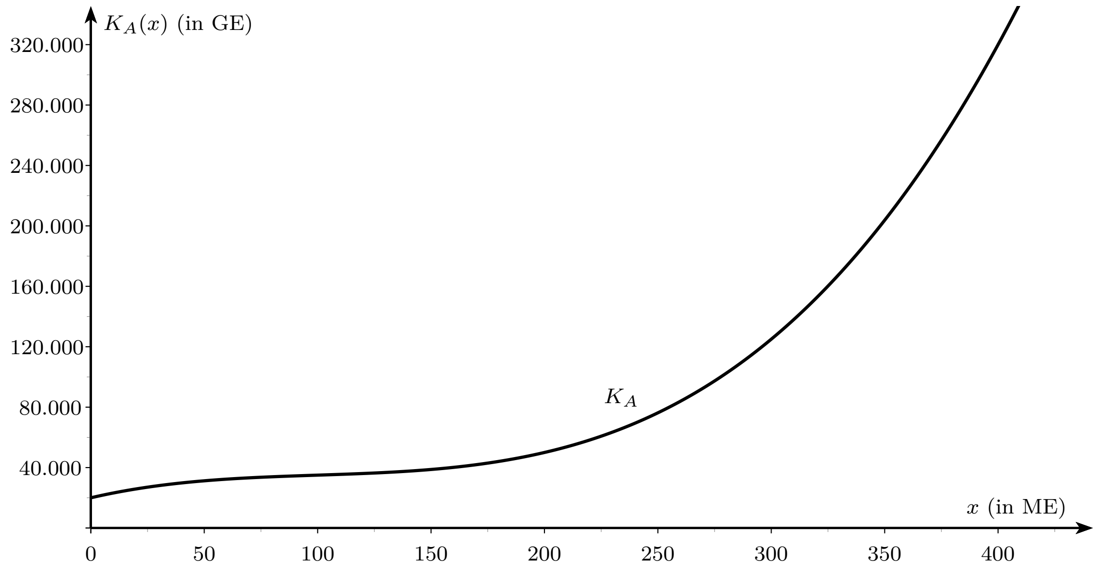
12 - MAT - AN 1.3, AN 3.3, AG 2.3 - Kostenfunktion - BIFIE Aufgabensammlung

12. Im Zuge einer betriebswirtschaftlichen Analyse und Beratung werden bei zwei Firmen die Kostenverläufe in Abhängigkeit von der Produktionsmenge untersucht. ____/0

Bei Firma A wird der Zusammenhang zwischen der monatlichen Produktionsmenge x (in Mengeneinheiten [ME]) und den entstehenden Produktionskosten $K_A(x)$ (in Geldeinheiten [GE]) durch die Kostenfunktion K_A mit

$$K_A(x) = 0{,}01x^3 - 3x^2 + 350x + 20000$$

beschrieben. Firma A kann monatlich maximal 400 ME produzieren. In der untenstehenden Abbildung ist der Graph der Funktion K_A im Intervall [0;400] dargestellt.



Bei Firma B wird der Zusammenhang zwischen der monatlichen Produktionsmenge x (in ME) und den entstehenden Produktionskosten $K_B(x)$ (in GE) durch die Kostenfunktion K_B mit $K_B(x) = 0{,}5x^2 + 100x + 15000$ beschrieben. Firma B kann monatlich maximal 300 ME produzieren.

Aufgabenstellung:

(a) Untersuche, ob der Kostenverlauf bei Firma B progressiv oder degressiv ist! Begründe deine Antwort!

Allgemein kann eine solche Kostenfunktion in Abhängigkeit von den produzierten Mengeneinheiten durch eine Polynomfunktion f zweiten Grades mit $f(x) = ax^2 + bx + c (a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ beschrieben werden.

Für welche Werte von a liegt im sreng monoton wachsenden Bereich der Funktion ein progressiver bzw. ein degressiver Kostenverlauf vor? Begründe deine Antwort!

(b) die erste Ableitung einer Kostenfunktion bezeichnet man als *Grenzkostenfunktion*. Diese beschreibt näherungsweise die Kostensteigerung, wenn der Produktionsumfang vergrößert wird. Berechne, um wie viel GE sich der Wert der Grenzkostenfunktion bei einem Produktionsumfang von $x = 50$ ME vom tatsächlichen Zuwachs der Kosten bei Firma A unterscheidet, wenn der Produktionsumfang von 50 ME auf 51 ME erhöht wird!

Für die vorliegende Kostenfunktion gilt die Aussage: „Die Funktionswerte der Grenzkostenfunktion sind immer positiv.“ Interpretiere diese Aussage im Hinblick auf den Verlauf!

(c) Für die Festlegung des Produktionsplans ist es erforderlich, die durchschnittlichen Kosten pro erzeugter ME in Abhöngigkeit von der Produktionsmenge zu kennen. Die Stückkostenfunktion gibt den durchschnittlichen Preis pro erzeugter ME an.

Ermittle die Stückkostenfunktion $\overline{K}_B(x)$ bei Firma B! Gib an, bei welcher Produktionsmenge die durchschnittlichen Stückkosten bei Firma B am kleinsten sind!

Lösungserwartung:

(a) $K_B(x) = 0{,}5x^2 + 100x + 15000$

$K_B'(x) = x + 100$

$K_B''(x) = 1 > 0$

Da die zweite Ableitung positiv ist, ist die Funktion linksgekrümmt. Es liegt progressives Wachstum vor.

Andere richtige Begründungen (z.B. anhand des Graphen) sind auch zulässig.

$f(x) = ax^2 + bx + c$

Wenn $a > 0$ ist, ist der Graph der Kostenfunktion linksgekrümmt. Es liegt progressives Wachstum vor.

Wenn $a < 0$ ist, ist der Graph der Kostenfunktion rechtsgekrümmt. Es liegt degressives Wachstum vor.

(b) Grenzkostenfunktion $K_A'(x) = 0{,}03x^2 - 6x + 350$

$K_A'(50) = 125$

$K_A(51) - K_A(50) = 31\,373{,}51 - 31\,250 = 123{,}51$

Der Wert der Grenzkostenfunktion bei einem Produktionsumfang von $x =$ 50 ME unterscheidet sich vom tatsächlichen Zuwachs der Kosten bei Firma A um 1,49 GE.

Da die Kostenfunktion $K(x)$ im angegebenen Bereich monoton steigend ist, gilt $K'(x) > 0 \rightarrow$ die Funktionswerte der Grenzkostenfunktion (=Ableitungsfunktion der Kostenfunktion) sind also immer positiv.

(c) $K_B(x) = 0{,}5x^2 + 100x + 15\,000$

$\overline{K}_B(x) = \frac{K_B(x)}{x}$

$\overline{K}_B(x) = 0{,}5x + 100 + \frac{15\,000}{x}$

$\overline{K}_B'(x) = 0{,}5 - \frac{15\,000}{x^2}$

$\overline{K}'_B(x) = 0 \to 0{,}5x^2 = 15\,000 \to x = \sqrt{30\,000}$

$x \approx 173{,}2$

Bei einer Produktion von ca. 173 Mengeneinheiten sind die durchschnittlichen Stückkosten bei Firma B am kleinsten.

---

13 - MAT - FA 1.3, FA 1.4, FA 1.7, AG 2.1 - Photovoltaikanlagen - BIFIE Aufgabensammlung

13. Die benachbarten Familien Lux und Hell haben auf den Dächern ihrer Einfamilienhäuser zwei baugleiche Photovoltaikanlagen installiert, deren Maximalleistung jeweils 5 kW beträgt. Nicht selbst verbrauchte elektrische Energie wird zu einem Einspeisetarif ins Netz geliefert. Energie, die nicht durch die Photovoltaikanlage bereitgestellt werden kann, muss von einem Energieunternehmen zum regulären Stromtarif zugekauft werden (netzgekoppelter Betrieb). Beide Familien wollen die Wirtschaftlichkeit ihrer Anlagen durch Messungen überprüfen. ____/0

Aufgabenstellung:

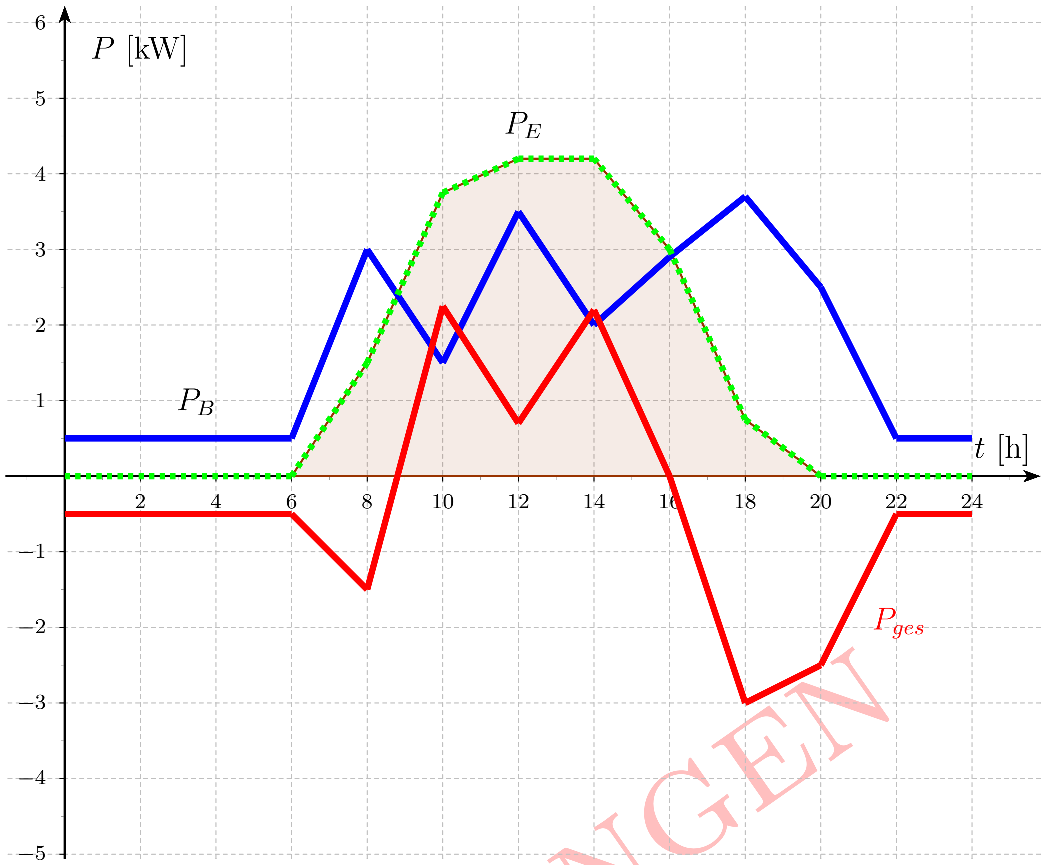
(a) Familie Lux hat dazu an einem durchschnittlichen Frühlingstag folgende Leistungsdaten für P_B (im Haus der Familie Lux benötigte Leistung) und P_E (durch die Photovoltaikanlage erzeugte elektrische Leistung) in Abhängigkeit vom Zeitpunkt t über den Tagesverlauf ermittelt. Die Leistungsdaten wurden um Mitternacht beginnend alle zwei Stunden aufgezeichnet.

Leistungsdaten:

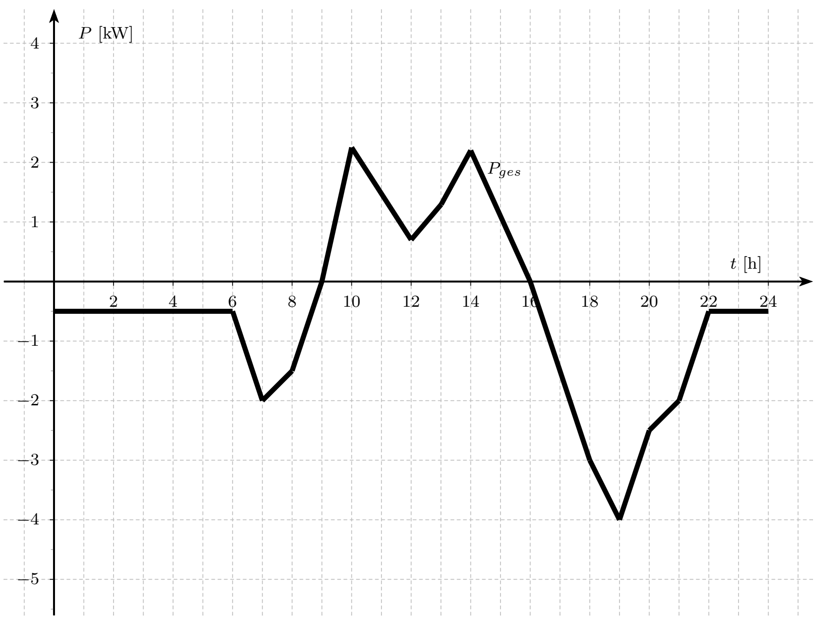
t in h	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
P_B in kW	0,5	0,5	0,5	0,5	3	1,5	3,5	2	2,9	3,7	2,5	0,5	0,5
P_E in kW	0	0	0	0	1,5	3,75	4,2	4,2	3	0,75	0	0	0

Zeichne in die nachstehende Abbildung aus den vorgegebenen Graphen für P_B und P_E den Tagesverlauf der elektrischen Gesamtleistungsbilanz P_{ges} für die Photovoltaikanlage der Familie Lux ein! Die Gesamtleistungsbilanz P_{ges} ist die Differenz der beiden Leistungsteile $P_E - P_B$.

Markiere zusätzlich in der Abbildung die gesamte über den Tagesverlauf erzeugte elektrische Energie dieser Photovoltaikanlage!



(b) Familie Hell hat aus einer an einem durchschnittlichen Frühlingstag erfolgten stündlichen Messung folgenden Tagesverlauf für die Gesamtleistungsbilanz P_{ges} ihrer elektrischen Leistung ermittelt und durch den gegebenen Graphen modelliert:



Gib an, was in dieser Grafik positive bzw. negative Funktionswerte für P_{ges} bedeuten!

Positive Funktionswerte ______________________________

Negative Funktionswerte ______________________________

Familie Hell möchte den Amortisationszeitpunkt für die Photovoltaikanlage ermitteln. Das ist derjenige Zeitpunkt, ab dem die Errichtungskosten gleich hoch wie die Einsparungen durch den Betrieb der Anlage sind. Ab diesem Zeitpunkt arbeitet die Anlage rentabel.

Kann sich die Anlage für die Familie Hell auch amortisieren, wenn die finanzielle Tagesbilanz der Photovoltaikanlage für alle Tage im Jahr negativ ist? Begründe deine Antwort!

Lösungserwartung:

(a) Grafik siehe oben

Die eingefärbe Fläche stellt die gesamte über den Tagesverlauf erzeugte elektrische Energie dieser Photovoltaikanlage dar.

(b) Positive Funktionswerte bedeuten, dass elektrische Energie ans Stromnetz geliefert wird.

Negative Funktionswerte bedeuten, dass elektrische Energie aus dem Netz entnommen wird.

Die Anlage kann sich amortisieren, wenn der Betrag, den man aufgrund der Anlage an Stromkosten eingespart hat, größer ist als der Anschaffungsbetrag der Anlage.

(Formulierungen, die sinngemäß dieser Aussage entsprechen, sind als richtig zu werten.)

---

14 - MAT - AG 2.2, FA 1.7, FA 5.2, WS 2.3, WS 3.1, WS 3.3 - Schwarzfahren als Volkssport - BIFIE Aufgabensammlung

14. Im Jahr 2010 wurden in den Graz-Linien exakt 36 449 Schwarzfahrer und Schwarzfahrerinnen auf frischer Tat ertappt. ____/0

„Ihren Fahrschein, bitte!“ - diese freundliche, aber bestimmte Aufforderung treibt Schwarzfahrern regelmäßig den Angstschweiß ins Gesicht. Zu Recht, heißt es dann doch 65 Euro Strafe zahlen. Mehr als 800 000 Fahrschein- kontrollen wurden im Vorjahr in den Grazer Bus- und Straßenbahnlinien durchgeführt. 36 449 Personen waren Schwarzfahrer. Gegenüber 2009 ist das ein leichtes Minus von 300 Beanstandungen. Für die Graz-Linien ist das ein Beweis für den Erfolg der strengen Kontrollen. Für den Vorstand der Graz-Linien steht darum eines fest: „Wir werden im Interesse unserer zahlenden Fahrgäste auch 2011 die Kontrollen im gleichen Ausmaß fortsetzen.“ Denn den Graz-Linien entgehen durch den Volkssport Schwarzfahren jedes Jahr Millionen. Rechnet m an die Quote der bei den Kontrollen ertappten Schwarzfahrer (ca. 5 %) auf die Gesamtzahl der beförderten Personen hoch (ca. 100 Mio. pro Jahr), dann werden aus 36 449 schnell fünf Millionen, die aufs Ticket pfeifen...

(Quelle: Meine Woche Graz, April 2011, adaptiert)

In diesem Zeitungsartikel wird der Begriff Schwarzfahrer für Personen, die ohne gültigen Fahrschein angetroffen werden, verwendet. Fahrgäste, die ihre Zeitkarte (z. B. Wochenkarte, Schülerfreifahrtsausweis) nicht bei sich haben, gelten nicht als Schwarzfahrer/innen.

Nach Angaben der Graz-Linien beträgt der Anteil der Schwarzfahrer/innen etwa 5 %.

Zwei Kontrolleure steigen an der Haltestelle Jakominiplatz in einen Wagen der Straßenbahnlinie 5 und kontrollieren alle 25 Fahrgäste. An der Haltestelle Hauptplatz steigen sie in einen Wagen der Linie 3 um, in dem sie alle 18 Fahrgäste kontrollieren.

Aufgabenstellung:

(a) Es soll die Wahrscheinlichkeit p_1 berechnet werden, dass die Kontrolleure mindestens eine Schwarzfahrerin/einen Schwarzfahrer ermitteln, aber erst in der Linie 3 auf diese Person treffen. Gib einen geeigneten Term an, mit dem diese Wahrscheinlichkeit p_1 ermittelt werden kann, und berechne diese!

Es sei p_2 die Wahrscheinlichkeit, bereits im Wagen der Linie 5 auf mindestens eine Schwarzfahrerin/einen Schwarzfahrer zu treffen. Begründe, warum p_2 größer als p_1 sein muss, ohne p_2 zu berechnen!

(b) Es wird angenommen, dass bei den durchgeführten Kontrollen nur 1 % aller fünf Millionen Personen, die keinen Fahrschein mithaben, entdeckt werden. Man weiß, dass 10 % dieser fünf Millionen Personen eine Zeitkarte besitzen, die sie aber nicht bei sich haben, und daher nicht als Schwarzfahrer/innen gelten. Wird eine Schwarzfahrerin/ein Schwarzfahrer erwischt, muss sie/er zusätzlich zum Fahrpreis von € 2 noch € 65 Strafe zahlen. Gehe davon aus, dass im Durchschnitt die nicht erwischten Schwarzfahrer/innen jeweils entgangene Einnahmen eines Einzelfahrscheins von € 2 verursachen.

Berechne den in einem Jahr durch die Schwarzfahrer/innen entstandenen finanziellen Verlust für die Grazer Linien!

Das Bußgeld müsste wesentlich erhöht werden, um eine Kostendeckung zu erreichen. Ermittle den neuen Betrag für ein kostendeckendes Bußgeld!

(c) Die Anzahl der entdeckten Schwarzfahrer/innen nahm gegenüber 2009 um 300 ab und betrug 2010 nur mehr 36 449. Man geht davon aus, dass durch verstärkte Kontrollen eine weitere Abnahme der Anzahl an Schwarzfahrerinnen/Schwarzfahrern erreicht werden kann.

Beschreibe diese Abnahme beginnend mit dem Jahr 2009 sowohl als lineares als auch als exponentielles Modell!

Gib jeweils einen Funktionsterm an, der die Anzahl S der Schwarzfahrer/innen nach t Jahren, ausgehend von dem Jahr 2009, beschreibt!

Berechne die Anzahl der Schwarzfahrer/innen nach 10 Jahren, also im Jahr 2019, mit beiden Modellen! Welche Schlussfolgerungen über die beiden Modelle ziehst du aus dem Ergebnis?

Lösungserwartung:

(a) $p_1 = 0{,}95^{25} \cdot (1 - 0{,}95^{18}) \approx 0{,}1672$

Mögliche Argumentationen:

- Die Wahrscheinlichkeit p_1 ist höchstens die Wahrscheinlichkeit, unter 18 Personen mindestens 1 Schwarzfahrer/in zu finden. Die Wahrscheinlichkeit p_2, bereits im Wagen der Linie 5 auf mindestens 1 Schwarzfahrer/in zu treffen, ist größer als die Wahrscheinlichkeit p_1, da die Wahrscheinlichkeit, unter 25 Kontrollierten eher 1 Schwarzfahrer/in anzutreffen, größer ist als unter 18 Kontrollierten.
- Die Wahrscheinlichkeit p_1 ist höchstens die Wahrscheinlichkeit, unter 25 Personen keine Schwarzfahrerin/keinen Schwarzfahrer zu finden. Diese ist kleiner als 0,5. Die Wahrscheinlichkeit p_2 ist die Wahrscheinlichkeit, unter 25 Personen mindestens 1 Schwarzfahrer/in zu treffen. p_2 ist größer als 0,5, also $p_2 > p_1$.

(b) Der zu erwartende Verlust wird wie folgt berechnet:

10 % der Fahrgäste ohne Fahrschein besitzen eine Zeitkarte, daraus folgt, dass 90 % von den 99 % Schwarzfahrer/innen sind.

$V = (-0{,}99 \cdot 0{,}9 \cdot 2 + 0{,}01 \cdot 0{,}9 \cdot 65) \cdot 5\,000\,000 =$

$= (-0{,}891 \cdot 2 + 0{,}009 \cdot 65) \cdot 5\,000\,000 \approx -1{,}197 \cdot 5\,000\,000 \approx$ € -5.985-000

Soll der Verlust $V = 0$ sein, dann gilt: $0 = -0{,}891 \cdot 2 + 0{,}009 \cdot B$

$\rightarrow B =$ € 198.

Das Bußgeld B müsste auf € 198 erhöht werden.

(c) lineare Abnahme: $S(t) = 36\,749 - 300 \cdot t$

exponentielle Abnahme: $S(t) = 36\,749 \cdot (36\,449/36\,749)^t$

Bei linearer Abnahme sind es nach 10 Jahren noch 33 749, bei exponentieller Abnahme 33 857 Personen. Der Unterschied ist gering und beide Modelle sind für diesen Zeitraum gleich gut.

---

15 - MAT - AG 2.1, FA 1.5, FA 2.3, FA 2.5 - Treibstoffverbrauch - BIFIE Aufgabensammlung

15. Fast vier Fünftel aller Güter werden zumindest auf einem Teil ihres Weges vom Erzeuger zum Konsumenten mit dem Schiff transportiert. ____/0

In der Schifffahrt werden Entfernungen in Seemeilen (1 sm = 1,852 km) und Geschwindigkeiten in Knoten (1 K = 1 sm/h) angegeben.

Der stündliche Treibstoffverbrauch y des Schiffs *Ozeanexpress* kann in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit x (in Knoten) durch die Gleichung $y = 0{,}00002 * x^4 + 0{,}6$ beschrieben werden. Dieses Schiff hat noch einen Treibstoffvorrat von 600 Tonnen.

Aufgabenstellung:

(a) Gib eine Formel für die Zeit t (in Stunden) an, die das Schiff mit einer konstanten Geschwindigkeit x unterwegs sein kann, bis dieser Treibstoffvorrat aufgebraucht ist.

Die Funktion f soll den Weg $f(x)$ beschreiben, den das Schiff mit diesem Treibstoffvorrat bei einer konstanten Geschwindigkeit x zurücklegen kann. Gib den Term der Funktion f an!

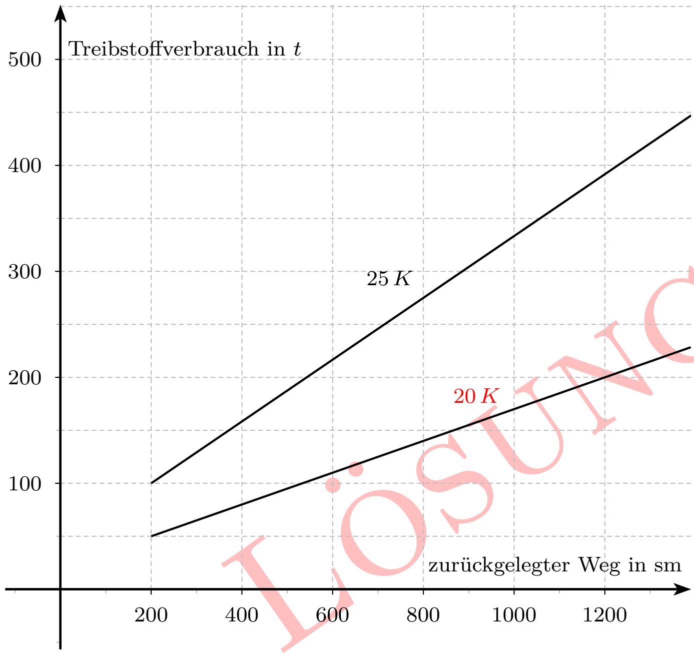
Die Funktion f hat in $H\,(10|7\,500)$ ein Maximum, Interpretiere die Koordinaten dieses Punktes im vorliegenden Kontext!

(b) Der Chef eines Schifffahrtsunternehmens stellte fest, dass sich der Treibstoffverbrauch um rund 50 % verringert, wenn Schiffe statt mit 25 nur noch mit 20 Knoten unterwegs sind.

In der nachstehenden Grafik wird der Treibstoffverbrauch in Abhängigkeit vom zurückgelegten Weg bei einer Geschwindigkeit von 25 Knoten dargestellt.

Überlege, wie sich diese Grafik ändert, wenn die Geschwindigkeit nur 20 Knoten beträgt, und zeichne den entsprechenden Graphen ein!

Interpretiere, was die 50 %ige Treibstoffreduktion für die Steigung der Geraden bedeutet!



(c) Eine Reederei hat den Auftrag erhalten, in einem vorgegebenen Zeitraum eine bestimmte Warenmenge zu transporten. Ursprünglich plante sie, dafür acht Schiffe einzusetzen.

Gib an, wie viele zusätzliche Schiffe gleichen Typs bei einer Drosselung der Geschwindigkeit von 25 auf 20 Knoten erforderlich sind, damit der Auftrag zeitgerecht ausgeführt werden kann (Die Stehzeiten der Schiffe sind dabei zu vernachlässigen)

Gib eine Formel an, mit der die erforderliche Anzahl der Schiffe in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit x ermittelt werden kann!

Lösungserwartung:

(a) $t = \dfrac{600}{0{,}00002x^4 + 0{,}6}$; $f(x) = \dfrac{600}{0{,}00002x^4 + 0{,}6} \cdot x$

Bei einer Geschwindigkeit von 10 Knoten kann mit dem vorhandenen Treibstoff die längste Strecke, nämlich 7 500 Seemeilen, zurückgelegt werden.

(b) Grafik siehe oben

Die Steigung der Geraden wird halbiert, wenn der Treibstoffverbrauch um 50 % reduziert wird.

(c) Es müssen zwei weitere Schiffe eingesetzt werden.

Anzahl der Schiffe $= \frac{200}{x}$

---

16 - MAT - FA 1.6, FA 2.3, FA 1.5, FA 2.2, AN 3.3, AN 1.3 - Produktionskosten - BIFIE Aufgabensammlung

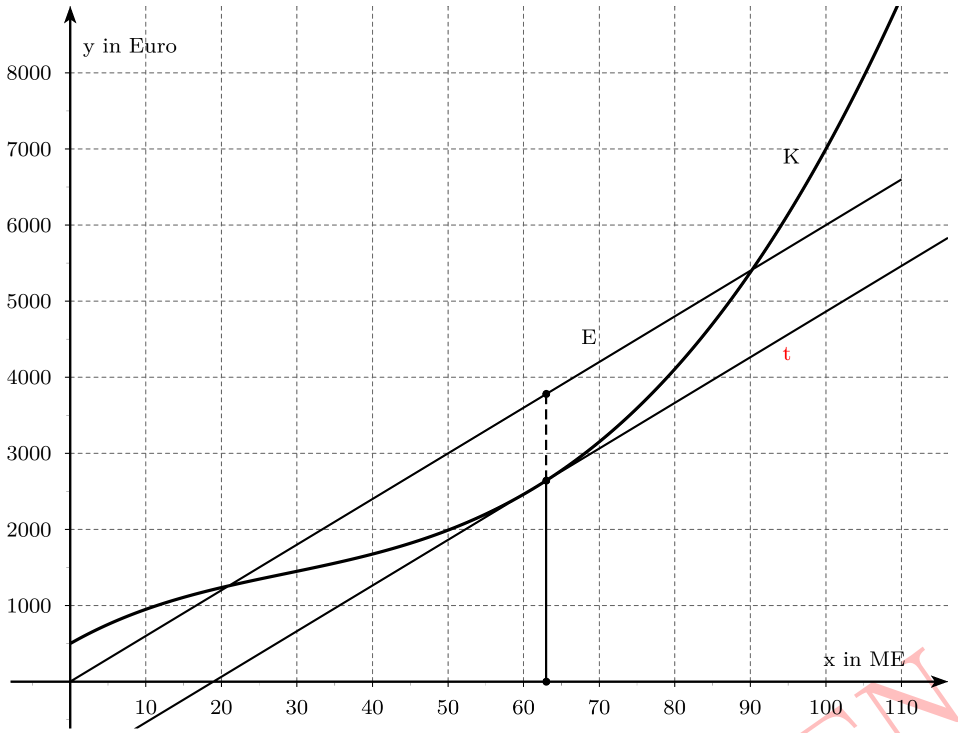
16. Die Produktionskosten eines Betriebes setzen sich aus Fixkosten und variablen Kosten zusammen und können durch eine Kostenfunktion beschrieben werden. Fixkosten fallen auf jeden Fall an und sind unabhängig von der produzierten Menge. Variable Kosten hingegen nehmen mit steigender Produktionsmenge zu. ____/0

Die Kostenkehre ist jene Produktionsmenge, ab der die variablen Kosten immer stärker steigen, in diesem Fall spricht man von einem progressiven Kostenverlauf. Vor der Kostenkehre ist der Kostenverlauf degressiv, das heißt, die Kosten steigen bei zunehmender Produktionsmenge immer schwächer.

Der Verkaufserlös ist das Produkt aus der verkauften Stückzahl und dem Verkaufspreis pro Stück.

Die untenstehende Abbildung zeigt die Graphen der Kostenfunktion K und der Erlösfunktion E des Betriebes, wobei x die Anzahl der produzierten und verkauften Mengeneinheiten (ME) pro Tag ist. 1 ME entspricht einer Verpackungseinheit von 100 Stück. Pro Tag können höchstens 110 ME produziert werden.

Der Gewinn ist die Differenz aus Erlös und Produktionskosten.



Aufgabenstellung:

(a) Ermittle anhand der obigen Abbildung den Gewinnbereich, das sind jene Stückzahlen (1 ME = 100 Stück), für die der Betrieb Gewinn erzielt!

Beschreibe, wie sich eine Senkung des Verkaufspreises auf den Verlauf des Graphen der Erlösfunktion E auswirkt und wie sich dadurch der Gewinnbereich verändert!

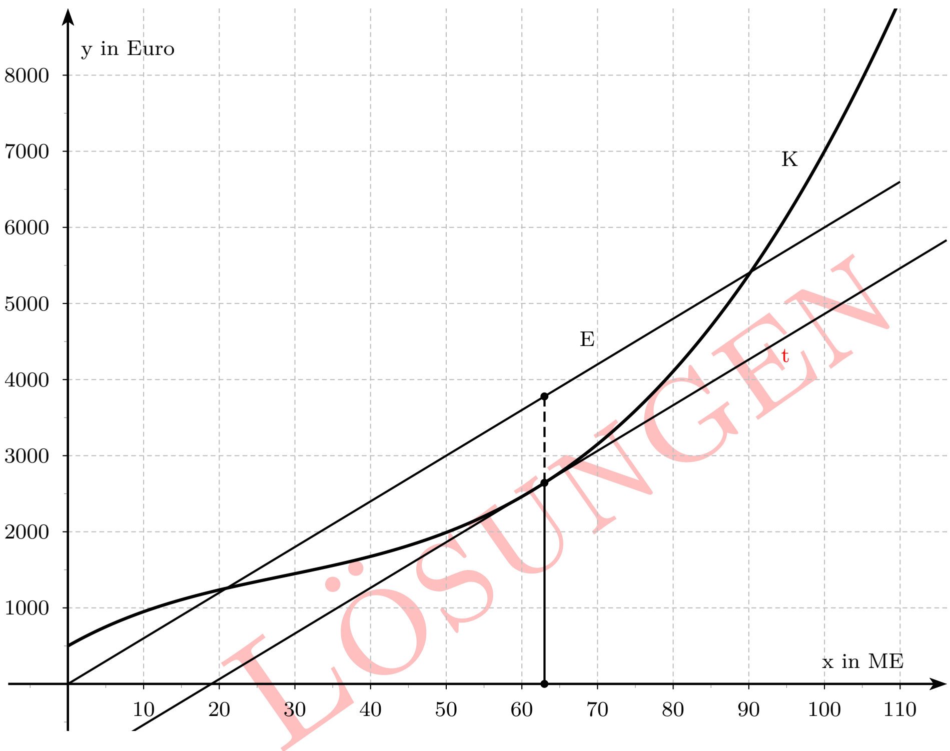
(b) Bestimme anhand der Abbildung die Fixkosten und den Verkaufspreis pro ME möglichst genau!

(c) Welche der nachstehenden Aussagen treffen für die in der Grafik abgebildeten Produktionskosten zu? Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an!

Bei degressivem Kostenverlauf gilt: $K'(x) < 0$.	
Bei progressivem Kostenverlauf gilt: $K''(x) > 0$.	☒
Bei der Kostenkehre gilt: $K'(x) = 0$.	
Für alle x aus dem Definitionsbereich [0 ME; 110 ME] gilt: $K'(x) > 0$.	☒
Es gilt: K'(50)>K'(90).	

Erkläre ausführlich, was die 1. und die 2. Ableitung der Kostenfunktion an einer bestimmten Stelle über den Verlauf des Graphen von K an dieser Stelle aussagen!

(d) Deute die Beziehung $K'(x) = E'(x)$ geometrisch und ermittle anhand der nachstehenden Abbildung jene Produktionsmenge x_1 fpr die dies zutrifft! Begründe, warum der erzielte Gewinn bei dieser Produktionsmenge x_1 am größten ist!



Lösungserwartung:

(a) Die Antwort ist als richtig zu werten, wenn **beide** Grenzen des Grenzbereichs richtig angegeben sind, z.B.: *Bei einer Produktion von 2 000 bis 9 000 Stück wird Gewinn erzielt* (Toleranz bei Gewinngrenzen: ±100 Stück).

Weiters muss eine richtige Interpretation angeführt sein, wie sich eine Senkung des Verkaufspreises auf den Gewinnbereich auswirkt, z.B.: *Bei einer Senkung des Verkaufspreises verläuft der Graph von E flacher, wodurch der Gewinnbereich kleiner („schmäler“) wird.*

Als richtig zu werten ist auch die Antwort, dass bei einer starken Senkung des Verkaufspreises bei allen Produktionsmengen Verlust erzielt wird.

(b) **Fixkosten:** 500 Euro (Toleranz: ±100 Euro)

Verkaufspreis pro ME: $\frac{3000}{50} = 60$ Euro (Toleranz: ± 5 Euro)

Falls der Verkaufspreis durch ein „zu kleines" Steigungsdreieck sehr ungenau abgelesen wird (z.B.: 50 Euro), so ist das Ergebnis als falsch zu werten.

(c) Lösung Multiple Choice siehe oben

Zudem muss eine Erklärung angegeben sein, z.B.:

$K'(x)$ beschreibt die Steigung der Kostenfunktion (oder: Steigung der Tangente) an der Stelle x (bei Produktion von x ME).

$K''(x)$ beschreibt die Änderung der Steigung, also das Krümmungsverhalten der Kostenfunktion an der Stelle x.

Im degressiven Bereich ist der Graph von K rechtsgekrümmt und im progressiven Bereich ist der Graph von K linksgekrümmt.

Auch folgende bzw. alle anderen inhaltlich richtigen Formulierungen sind als richtig zu werten:

K' beschreibt das Monotonieverhalten von K, d.h. falls $K'(x) > 0$ ist, steigt K an der Stelle x.

K'' beschreibt das Monotonieverhalten von K', d.h. falls $K''(x) > 0$ ist, steigt K' an der Stelle x (d.h., die Kostensteigerung nimmt zu).

Anmerkung: Aus der Antwort muss jedenfalls ersichtlich sein, welche geometrische Bedetuung K' und K'' besitzen, der Begriff *Monotonieverhalten* alleine ist nicht ausreichend.

(d) Die Antwort ist als richtig zu werten, wenn die richtige geometrische Deutung angegeben ist und x_1 bestimmt ist (falls x_1 nur eingezeichnet ist, der Wert aber nicht angegeben ist, so ist dies auch als richtig zu werten), z. B.: Geometrisch bedeutet dies, dass der Graph von K und der Graph von E an dieser Stelle die gleiche Steigung besitzen.

Oder: Die Tangente t an den Graphen von K verläuft parallel zum Graphen von E. Dies ist bei ca. 63 ME der Fall (Toleranz: ± 3 ME).

Zudem muss die Interpretation angegeben sein, dass an der gesuchten Stelle $G'(x) = 0$ gilt und somit $G(x_1)$ der maximale Gewinn ist, z. B.: *Wegen der Beziehung $G(x) = E(x) - K(x)$ gilt: $G'(x) = E'(x) - K'(x)$.*

Somit gilt: $G'(x_1) = E'(x_1) - K'(x_1) = 0$ und $G(x_1)$ ist daher der maximale Gewinn.

(Anmerkung: Der Nachweis des Maximums (Monotoniewechsel von G an der Stelle x_1 ist nicht erforderlich.)

Auch die geometrische Begründung, dass der vertikale Abstand zwischen Erlös- und Kostenkurve an der Stelle x_1 am größten ist, ist als richtig zu werten, falls dieser Abstand (strichlierte Linie) richtig eingezeichnet ist.

Lösung der Graphik: siehe oben!

---

17 - MAT - AN 1.1, WS 1.1, AN 1.3, FA 1.9 - Emissionen - BIFIE Aufgabensammlung

17. Laut Immissionsschutzgesetz - Luft (IG-L) gilt auf manchen Autobahnabschnitten in Österreich für PKW eine Tempo-100-Beschränkung, wenn die Grenzwerte für bestimmte Luftschadstoffe überschritten werden. Für LKW gilt ein generelles Tempolimit von 80 km/h. ____/0

Abbildung 1 zeigt vier Messwerte für die freigesetzte Menge von Stickoxiden (NO_x) bei unterschiedlichen Fahrgeschwindigkeiten (in km/h) für einen durchschnittlichen PKW. Die freigesetzte NO_x-Menge wird in Gramm pro gefahrenem Kilometer angegeben. Die Abhängigkeit von Fahrgeschwindigkeit und NO_x-Ausstoß wurde durch eine Funktion A modelliert, deren Graph ebenfalls in Abbildung 1 dargestellt ist.

Abbildung 2 zeigt den Anteil der Verkehrsmittel (PKW, LKW, sonstige) am Verkehrsaufkommen und am Ausstoß (= Emission) von Stickoxiden und Feinstaub (PM 10) im Unterinntal in Tirol.

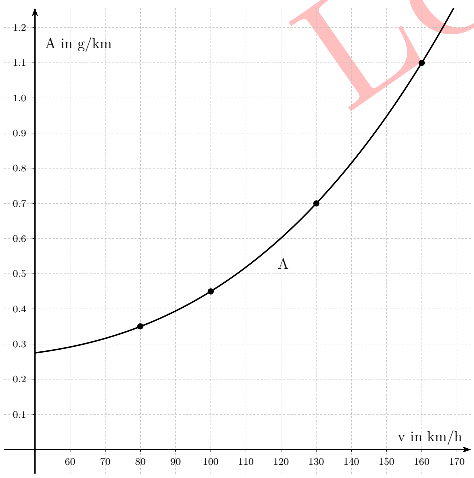


Abbildung 1

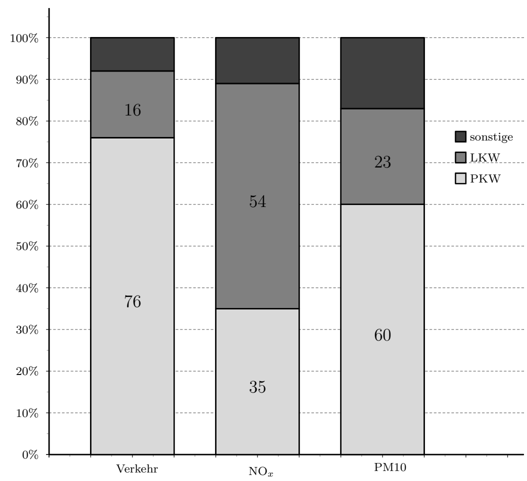


Abbildung 2
Quelle: http://www.tirol.gv.at/themen/verkehr/verkehrsplanung/verkehrsprojekte/tempo100

Aufgabenstellung:

(a) Ermittle anhand der Messwerte in Abbildung 1, um wie viele Prozent der Sickoxid-Ausstoß eines PWK abnimmt, wenn statt der sonst erlaubten

130 km/h nur mit einer Geschwindigkeit von 100 km/h gefahren werden darf!

Ist der Stickoxid-Ausstoß eines PKW direkt proportional zur Fahrgeschwindigkeit? Begründe deine Antwort anhand des Graphen der Modellfunktion A in Abbildung 1.

(b) Verursachen im Tiroler Unterinntal die Verkehrsmittel mit dem größten Anteil am Verkehrsaufkommen auch die meisten Stickoxid- bzw. Feinstaub-Emissionen? Begründe deine Antwort!

Geschwindigkeitsmessungen auf der Autobahn A12 im Tiroler Unterinntal haben gezeigt, dass die Geschwindigkeitslimits von mehr als 90 % der Verkehrsteilnehmer/innen eingehalten werden und weniger als 1 % der Verkehrsteilnehmer/innen die Geschwindigkeitslimits um mehr als 10 % überschreiten. Die Geschwindigkeitsüberschreitungen können daher für die folgende Fragestellung vernachlässigt werden.

Begründe, welche der beiden Maßnahmen (A oder B) wirkungsvoller ist, wenn entlang der A12 die Stickoxid-Emissionen weiter reduziert werden sollten! Durch Maßnahme A eventuell anfallende zusätzliche Emissionen durch die Bahn werden vernachlässigt.

A eine Verlagerung der Hälfte des Gütertransports durch LKW auf die Schiene (d. h. Transport der LKW mit der Bahn)

B ein Tempolimit von 80 km/h für PKW und LKW

Entnehme die für die Begründung benötigten Werte den Abbildungen 1 und 2 und führe diese an!

(c) Ermittle rechnerisch anhand von Abbildung 1 das Ergebnis des Ausdrucks $\frac{A(160)-A(100)}{60}$ auf vier Dezimalstellen genau!

Interpretiere das Ergebnis dieses Ausdrucks im Hinblick auf die NO_xEmissionen!

(d) Zur Modellierung der in Abbildung 1 dargestellten Abhängigkeit des NO_x-Ausstoßes A von der Fahrgeschwindigkeit v kommen unterschiedliche Funktionstypen in Frage.

Welche Funktionstypen können zur Modellierung der Funktion A verwendet worden sein? Kreuze die beiden geeigneten Funktionsgleichungen an!

$A(v) = a \cdot v + b$ mit $a > 0, b > 0$	
$A(v) = a \cdot v^2 + b$ mit $a < 0, b > 0$	
$A(v) = a \cdot v^2 + b \cdot v + c$ mit $a > 0, c > 0, b \in \mathbb{R}$	⊠
$A(v) = a \cdot b^v$ mit $a > 0, b > 1$	⊠
$A(v) = a \cdot b^v$ mit $a > 0, b < 1$	

Begründe, warum die drei restlichen Funktionsgleichungen für die Modellierung von A in Abbildung 1 nicht geeignet sind!

Lösungserwartung:

(a) Richtige Berechnung der Abnahme der NO_x-Emissionen: $\frac{0,5}{0,75} \approx 0{,}67$.

Der Stickoxid-Ausstoß nimmt um ungefähr 33 % ab.

Alle Ergebnisse im Intervall [30 %;35 %] sind als richtig zu werten.

Auch die Antwort, dass die Emissionen bei einer Reduktion der Geschwindigkeit auf 100 km/h nur mehr 67 % des Wertes bei 130 km/h betragen, ist als richtig zu werden (Lösungsintervall, falls die noch vorhandenen Emissionen angegeben werden: [65 %; 70 %]).

Zudem muss eine Begründung angegeben sein, dass A nicht direkt proportional zu v ist, z.B.: *Der Stickoxid-Ausstoß ist nicht direkt proportional zur Fahrgeschwindigkeit, weil der Graph von A nicht linear verläuft.*

Auch andere, aus der Abbildung ableitbare Formulierungen wie z.B. *Nicht direkt proportional, weil sich die Emissionen mehr als verdoppeln, wenn die Geschwindigkeit verdoppelt wird*, aufgrund derer eine direkte Proportionalität ausgeschlossen werden kann, sind als richtig zu werten.

(b) Die Antwort ist als richtig zu werten, wenn sinngemäß begründet ist, dass PKW zwar den größten Anteil an den Feinstaub-Emissionen besitzen, bei den Stickoxid-Emissionen aber die LKW die Hauptverursacher sind, z. B.: Im Tiroler Unterinntal haben PKW mit 76 % den größten Anteil am Verkehrsaufkommen. Sie verursachen mit 60 % zwar den größten Anteil der Feinstaub-Emissionen, aber nur 35 % der Stickoxid-Emissionen. Anmerkung: Die Zahlenwerte müssen nicht angeführt sein.

Zudem muss eine schlüssige Begründung angegeben werden, dass Maßnahme A wirkungsvoller für eine Stickoxid.Reduktion ist, z. B.: LKW verursachen 54 % der NO_x-Emissionen im Straßenverkehr, obwohl ihr Anteil am Verkehrsaufkommen nur 16 % beträgt. Eine Reduktion des LKW-Verkehrs auf die Hälfte würde die NO_x-Emissionen um ca. 27 % reduzieren.

PKW haben zwar einen Anteil von 76 % am Verkehrsaufkommen, sind aber nur für 35 % der NO_x-Emissionen verantwortlich. Durch eine Reduktion des Tempolimits von 130 km/h auf 80 km/h könnten laut Abbildung 1 maximal die Hälfte dieser Emissionen, also etwa 17 %, vermieden werden. Eine Verlagerung der Hälfte des LKW-Verkehrs auf die Schiene wäre daher die wirkungsvollere Maßnahme zur Reduktion der NO_x-Emissionen.

Anmerkung: Auch eine Begründung mit gerundeten relativen Anteilen (drei Viertel etc.) ist als richtig zu werten.

(c) Richtige Berechnung des Differenzenquotienten: $\frac{A(160)-A(100)}{60} = \frac{1{,}05-0{,}5}{60} \approx 0{,}0092$, wobei Ergebnisse aus dem Intervall [0,0088;0,0095] als richtig zu werten sind. Die Angabe der Einheit ist nicht erforderlich.

Zudem muss der Differenzenquotient richtig interpretiert werden, z.B.: *Wenn die Geschwindigkeit von 100 km/h auf 160 km/h erhöht wird, beträgt die mittlere Zunahme der NO_x-Emissionen 0,0092 g/km pro km/h.*

Auch analoge Formulierungen wie z.B. *mittlere Änderungsrate des Stickoxid-Ausstoßes* sind als richtig zu werten. Das Geschwindigkeisintervall [100 km/h; 160 km/h] muss in der Interpretation in irgendeiner Form vorkommen.

(d) Lösung Multiple Choice: siehe oben.

Zudem müssen drei sinngemäß richtige Begründungen angegeben sein, warum die restlichen Funktionsgleichungen für die Modellierung nicht geeignet sind, z.B.:

Der Graph von $A(v) = a \cdot v + b$ ist linear und daher nicht geeignet.

Der Graph von $A(v) = a \cdot v^2 + b$ mit $a < 0, b > 0$ ist eine nach unten geöffnete Parabel und daher nicht geeignet.

Der Graph von $A(v) = a \cdot b^v$ mit $a > 0, b < 1$ ist fallend und daher nicht geeignet.

---

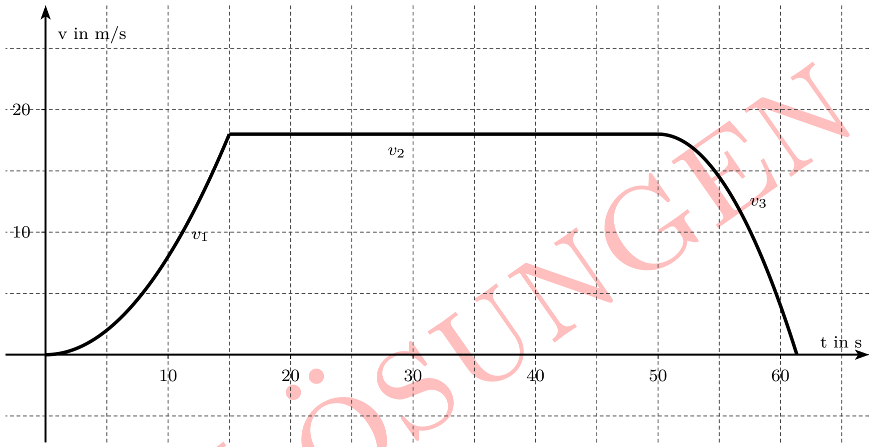
18 - MAT - AN 1.3, FA 1.7, FA 5.3 - Wiener U-Bahn - BIFIE Aufgabensammlung

18. Die Wiener U-Bahn-Linie U2 verkehrt zwischen den Stationen *Karlsplatz* und *Aspernstraße*. Die Gesamtstrecke der U2 beträgt 12,531 km (Stand 2012). ____/0

Zwischen den beiden Stationen *Donaumarina* und *Donaustadtbrücke* fährt die U-Bahn nahezu geradlinig und benötigt für diese 855 m lange Strecke ca. eine Minute.

Betrachtet man die Geschwindigkeit eines Zuges zwischen diesen beiden Stationen, so lässt sie sich näherungsweise durch drei Funktionen beschreiben. Diese Funktionen sind im nachstehenden Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm dargestellt. Die Zeit t ist in Sekunden, die Geschwindigkeit v in m/s angegeben.

$$\begin{array}{ll} v_1(t) = 0{,}08t^2 & [0; 15) \\ v_2(t) = 18 & [15; 50) \\ v_3(t) = -0{,}14(t-50)^2 + 18 & [50; 61{,}34] \end{array}$$



Aufgabenstellung:

(a) Berechne die Länge desjenigen Weges, den die U-Bahn im Zeitintervall $[15; 50]$ zurückgelegt!

Um den Bremsvorgang zu modellieren, wurde die Funktion $v_3(t) = -0{,}14(t-50)^2 + 18$ verwendet.

Erläutere, in welcher Weise eine Veränderung des Parameters von $-0{,}14$ auf $-0{,}2$ den Bremsvorgang beeinflusst!

(b) Berechne die mittlere Beschleunigung des Zuges vom Anfahren bis zum Erreichen der Höchstgeschwindigkeit.

Erkläre, wieso der Verlauf des Graphen des $v-t$-Diagramms im Intervall $[14; 16]$ nicht exakt der Realität entsprechen kann!

Lösungserwartung:

(a) $18 \cdot (50 - 15) = 630$ - Der Weg ist 630 m lang.

Eine Veränderung des Parameters von $-0{,}14$ auf $-0{,}2$ würde bedeuten, dass der Zug „stärker" (d.h. mit einer größeren negativen Beschleunigung) bremst und daher rascher zum Stillstand kommt. Auch der Bremsweg verkürzt sich.

(b) Mittlere Beschleunigung: $\overline{a_1}(0; 15) = \frac{v_1(15)-v_1(0)}{15-0} = \frac{18}{15} = 1{,}2\, m/s^2$

Bei diesem Geschwindigkeitsverlauf würden die Fahrgäste einen zu starken Ruck bei 15 s verspüren. Um diesen Ruck zu vermeiden, müsste in Wirklichkeit die Geschwindigkeitsfunktion ihre Steigung allmählich ändern, sodass kein Knick (wie jetzt) entsteht. Der Knick des Funktionsgraphen würde einen plötzlichen Sprung der Beschleunigung und somit einen für die Fahrgäste unangenehmen Ruck bedeuten. (Adäquate Erklärungen sind als richtig zu werten.)

Lösungsschlüssel:

(a) - 1 Grundkompetenzpunkt für die Berechnung der Weglänge

- 1 Reflexionspunkt für die Erläuterung. Äquivalente Antworten sind ebenfalls zu werten, sofern sie klar formuliert sind und sinngemäß eines der folgenden Schlüsselwörter enthalten: *kürzerer Bremsweg, schnellerer Stillstand, stärkere negative Beschleunigung, stärkere Bremsung.*

(b) -1 Grundkompetenzpunkt für die Berechnung der mittleren Beschleunigung

-1 Reflexionspunkt für die Erklärung. Äquivalente Antworten sind ebenfalls zu werten, sofern sie klar formuliert sind und sinngemäß eines der folgenden Schlüsselwörter enthalten: *plötzlicher Ruck, unstetige Änderung der Steigung, ruckartige Beschleunigungsveränderung.*

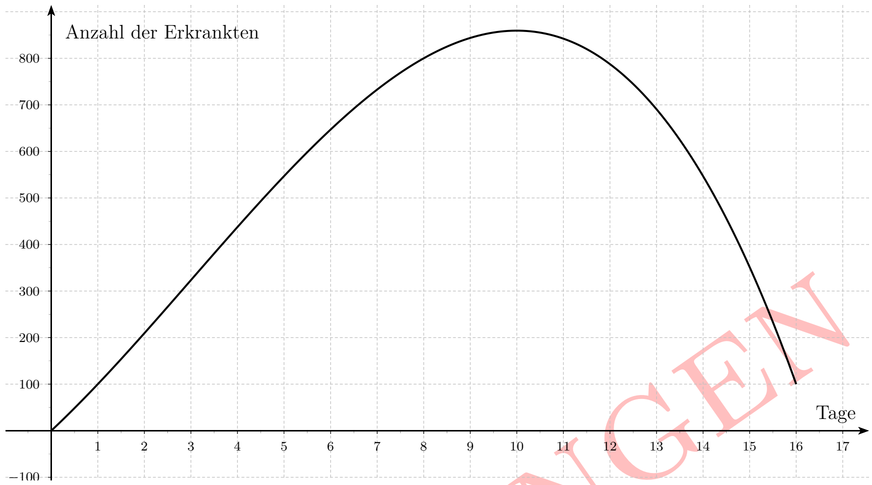
---

19 - MAT - AN 3.3, AN 1.5, AN 1.3 - Grippeepidemie - BIFIE Aufgabensammlung

19. Betrachtet man den Verlauf einer Grippewelle in einer Stadt mit 5 000 Einwohnern, so lässt sich die Anzahl an Erkrankten E in Abhängigkeit von der Zeit t (in Tagen) annähernd durch eine Polynomfunktion 3. Grades mit der Gleichung $E(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ beschreiben. ____/0

Folgende Informationen liegen vor:

- Zu Beginn der Beobachtung sind 10 Personen mit dem Grippevirus infiziert.
- Nach einem Tag sind bereits 100 Personen an Grippe erkrankt.
- Am 3. Tag nimmt die Anzahl an Erkrankten am stärksten zu.
- Am 8. Tag sind bereits 730 Personen erkrankt.
- Am 10. Tag erreicht die Grippewelle (d.h. die Anzahl an Erkrankten) ihr Maximum.



Aufgabenstellung:

(a) Berechne den Wert des Ausdruck $\frac{E(8)-E(0)}{8}$!

Kreuze diejenige(n) Aussage(n) an, die eine korrekte Interpretation des Ausdrucks $\frac{E(8)-E(0)}{8}$ ist/sind!

Der Ausdruck gibt die prozentuelle Änderung der Anzahl an Erkrankten innerhalb der ersten 8 Tage an.	
Der Ausdruck gibt die Zunahme der Anzahl an Erkrankten in den ersten 8 Tagen an.	
Der Ausdruck gibt die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Grippewelle am 8. Tag an.	
Der Ausdruck beschreibt, wie viele Neuerkrankte es am 8. Tag gibt.	
Der Ausdruck beschreibt die mittlere Änderungsrate der Anzahl an Erkrankten innerhalb der ersten 8 Tage.	⊠

(b) Zur Bestimmung der Koeffizienten a, b, c und d werden folgende Gleichungen aufgestellt:

- $d = 10$
- $a + b + c + d = 100$
- $18a + 2b = 0$
- $300a + 20b + c = 0$

Gib an, welche der angegebenen Informationen durch die vierte Gleichung modelliert werden kann, und erkläre den Zusammenhang zwischen Information und Gleichung!

(c) Gib an, an welchem Tag die progressive Zunahme der Anzahl an Erkrankten (das heißt der Zuwachs an Erkrankten wird von Tag zu Tag größer) in eine degressive Zunahme (das heißt der Zuwachs an Erkrankten nimmt pro Tag wieder ab) übergeht!

Kreuze diejenige(n) Aussage(n) an, mit der/denen man eine progressive Zunahme bestimmen kann!

$E'(t) > 0$	
$E(t) \geq 0$	
$E(t_1) < E(t_2)$ für alle $t_1 > t_2$	
$E''(t) > 0$	⊠
$E'(t) = E''(t) = 0$	

Lösungserwartung:

(a) $\frac{E(8)-E(0)}{8} = \frac{730-10}{8} = 90$

(Innterhalb der ersten 8 Tage nimmt die Anzahl der Erkrankten um durchschnittlich 90 Personen pro Tag zu.)

Lösung Multiple Choice: siehe oben

(b) „Am 10. Tag erreicht die Grippewelle (d.h. die Anzahl an Erkrankten) ihr Maximum“ bzw. die 5. Information

Diese Textstelle beschreibt das lokale Maximum (den Hochpunkt), d.h., an dieser Stelle gilt: $E'(10) = 0$.

Durch das Aufstellen der ersten Ableitungsfunktion und das Einsetzen des Wertes $t = 10$ erhält man die nachstehende Gleichung:

$E'(t) = 3at^2 + 2bt + c \Rightarrow E'(10) = 300a + 20b + c = 0$

(c) An 3. Tag. - Lösung Multiple Choice siehe oben

Lösungsschlüssel:

(a) - 1 Grundkompetenzpunkt (für die Berechnung des Ausdrucks)
- 1 Reflexionspunkt (für das richtige Ankreuzen der zutreffenden Aussage)

(b) 2 Reflexionspunkte, davon:
- 1 Punkt für das Erkennen der zugehörigen Information
- 1 Punkt für die Erklärung (dieser Punkt ist auch zu geben, wenn die Erklärung nu in verbaler Form vorliegt oder nur die Rechenschritte durchgeführt wurden)

(c) - 1 Reflexionspunkt für die kontextbezogene Frage
- 1 Grundkompetenzpunkt für das alleinige Ankreuzen der richtigen Aussage

---

20 - MAT - AN 1.1, AN 1.3, FA 1.1, FA 2.2, FA 3.1 - Höhe der Schneedecke - BIFIE Aufgabensammlung

20. Die Höhe $H(t)$ einer Schneedecke nimmt aufgrund von Witterungseinflüssen mit der Zeit t ab. Zuerst ist die Abnahme gering, mit der Zeit wird sie aber immer stärker. Daher kann die Höhe der Schneedecke durch folgende quadratische Funktion $H(t)$ beschrieben werden: ____/0

$$H(t) = H_0 - a \cdot t^2 \text{ mit } a > 0, t \geq 0$$

(H wird in cm und t in Tagen gemessen, H_0 beschreibt die Schneehöhe zu Beginn der Messung)

Das beschriebene Modell gilt in guter Näherung bei einer Witterung mit gleichbleibender Temperatur bis zur vollständigen Schneeschmelze. Dabei wird vorausgesetzt, dass bis zur vollständigen Schneeschmelze kein weiterer Schnee hinzukommt.

Aufgabenstellung:

(a) Eine 20 cm dicke Schneedecke reduziert sich innerhalb von 12 Stunden auf 18 cm. Nach wie vielen Tagen (von Anfang an) ist der Schnee gänzlich geschmolzen? Gib die Lösung auf zwei Dezimalstellen genau an!

Wie wirkt sich eine Erhöhung des Parameters a auf $H(t)$ aus? Begründe deine Antwort!

(b) In einem Alpendorf gilt für die Schneehöhe H (gemessen in cm) und die Zeit t (gemessen in Tagen) der folgende funktionale Zusammenhang:

$$H(t) = 40 - 5t^2$$

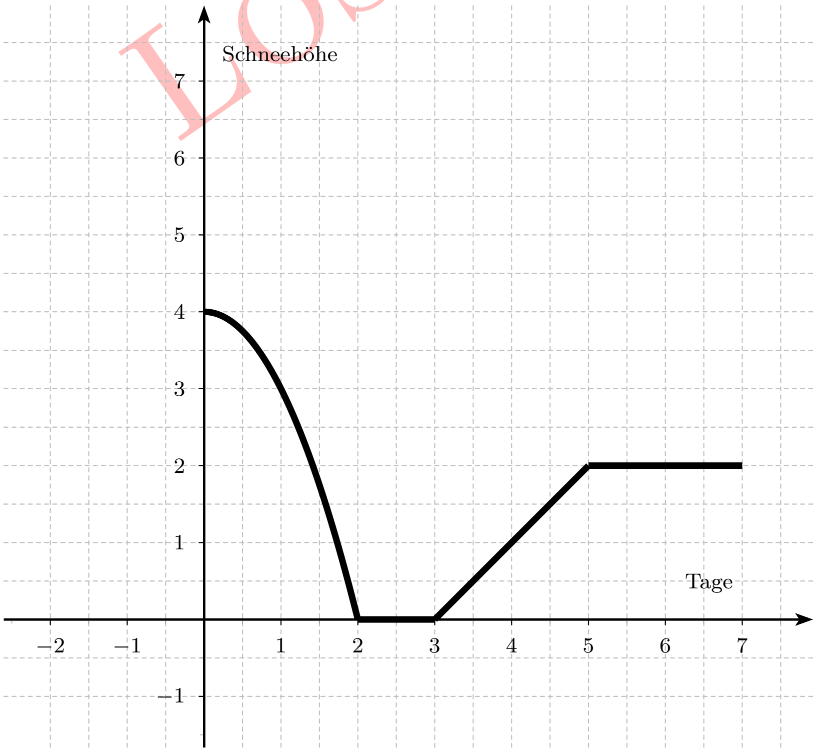
Wie hoch ist die mittlere Änderungsrate der Schneehöhe innerhalb der ersten beiden Tage nach Beginn der Messung? Berechne diese!

Begründe, warum die Berechnung der mittleren Änderungsrate im Zeitintervall $[0; 3]$ mithilfe der angegebenen Funktion nicht sinnvoll ist, um Aussagen über den Verlauf der Höhe der Schneedecke zu machen!

(c) Berechne $H'(0{,}5)$ für $H(t) = H_0 - a \cdot t^2$ und $a = 3$!

Deute das Ergebnis hinsichtlich der Entwicklung der Schneehöhe H!

(d) Der nachstehende Graph beschreibt idealisiert den Verlauf der Schneehöhe in Dezimetern innerhalb einer Woche in einem Alpendorf.



Handelt es sich bei diesem Graphen um eine auf $[0; 7]$ definierte Funktion? Begründe deine Antwort!

Bestimme die Gleichung $y = k \cdot x + d$ mit $k, d \in \mathbb{R}$ einer Funktion f, welche den Graphen im Intervall $[3; 5]$ beschreibt!

Lösungserwartung:

(a) Frage 1: $18 = 20 - a \cdot 0{,}5^2 \Rightarrow a = 8; 20 - 8t^2 = 0 \Rightarrow t = 1{,}58$ Tage

Frage 2: Je größer a, desto schneller nimmt die Schneehöhe ab!

(b) Frage 1: $\frac{H(2)-H(0)}{2} = \frac{20-40}{2} = -10$ cm/Tag

Frage 2: Der Anwendungsbereich (Definitionsbereich) der Formel $H(t)$ liegt im Bereich $[0; \sqrt{8}]$, wobei $\sqrt{8} \approx 2{,}8$ die positive Nullstelle von $H(t)$ ist.

Da $[0; 2{,}8]$ eine Teilmenge des Intervalls $[0; 3]$ ist, ist die Berechnung des Differenzenquotienten im Intervall $[0; 3]$ nicht sinnvoll.

Oder:

An der Stelle $t = 3$ wird der Funktionswert $H(t)$ negativ. Die Schneehöhe H kann allerdings nicht negativ sein, daher ist die Berechnung der mittleren Änderungsrate im Intervall $[0; 3]$ nicht sinnvoll.

(c) Frage 1: $H(t) = H_0 - 3 \cdot t^2$

$H'(t) = -6 \cdot t$

$H'(0{,}5) = -3$ cm/Tag

Frage 2: Nach $t = 0{,}5$ Tagen nimmt die Höhe der Schneedecke mit einer Geschwindigkeit von 3 cm/Tag ab.

(d) Frage 1: Der Graph beschreibt eine Funktion, da jedem Zeitpunkt x genau eine Schneehöhe y zugeordnet wird.

Frage 2:

$f(3) = 0 \Rightarrow 0 = k \cdot 3 + d$

$f(5) = 2 \Rightarrow 2 = k \cdot 5 + d$

daher: $k = 1; d = -3$

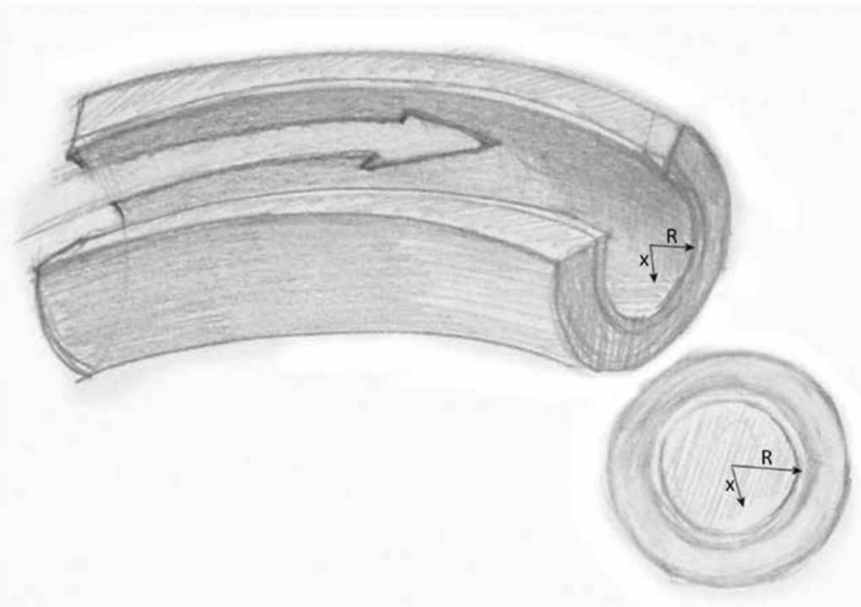
$y = x - 3$

---

21 - MAT - AG 2.1, AN 1.3, AN 2.1, FA 1.7 - Blutgefäß - BIFIE Aufgabensammlung

21. In einem Blutgefäß hängt die Geschwindigkeit v des Blutes davon ab, wie groß der Abstand x zum Mittelpunkt ist. ein gültiger Zusammenhang zwischen der ____/0

Geschwindigkeit v und dem Abstand x kann mittels einer Formel $v(x) = v_m \cdot (1 - \frac{x^2}{R^2})$ modelliert werden.



(Quelle: http://www.gefaesschirurgie -klinik.de/patienteninformationen/arterienverkalkung.php, ergänzt durch Pfeile und Beschriftung)

Die in der Formel auftretenden Größen sind im Foglenden beschrieben:

R ... Innenradius des Blutgefäßes in mm

v_m ... maximale Geschwindigkeit des Blutes im Mittelpunkt des Blutgefäßes in cm/s

x ... Abstand vom Mittelpunkt des Blutgefäßes in mm

$v(x)$ ... Geschwindigkeit des Blutes bei Abstand x vom Mittelpunkt des Blutgefäßes in cm/s

Aufgabenstellung:

(a) Gib einen Definitionsbereich für x an, der für das Blutgefäß sinnvoll ist, und begründe, warum die Formel eine vereinfachte Beschreibung der Blutgeschwindigkeit ist!

(b) In einem Lehrbuch der Medizin wird bhauptet, dass beim Abstand $x = \frac{R}{2}$ die Geschwindigkeit des Blutes 75 % vom maximalen Wert beträgt. Um diese Aussage mathematisch zu beweisen, wird der Ansatz $v(x) = \frac{3}{4} v_m$ gemacht, und damit wird die Stelle x berechnet.

Führe die Berechnung von der Stelle x aus und zeige, dass man mit der Berechnung des Funktionswertes $v\left\langle\frac{R}{2}\right\rangle$ zum gleichen Ergebnis kommt!

(c) Forme die gegebene Formel für $v(x)$ so um, dass man eine Funktion $x(v)$ erhält!

Erläutere, was der Funktionswert $x\left(\frac{v_m}{2}\right)$ für die Blutströmung bedeutet!

(d) Gib die momentane Änderungsrate der Geschwindigkeit v (bei Veränderung von x) beim Abstand x an und gib an, was das Vorzeichen der Änderungsrate über das Verhalten der Blutströmung aussagt!

Lösungserwartung:

(a) Der Definitionsbereich ist $[0; R]$ (Minimalanforderung: Angabe des Intervalls).

Negative Abstände ($x < 0$) sind sinnlos, und $x > R$ würde bedeuten, dass das Blutkörperchen außerhalb des Blutgefäßes ist.

Die Formel ist deswegen eine Vereinfachung, weil das Blut am Innenrand des Blutgefäßes bestimmt nicht die Geschwindigkeit 0 hat.

Außerdem setzt die Formel voraus, dass das Blutgefäß an jeder Stelle einen kreisförmigen Querschnitt mit einem konstanten Radius R hat bzw. dass das Blutgefäß exakt zylinderförmig ist (Venen haben auch Venenklappen).

Schließlich strömt das Blut zeitlich nicht mit konstanter Geschwindigkeit, die Blutgeschwindigkeit verändert sich periodisch.

(b) Lösungsweg 1:

Umformen: $\frac{3}{4}v_m = v_m \cdot \left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right) \Rightarrow \frac{3}{4} = 1 - \frac{x^2}{R^2} \Rightarrow \frac{x^2}{R^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{R}{2}$

Lösungsweg 2:

$v\left(\frac{R}{2}\right) = v_m \cdot \left(1 - \frac{R^2}{4 \cdot R^2}\right) = v_m \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) = v_m \cdot \frac{3}{4}$

An der genannten Stelle ist der Funktionswert wieder 75 % von v_m.

(c) $x(v) = R \cdot \sqrt{1 - \frac{v}{v_m}}$

$x\left(\frac{v_m}{2}\right)$ ist jener Abstand vom Mittelpunkt des Blutgefäßes, bei dem die Strömungsgeschwindigkeit auf die Hälfte des Maximalwertes abgesunken ist.

(d) $v'(x) = -v_m \cdot \frac{2x}{R^2}$

Das negative Vorzeichen bedeutet, dass die Geschwindigkeitsfunktion im gesamten Definitionsbereich $[0; R]$ streng monoton fallend ist. Für die Blutströmung bedeutet das, dass die Geschwindigkeit des Blutes vom Mittelpunkt der Vene bis zum Rand der Vene abnimmt.

Auch eine kurze Formulierung ist als korrekt zu werten: Negatives Vorzeichen $\rightarrow$ Geschwindigkeit nimmt ab.

---

22 - MAT - AN 1.3, FA 1.5, FA 1.8, WS 2.3, WS 3.2 - Zehnkampf - BIFIE Aufgabensammlung

22. Die „Königsdisziplin“ der Leichtathletik ist bei den Männern der Zehnkampf. Dabei erhält jeder Athlet in jeder der 10 Disziplinen Punkte, die für jede Disziplin nach einer eigenen Formel errechnet werden. Für den Weitsprung gilt die Formel $P = 0{,}14354 \cdot (x - 220)^{1{,}4}$. Dabei ist x die Sprungweite in cm und P die Punktezahl (auf Ganze gerundet). ____/0

    Im Bewerb sind 3 Sprünge erlaubt. Gewertet wird der weiteste fehlerfreie Sprung. Als Fehlversuch gilt in erster Linie das Übertreten beim Absprungbalken. Dies passiert in ca. 1 von 20 Versuchen. Der Weltrekord im Weitsprung liegt bei 895 cm. Der Weltrekord im Zehnkampf wurde von Roman Sebrle 2001 beim Leichtathletikmeeting in Götzis aufgestellt und liegt bei 9 026 Punkten. Seine Weitsprungleistung betrug dabei 811 cm.

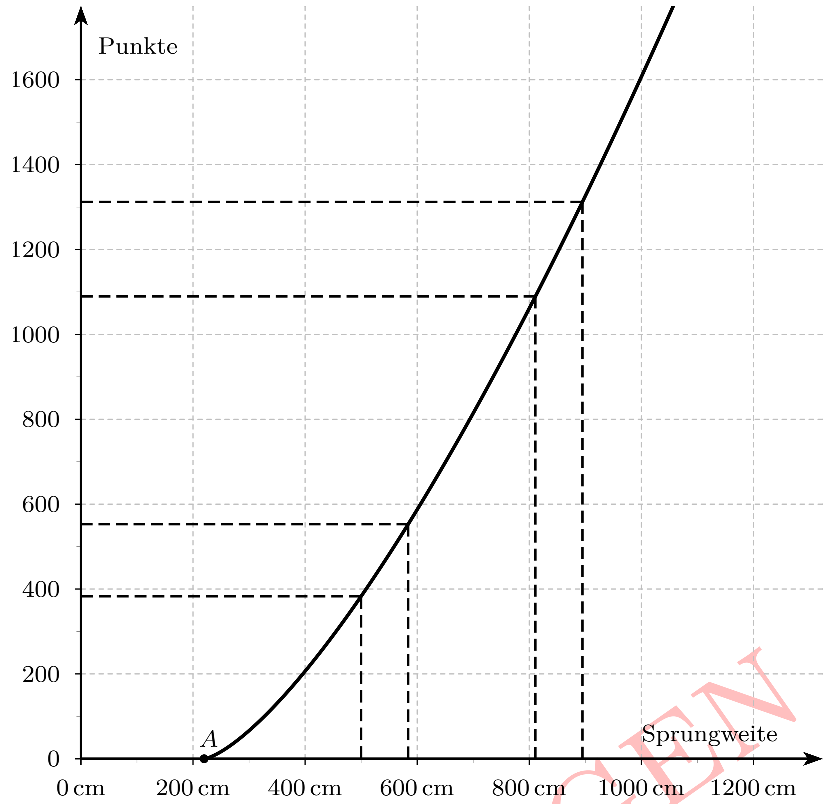
Aufgabenstellung:

(a) Berechne, wie viele Punkte Roman Sebrle mehr erhalten hätte, wenn er die Weltrekordweite gesprungen wäre!

Begründe mit der Formel, warum erst Sprünge ab 220 cm einen Punktwert ergeben.

(b) Eine Sprungleistungssteigerung um 84 cm bringt nicht von jedem Ausgangswert den gleichen durchschnittlichen Punktezuwachs (in Punkten/cm). Zeige das für die Intervalle $[500\,\text{cm}; 584\,\text{cm}]$ und $[811\,\text{cm}; 895\,\text{cm}]$ durch Rechnung!

Begründe mithilfe der untenstehenden Graphik, warum ein absolut gleicher Weitenzuwachs für größere Ausgangswerte mehr Punkte bringt als für kleinere Ausgangswerte!



(c) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ein Athlet die Weitsprungpunkte bei seinem Zehnkampf ohne Fehlversuch erhält!

Durch bessere Trainingsmethoden kann dieser Wahrscheinlichkeitswert erhöht werden, indem die Fehlerquote von 1 : 20 gesenkt wird, etwa auf $1 : n$. Wenn unter n Sprüngen nur ein Fehlversuch dabei ist, ergibt sich eine Erfolgsquote von $\frac{n-1}{n}$. Begründe damit, warum die oben genannte Wahrscheinlichkeit nie 1 sein kann!

Lösungserwartung:

(a) $f(895) \approx 1\,312$, $f(811) \approx 1\,089$. Er hätte um 223 Punkte mehr erzielt.

Die Basis (der Radikand) wird erst ab 220 cm ≥ 0. (oder eine sinngemäßge Formulierung.

(b) $\frac{f(584)-f(500)}{584-500}$ bzw. $\frac{f(895)-f(811)}{895-811}$

im ersten Intervall: ca. 2,02 Punkte/cm

im zweiten Intervall: ca. 2,65 Punkte/cm

Begründung: f ist streng monoton wachsend und steig im zweiten Intervall schneller. (Jede sinngemäß formulierte Antwort ist richtig.)

(c) X ... Anzahl der Fehlversuche

$p = \frac{1}{20}$, $q = p - 1 = \frac{19}{20}$

$P(X = 0) = ... = \left(\frac{19}{20}\right)^3 = 0{,}857$, d.h. mit einer Wahrscheinlichkeit von 85,7 %.

Begründung: Da der Zähler immer kleiner als der Nenner ist, ist $\frac{n-1}{n} < 1$. Daher muss auch die 3. Potenz < 1 sein.

Oder:

Sobald die Wahrscheinlichkeit für einen Fehlversuch größer als 0 ist, muss die Wahrscheinlichkeit, dass 3 Sprünge ohne Fehlversuch gelingen, kleiner als 1 sein. (Sinngemäße Argumentation möglich!)

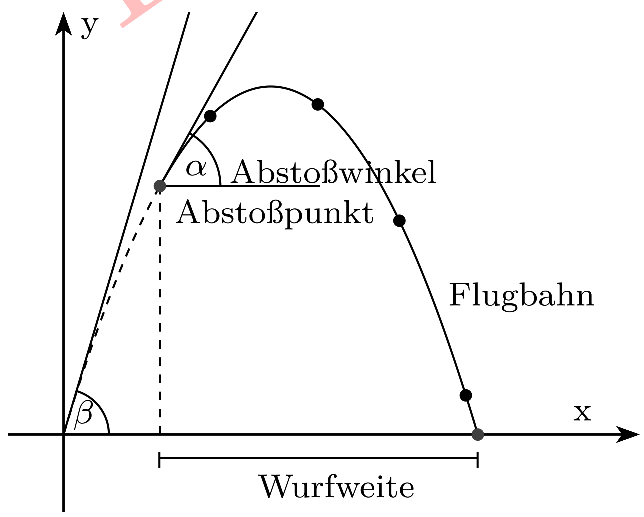
---

23 - MAT - AN 1.3, AN 3.3, FA 1.2, FA 1.5 - Kugelstoßen - BIFIE Aufgabensammlung

23. Für die Beschreibung der Flugbahn der gestoßenen Kugel beim Kugelstoßen kann mit guter Näherung die Gleichung der Wurfparabel verwendet werden. ____/0

Diese Gleichung lautet: $y = \tan\beta \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2\beta} \cdot x^2 (g = 9{,}81\, m/s^2)$.

Dabei ist v_0 die Abwurfgeschwindigkeit der Kugel und β der Winkel, unter dem die Parabel die x-Achse schneidet. Die größte Wurfweite wird für $\beta = 45°$ erzielt.



Die Computersimulation der Flugbahn der gestoßenen Kugel eines Athleten ergab für eine Gleichung der Bahnkurve $y = 0{,}84 \cdot x - 0{,}06 \cdot x^2$. Der Abstoßpunkt der Kugel befand sich in einer Höhe von 2,1 m.

Aufgabenstellung:

(a) Berechne die Größe des Abstoßwinkels α und die maximale Höhe, die von der Kugel des Athleten erreicht wurde! Runde auf cm!

(b) Welche Wurfweite hat der Athlet erzielt? Welchen Einfluss hat die Größe der Fallbeschleunigung g bei sonst gleichen Bedingungen auf die Wurfweite? Begründe deine Antwort!

(c) Berechne für die Bahnkurve $y = 0{,}84 \cdot x - 0{,}06 \cdot x^2$ die Größe des Winkel β und überprüfe, ob dieser Athlet die größte Wurfweite erreicht hat!

Erläutere, ob anhand der Parameter a und b in der allgemeinen Bahnkurve $y = ax - bx^2$ bereits feststellbar ist, ob eine Athletin/ein Athlet die größte Wurfweite erzielt hat!

Lösungserwartung:

(a) $f : y = 0{,}84 \cdot x - 0{,}06 \cdot x^2$

Abstoßpunkt: Höhe 2,1 m

$2{,}1 = 0{,}84 \cdot x - 0{,}06 \cdot x^2$, $x_1 \approx 3{,}26$, $x_2 \approx 10{,}74$

$f'(x) = 0{,}84 - 0{,}12 \cdot x$, $f'(3{,}26) = 0{,}4488$, $\tan \alpha = 0{,}4488$, $\alpha \approx 24{,}18°$ bzw. $\alpha \approx 0{,}42$ rad

$f'(x) = 0{,}84 - 0{,}12 \cdot x$, $0 = 0{,}81 - 0{,}12 \cdot x$, $x = 7$, $f(7) = 2{,}94$

Die maximale Höhe der Kugel betrug 2,94 m.

(b) $f : y = 0{,}84 \cdot x - 0{,}06 \cdot x^2$

Abstoßpunkt: Höhe 2,1 m

$2{,}1 = 0{,}84 \cdot x - 0{,}06 \cdot x^2$, ($x_1 \approx 3{,}26$), $x_2 \approx 10{,}74$

Nullstellen: $0 = 0{,}84 \cdot x - 0{,}06 \cdot x^2$, ($x_1 = 0$) und $x_2 = 14$

$14 - 3{,}26 = 10{,}74$

Die Wurfweite der Kugel war 10,74 m.

Die Wurfweite wird bestimmt durch die rechte Nullstelle der Parabel:

$$0 = \tan \beta \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2 \beta} \cdot x^2$$

$$0 = x \cdot \left(\tan \beta - \frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2 \beta} \cdot x \right)$$

$$x = \frac{\tan \beta \cdot 2v_0^2 \cdot \cos^2 \beta}{g}$$

Bei größerem g wird die Wurfweite kleiner. Es liegt eine indirekte Proportionalität vor.

(c) $f'(x) = 0{,}84 - 0{,}12 \cdot x$, $f'(0) = k$, $\tan\beta = k$, $\beta \approx 40{,}04° < 45°$

Da der Winkel β ungleich 45° ist, könnte der Athlet durch Veränderung des Abstoßwinkels eine größere Wurfweite erzielen.

Die Berechnung von Beta kann auch graphisch mit Hilfe von Technologie erfolgen.

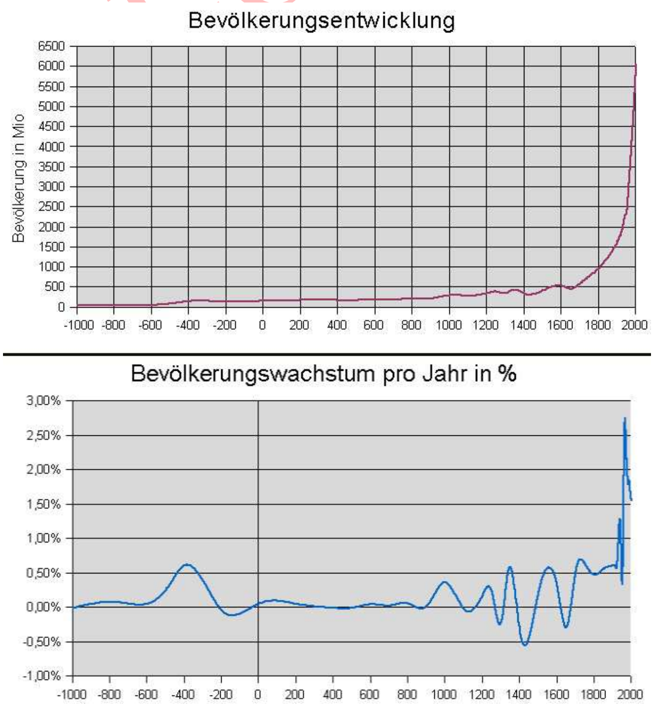
---

24 - MAT - AN 1.1, FA 2.2, FA 5.2, FA 5.3, FA 5.6, WS 1.1, WS 1.2 - Bevölkerungsentwicklung - BIFIE Aufgabensammlung

24. Die Weltbevölkerung ist in den vergangenen Jahrhunderten unterschiedlich stark gewachsen. Für die weitere Entwicklung bis zum Ende dieses Jahrhunderts gibt es unterschiedliche Prognosen. ____/0

Abbildung 1 zeigt die Bevölkerungsentwicklung in den vergangenen 3 000 Jahren.
Abbildung 2 zeigt die Bevölkerungsentwicklung von 1750 bis 2010.
Abbildung 3 zeigt die Bevölkerungsentwicklung von 1950 bis 2010.

Die untenstehende Tabelle zeigt die Bevölkerungsentwicklung nach Kontinenten und Subkontinenten von 1900 bis 2000.



Quelle: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/8a/World-pop-hist-de-2.png

Abbildung 1

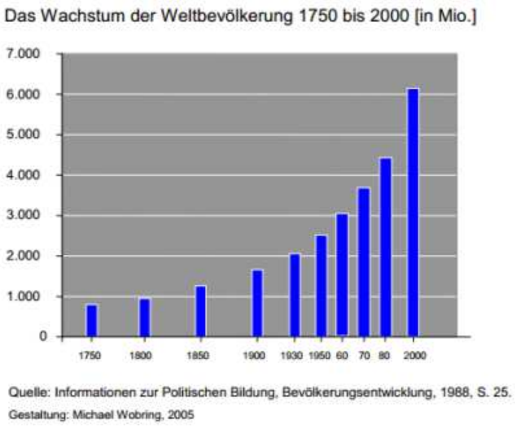


Abbildung 2

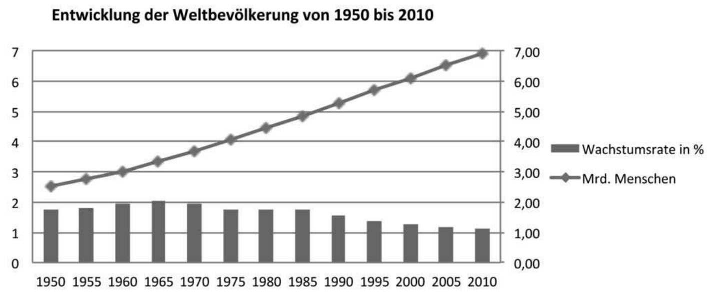


Abbildung 3

Jahr	Afrika	Asien	Europa	Lateinamerika	Nordamerika	Ozeanien
1900	133	925	430	74	82	6
1950	227	1 403	547	167	172	13
1975	419	2 379	676	323	242	21
2000	819	3 698	727	521	319	31

Aufgabenstellung:

(a) Ermittle anhand der Abbildungen, um wie viele Menschen die Weltbevölkerung von 1600 bis 18000 zugenommen hat!

Nenne zwei Zeiträume, in denen die Weltbevölkerung mindesten 100 Jahre lang abgenommen hat, und begründe ihre Antwort!

(b) Die Weltbevölkerung hat von 1930 bis 1980 annähernd exponentiell zugenommen. Berechne unter dieser Annahme für diesen Zeitraum die jährliche Wachstumsrate auf Zehntelprozent genau!

(c) Begründe anhand der jährlichen Wachstumsraten aus Abbildung 3, warum die Entwicklung der Weltbevölkerung von 1950 bis 2010 nicht durch eine Exponentialfunktion beschrieben werden kann!

Bei konstanter Zunahme der Bevölkerungszahl ab 2010 wird für das Jahr 2050 eine Bevölkerungszahl von 10,4 Milliarden prognostiziert.
Berechne, von welcher jährlichen Zunahme bei dieser Prognose ausgegangen wird! Gib die jährliche Zunahme in Millionen Menschen an!

(d) Angenommen, die absoluten Zahlen der Bevölkerungsentwicklung der Kontinente und Subkontinente im Zeitraum von 1900 bis 2000 werden in einem Säulendiagramm mit linearer Skalierung dargestellt.

Begründe, warum die starke Bevölkerungszunahme in Ozeanien von 1900 bis 2000 in einem solchen Diagramm nicht erkennbar ist!

Gegeben sind fünf Aussagen zur Bevölkerungsentwicklung nach Kontinenten und Subkontinenten von 1900 bis 2000.
Kreuze die zutreffende(n) Aussage(n) an!

Die Bevölkerung Asiens hat sich im 20. Jahrhundert annähernd vervierfacht.	☒
Seit Beginn des 20. Jahrhunderts lebten in Lateinamerika mehr Menschen als in Nordamerika.	
Im Zeitraum von 1975 bis 2000 war die relative Bevölkerungszunahme in Afrika am größten.	☒
In Europa war die Bevölkerungszunahme von 1975 bis 2000 ge- ringer als von 1950 bis 1975.	☒
1950 lebten in Europa und Amerika zusammen bereits mehr als eine Milliarde Menschen.	

Lösungserwartung:

(a) Zunahme von 1600 bis 1800: ca. 500 Millionen Menschen

Die Weltbevölkerung hat mindestens 100 Jahre lang abgenommen in [250 v. Chr.; 50 v. Chr.] (bzw. $[-250; -50]$) und $[1400; 1500]$, da in diesen Zeitintervallen das jährliche Bevölkerungswachstum in % negativ ist.

(b) $N(t) = N_0 \cdot a^t$

$4{,}5 = 2 \cdot a^5 0$

$a \approx 1{,}016$, d.h. Zunahme um 1,6 % pro Jahr

(c) Bei einer exponentiellen Zunahme ist die jährliche Wachstumsrate konstant. Abbildung 3 zeigt, dass diese Voraussetzung im Zeitraum von 1950 bis 2010 nicht erfüllt ist.

Konstante jährliche Zunahme von 2010 bis 2050:
$\frac{10{,}4-6{,}9}{40} = 0{,}0874$ Milliarden $= 87{,}5$ Millionen

(d) Da die Bevölkerungszahl Ozeaniens von 1900 bis 2000 jeweils weniger als 1 % der Bevölkerungszahl Asiens betrug, sind die entsprechenden Säulen

für Ozeanien sehr niedrig (Höhe fast null).
Daher ist die Verfünffachung der Bevölkerungszahl Ozeaniens nicht erkennbar.

Lösung Multiple Choice siehe oben

---

25 - MAT - AN 4.3, AN 1.3, AN 3.3, FA 2.3, AG 2.3, AN 4.3 - Bewegung eines Fahrzeugs - BIFIE Aufgabensammlung

25. Im Folgenden wird die Bewegung eines Fahrzeugs beschrieben: ____/0

In den ersten fünf Sekunden seiner Bewegung fährt es mit einer Momentangeschwindigkeit (in m/s), die durch die Funktion v mit $v(t) = -0{,}8t^2 + 8t$ (mit t in Sekunden) modelliert werden kann. In den folgenden drei Sekunden sinkt seine Geschwindigkeit.
Ab der achten Sekunde bewegt es sich mit einer konstanten Geschwindigkeit von 15 m/s. Nach zehn Sekunden Fahrzeit erkennt der Lenker ein Hindernis in 90 m Entfernung und reagiert eine Sekunde später. Zu diesem Zeitpunkt beginnt er gleichmäßig zu bremsen und schafft es, rechtzeitig beim Hindernis anzuhalten.

Aufgabenstellung:

(a) Interpretiere den Ausdruck $\int_0^5 v(t)\,dt$ im Hinblick auf die Bewegung des Fahrzeugs!

Gib die Bedeutung des Ausdrucks $\frac{\int_0^5 v(t)dt - \int_0^2 v(t)dt}{3}$ im vorliegenden Kontext an!

(b) Interpretiere den Wert $v'(3)$ im Zusammenhang mit der Bewegung des Fahrzeugs! Die Ableitungsfunktion v' ist eine lineare Funktion.

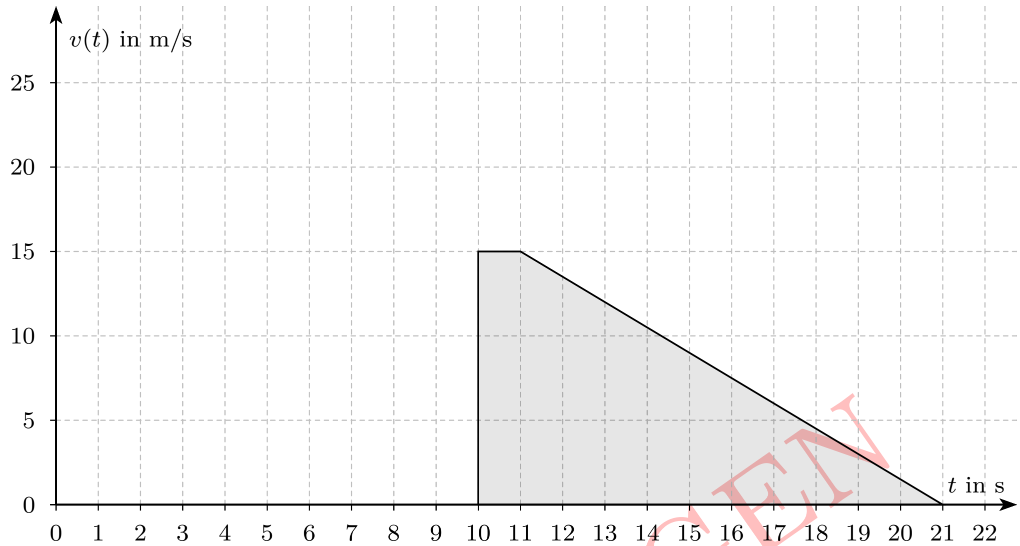
Bestimme ihren Anstieg und gib dessen Bedeutung im Hinblick auf die Bewegung des Fahrzeugs in den ersten fünf Sekunden an!

(c) Ermittle, nach wie vielen Sekunden das Fahrzeug eine Momentangeschwindigkeit von 20 m/s erreicht!

Beschreibe (verbal und/oder mithilfe einer Skizze) den Geschwindigkeitsverlauf in den ersten fünf Sekunden!

(d) Der Anhalteweg setzt sich aus dem Reaktionsweg und dem Bremsweg zusammen. Be- rechnen Sie die Zeit, die vom Einsetzen der Bremswirkung elf Sekunden nach Beginn der Bewegung bis zum Stillstand des Fahrzeugs verstreicht!

Stellen Sie den Geschwindigkeitsverlauf ab dem Zeitpunkt $t = 10$ in der angegebenen Ab- bildung graphisch dar und kennzeichnen Sie den Anhalteweg!



Lösungserwartung:

(a) Das Integral $\int_0^5 v(t)dt$ gibt die Länge des Weges in Metern an, den das Fahrzeug in den ersten fünf Sekunden seiner Bewegung zurücklegt.

Anmerkung: Die Antwort muss die Einheit m und das Zeitintervall beinhalten.

Der Ausdruck $\dfrac{\int_0^5 v(t)dt - \int_0^2 v(t)dt}{3}$ gibt die durchschnittliche Geschwindigkeit in m/s des Fahrzeugs im Zeitintervall $[2; 5]$ an.

Anmerkung: Äquivalente Formulierungen sind zu akzeptieren.

(b) $v(t) = -0{,}8t^2 + 8t$

$v'(t) = -1{,}6t + 8$

$v'(3) = 3{,}2$

Die Beschleunigung 3 Sekunden nach dem Beginn der Bewegung beträgt $3{,}2\,\mathrm{m/s^2}$.

Anmerkung: Der Zeitpunkt und der Begriff „Beschleunigung“ müssen angegeben werden.

Die Beschleunigung nimmt pro Sekunde um $1{,}6\,\mathrm{m/s^2}$ ab.

Anmerkung: Die Einheit $\mathrm{m/s^2}$ muss angegeben werden.

(c) $v(t) = -0{,}8t^2 + 8t = 20$

$-0{,}8t^2 + 8t - 20 = 0 \qquad t_1 = t_2 = 5$

Die Geschwindigkeit steigt im gegebenen Zeitintervall an und erreicht nach 5 Sekunden ihr Maximum von 20 m/s.

Skizzen von Parabeln, die diese Aussage belegen, und äquivalente Formulierungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

Anmerkung: Die Beantwortung der ersten Frage kann auch auf anderem Wege erfolgen. Somit kann daraus auch umgekehrt auf die Anzahl der Lösungen der quadratischen Gleichung, ohne diese zu lösen, geschlossen werden.

(d) $A = 90 = 15 \cdot 1 + \frac{15 \cdot t}{2}$

Der Bremsweg wird in 10 Sekunden zurückgelegt.

Graphik: siehe oben

Auch andere Lösungswege (z.B. mit Formeln aus der Physik) sind zu akzeptieren.

---

26 - MAT - AG 2.1, FA 1.8, FA 1.7, FA 1.8, AG 2.1, FA 1.2 - Hohlspiegel - BIFIE Aufgabensammlung

26. In der Physik spricht man von einem kugelförmigen Hohlspiegel, wenn er Teil einer innenverspiegelten Kugel ist. Charakteristische Punkte beim Hohlspiegel sind der Mittelpunkt M der Kugel, der Scheitelpunkt S und der Brennpunkt F des Spiegels. ____/0

Es gelten folgende Relationen (siehe untenstehende Abbildungen):

Brennweite f des Spiegels: $f = \overline{FS} = \frac{\overline{MS}}{2} (f > 0)$
Radius der Kugel: $\overline{MS} = 2 \cdot f$

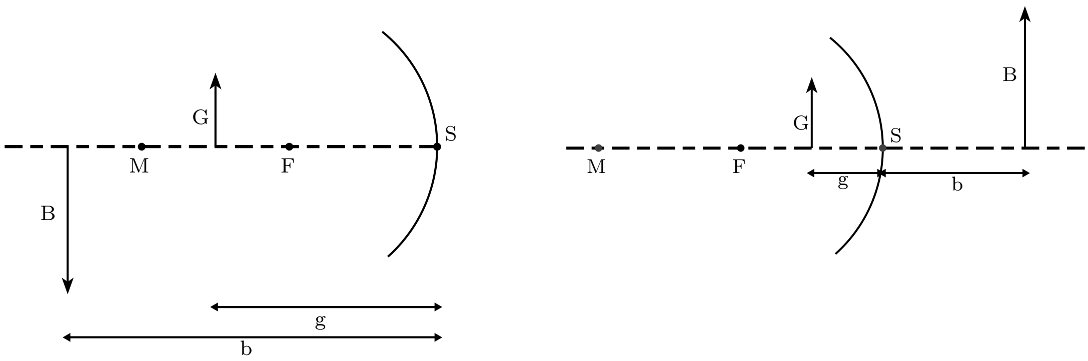
Die Entfernung eines Gegenstands G (mit der Höhe G) vom Scheitelpunkt S wird mit $g\,(g > 0)$ bezeichnet, die Entfernung des nach Reflexion der Strahlen am Spiegel entstehenden Bildes B (mit der Höhe B) vom Scheitel S mit b.

Das Vorzeichen von b hat dabei die folgenden Bedeutungen:

- $b > 0$: Es entsteht ein reelles Bild „vor“ dem Spiegel, das auf einem Schirm aufgefangen werden kann.
- $b < 0$: Es entsteht ein virtuelles Bild „hinter“ dem Spiegel.

Skizzen des Querschnitts:

- linke Grafik: reelles Bild B eines Gegenstandes G ($b > 0$)
- rechte Grafik: virtuelles Bild B eines Gegenstandes G ($b < 0$)



Aufgrund physikalischer Überlegungen gelten unter bestimmten Bedingungen die Beziehungen $\frac{G}{B} = \frac{g}{b}$ und $\frac{G}{B} = \frac{g-f}{f}$. Daraus ergibt sich der Zusammenhang $\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$.

Der Quotient $\frac{B}{G}$ bestimmt den Vergrößerungsfaktor; er ist bei einem reellen Bild positiv ($g > 0$ und $b > 0$) und bei einem virtuellen Bild negativ ($g > 0$ und $b < 0$).

Aufgabenstellung:

(a) Gib den Vergrößerungsfaktor $\frac{B}{G}$ für $f = 40\,\text{cm}$ und $g = 50\,\text{cm}$ an!

Gib ein Intervall für die Gegenstandsweite g an, damit ein virtuelles Bild entsteht!

Begründe deine Antwort durch eine mathematische Argumentation!

(b) Stellen Sie die Bildweite b als Funktion der Gegenstandsweite g bei konstanter Brennweite f dar! Betrachte die Fälle $g = 2f$ sowie $g = f$ und gib die jeweilige Auswirkung für b an!

Was kann mithilfe dieser Funktion über den Grenzwert von b ausgesagt werden, wenn $g > f$ ist und sich g der Brennweite f annähert? Tätige eine entsprechende Aussage und begründe diese durch Betrachtung von Zähler und Nenner!

(c) Leite aus den gegebenen Beziehungen $\frac{G}{B}$ die oben angeführte Formel $\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ her!
Gib die notwendigen Umformungsschritte an!

Der Ausdruck $\frac{1}{b}$ kann als Funktion in Abhängigkeit von g der Form $\frac{1}{b}(g) = a \cdot g^k + c$ betrachtet werden. Gib die Werte der Parameter a und c sowie des Exponenten k für diesen Fall an!

Lösungserwartung:

(a) $\frac{1}{b} = \frac{1}{40} - \frac{1}{50} = \frac{1}{200} \to$ Bildweite 200 cm = 2 m
$\frac{B}{G} = \frac{200}{50} = 4 \to$ vierfache Vergrößerung

Bildweite negativ:

Intervall für g: $(0; f)$ bzw. Angabe des Intervalls durch: $0 < g < f$

Akzeptiert wird auch der Bezug zur ersten Fragestellung mit $f = 40$.

Intervall für g: $(0; 40)$ bzw. $0 < g < 40$

Begründung 1: Aus $b = \frac{g \cdot f}{g - f}$ folgt $g < f$.

Begründung 2: Aus $\frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{g}$ folgt $g < f$, da der Kehrwert von b dann größer ist als der Kehrwert von f.

(b) Funktion: $b(g) = \frac{f \cdot g}{g - f}$

$b(2f) = 2f$; Bildweite und Gegenstandsweite sind gleich groß und entsprechen dem Radius der Kugel. Erweiterung: Auch G und B sind gleich groß.

$b(f)$ existiert nicht; der Nenner hat den Wert 0.

(Auch die Form $b(g) = \dfrac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{g}}$ ist als richtig zu werten.)

Annäherung von g an f mit $g > f$:

Der Ausdruck $\frac{f \cdot g}{g - f}$ ist positiv; der Zähler ist eine positive Zahl (auch: nähert sich dem Wert f^2), der Nenner ist positiv und nähert sich dem Wert 0, daher wird b immer größer (der Grenzwert ist unendlich - oder ähnliche Aussagen).

Anmerkung: Wenn die Form $b(g) = \dfrac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{g}}$ verwendet wird, sind auch umgangssprachliche Formulierungen wie „oben steht die positive Zahl 1, unten steht etwas Positives, das gegen 0 geht, daher ist der Grenzwert $+1$" als richtig zu werten. Auch Argumente, bei denen teilweise oder immer „oben" statt „Zähler" und „unten" statt „Nenner" (oder Ähnliches) verwendet wird, sind als richtig zu werten.

(c) Zwei mögliche Umformungen werden angeführt:

Variante 1:

$\frac{g}{b} = \frac{g-f}{f} \to \frac{g}{b} = \frac{g}{f} - 1 \mid : g$
$\frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{g}$

Variante 2:

$\frac{g}{b} = \frac{g-f}{f} \mid \cdot (b \cdot f)$

$g \cdot f = b \cdot g - f \cdot b \mid : (b \cdot g \cdot f)$

$\frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{g}$

Daraus ergibt sich direkt der angegebene Zusammenhang.

$\frac{1}{b}(g) = \frac{1}{f} - \frac{1}{g} \Rightarrow a = -1, k = -1, c = \frac{1}{f}$

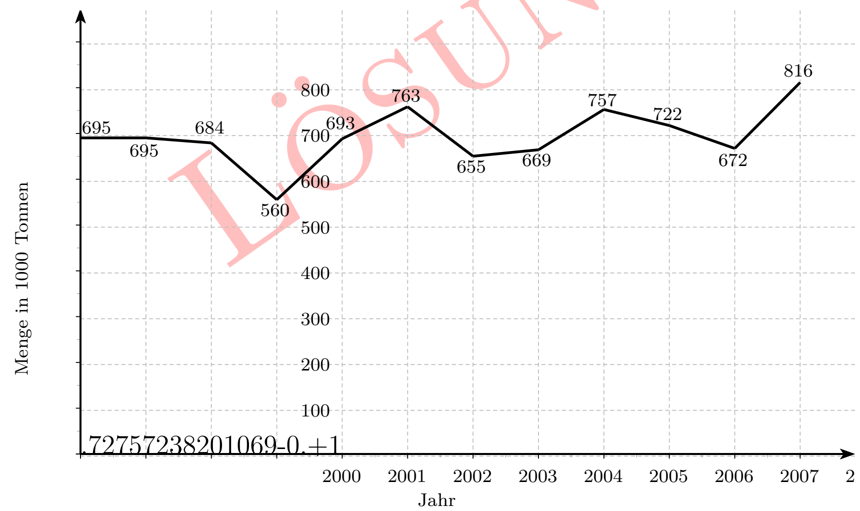
---

27 - MAT - AN 1.1, AN 1.3, FA 2.2, WS 1.2, WS 1.3, WS 1.1 - Kartoffeln in Österreich - BIFIE Aufgabensammlung

27. Die Kartoffel ist weltweit eines der wichtigsten Nahrungsmittel. ____/0

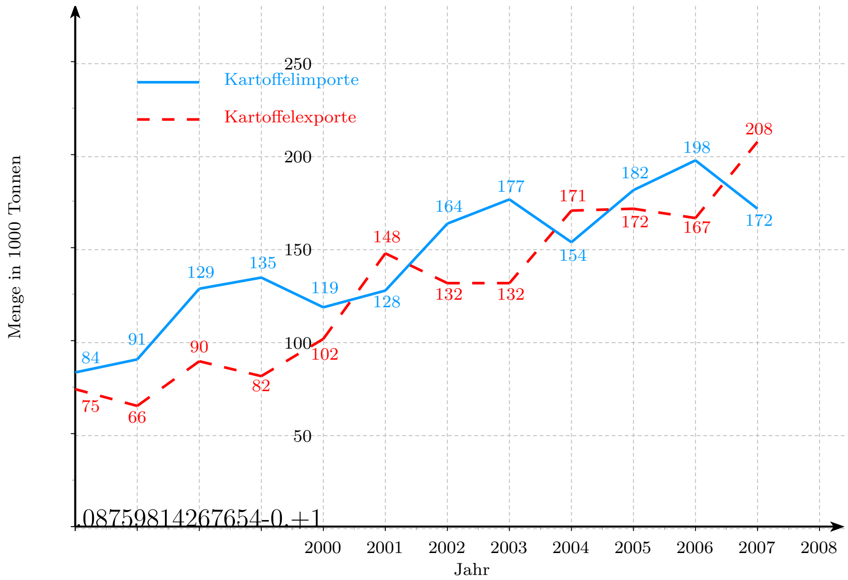
Die nachstehende Grafik zeigt die Entwicklung der Kartoffelerzeugung in Österreich vom Jahr 2000 bis zum Jahr 2011.

Kartoffelerzeugung



In der nachstehenden Abbildung werden Kartoffelexporte und -importe für den gleichen Zeitraum einander gegenübergestellt.

Außenhandel



Aufgabenstellung:

(a) Entnehmen Sie der entsprechenden Graphik, zwischen welchen (aufeinanderfolgenden) Jahren die absolute Zunahme (in Tonnen) und die relative Zunahme (in Prozent) der Erzeugung im Vergleich zum Vorjahr jeweils am größten war! Gib die entsprechenden Werte an!

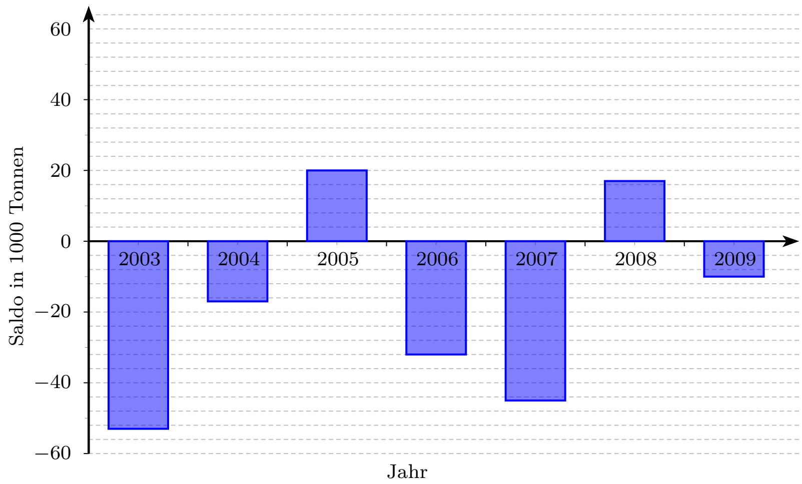
Im vorliegenden Fall fand die größte relative Zunahme der Erzeugung in einem anderen Zeitintervall statt als die größte absolute Zunahme.
Gib eine mathematische Begründung an, warum die größte relative Zunahme und die größte absolute Zunahme einer Größe oder eines Prozesses nicht im gleichen Zeitintervall stattfinden müssen!

(b) Berechne und interpretiere den Ausdruck $\frac{E_{2011}-E_{2000}}{11}$, wobei E_{Jahr} die Exportmenge in einem Kalenderjahr angibt! Gib bei der Interpretation auch die entsprechende Einheit an.

Die Exportentwicklung von 2000 bis 2011 soll durch eine lineare Funktion f approximiert werden, wobei die Variable t die Anzahl der seit 2000 vergangenen Jahre sein soll. Die Funktionswerte für die Jahre 2000 und 2011 sollen dabei mit den in der Graphik angeführten Werten übereinstimmen. Gib eine Gleichung dieser Funktion f an!

(c) Stelle in der nachstehenden Abbildung die Differenz „Export minus Import“ der Mengen an Kartoffeln für die Jahre 2003 bis 2009 in einem Säulendiagramm dar!

Saldo Export-Import

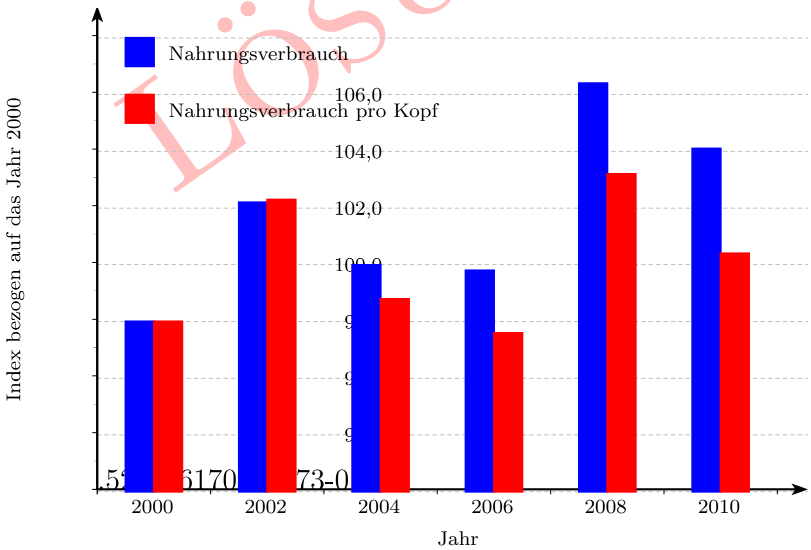


Berechne das arithmetische Mittel dieser Differenz für die genannten Jahre!

(d) Ein Index ist eine statistische Kennziffer, um die Entwicklung von Größen im Zeitverlauf darzustellen. Oft wird der Ausgangswert mit dem Basiswert 100 versehen. Ein Index von 120 bedeutet beispielsweise, dass eine Größe seit dem Basiszeitpunkt um 20 % gestiegen ist.

Die nachstehende Graphik zeigt die Entwicklung der in Österreich verzehrten Kartoffelmenge (Nahrungsverbrauch) bezogen auf das Jahr 2000.

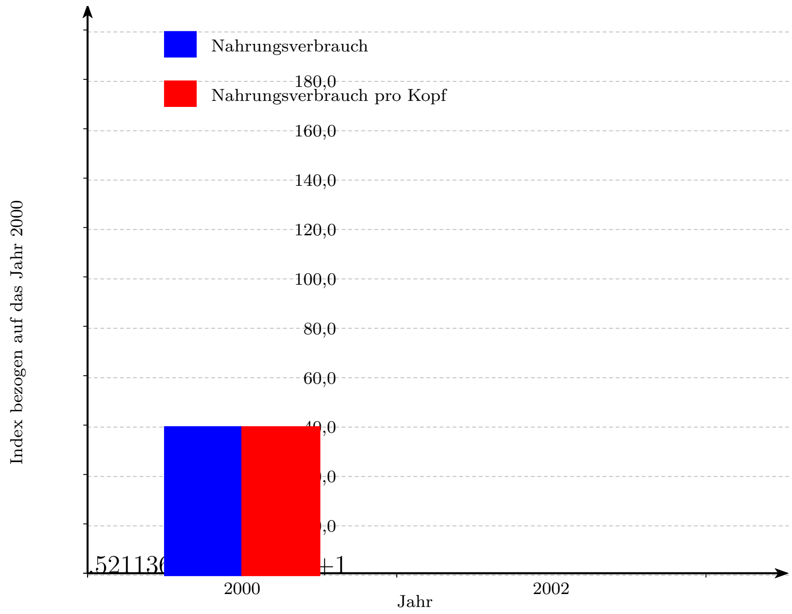
Nahrungsverbrauch



Geben Sie jeweils ein Jahr an, in dem die Einwohnerzahl in Österreich höher bzw. niedriger war als im Jahr 2000! Begründe deine Antwort!

Zeichne in die nachstehende Graphik zwei mögliche Säulen für ein Jahr, in dem der absolute Nahrungsverbrauch niedriger und die Bevölkerungszahl höher war als im Jahr 2000!

Nahrungsverbrauch



Lösungserwartung:

(a) absolute Zunahme zwischen 2003 und 2004: 133 000 Tonnen
absolute Zunahme zwischen 2010 und 2011: 144 000 Tonnen
Die größte absolute Zunahme war im Zeitintervall von 2010 bis 2011.
relative Zunahme zwischen 2003 und 2004: 23,75 %
Lösungsintervall in Prozent: $[23; 24]$
relative Zunahme zwischen 2010 und 2011: ca. 21,43 %
Lösungsintervall in Prozent: $[21; 22]$ Die größte relative Zunahme war zwischen 2003 und 2004.
Da für die Berechnung der relativen Zunahme einer Größe auch der Bezugswert entscheidend ist, müssen größte absolute Zunahme und größte relative Zunahme einer Größe oder eines Prozesses nicht im gleichen Zeitintervall stattfinden. Äquivalente Formulierungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

(b) $\frac{E_{2011}-E_{2000}}{11} \approx 12\,000$ Tonnen pro Jahr.
Die durchschnittliche Zunahme des österreichischen Kartoffelexports beträgt ca. 12 000 Tonnen pro Jahr.
Lösungsintervall: $[12000; 12100]$ Die richtige Einheit muss in der Interpretation vorhanden sein.
f mit $f(t) = 75000 + 12000 \cdot t$ oder $f(t) = 75 + 12 \cdot t$ oder $f(t) = \frac{133}{11} \cdot t + 75$
Jede jährliche Zunahme aus dem oben angeführten Lösungsintervall muss akzeptiert werden.

(c) Lösung Grafik siehe oben

Genauigkeit der Säulenlängen: Toleranzbereich $\pm 5\,000$ Tonnen

arithmetisches Mittel: $\frac{-53-17+20-32-45+17-10}{7} \approx -17$

Lösungsintervall: bei Berechnung in 1 000 Tonnen: $[-18; -16]$; bei Berechnung in Tonnen: $[-18\,000; -16\,000]$

(d)
- niedrigere Einwohnerzahl (als im Jahr 2000) in den Jahren: 2002 (prozentuelle Veränderung des Nahrungsverbrauchs kleiner als jene des Nahrungsverbrauchs pro Kopf)
- höhere Einwohnerzahl (als im Jahr 2000) in den Jahren: 2004, 2006, 2008 und 2010 (prozentuelle Veränderung des Nahrungsverbrauchs größer als jene des Nahrungsverbrauchs pro Kopf)

Die Angabe eines Jahres ist hier ausreichend.

Die Säule für den gesamten Nahrungsverbrauch muss niedriger sein als die Säule für 100% im Jahr 2000. Die Säule für den Nahrungsverbrauch pro Kopf muss bei einer steigenden Bevölkerungszahl niedriger als die Säule für den gesamten Nahrungsverbrauch sein.

---

28 - MAT - AG 2.1, FA 2.1, FA 4.3, AN 1.1, AN 1.3, AN 3.3, AN 4.3 - Saturn-V-Rakete - BIFIE Aufgabensammlung

28. Eine Mehrstufenrakete besteht aus mehreren, oft übereinander montierten „Raketenstufen“. Jede Raketenstufe ist eine separate Rakete mit Treibstoffvorrat und Raketentriebwerk. Leere Treibstofftanks und nicht mehr benötigte Triebwerke werden abgeworfen. Auf diese Weise werden höhere Geschwindigkeiten und somit höhere Umlaufbahnen als mit einstufigen Raketen erreicht. ____/0

Die Familie der Saturn-Raketen gehört zu den leistungsstärksten Trägersystemen der Raumfahrt, die jemals gebaut wurden. Sie wurden im Rahmen des Apollo-Programms für die US- amerikanische Raumfahrtbehörde NASA entwickelt. Die Saturn V ist die größte jemals gebaute Rakete. Mithilfe dieser dreistufigen Rakete konnten in den Jahren 1969 bis 1972 insgesamt 12 Personen auf den Mond gebracht werden. 1973 beförderte eine Saturn V die US-amerikanische Raumstation Skylab in eine Erdumlaufbahn in 435 km Höhe.

Eine Saturn V hatte die Startmasse $m_0 = 2{,}9 \cdot 10^6$ kg. Innerhalb von 160 s nach dem Start wurden die $2{,}24 \cdot 10^6$ kg Treibstoff der ersten Stufe gleichmäßig verbrannt. Diese ersten 160 s werden als Brenndauer der ersten Stufe bezeichnet. Die Geschwindigkeit $v(t)$ (in m/s) einer Saturn V kann t Sekunden nach dem Start während der Brenndauer der ersten Stufe näherungsweise durch die Funktion v mit

$$v(t) = 0{,}0000000283 \cdot t^5 - 0{,}00000734 \cdot t^4 + 0{,}000872 \cdot t^3 - 0{,}00275 \cdot t^2 + 2{,}27 \cdot t$$

beschrieben werden.

Aufgabenstellung:

(a) Berechne die Beschleunigung einer Saturn V beim Start und am Ende der Brenndauer der ersten Stufe!

Gib an, ob die Beschleunigung der Rakete nach der halben Brenndauer der ersten Stufe kleiner oder größer als die mittlere Beschleunigung (= mittlere Änderungsrate der Geschwindigkeit) während der ersten 160 Sekunden des Flugs ist! Begründe deine Antwort anhand des Graphen der Geschwindigkeitsfunktion!

(b) Berechnen Sie die Länge des Weges, den eine Saturn V 160 s nach dem Start zurückgelegt hat!

Begründe, warum in dieser Aufgabenstellung der zurückgelegte Weg nicht mit der Formel „Weg = Geschwindigkeit mal Zeit“ berechnet werden kann!

(c) Berechne denjenigen Zeitpunkt t_1 für den gilt: $v(t_1) = \frac{v(0)-v(160)}{2}$.

Interpretiere t_1 und $v(t_1)$ im gegebenen Kontext!

(d) Beschreibe die Abhängigkeit der Treibstoffmasse m_T (in Tonnen) der Saturn V von der Flugzeit t während der Brenndauer der ersten Stufe durch eine Funktionsgleichung!

Gib die prozentuelle Abnahme der Gesamtmasse einer Saturn V für diesen Zeitraum an!

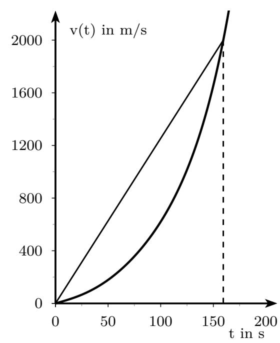
(e) Nach dem Gravitationsgesetz wirkt auf eine im Abstand r vom Erdmittelpunkt befindliche Masse m die Gravitationskraft $F = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$, wobei G die Gravitationskonstante und M die Masse der Erde ist.

Deute das bestimmte Integral $\int_{r_1}^{r_2} F(r)\,\mathrm{d}r$ im Hinblick auf die Beförderung der Raumstation Skylab in die Erdumlaufbahn und beschreibe, welche Werte dabei für die Grenzen r_1 und r_2 einzusetzen sind!

Begründe anhand der Formel für die Gravitationskraft, um welchen Faktor sich das bestimmte Integral $\int_{r_1}^{r_2} F(r)\,\mathrm{d}r$ ändert, wenn ein Objekt mit einem Zehntel der Masse von Skylab in eine Umlaufbahn derselben Höhe gebracht wird.

Lösungserwartung:

(a) $a(0) = v'(0) = 2{,}27\,\mathrm{m/s^2}$
$a(160) = v'(160) = 40{,}83\,\mathrm{m/s^2}$



Bestimmt man die zur Sekante parallele Tangente, so liegt die Stelle des zugehörigen Berührpunktes rechts von $t = 80$. Aus der Linkskrümmung der Funktion v folgt daher, dass die Beschleunigung nach 80 Sekunden kleiner als die mittlere Beschleunigung im Intervall $[0\,s; 160\,s]$ ist.
Weitere mögliche Begründung:
Die mittlere Beschleunigung (= Steigung der Sekante) in $[0; 160]$ ist größer als die Momentanbeschleunigung (= Steigung der Tangente) bei $t = 80$.

(b) $s(160) = \int_0^{160} v(t)\,\mathrm{d}t \approx 93\,371$
zurückgelegter Weg nach $160\,s$: 93 371
$s = v \cdot t$ gilt nur bei konstanter Geschwindigkeit. Die Geschwindigkeit der Saturn V ändert sich allerdings mit der Zeit.

(c) $v(0) = 0\,m/s; \quad v(160) \approx 2\,022\,m/s$
$v(t_1) = 1\,011 \Rightarrow t_1 \approx 125\,s$
Die Geschwindigkeit ist nach $125\,s$ halb so groß wie nach $160\,s$.

(d) $m_T(t) = 2\,240 - 14 \cdot t$
$\frac{2{,}24}{2{,}9} \approx 0{,}77$
Die Gesamtmasse hat um 77 % abgenommen.

(e) Das Ergebnis gibt die Arbeit an, die nötig ist, um die Raumstation Skylab in die entsprechende Erdumlaufbahn zu bringen.
r_1 ist der Erdradius, r_2 ist die Summe aus Erdradius und Höhe der Umlaufbahn.
Die Gravitationskraft und somit auch die Arbeit sind direkt proportional zur Masse des Objekts. Die erforderliche Arbeit ist daher nur ein Zehntel des Vergleichswertes.

Lösungsschlüssel:

(a) Ein Punkt für die richtige Berechnung der beiden Beschleunigungswerte.
Toleranzintervall für $a(0):\ [2{,}2\,m/s^2; 2{,}3\,m/s^2]$
Toleranzintervall für $a(160):\ [40\,m/s^2; 42\,m/s^2]$
Ein Punkt für eine sinngemäß richtige Begründung laut Lösungserwartung.

(b) Ein Punkt für die richtige Berechnung des zurückgelegten Weges.
Toleranzintervall: $[93\,000\,m; 94\,000\,m]$
Ein Punkt für eine sinngemäß richtige Begründung laut Lösungserwartung.

(c) Ein Punkt für die richtige Berechnung des Zeitpunkts t_1.
Toleranzintervall: $[124\,s; 126\,s]$
Ein Punkt für eine sinngemäß richtige Deutung der beiden Werte laut Lösungserwartung.

(d) Ein Punkt für die Angabe einer richtigen Funktionsgleichung.
Äquivalente Schreibweisen sind als richtig zu werten.
Ein Punkt für die Angabe des richtigen Prozentsatzes.
Toleranzintervall: $[77\,\%; 78\,\%]$

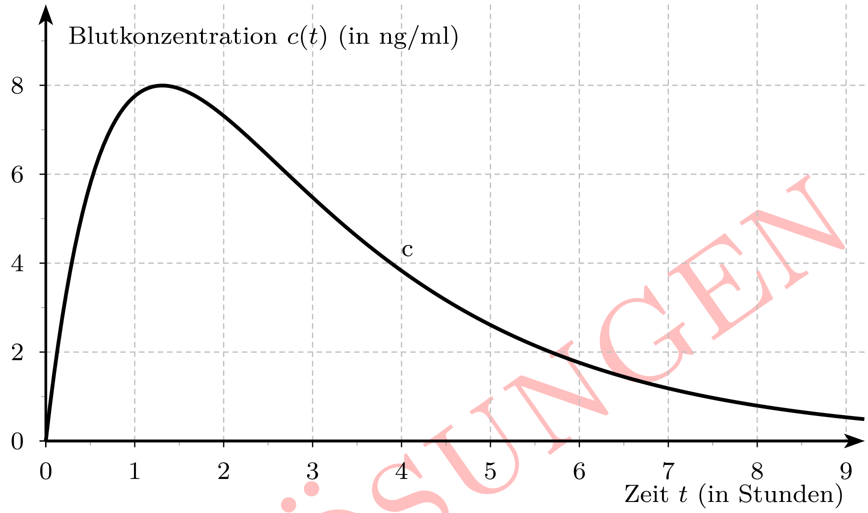
(e) Ein Punkt für die richtige Deutung des bestimmten Integrals und die richtige Beschreibung der Werte der beiden Grenzen.
Ein Punkt für eine richtige Begründung, um welchen Faktor sich das Ergebnis ändert.
Die direkte Proportionalität zwischen Masse und Gravitationskraft muss dabei sinngemäß erwähnt werden.

---

29 - MAT - AG 2.1, FA 1.2, AN 2.1, AN 3.3 - Aufnahme einer Substanz ins Blut - Saturn-V-Rakete - BIFIE Aufgabensammlung

29. Wenn bei einer medizinischen Behandlung eine Substanz verabreicht wird, kann die Konzentration der Substanz im Blut (kurz: Blutkonzentration) in Abhängigkeit von der Zeit t in manchen Fällen durch eine sogenannte Bateman-Funktion c mit der Funktionsgleichung $c(t) = d \cdot (\boldsymbol{e}^{-a \cdot t} - \boldsymbol{e}^{-b \cdot t})$ mit den Parametern $a, b, d \in \mathbb{R}$ und $a, b, d > 0$ modelliert werden. Die Zeit t wird in Stunden gemessen, $t = 0$ entspricht dem Zeitpunkt der Verabreichung der Substanz. ____/0
Die Bioverfügbarkeit f gibt den Anteil der verabreichten Substanz an, der unverändert in den Blutkreislauf gelangt. Bei einer intravenösen Verabreichung

beträgt der Wert der Bioverfügbarkeit 1.
Das Verteilungsvolumen V beschreibt, in welchem Ausmaß sich die Substanz aus dem Blut ins Gewebe verteilt.
Der Parameter d ist direkt proportional zur verabreichten Dosis D und zur Bioverfügbarkeit f, außerdem ist d indirekt proportional zum Verteilungsvolumen V.
Die nachstehende Abbildung zeigt exemplarisch den zeitlichen Verlauf der Blutkonzentration in Nanogramm pro Milliliter (ng/ml) für den Fall der Einnahme einer bestimmten Dosis der Substanz Lysergsäurediethylamid.



Dieser zeitliche Verlauf wird durch die Bateman-Funktion c mit den Parametern $d = 19{,}5$, $a = 0{,}4$ und $b = 1{,}3$ beschrieben.
Der Graph der Bateman-Funktion nähert sich für große Zeiten t wie eine Exponentialfunktion asymptotisch der Zeitachse an.

Aufgabenstellung:

(a) Berechne für die in der Einleitung angegebene Bateman-Funktion denjenigen Zeitpunkt, zu dem die maximale Blutkonzentration erreicht wird! Gib dazu die Gleichung der entsprechenden Ableitungsfunktion und den Ansatz in Form einer Gleichung an!

Begründe allgemein, warum der Wert des Parameters d in der Bateman-Funktion nur die Größe der maximalen Blutkonzentration beeinflusst, aber nicht den Zeitpunkt, zu dem diese erreicht wird!

(b) Kreuze diejenige Formel an, die den Zusammenhang zwischen dem Parameter d der Bateman-Funktion und den in der Einleitung beschriebenen

Größen V, D und f korrekt beschreibt! Der Parameter λ ist dabei ein allgemeiner Proportionalitätsfaktor.

$d = \lambda \cdot \frac{D}{V \cdot f}$	
$d = \lambda \cdot \frac{D \cdot V}{f}$	
$d = \lambda \cdot \frac{V \cdot f}{D}$	
$d = \lambda \cdot \frac{D \cdot f}{V}$	☒
$d = \lambda \cdot \frac{V}{D \cdot f}$	
$d = \lambda \cdot \frac{f}{V \cdot D}$	

Bei einem konstanten Wert des Parameters d und der Bioverfügbarkeit f kann man die verabreichte Dosis D als Funktion des Verteilungsvolumens V auffassen. Beziehe dich auf die von dir angekreuzte Formel und gib für die in der Einleitung dargestellte Bateman-Funktion und für den Fall einer intravenösen Verabreichung die Funktionsgleichung $D(V)$ der Funktion D an! Gib an, um welchen Funktionstyp es sich bei D handelt!

Lösungserwartung:

(a) $c(t) = 19{,}5 \cdot (\boldsymbol{e}^{-0{,}4 \cdot t} - \boldsymbol{e}^{-1{,}3 \cdot t})$

$c'(t) = 19{,}5 \cdot (-0{,}4 \cdot \boldsymbol{e}^{-0{,}4 \cdot t} + 1{,}3 \cdot \boldsymbol{e}^{-1{,}3 \cdot t}) = 0 \Rightarrow t \approx 1{,}31$ Stunde

Mögliche Begründung:

Für die Berechnung des Zeitpunktes der maximalen Blutkonzentration muss die Gleichung $c'(t) = 0$ nach t gelöst werden. Da der Parameter d in der Funktion c eine multiplikative Konstante ist und bei der Berechnung der ersten Ableitung von c unverändert bleibt, beeinflusst er nicht die Lösungsmenge dieser Gleichung. Für die Berechnung der Größe der maximalen Blutkonzentration muss in die Funktion c eingesetzt werden, und deshalb beeinflusst der Wert von d dieses Ergebnis.

oder:

$c'(t) = d \cdot (-a \cdot \boldsymbol{e}^{-a \cdot t} + b \cdot \boldsymbol{e}^{-b \cdot t}) = 0 \Rightarrow t = \frac{\ln(a) - \ln(b)}{a - b}$

Der Parameter d tritt in dieser Formel nicht auf, t ist also von d unabhängig.

(b) Lösung Multiple Choice siehe oben

Die Funktionsgleichung lautet: $D(V) = \frac{19{,}5}{\lambda} \cdot V$; dabei handelt es sich um eine lineare Funktion.

---

30 - MAT - AG 2.1, FA 4.1, FA 4.3, FA 5.1, FA 5.6, AN 1.1, AN 1.4, WS 1.3 - Waldbewirtschaftung - BIFIE Aufgabensammlung

30. Der Holzbestand eines durchschnittlichen Fichtenwaldes in Österreich beträgt $350\,m^3$ pro Hektar Waldfläche. Pro Jahr ist mit einem durchschnittlichen Zuwachs von 3,3 % zu rechnen. Bei einer nachhaltigen Bewirtschaftung, wie sie in Österreich vorgeschrieben ist, soll der Holzbestand des Waldes gleich bleiben oder leicht zunehmen. ____/0

Der nachstehenden Grafik kann die Entwicklung des Holzpreises bei Fichtenholz im Zeitraum von 1995 bis 2011 entnommen werden.

Holzpreis bei Fichtenholz in € $/m^3$

Aufgabenstellung:

(a) Bestimme das maximale Holzvolumen (in m^3/ha), das bei einer nachhaltigen Bewirtschaftung pro Jahr geschlägert werden darf!

Berechne, um wie viel Prozent der Holzbestand eines durchschnittlichen Fichtenwaldes innerhalb von 10 Jahren zunimmt, unter der Annahme, dass keinerlei Schlägerungen vorgenommen werden, alle anderen genannten Rahmenbedingungen jedoch unverändert bleiben!

(b) Der Holzbestand eines 20 ha großen Fichtenwaldes wird in einem Zeitraum von 15 Jahren jährlich jeweils am Ende des Jahres (nachdem der jährliche Zuwachs abgeschlossen ist) um 10 m^3 pro Hektar (also um 200 m^3) verringert.

Ermitteln Sie den Holzbestand des Fichtenwaldes nach Ablauf von 15 Jahren!

Gib an, ob bei dieser Art der Bewirtschaftung der Holzbestand des Fichtenwaldes trotz Schlägerung exponentiell zunimmt, und begründe deine Entscheidung!

(c) Ermittel für den Zeitraum 2003 bis 2011 die empirische Standardabweichung des Holzpreises entsprechend der Formel

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}$$

Dabei werden mit x_i die Beobachtungswerte und mit $\overline{x}$ das arithmetische Mittel der Beobachtungswerte bezeichnet. Lies die dazu notwendigen Daten aus der Grafik ab!

Begründen Sie anhand der Grafik, warum die empirische Standardabweichung des Holzpreises für den Zeitraum 1998 bis 2004 kleiner ist als die empirische Standardabweichung für den Zeitraum 2005 bis 2011!

(d) Die Entwicklung des Holzpreises soll für den Zeitraum von 2009 bis 2011 durch eine Funktion P mit $P(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ modelliert werden. Der Holzpreis $P(t)$ wird in € $/m^3$ angegeben, die Zeitrechnung beginnt mit dem Jahr 2009 und erfolgt in der Einheit „Jahre“.

Führe die Modellierung auf Basis der Daten für die Jahre 2009, 2010 und 2011 durch und begründe, warum der Parameter a negativ sein muss!

Ermittle eine Prognose für den in der Grafik nicht angegebenen Holzpreis für das Jahr 2012 mithilfe dieser Modellfunktion!

(e) Bestimme für den Zeitraum von 1995 bis 2011 die absoluten Holzpreisänderungen aufeinanderfolgender Jahre!

Gib dasjenige Intervall [Jahr 1; Jahr 2] an, in dem sich der Holzpreis prozentuell am stärksten ändert!

Lösungserwartung:

(a) $350 \cdot 0{,}033 = 11{,}55$
Jährlich dürfen bei einer nachhaltigen Bewirtschaftung maximal 11,55 m^3/ha Holz geschlägert werden.
$1{,}033^{10} \approx 1{,}384$
Unter der Annahme, dass keine Schlägerungen erfolgen, nimmt der Holzbestand innerhalb von zehn Jahren um ca. 38,4 % zu.

(b) Tabelle:

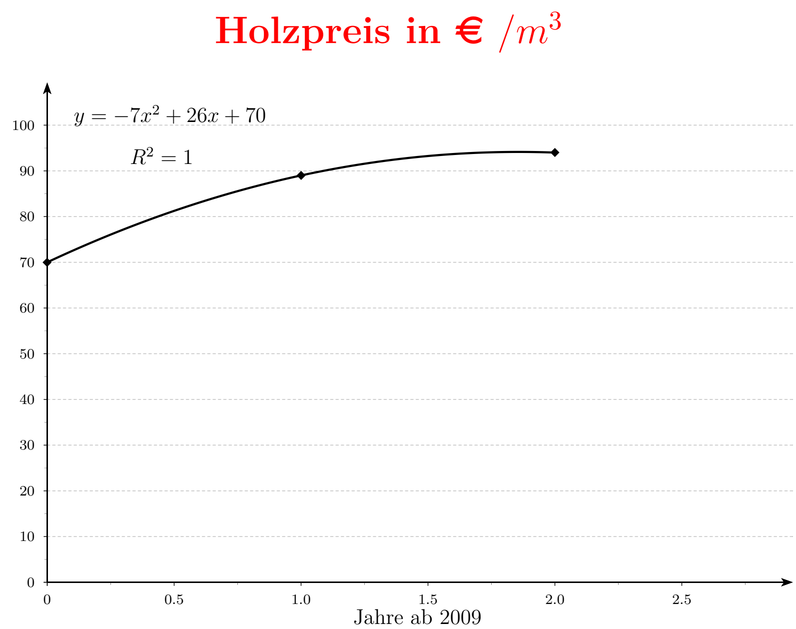
Jahr	Holzbestand in m^3
0	7 000
1	7 031
2	7 063,023
3	7 096,102759
4	7 130,27415
5	7 165,573197
6	7 202,037112
7	7 239,704337
8	7 278,61458
9	7 318,808861
10	7 360,329554
11	7 403,220429
12	7 447,526703
13	7 493,295085
14	7 540,573822
15	7 589,412759

Wenn der Holzbestand eines 20 ha großen Fichtenwaldes jährlich jeweils am Ende des Jahres um 10 m^3 pro Hektar verringert wird, beträgt er nach Ablauf von 15 Jahren ca. 7 589,41 m^3.

Bei dieser Art der Bewirtschaftung nimmt der Holzbestand nicht exponentiell zu, da das jährliche prozentuelle Wachstum nicht konstant ist.

(c) Die empirische Standardabweichung beträgt ca. 9,91 € /m^3.
Im Zeitraum von 1998 bis 2004 ist die empirische Standardabweichung des Holzpreises kleiner als im Zeitraum von 2005 bis 2011, da die Schwankungen der Werte des Holzpreises im Zeitraum von 1998 bis 2004 geringer sind.

(d) $P(t) = -7 \cdot t^2 + 26 \cdot t + 70$



Der Wert des Parameters a muss negativ sein, weil der Graph der Modellfunktion eine nach unten geöffnete Parabel ist.

Prognosewert für das Jahr 2012:

$P(3) = 85$ € $/m^3$

(e) Tabelle:

Jahr	Holzpreis in € $/m^3$	absolute Änderungen	prozentuelle Änderungen
1995	76		
1996	64	-12	-15,79
1997	73	9	14,06
1998	78	5	6,85
1999	79	1	1,28
2000	73	-6	-7,59
2001	73	0	0
2002	74	1	1,37
2003	66	-8	-10,81
2004	68	2	3,03
2005	69	1	1,47
2006	76	7	10,14
2007	76	0	0
2008	69	-7	-9,21
2009	70	1	1,45
2010	89	19	27,14
2011	94	5	5,62

Im Zeitraum $[2009; 2010]$ ändert sich der Holzpreis prozentuell am stärksten.

---

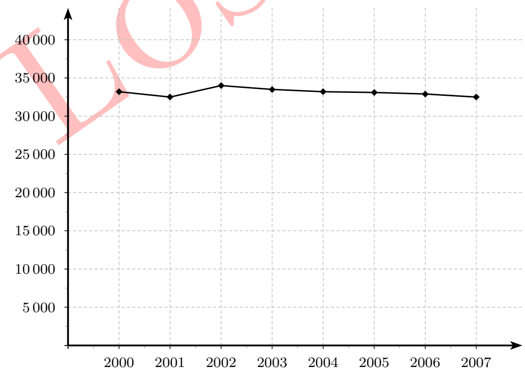
31 - MAT - WS 1.1, WS 1.3 - Hallenbad - Matura 2013/14 Haupttermin

31. Das örtliche Hallenbad einer kleinen Gemeinde veröffentlicht Anfang 2008 in der Gemeindezeitschrift eine Statistik über die jährlichen Besucherzahlen und die Anzahl der offenen Tage für die letzten acht Jahre: ____/0

Jahr	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Besucherzahlen	33 200	32 500	34 000	33 500	33 200	33 100	32 900	32 500
offene Tage	197	192	200	195	193	190	186	180

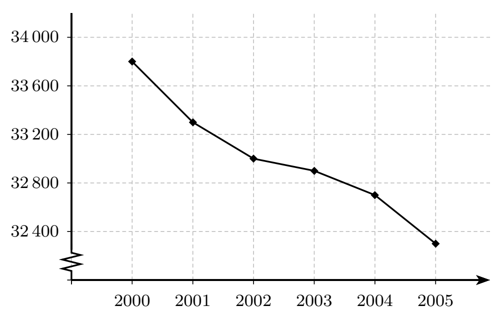
Das Hallenbad bedarf einer Renovierung. Im Gemeinderat steht nun die Entscheidung an, ob Geld in das Hallenbad investiert oder das Hallenbad geschlossen werden soll. Im Vorfeld der Entscheidung veröffentlichen zwei örtliche Gemeinderatsparteien - Partei A und Partei B - folgende Diagramme in ihren Parteizeitschriften:

Besucherzahlen 2000-2007



Partei A

Besucherzahlen 2000-2007



Partei B

Aufgabenstellung:

(a) Gib für jede Partei eine passende Botschaft an, wie mit dem jeweiligen Diagramm bezogen auf die Entwicklung der Besucherzahlen transportiert werden soll!

Partei A: ____________________

Partei B: ____________________

(b) Partei B hat bei der grafischen Darstellung verschiedene Manipulationen eingesetzt, um die Entwicklung der Besucherzahlen aus ihrer Sicht darzustellen.

Beschreibe zwei dieser angewandten Manipulationen!

(c) $\boxed{\text{A}}$ Ermittle die Besucherzahlen pro Öffnungstag (gerundet auf ein eine Nachkommastelle) für die entsprechenden Jahre!

Jahr	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
BesucherInnen pro Tag								

Formuliere eine dazu passende Aussage in Bezug auf die bevorstehende Entscheidung im Gemeinderat!

(a) **Lösungserwartung:**

Partei A: Das Hallenbad muss renoviert werden, da die Besucherzahlen über die letzten Jahre annähernd konstant geblieben sind.

Partei B: Das Hallenbad soll nicht renoviert werden, da die Besucherzahlen in den letzten Jahren stark abgenommen haben.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine richtige Aussage zu Partei A.

- Ein Punkt für eine richtige Aussage zu Partei B.
  Zulässig sind auch andere Formulierungen, die den Kern der Aussagen treffen.

(b) **Lösungserwartung:**

- Die senkrechte Achse beginnt bei null, allerdings ist der erste Abschnitt bis zum ersten Skalierungswert verkürzt dargestellt.
- Änderung/"Verfeinerung" der Skalierung
- Die x-Achsen-Skala beginnt mit 2002, daher fällt „der ansteigende Teil" in der Graphik weg (vgl. Anstieg der Besucherzahlen lt. Partei A).

Lösungsschlüssel:

Zwei Punkte: je ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekt angeführte Manipulation.

(c) **Lösungserwartung:**

Jahr	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
BesucherInnen pro Tag	168,5	169,3	170,0	171,8	172,0	174,2	176,9	180,6

Investitionen in das Hallenbad lohnen sich, denn in den letzten acht Jahren stieg die Zahl der täglichen Besucher/innen jedes Jahr an.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die richtigen Werte in der Tabelle. Die Angabe einer Null nach dem Komma (z. B.: 170,0) kann entfallen.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Antwort

---

32 - MAT - AG 2.1, FA 1.2, AN 1.3, AN 2.1 - Zustandsgleichung idealer Gase - Matura 2013/14 Haupttermin

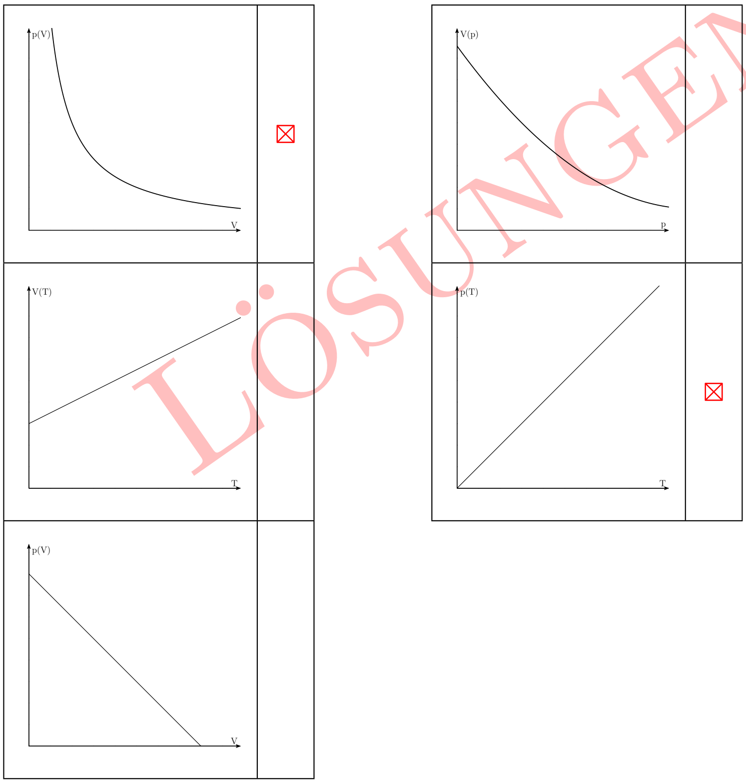
32. Die Formel $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$ beschreibt modellhaft den Zusammenhang zwischen dem Druck p, dem Volumen V, der Stoffmenge n und der absoluten Temperatur T eines idealen Gases und wird thermische Zustandsgleichung idealer Gase ____/0

genannt. R ist eine Konstante.
Das Gas befindet sich in einem geschlossenen Gefäß, in dem die Zustandsgrößen p, V und T verändert werden können. Die Stoffmenge n bleibt konstant.

Aufgabenstellung:

(a) Führe alle Möglichkeiten an, die zu einer Verdopplung des Drucks führen, wenn jeweils eine der Zustandsgrößen verändert wird und die anderen Größen konstant bleiben!

Genau zwei der folgenden Graphen stellen die Abhängigkeit zweier Zustandsgrößen gemäß dem oben genannten Zusammenhang richtig dar. Kreuze diese beiden Graphen an! Beachte: Die im Diagramm nicht angeführten Größen sind jeweils konstant.



(b) Bei gleichbleibender Stoffmenge und gleichbleibender Temperatur kann das Volumen des Gases durch Änderung des Drucks variiert werden.

Begründe, warum die mittlere Änderung des Drucks in Abhängigkeit vom Volumen

$$\frac{p(V_2) - p(V_1)}{V_2 - V_1}$$

für jedes Intervall $[V1; V2]$ mit $V1 \neq V2$ ein negatives Ergebnis liefert!

Ermittle jene Funktionsgleichung, die die momentane Änderung des Druckes in Abhängigkeit vom Volumen des Gases beschreibt!

(a) **Lösungserwartung:**

Volumen halbieren oder Temperatur verdoppeln. (Lösung Multiple Choice - siehe oben)

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die korrekte Angabe beider Möglichkeiten, die zu einer Verdoppelung des Drucks führen, wobei beide Möglichkeiten angegeben werden müssen.
- Ein Punkt für das ausschließliche Ankreuzen der beiden richtigen Graphen.

(b) **Lösungserwartung:**

Mögliche Begründungen:

Der Druck nimmt mit steigendem Volumen ab. Die Funktion ist streng monoton fallend.

$$\left.\begin{aligned} p(V_2) < p(V_1) \\ V_2 > V_1 \end{aligned}\right\} \text{Daher ist der Quotient negativ.}$$

$p'(V) = -\frac{n \cdot R \cdot T}{V^2}$ beschreibt die momentane Druckänderung.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Begründung.
- Ein Punkt für die Ermittlung der Funktionsgleichung für die Druckänderung. Die Schreibweise $p'(V)$ muss nicht verwendet werden. Wichtig ist, dass der Funktionsterm stimmt und eine funktionale Schreibweise verwendet wird.

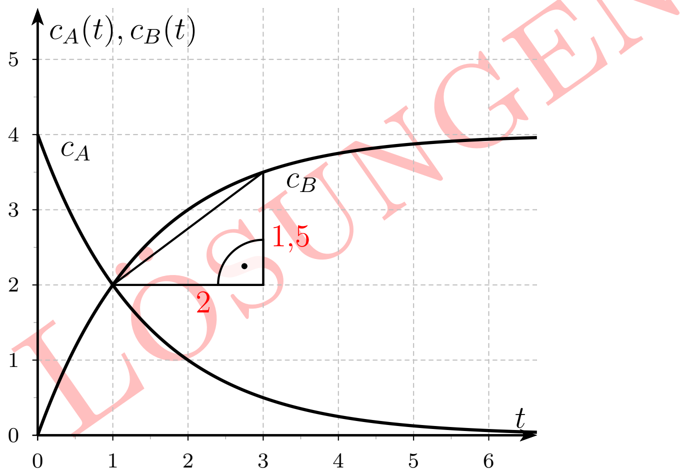
33 - MAT - AN 1.2, AN 1.3. FA 5.3, FA 5.5 - Chemische Reaktionsgeschwindigkeit - Matura 2013/14 Haupttermin

33. Die Reaktionsgleichung $A \to B + D$ beschreibt, dass ein Ausgangsstoff A zu den Endstoffen B und D reagiert, wobei aus einem Molekül des Stoffes A jeweils ein Molekül der Stoffe B und D gebildet wird. ____/0

Die Konzentration eines chemischen Stoffes in einer Lösung wird in Mol pro Liter (mol/L) angegeben. Die Geschwindigkeit einer chemischen Reaktion ist als Konzentrationsänderung eines Stoffes pro Zeiteinheit definiert.

Die unten stehende Abbildung zeigt den Konzentrationsverlauf der Stoffe A und B bei der gegebenen chemischen Reaktion in Abhängigkeit von der Zeit t.

$c_A(t)$ beschreibt die Konzentration des Stoffes A, $c_B(t)$ die Konzentration des Stoffes B. Die Zeit t wird in Minuten angegeben.



Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Ermittle anhand der Abbildung die durchschnittliche Reaktionsgeschwindigkeit des Stoffes B im Zeitintervall $[1; 3]$!

Für die gegebene Reaktion gilt die Gleichung $c'_A(t) = -c'_B(t)$. Interpretiere diese Gleichung im Hinblick auf den Reaktionsverlauf!

(b) Bei der gegebenen Reaktion kann die Konzentration $c_A(t)$ des Stoffes A in Abhängigkeit von der Zeit t durch eine Funktion mit der Gleichung $c_A(t) = c_0 \cdot e^{k \cdot t}$ beschrieben werden.

Gib die Bedeutung der Konstante c_0 an! Argumentiere anhand des Verlaufs des Graphen von c_A, ob der Parameter k positiv oder negativ ist!

Leite eine Formel für jene Zeit τ her, nach der sich die Konzentration des Ausgangsstoffes halbiert hat! Gib auch den entsprechenden Ansatz an!

(a) **Lösungserwartung:**

$\frac{1,5}{2} = 0{,}75 \, \frac{\text{Mol}}{\text{Liter} \cdot \text{Minute}}$

Mögliche Interpretation:

Die Konzentration von A nimmt zu jedem Zeitpunkt gleich stark ab, wie die Konzentration von B zu diesem Zeitpunkt zunimmt.

Oder:

Die beiden Reaktionsgeschwindigkeiten sind zu jedem Zeitpunkt betragsmäßig gleich groß.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für das Ermitteln der durchschnittlichen Reaktionsgeschwindigkeit. Jedes Ergebnis, das im Intervall $[0{,}7; 0{,}8]$ liegt, ist als richtig zu werten. Die Einheit muss nicht angegeben werden. Falls ein richtiges Ergebnis mit einer falschen Einheit angegeben ist, so ist die Aufgabe als richtig gelöst zu werten.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) richtige Deutung der momentanen Änderungsraten der Konzentrationen der Stoffe A und B.

(b) **Lösungserwartung:**

c_0 ist die Anfangskonzentration des Stoffes zum Zeitpunkt $t = 0$. Für den Ausgangsstoff A ist der Graph (bzw. die Funktion) streng monoton fallend, d.h., der Parameter k im Exponenten der Exponentialfunktion muss negativ sein.

Möglicher Ansatz:

$\frac{c_0}{2} = c_0 \cdot e^{k \cdot \tau}$

und/oder

$\frac{1}{2} = e^{k \cdot \tau}$

$\ln(\frac{1}{2}) = k \cdot \tau$

$\tau = \dfrac{\ln(\frac{1}{2})}{k}$ oder $\tau = \frac{-\ln(2)}{k}$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die Deutung von c_0 und eine (sinngemäß) korrekte Argumentation, warum der Parameter k negativ ist.
- Ein Punkt für den richtigen Ansatz und das richtige Ergebnis für τ.

Auch der Ansatz $\frac{c_0}{2} = c_0 \cdot e^{-k \cdot \tau}$ mit der Lösung $\tau = \frac{\ln(2)}{k}$ ist als richtig zu werten.

---

34 - MAT - FA 1.3, AN 1.2, AN 1.3, FA 2.4 - Grenzkosten - Matura 2013/14 Haupttermin

34. Unter den Gesamtkosten eines Betriebes versteht man alle Ausgaben (z.B. Löhne, Miete, Strom, Kosten für Rohstoffe usw.), die für die Produktion anfallen. Mit mathematischen Mitteln können die Kostenverläufe beschrieben werden, die für Betriebe strategische Entscheidungshilfen sind. ____/0

Die Gleichung der Gesamtkostenfunktion K eines bestimmten Produkts lautet:

$K(x) = 0{,}001x^3 - 0{,}09x^2 + 2{,}8x + 5$

x ... produzierte Stückanzahl

Aufgabenstellung:

(a) Die Stückkostenfunktion $\overline{K}$ beschreibt die Gesamtkosten pro Stück bei einer Produktionsmenge von x Stück.

$\boxed{\text{A}}$ Gib eine Gleichung der Stückkostenfunktion $\overline{K}$ für das oben beschriebene Produkt an! Berechne die Stückkosten bei einer Produktion von 100 Stück!

(b) Der Wert der Grenzkostenfunktion K' an einer bestimmten Stelle x wird als Kostenzuwachs bei der Steigerung der Produktion um ein Stück interpretiert. Diese betriebswirtschaftliche Interpretation ist im Allgemeinen mathematisch nicht exakt.

Gib das mathematisch korrekte Änderungsmaß an, das der angestrebten Interpretation entspricht!

Für welche Art von Kostenfunktionen ist die betriebswirtschaftliche Interpretation der Grenzkostenfunktion gleichzeitig auch mathematisch exakt? Gib diesen Funktionstyp an!

(a) **Lösungserwartung:**

$\overline{K} = \frac{0{,}001 \cdot x^3 - 0{,}09 \cdot x^2 + 2{,}8x + 5}{x} = 0{,}001 \cdot x^2 - 0{,}09 \cdot x + 2{,}8 + 5 \cdot x^{-1}$

$\overline{K}(100) = 3{,}85$

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die korrekte Stückkostenfunktion, wobei der Funktionsterm nicht vereinfacht werden muss.
- Ein Punkt für die korrekte Berechnung des Funktionswertes (sollte die Stückkostenfunktion zwar im Ansatz richtig, aber in der Vereinfachung fehlerhaft berechnet worden sein, jedoch der Funktionswert dann korrekt berechnet worden sein, ist dieser Punkt zu geben).

(b) **Lösungserwartung:**

Der Differenzenquotient $\frac{K(x+1)-K(x)}{(x+1)-x} = K(x+1) - K(x)$ bzw. die absolute Änderung $K(x+1)-K(x)$ wäre mathematisch korrekt (anstatt des Differenzialquotienten). Für eine lineare Kostenfunktion ist die betriebswirtschaftliche Interpretation der Grenzkostenfunktion gleichzeitig auch mathematisch exakt.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für das korrekte Änderungsmaß. Eine der beiden Möglichkeiten muss zumindest begrifflich angeführt sein. Die formale Definition des Differenzenquotienten kann gegebenenfalls nachgesehen werden.
  Anmerkung: Der betriebswirtschaftlich eigentlich genutzte Differenzialquotient gibt die momentane Änderungsrate an einer bestimmten Stelle an. Die betriebswirtschaftliche Interpretation bezieht sich aber auf eine Änderungsrate (= Kostenzuwachs) bei einer Produktionssteigerung um eine Gütereinheit - also eigentlich auf die Änderungsrate in einem Intervall $[x; x+1]$, weswegen die Verwendung des Differenzenquotienten bzw. der absoluten Änderung mathematisch korrekt ist. (Geometrisch wird die Sekantensteigung durch die Tangentensteigung ersetzt.)
- Ein Punkt für die korrekte Angabe des Funktionstyps. (Auch graphische Überlegungen - ein Graph einer linearen Funktion - gelten als richtige Antwort.)

35 - MAT - AN 1.2, AN 2.1, AN 4.2, AN 4.3, FA 2.1, FA 2.2 - Sportwagen - Matura 2013/14 Haupttermin

35. Ein Sportwagen wird von 0 m/s auf 28 m/s (≈ 100 km/h) in ca. 4 Sekunden beschleunigt. $v(t)$ beschreibt die Geschwindigkeit in Metern/Sekunde während des Beschleunigungsvorganges in Abhängigkeit von der Zeit t in Sekunden. Die Geschwindigkeit lässt sich durch die Funktionsgleichung $v(t) = -0{,}5t^3 + 3{,}75t^2$ angeben. ____/0

Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Gib die Funktionsgleichung zur Berechnung der momentanen Beschleunigung $a(t)$ zum Zeitpunkt t an! Berechne die momentane Beschleunigung zum Zeitpunkt $t = 2$!

(b) Gib einen Ausdruck zur Berechnung des in den ersten 4 Sekunden zurückgelegten Weges an! Ermittle diesen Weg $s(4)$ (in Metern)!

(c) Angenommen, dieser Sportwagen beschleunigt - anders als ursprünglich angegeben - gleichmäßig in 4 Sekunden von 0 m/s auf 28 m/s. Nun wird mit $v_1(t)$ die Geschwindigkeit des Sportwagens nach t Sekunden bezeichnet. Gib an, welcher funktionale Zusammenhang zwischen v_1 und t vorliegt! Ermittle die Funktionsgleichung für v_1!

(a) **Lösungserwartung:**

$a(t) = v'(t) = -1{,}5 \cdot t^2 + 7{,}5 \cdot t$
$a(2) = -1{,}5 \cdot 2^2 + 7{,}5 \cdot 2 = 0 \Rightarrow a(2) = 0\, m/s^2$

Auch die Berechnung über den Differenzenquotienten mit korrektem Grenzwertübergang ist zulässig.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt, wenn $a(t)$ als 1. Ableitung der Geschwindigkeitsfunktion korrekt bestimmt wurde.
- Ein Punkt für die korrekte Berechnung des Ergebnisses. Sollte $a(t)$ im Ansatz richtig (aber fehlerhaft) aufgestellt worden sein, die Berechnung aber in weiterer Folge korrekt sein, dann ist dieser Punkt zu geben.

(b) **Lösungserwartung:**

$s(4) = \int_0^4 v(t)\mathrm{d}t = \int_0^4 (-0{,}5 \cdot t^3 + 3{,}75 \cdot t^2)\mathrm{d}t$
$s(4) = \int_0^4 (-0{,}5 \cdot t^3 + 3{,}75 \cdot t^2)\mathrm{d}t = (-0{,}125 \cdot t^4 + 1{,}25 \cdot t^3)\Big|_0^4 = 48 \Rightarrow s(4) = 48$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt, wenn der Ansatz $s(4) = \int_0^4 v(t)\mathrm{d}t$ mit dem bestimmten Integral inklusive der richtigen Grenzen vorhanden ist
- Ein Punkt für das richtige Ergebnis. Sollte das bestimmte Integral im Ansatz richtig (aber fehlerhaft) aufgestellt worden sein, die Berechnung aber in weiterer Folge korrekt sein, dann ist dieser Punkt zu geben.

Lösungserwartung:

Es liegt ein linearer funktionaler Zusammenhang vor.
$v_1(t) = \frac{28}{4} \cdot t + 0 = 7 \cdot t$

Lösungsschlüssel:

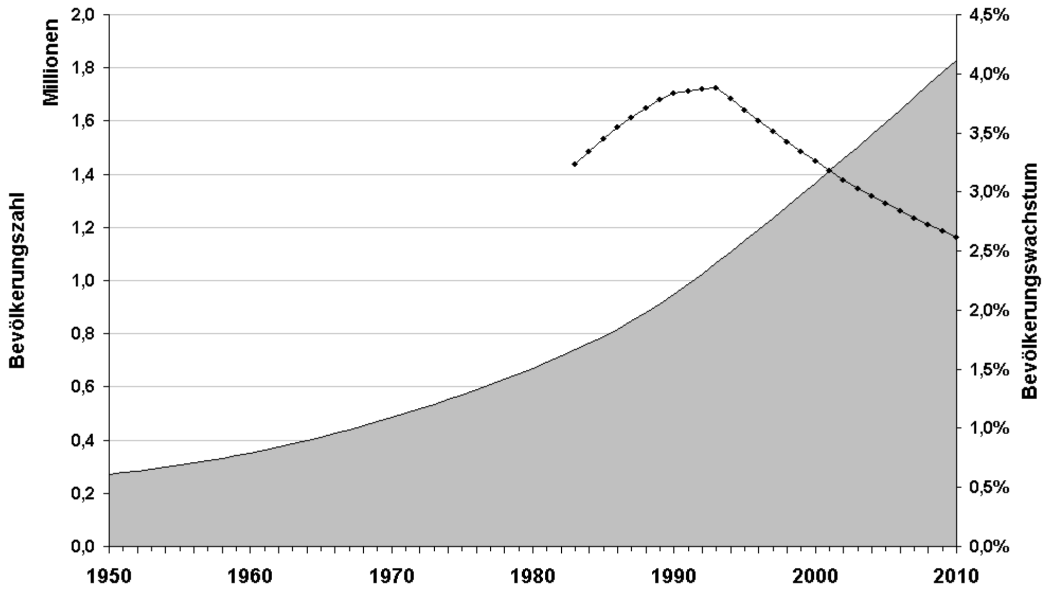
(c)
- Ein Punkt, wenn erkannt wurde, dass ein linearer Zusammenhang vorliegt, und dieser angegeben wurde (entweder textlich oder auch in Form einer Funktionsgleichung). Dieser Punkt ist auch zu geben, wenn zwar ein linearer Zusammenhang erkannt wurde, aber die Funktionsgleichung falsch aufgestellt wurde.
- Ein Punkt, wenn die Funktionsgleichung mit den korrekten Parametern aufgestellt wurde.

---

36 - MAT - FA 5.1, FA 5.3, FA 5.6, - Länderporträt Gambia - Matura 2013/14 1. Nebentermin

36. Gambia ist eine Republik in Westafrika, die an den Ufern des Gambiaflusses liegt. Mit Ausnahme eines kurzen Küstenabschnittes an der Mündung des Flusses in den Atlantischen Ozean wird Gambia vollständig vom Staat Senegal umschlossen. Mit einer Fläche von ungefähr 11 000 Quadratkilometern ist das Land einer der kleinsten Staaten des afrikanischen Kontinents. Das untenstehende Diagramm gibt Auskunft über die Bevölkerungsentwicklung in Gambia seit dem ____/0

Jahr 1950. Die durchgezogene Linie beschreibt die Bevölkerungszahl von 1950 bis 2010 in Millionen Einwohnerinnen/Einwohnern. Die Punkte der gepunkteten Linie geben das jährliche Bevölkerungswachstum von 1983 bis 2010 in Prozent an.



Aufgabenstellung:

(a) Um eine Prognose für die weitere Entwicklung der Bevölkerungszahl machen zu können, wird angenommen, dass die Wachstumsrate aus dem Jahr 2010 in den nachfolgenden Jahren konstant bleibt. Berechnen Sie näherungsweise mithilfe der Bevölkerungszahl des Jahres 2010, wie viele Jahre nach 2010 die Bevölkerungszahl von Gambia den Wert von 2,2 Mio. EinwohnerInnen unter dieser Annahme übersteigen wird!

Betrachte den Graphen des Bevölkerungswachstums und entscheide, in welchen vier aufeinanderfolgenden Jahren von 1983 bis 2010 sich die Bevölkerungszahl am besten durch eine einzige Exponentialfunktion beschreiben lässt! Begründe deine Antwort!

(b) Unter der Bevölkerungsdichte eines Landes versteht man die mittlere Anzahl der EinwohnerInnen pro km^2. In Österreich lag dieser Wert im Jahr 2010 bei 100 EinwohnerInnen pro km^2.

$\boxed{\text{A}}$ Berechne für das Jahr 2010, um wie viel Prozent die Bevölkerungsdichte in Gambia größer war als in Österreich!

Für den Zeitraum 1950-1990 lässt sich die Bevölkerungszahl $N(t)$ (in Mio.

EinwohnerInnen) von Gambia annähernd durch die Gleichung

$$N(t) = 0{,}2806 \cdot e^{0{,}03 \cdot t}$$

beschreiben. Dabei wird t in Jahren ab 1950 gemessen. Deute den Faktor 0,2806 im Hinblick auf die Bevölkerungszahl in Gambia und bestimme die Bevölkerungsdichte von Gambia für das Jahr 1973 nach diesem Modell!

(a) **Lösungserwartung:**

Ansatz: $2{,}2 = a \cdot b^t$, wobei der Wert für a aus dem Intervall $[1{,}8; 1{,}85]$ und der Wert für b aus dem Intervall $[1{,}025; 1{,}027]$ gewählt werden muss. Das Ergebnis für t liegt demnach im Intervall $[6{,}5; 8{,}2]$.

Für die Jahre 1990 bis 1993 lässt sich die Bevölkerungszahl am besten durch eine einzige Exponentialfunktion beschreiben, da die Prozentwerte des Bevölkerungswachstums annähernd konstant sind.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine korrekte Berechnung.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Begründung. Die Lösung muss inhaltlich der Lösungserwartung entsprechen. Alle Vierjahresintervalle zwischen 1989 und 1994 sind (im Hinblick auf die Ablesegenauigkeit) zulässig.

(b) **Lösungserwartung:**

Ansatz: $\frac{a \cdot 1\,000\,000}{11\,000}$, wobei der Wert für a aus dem Intervall $[1{,}8; 1{,}85]$ gewählt werden muss. Das Ergebnis für die Bevölkerungsdichte liegt demnach im Intervall $[163{,}6; 168{,}2]$.

Die Antwort auf die Frage, um wie viel Prozent die Bevölkerungsdichte in Gambia größer war als in Österreich, muss daher im Intervall $[63\,\%; 70\,\%]$ liegen.

Der Faktor 0,2806 beschreibt die Bevölkerungszahl in Gambia im Jahr 1950 (in Mio. Einwohner/innen).

$\frac{N(23) \cdot 1\,000\,000}{11\,000} \approx 50{,}86$

Die Bevölkerungsdichte von Gambia für das Jahr 1973 liegt bei ca. 50,86 Einwohner/innen/km^2.

Lösungsschlüssel:

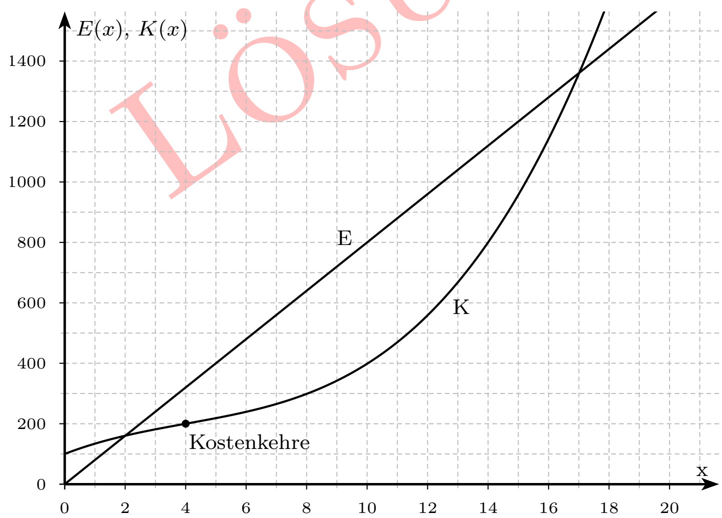
- Ein Augleichspunkt für eine korrekte Berechnung.
- Ein Punkt für eine korrekte Berechnung und (sinngemäß korrekte Deutung der Bevölkerungsdichte von Gambia für das Jahr 1973. Lösungsintervall: $[50; 51]$. Die Interpretation des Faktors muss sinngemäß der Lösungserwartung entsprechen.

---

37 - MAT - AN 1.3, FA 1.5, FA 2.2, FA 2.1, FA 1.6 - Kosten und Erlös - Matura 2013/14 1. Nebentermin

37. Die für einen Betrieb anfallenden Gesamtkosten bei der Produktion einer Ware können annähernd durch eine Polynomfunktion K beschrieben werden. Die lineare Funktion E gibt den Erlös (Umsatz) in Abhängigkeit von der Stückzahl x an. ____/0

Die Stückzahl x wird in Mengeneinheiten $[ME]$ angegeben, die Produktionskosten $K(x)$ und der Erlös $E(x)$ werden in Geldeinheiten $[GE]$ angegeben.



Man spricht von einer Kostendegression, wenn der Produktionskostenzuwachs bei einer Erhöhung der Anzahl der erzeugten Mengeneinheiten immer kleiner wird. Man spricht von einer Kostenprogression, wenn der Produktionskostenzuwachs bei einer Erhöhung der Anzahl der erzeugten Mengeneinheiten immer größer wird.

Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Berechne den durchschnittlichen Kostenanstieg pro zusätzlich produzierter Mengeneinheit im Intervall $[10; 14]$!

Gib dasjeniger Intervall an, in dem ein degressiver Kostenverlauf vorliegt!

(b) Gib den Verkaufspreis pro Mengeneinheit an!

Stelle eine Gleichung der Erlösfunktion E auf!

(c) Interpretiere die x-Koordinate der Schnittpunkte des Graphen der Kostenfunktion K mit dem Graphen der Erlösfunktion E und gib die Bedetung des Bereichs zwischen den beiden Schnittpunkten für das Unternehmen an!

Gib den Gewinn an, wenn 10 Mengeneinheiten produziert und verkauft werden!

(a) **Lösungserwartung:**

$K(10) = 400, K(14) = 800, \dfrac{K(14) - K(10)}{14 - 10} = 100$

Der durchschnittliche Kostenanstieg beträgt im Intervall $[10ME; 14ME]$ 100 GE/ME. Kostendegression im Intervall: $[0; 4)$.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für eine korrekte Berechnung des Differenzenquotienten.
- Ein Punkt für die Angabe des korrekten Intervalls (es sind sowohl offene, geschlossene als auch halboffene Intervalle zulässig).

(b) **Lösungserwartung:**

Der Verkaufspreis beträgt 80 GE pro ME.

$E(x) = 80 \cdot x$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die korrekte Angabe des Verkaufspreises.
- Ein Punkt, wenn $E(x)$ richtig angegeben ist.

(c) **Lösungserwartung:**

Die Kosten und der Erlös sind gleich hoch, daher wird kein Gewinn erzielt. Die x-Koordinaten der Schnittpunkte geben die Gewinnschwellen an. Bei einer Menge x, die sich zwischen den beiden Gewinnschwellen befindet, macht das Unternehmen Gewinn.

$K(10) = 400$, $E(10) = 800$; das Unternehmen macht einen Gewinn von 400 GE.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine richtige Interpretation der Schnittpunkte und des Bereiches zwischen den Stellen der Schnittpunkte. Sinngemäß gleichwertige Aussagen sind als richtig zu werten.
- Ein Punkt für die korrekte Berechnung des Gewinns.

---

38 - MAT - FA 5.3, FA 5.6, FA 5.5 - Bakterienkultur - Matura 2013/14 1. Nebentermin

38. Eine Petrischale hat die Form eines oben offenen, geraden Drehzylinders geringer Höhe. ____/0

In einer Petrischale mit einem Durchmesser von 55 mm wird eine Bakterienkultur gezüchtet. Die von Bakterien bedeckte Fläche $A(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t wird modellhaft durch $A(t) = 3 \cdot 1{,}05^t$ beschrieben. Dabei ist die Zeit t in Stunden und die Fläche $A(t)$ in Quadratmillimetern angegeben.

Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Ergänze die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine mathematisch korrekte Aussage entsteht!

Gemäß dem gegebenen Wachstumsprozess bedecken die Bakterien am Beginn eine Fläche von _____(1)_____ , und diese Fläche nimmt pro Stunde um _____(2)_____ zu.

①	
1,05 mm²	☐
3 mm²	☒
$3 \cdot 1{,}05\,\text{mm}^2$	☐

②	
1,05 %	☐
3 %	☐
5 %	☒

Beschreibe, an welche Grenzen das gegebene exponentielle Wachstumsmodell für die von Bakterienkultur bedeckte Fläche stößt!

(b) Berechne, nach wie vielen Stunden sich die Fläche der Bakterienkultur verdoppelt hat!

Erkläre und begründe mithilfe der durchgeführten Rechnung oder allgemein, welche Auswirkung eine Änderung der anfangs von Bakterien bedeckten Fläche auf die Verdopplungszeit für diese Fläche hat!

(a) **Lösungserwartung:**

Dem vorliegenden exponentiellen Wachstum bzgl. der Fläche der Bakterienkultur wird durch die Größe der Petrischale (ca 2 376 mm²) eine Grenze gesetzt.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt ist nur dann zu geben, wenn für beide Lücken ausschließlich der jeweils richtige Satzteil angekreuzt ist.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Beschreibung. Korrekt sind alle Antworten, die erläutern, dass kein unbeschränktes Wachstum innerhalb der Petrischale möglich ist.

(b) **Lösungserwartung:**

Verdopplungzeit: $t = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}05)} \approx 14{,}21$

Die Verdoppelungszeit beträgt ca. 14 Stunden.

Begründung:

Bei der Berechnung der Verdoppelungszeit t sieht man, dass das Ergebnis vom Anfangswert $A(0) = 3$ unabhängig ist (er fällt durch Gleichungsumformungen weg), z.B.:

$2 \cdot 3 = 3 \cdot 1{,}05^t \qquad | : 3$

$2 = 1{,}05^t \Rightarrow t = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}05)}$ oder:

Wenn in jeder Stunde gleich viele Prozent dazukommen, dann dauert es immer - also unabhängig von der Anfangsmenge - gleich lang, bis 100 % dazugekommen sind.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine korrekte Berechnung. Toleranzintervall: $[14; 15]$.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Begründung. Auch andere Berechnungen mit einer Variablen (z. B.: a anstelle von 1,05, $A(0)$ anstelle von 3) oder selbst anderer Bezeichnung für $A(t)$ (z. B.: $N(t)$), die die Unabhängigkeit von t vom Anfangswert (hier $A(0)$) zeigen, gelten als richtig.

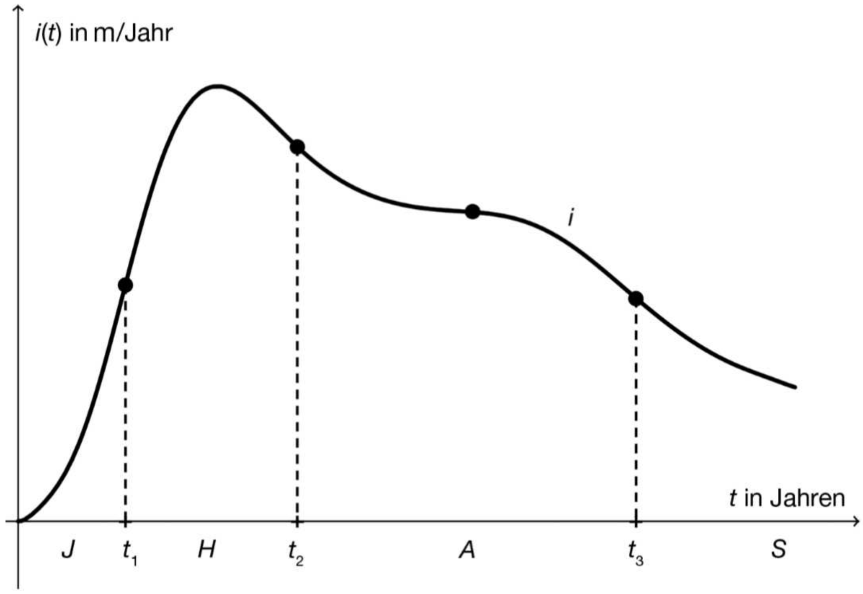
---

39 - MAT - FA 2.5, AN 4.3, FA 1.5, - Baumwachstum - Matura 2013/14 1. Nebentermin

39. Beim Wachstum von Bäumen wird die Zunahme der Höhe, des Durchmessers, der Grundfläche, des Volumens und der Baumkronenhöhe des Baumes beobachtet. ____/0

Die untenstehende Abbildung zeigt einen typischen Verlauf des Graphen einer Wachstumsgeschwindigkeitsfunktion von Bäumen. Die vier eingezeichneten Punkte markieren Wendepunkte des Graphen der Wachstumsgeschwindigkeitsfunktion i.

Beim Höhenwachstum des Baumes werden vier Phasen unterschieden. Auf die Jugendphase J $(0 \leq t \leq t_1)$ folgt die Hauptphase H $(t_1 \leq t \leq t_2)$, darauf folgt die Altersphase A $(t_2 \leq t \leq t_3)$ und schließlich die Senilitätsphase S. t ist das Lebensalter des Baumes in Jahren. $i(t)$ wird in Metern pro Jahr angegeben.



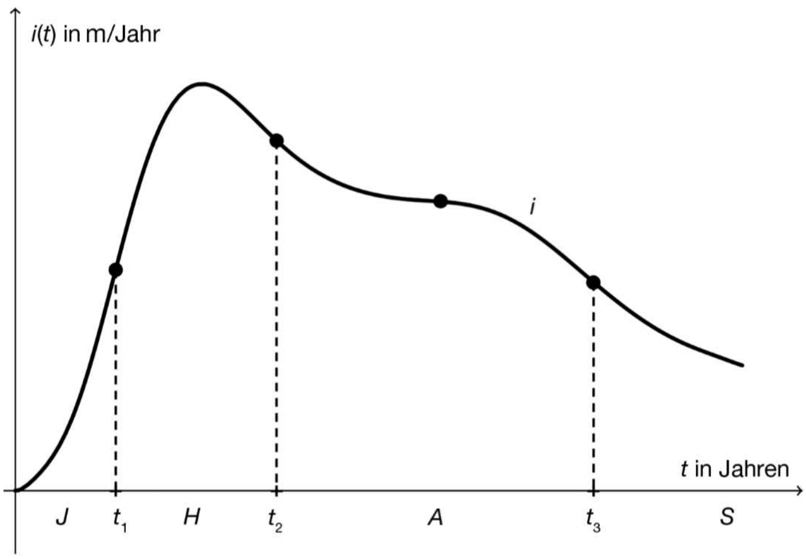
(Quelle: http://www.wsl.ch/forest/waldman/vorlesung/ww_tk32.ehtml [21 05 2014] (adaptiert))

Aufgabenstellung:

(a) Bestimme anhand der Abbildung, in welcher der vier Wachstumsphasen sich ein längerer Zeitraum befindet, in welchem die Höhe des Baumes annähernd linear zunimmt, und begründe deine Auswahl!

Gib unter Verwendung der Wachstumsgeschwindigkeitsfunktion i einen mathematischen Ausdruck an, der die Höhe des Baumes am Beginn der Senilitätsphase (also zum Zeitpunkt t_3) beschreibt!

(b) Markiere in der nachstehenden Abbildung diejenige Stelle t^* auf der t-Achse (in der Hauptphase H), für die $i'(t^*) = 0$ gilt! Formuliere eine Aussage über das Höhenwachstum des Baumes an der Stelle t^*!



Während der Jugendphase ist die Wachstumsgeschwindigkeitsfunktion i monoton steigend, während der Altersphase ist i monoton fallend. Interpretiere dieses Monotonieverhalten im Hinblick auf das Höhenwachstum des Baumes!

(a) **Lösungserwartung:**

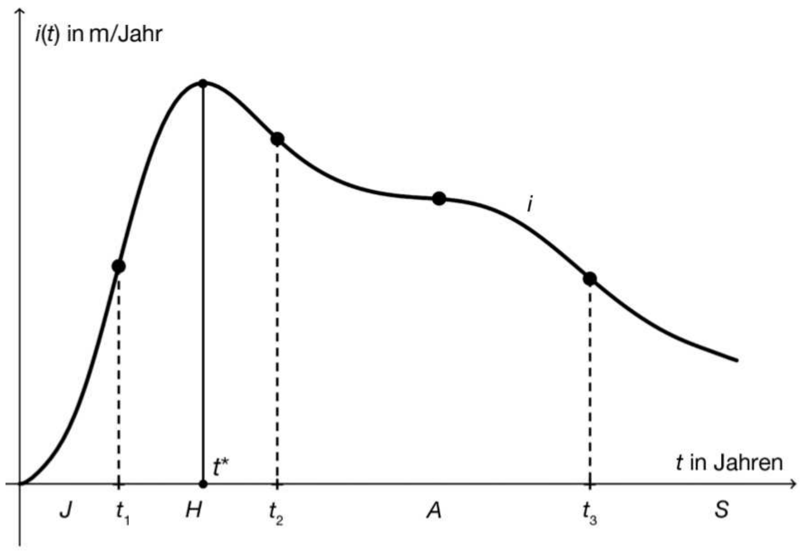
Im mittleren Bereich der Altersphase nimmt die Höhe des Baumes annähernd linear zu, weil der Höhenzuwachs pro Jahr annähernd konstant ist.

Höhe des Baumes am Beginn der Senilitätsphase: $\int_0^{t_3} i(t)\mathrm{d}t$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die Nennung der Altersphase (bzw. die Markierung der betreffenden Stelle im Graphen) und die sinngemäß richtige Begründung, dass die Höhe des Baumes dann linear zunimmt, wenn i waagrecht verläuft, d.h. der Höhenzuwachs konstant ist.
- Ein Punkt für das richtige Anschreiben des Integrals (inkl. Grenzen und Integrationsvariable).

(b) **Lösungserwartung:**



Zu diesem Zeitpunkt (t^*) ist die Wachstumsgeschwindigkeit des Baumes größer als zu den Zeitpunkten davor und danach.

Solange i monoton steigt (Jugendphase), wächst der Baum immer schneller, d.h., die Höhenzunahme pro Jahr wird größer. Wenn i monoton fällt

(Altersphase), nimmt die Wachstumsgeschwindigkeit ab, d.h., der Baum wächst immer langsamer.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Kennzeichnung der Maximumstelle und für eine sinngemäß richtige Interpretation dieses Zeitpunktes. Die Maximumstelle muss (auf der t-Achse!) erkennbar gekennzeichnet sein. Aus der formulierten Aussage muss klar hervorgehen, dass der Baum zu diesem Zeitpunkt am schnellsten wächst.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation des Monotonieverhaltens von i im Hinblick auf das Baumwachstum.

---

40 - MAT - WS 2.1, WS2.2, WS 2.3, WS 3.2, WS 3.3 - Lottozahlen - Matura 2013/14 1. Nebentermin

40. Beim österreichischen Zahlenlotto sind 45 Kugeln mit den Zahlen von 1 bis 45 beschriftet. Bei einer Lottoziehung werden zufällig und ohne Zurücklegen 6 der 45 Kugeln aus der „Lottotrommel" entnommen. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine bestimmte Zahl im Rahmen einer Lottoziehung (6 aus 45) gezogen wird, beträgt $\frac{6}{45}$. ____/0

Ein Zufallsexperiment habe genau zwei Ausgänge: Ein Ereignis A tritt mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit ein oder es tritt nicht ein. Das empirische Gesetz der großen Zahlen besagt nun Folgendes: Bei einer hinreichend großen Anzahl von Durchführungen dieses Experiments stabilisieren sich die relativen Häufigkeiten $h_r(A)$ bei einem Wert, der der Wahrscheinlichkeit $P(A)$ für das Ereignis A entspricht.

Abbildung 1 zeigt die absoluten Ziehungshäufigkeiten der Zahlen 1 bis 45 bei den 104 Ziehungen im Kalenderjahr 2010.

Abbildung 2 zeigt die absoluten Ziehungshäufigkeiten der Zahlen 1 bis 45 bei 2 056 Ziehungen vom 1.1.1986 bis zum 27.11.2011.

Abbildung 1:

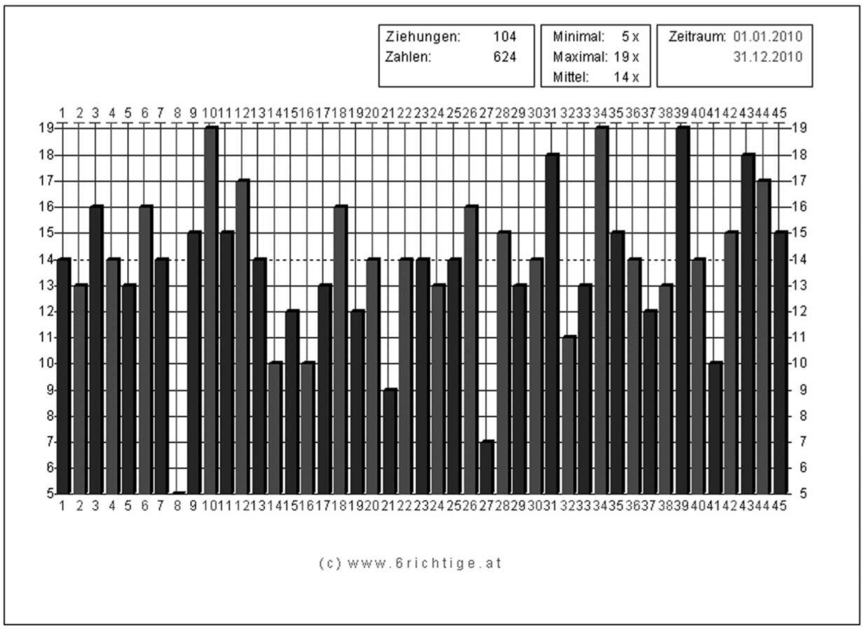
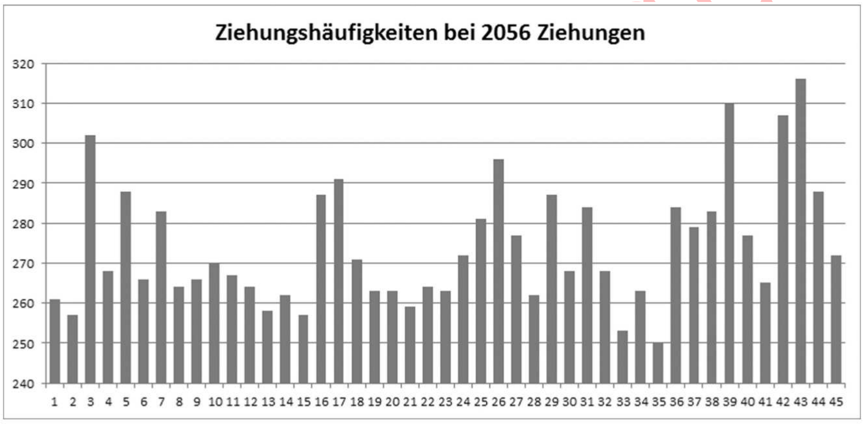


Abbildung 2:



Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an!

Stelle eine der falschen Aussagen zur Ziehungswahrscheinlichkeit richtig!

Die Ziehung der Gewinnzahlen $3, 12, 19, 25, 36, 41$ bei einer Lottoziehung ist gleich wahrscheinlich wie die Ziehung der Gewinnzahlen $1, 2, 3, 4, 5, 6$.	⊠
Eine Zahl, die bei einer Lottoziehung gezogen wurde, wird bei der darauffolgenden Lottoziehung mit einer Wahrscheinlichkeit kleiner als $\frac{6}{45}$ erneut gezogen.	
Im Kalenderjahr 2010 war die Wahrscheinlichkeit, die Zahl 8 zu ziehen, bei manchen Ziehungen kleiner als $\frac{6}{45}$.	
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl 17 als erste Zahl gezogen wird, beträgt bei jeder Ziehung $\frac{1}{45}$.	⊠
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl 32 bei einer Ziehung als zweite Zahl gezogen wird, beträgt $\frac{1}{44}$.	

(b) Ermittle die relative Ziehungshäufigkeit der Zahl 10 im Kalenderjahr 2010!

Zeige, dass die Ziehungshäufigkeiten der Zahl 10 in den Abbildungen 1 und 2 mit dem empirischen Gesetz der großen Zahlen im Einklang stehen!

(c) Überprüfe anhand von Abbildung 2, bei welchen Zahlen die absolute Ziehungshäufigkeit bei den 2 056 Ziehungen um mehr als das Doppelte der Standardabweichung vom Erwartungswert abweicht!

Gib an, welche Verteilung du für die Berechnungen verwendet hast, und begründe deine Entscheidung.

(a) Lösungserwartung:

Richtigstellung:

- Eine Zahl, die bei einer Lottoziehung gezogen wurde, wird bei der darauffolgenden Lottoziehung mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{6}{45}$ erneut gezogen.
- Im Kalenderjahr 2010 war die Wahrscheinlichkeit, die Zahl 8 zu ziehen, bei jeder Ziehung gleich $\frac{6}{45}$.
- Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl 32 bei einer Ziehung als zweite Zahl gezogen wird, beträgt $\frac{1}{45}$.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt ist nur dann zu geben, wenn genau zwei Aussagen angekreuzt sind und beide Kreuze richtig gesetzt sind.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Richtigstellung einer der drei falschen Aussagen.

(b) **Lösungserwartung:**

Die relative Ziehungshäufigkeit der Zahl 10 im Kalenderjahr 2010 beträgt $\frac{19}{104} \approx 0{,}183$.

Bei 2 056 Ziehungen hat sich die relative Häufigkeit $\left(\frac{270}{2\,056} \approx 0{,}131\right)$ der theoretischen Ziehungswahrscheinlichkeit von $\frac{6}{45} \approx 0{,}133$ im Vergleich zu den 104 Ziehungen des Kalenderjahres 2010 angenähert.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für das korrekte Bestimmen der relativen Ziehungshäufigkeit, wobei das Ergebnis in Bruch-, Dezimal- oder Prozentschreibweise angegeben werden kann.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Erklärung, warum die Häufigkeiten in den Abbildungen 1 und 2 mit dem empirischen Gesetz der großen Zahlen für die relative Ziehungshäufigkeit der Zahl 10 im Einklang stehen.

(c) **Lösungserwartung:**

$\mu = 2\,056 \cdot \frac{6}{45} \approx 274 \qquad \sigma = \sqrt{2\,056 \cdot \frac{6}{45} \cdot \frac{39}{45}} \approx 15$

$\mu - 2\sigma \approx 243$

$\mu + 2\sigma \approx 305$

Bei allen Zahlen, die höchstens 243-mal oder mindestens 305-mal gezogen wurden, weicht die Ziehungshäufigkeit um mehr als 2 σ vom Erwartungswert ab. Dies trifft auf die Zahlen 39, 42 und 43 zu.

Es wurde die Binomialverteilung verwendet, da es um Anzahlen geht („absolute Ziehungshäufigkeit"), es nur zwei mögliche Ausgänge bei einer Lottoziehung gibt (eine bestimmte Zahl wurde gezogen oder sie wurde nicht gezogen) und weil die Ziehungswahrscheinlichkeit von Ziehung zu Ziehung gleich bleibt.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für das Ermitteln der Zahlen 39,42 und 43.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Begründung, warum die Binomialverteilung verwendet werden darf.

---

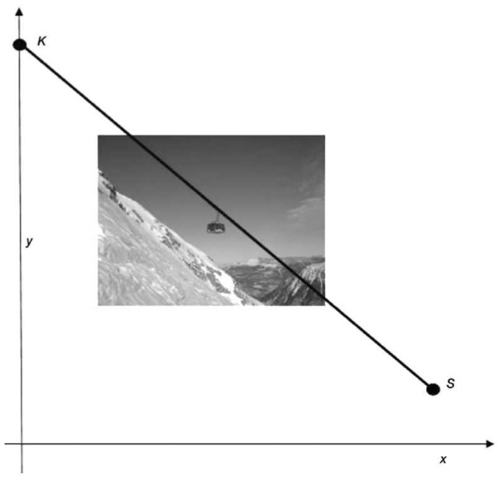
41 - MAT - AG 4.1, AN 1.1, FA 5.1 - Krippenstein/five fingers - Matura 2013/14 2. Nebentermin

41. Die Dachsteinseilbahn erschließt vom oberösterreichischen Ort Obertraun aus den nördlichen Teil des Dachsteinmassivs. Die Dachsteinseilbahn besteht aus drei Teilstrecken. Die erste Teilstrecke auf die Schönbergalm ist bereits seit 1951 in Betrieb. Die zweite Teilstrecke führt von der Schönbergalm zum Krippenstein. Von dort aus ist die Aussichtsplattform *five fingers* durch einen Fußweg erreichbar. Die dritte Teilstrecke führt vom Krippenstein weiter zur Gjaidalm. ____/0

Bei den folgenden Aufgabenstellungen werden Orte als Punkte modelliert.

Aufgabenstellung:

(a) Die Bergstation Krippenstein K_1 und die Schönbergalm S sind durch eine Seilbahn verbunden. Der Verlauf des Tragseils wird, wie in der nebenstehenden Abbildung dargestellt, modelliert. Dabei werden x und y in Metern gemessen.



Nach dieser Modellierung gilt: $K = (0|2\,100)$ und $S = (2\,160|1\,350)$

$\boxed{\text{A}}$ Bestimme den Steigungswinkel des Tragseils!

An welcher Stelle gleicher Seehöhe wie S müsste die Talstation S' stehen, wenn das Tragseil mit 100 % Steigung verlaufen soll?

Gib die Koordinaten von S' an!

(b) Mit zunehmender Höhe nimmt der Luftdruck exponentiell ab. Dabei gilt für die Höhe h (gemessen in m über dem Meeresspiegel) und den Luftdruck p (gemessen in mbar) näherungsweise der folgende funktionale Zusammenhang: $p(h) = 1\,013{,}25 \cdot e^{-0{,}000118 \cdot h}$.

Berechne die prozentuelle Druckabnahme auf der Fahrt von der Schönbergalm (Seehöhe 1 350 m) bis zur Bergstation Krippenstein (Seehöhe 2 100 m)!

Kreuze die zutreffende(n) Aussage(n) an!

Die prozentuelle Druckabnahme pro Höhenmeter ist konstant.	⊠
Bei einer Verdopplung der Höhe halbiert sich der Luftdruck.	
Die absolute Druckabnahme pro Höhenmeter ist konstant.	
Der zur Funktion p gehörige Graph ist streng monoton fallend.	⊠
Der zur Funktion p gehörige Graph nähert sich asymptotisch der waagrechten Achse.	⊠

(a) **Lösungserwartung:**

$\tan(\alpha) = \frac{750}{2\,160} \Rightarrow \alpha \approx 19{,}15°$ bzw. $\alpha \approx 0{,}3342\,\text{rad}$

$S' = (750|1\,350)$

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die korrekte Berechnung.
  Lösungsintervall: $[19°; 19{,}2°]$ bzw. $[0{,}33\,\text{rad}; 0{,}335\,\text{rad}]$
- Ein Punkt für die korrekte Berechnung.

(b) **Lösungserwartung:**

$$\frac{p(1\,350) - p(2\,100)}{p(1\,350)} \approx 0{,}085 = 8{,}5\,\%$$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine korrekte Berechnung. Lösungsintervall $[0{,}084; 0{,}085]$ bzw. $[8{,}4\,\%; 8{,}5\,\%]$.
  Lösungen aus dem Intervall $[-0{,}085; -0{,}084]$ bzw. $[-8{,}5\,\%; -8{,}4\,\%]$ sind ebenso als richtig zu werten.
- Multiple-Choice-Aufgabe: Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich alle laut Lösungserwartung richtigen Antwortmöglichkeiten angekreuzt sind.

---

42 - MAT - FA 5.1, FA 5.3, FA 2.2, AN 1.3, FA 1.5 - CO_2-Gehalt der Atmosphäre - Matura 2013/14 2. Nebentermin

42. Die Atmosphäre besteht zu ca. 78 % aus Stickstoff und zu ca. 21 % aus Sauerstoff. Kohlendioxid (CO_2) ist nur in Spuren vorhanden. Dennoch ist CO_2 zusammen mit Wasserdampf der Hauptverursacher des natürlichen Treibhauseffektes. Seit 250 Jahren ist der CO_2-Gehalt der Atmosphäre massiv gestiegen (siehe Abb. 1). Man vermutet, dass dadurch der Treibhauseffekt verstärkt wird. ____/0

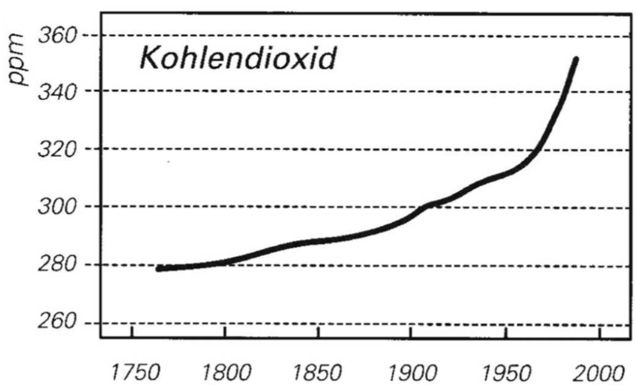


Abb. 1: Aufzeichnung der mittleren CO_2-Konzentration in der Atmosphäre von 1760 bis 1980

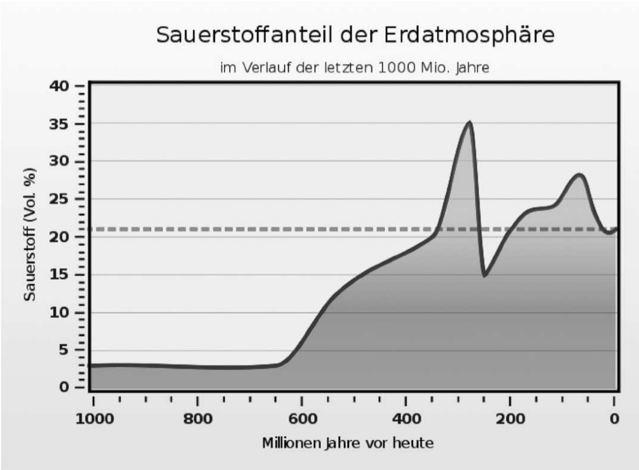


Abb. 2: Darstellung des Sauerstoffgehaltes in der Atmosphäre im Verlauf der letzten Milliarden Jahre

Aufgabenstellung:

(a) Stelle ein exponentielles Wachstumsgesetz der Form $K(t) = K_0 \cdot a^t$ auf, das die CO_2-Konzentration K in Abhängigkeit von der Zeit t in der Atmosphäre wiedergibt! Dabei gibt t die seit 1950 vergangene Zeit in Jahren an; K wird in ppm und t in Jahren gemessen. Lies zur Bestimmung der Parameter K_0 und a die auf Zehner gerundeten Konzentrationen der Jahre 1950 und 1980 (Endpunkt der Aufzeichnungen) aus der entsprechenden Grafik ab!

Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an!

Die CO_2-Konzentration steigt im beobachteten Zeitraum um ca. 0,4 % pro Jahr.	☒
Die CO_2-Konzentration steigt im beobachteten Zeitraum um ca. 4 ppm pro Jahr.	
Wäre der Wert von a (bei gleichbleibendem Wert von K_0) doppelt so groß, so wäre auch der jährliche prozentuelle Zuwachs doppelt so groß.	
Für das Jahr 2010 werden nach diesem Wachstumsgesetz ca. 395 ppm prognostiziert.	☒
Wäre der Wert von K_0 (bei gleichbleibendem Wert von a) doppelt so groß, so wäre auch die Verdopplungszeit doppelt so groß.	

(b) Von 1800 bis 1900 ist der CO_2-Gehalt der Atmosphäre annähernd linear gewachsen. Stelle einen funktionalen Zusammenhang $K(t)$ zwischen der CO_2-Konzentration K (gemessen in ppm) und der Zeit t (gemessen in Jahren) auf! Dabei gibt t die seit 1800 vergangene Zeit in Jahren an. Lese die auf Zehner gerundeten notwendigen Daten aus der Grafik ab! Weise nach, dass der im Jahr 2010 tatsächlich gemessene CO_2-Wert von 390 ppm nicht das Ergebnis einer linearen Zunahme der historischen CO_2-Werte sein kann!

(c) Der Sauerstoffgehalt der Atmosphäre ist in den letzten 1 000 Mio. Jahren massiven Schwankungen unterworfen gewesen. Von 300 Mio. Jahren vor unserer Zeit bis 250 Mio. Jahren vor unserer Zeit hat der Sauerstoffgehalt annähernd linear abgenommen (siehe Abb. 2).

$\boxed{\text{A}}$ Berechne den Ausdruck $\frac{35-15}{300-250}$ und deute das Ergebnis in diesem Zusammenhang!

Kreuze die zutreffende(n) Aussage(n) an!

In den letzten 1 000 Mio. Jahren war der Sauerstoffgehalt der Atmosphäre meistens niedriger als heute.	☒
Vor 250 Mio. Jahren war der Sauerstoffgehalt am absolut geringsten.	
In den letzten 600 Mio. Jahren ist der Sauerstoffgehalt der Atmosphäre nie unter 5 Volumsprozent gefallen.	☒
Vor 200 Mio. Jahren war der Sauerstoffgehalt der Atmosphäre etwa so groß wie heute.	☒
Vor 900 Mio. Jahren lag der Sauerstoffgehalt der Atmosphäre um 15 Volumsprozent niedriger als heute.	

(d) Die Funktionsgleichung $y(t) = 0{,}000128 \cdot t^3 + 0{,}01344 \cdot t^2 + 0{,}2304 \cdot t$ beschreibt die absoluten Schwankungen des Sauerstoffgehalts bezogen auf den heutigen Wert $y(0) = 0$ in der Atmosphäre in den letzten 100 Mio. Jahren. Dabei wird t in Mio. Jahren und y in Volumsprozent angegeben. Berechne, wann in diesem Zeitraum ein lokales Maximum des Sauerstoffgehaltes aufgetreten ist! Weise nach, dass es sich wirklich um ein lokales Maximum handelt!

(a) **Lösungserwartung:**

$K(t) = 310 \cdot \left(\sqrt[30]{\frac{350}{310}} \right)^t$

oder:

$K(t) = 310 \cdot 1{,}004^t$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für das korrekte Aufstellen von $K(t)$. Toleranzintervall für a: $[1{,}004; 1{,}0041]$.
- Multiple-Choice-Aufgabe: Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Antwortmöglichkeiten angekreuzt sind.

(b) **Lösungserwartung:**

1800: 280 ppm

1900: 300 ppm

$K(t) = k \cdot t + d$

$300 = k \cdot 100 + 280 \Rightarrow k = 0{,}2$

$K(t) = 0{,}2 \cdot t + 280$

$K(210) = 322\,\text{ppm} \neq 390\,\text{ppm}$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für das korrekte Aufstellen von $K(t)$.
- Ein Punkt für einen korrekten Nachweis.

(c) **Lösungserwartung:**

Der Ausdruck besagt, dass im angegebenen Zeitraum der Sauerstoffgehalt um 0,4 Prozentpunkte pro 1 Million Jahre abnimmt.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung und eine (sinngemäß) korrekte Deutung.

- Multiple-Choice-Aufgabe: Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich alle laut Lösungserwartung richtigen Antwortmöglichkeiten angekreuzt sind.

(d) **Lösungserwartung:**

$y'(t) = 0{,}000384t^2 + 0{,}02688t + 0{,}2304$
$y''(t) = 0{,}000768t + 0{,}02688$

$y'(t) = 0 \Rightarrow t_1 = -60, t_2 = -10$
$y''(-10) > 0 \Rightarrow$ Minimum
$y''(-60) < 0 \Rightarrow$ Maxmimum bei -60 Mio. Jahren
Vor 60 Millionen Jahren ist ein lokales Maximum des Sauerstoffgehaltes aufgetreten.

Alternative Möglichkeiten des Maximumnachweises:

Es wird nachgewiesen, dass die Ableitungsfunktion $y'(x)$ links vom lokalen Maximum positiv und dass sie rechts vom lokalen Maximum negativ ist.

oder:

Es wird nachgewiesen, dass gilt: $y(-60 - a) < y(-60)$ und $y(-60 + a) < y(-60)$ für eine reelle Zahl a.

oder:

Es wird argumentiert, dass bei einer Polynomfunktion dritten Grades mit positiven Koeffizienten die kleinere Nullstelle der ersten Ableitung eine lokale Maximumstelle ist.

oder:

Weil $y(-60) > y(-10)$ und y ein Polynom 3. Grades ist, muss das lokale Maximum bei $t = -60$ liegen.

oder:

Es gilt:

$$\lim_{t\to-\infty} y(t) = -\infty$$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \infty$$

$$y(-60) \approx 6{,}91$$

$$y(-10) \approx -1{,}09$$

.

Deshalb ist bei $t = -60$ ein lokales Maximum des Sauerstoffgehaltes.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die korrekte Berechnung der Jahreszahl (es genügt, als Lösung -60 Mio. Jahre anzugeben).
- Ein Punkt für einen (sinngemäß) korrekten Nachweis.

---

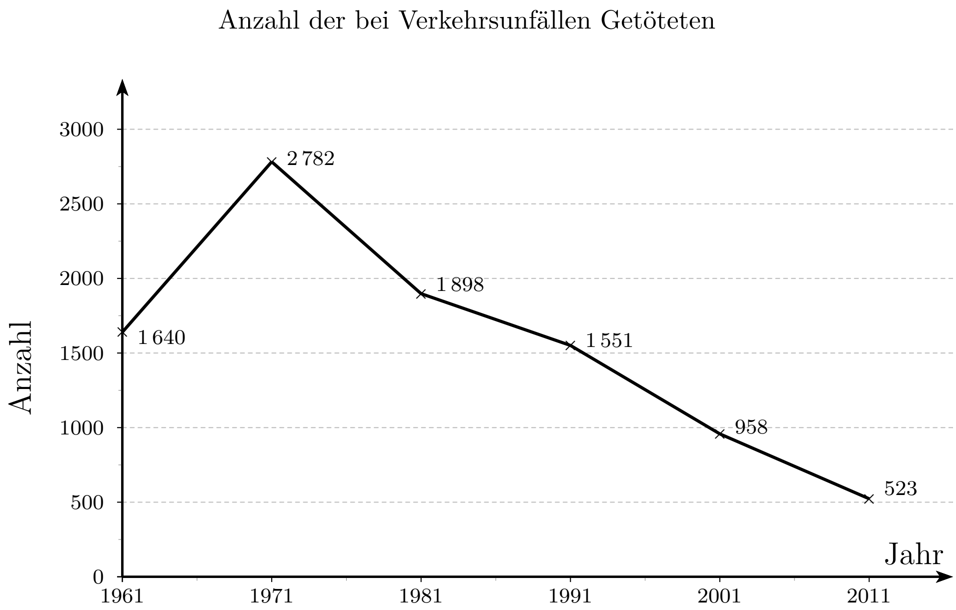
43 - MAT - AN 1.1, FA 2.2, FA 2.5, AN 1.3, WS 2.2, WS 2.3 - Verkehrsunfälle - Matura 2013/14 2. Nebentermin

43. Die Verkehrsunfallstatistik in Österreich umfasst grundsätzlich alle Unfälle, die sich auf Österreichs Straßen mit öffentlichem Verkehr ereignen und bei denen Personen verletzt oder getötet werden. ____/0

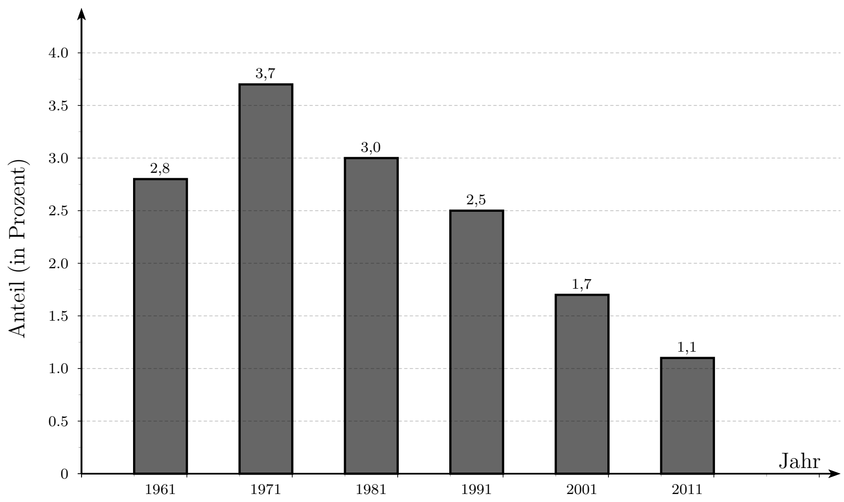
Die bei Straßenverkehrsunfällen Verletzten und Getöteten werden unter dem Begriff Verunglückte zusammengefasst.

Einige der erhobenen Daten werden nachstehend in einer Tabelle und in zwei Grafiken angeführt.

Jahr	Anzahl der Verkehrsunfälle mit Personenschaden	Kraftfahrzeugbestand zu Jahresende
1961	42 653	1 426 043
1971	52 763	2 336 520
1981	46 690	3 494 065
1991	46 013	4 341 042
2001	43 073	5 684 244
2011	35 129	6 195 207


Anzahl der bei Verkehrsunfällen Getöteten
Anzahl
Jahr
3000
2500
2000
1500
1000
500
0
1961
1971
1981
1991
2001
2011
1 640
2 782
1 898
1 551
958
523

Prozentueller Anteil der Getöteten an der Gesamtzahl der bei Verkehrsunfällen verunglückten Personen



Aufgabenstellung:

(a) Entnimm der entsprechenden Grafik, in welchem Zeitintervall die absolute und die relative Abnahme (in Prozent) der bei Verkehrsunfällen getöteten Personen jeweils am größten waren, und gib die entsprechenden Werte an!

Im vorliegenden Fall fand die größte relative Abnahme der Anzahl der bei Verkehrsunfällen Getöteten in einem anderen Zeitintervall statt als die größte absolute Abnahme. Gib eine mathematische Begründung an, warum die größte relative Abnahme und die größte absolute Abnahme einer Größe oder eines Prozesses nicht im gleichen Zeitintervall stattfinden müssen!

(b) Die Entwicklung des prozentuellen Anteils der Getöteten gemessen an der Gesamtzahl der bei Verkehrsunfällen verunglückten Personen kann für den Zeitraum von Beginn des Jahres 1971 bis Ende 2011 durch eine lineare Funktion f angenähert werden, wobei die Variable t die Anzahl der seit Ende 1970 vergangenen Jahre bezeichnet.

Ermittle eine Gleichung dieser Funktion f auf Basis der Daten aus der entsprechenden Grafik im Zeitraum von Beginn des Jahres 1971 bis Ende 2011!

Gib den theoretisch größtmöglichen Zeitraum an, für den diese Funktion f ein unter der Annahme eines gleichbleibenden Trends geeignetes Modell darstellt!

(c) Im Jahr 1976 wurde in Österreich die Gurtenpflicht eingeführt. Seit diesem Zeitpunkt ist man dazu verpflichtet, auf den vorderen Sitzen eines PKW oder Kombis den Sicherheitsgurt anzulegen. Durch die Einführung der Gurtenpflicht kam es zu einer deutlichen Abschwächung der Unfallfolgen.

Berechne auf Basis der Tabellenwerte für die Jahre 1971 und 1981 die durchschnittliche jährliche Abnahme der Anzahl der Unfälle mit Personenschaden!

Ein „Gurtenmuffel" behauptet, dass es auch schon vor der Einführung der Gurtenpflicht im Zeitraum zwischen 1961 und 1971 zu einer relativen Abnahme der Verkehrsunfälle mit Personenschaden kam. Ermittle mithilfe des vorhandenen Datenmaterials Zahlen, die seine Aussage untermauern, und präzisieren Sie diese Aussage!

(d) Die nachstehende Tabelle enthält Daten über Verunglückte im Jahr 2001.

Verkehrsart	Anzahl der Verletzten	Anzahl der Getöteten
einspuriges KFZ	8 605	85
PKW	24 853	290
sonstige	11 567	148

Jemand ist im Jahr 2011 bei einem Verkehrsunfall verunglückt.

$\boxed{\text{A}}$ Gib die relative Häufigkeit als Schätzwert der Wahrscheinlichkeit, dass diese Person mit einem einspurigen KFZ oder einem PKW unterwegs war und den Unfall nicht überlebt hat, an!

Interpretiere die mit $\frac{24\,853}{25\,143} \approx 0{,}99$ angegebene Wahrscheinlichkeit im vorliegenden Zusammenhang!

(a) Lösungserwartung:

Die größte absolute Abnahme fand im Zeitintervall von 1971 bis 1981 statt (-884), die größte relative Abnahme war in den Jahren von 2001 bis 2011 (-0,454 bzw. -45,4 %).

Da für die Berechnung der relativen Abnahme einer Größe auch der Bezugswert entscheidend ist, müssen größte absolute Abnahme und größte relative Abnahme einer Größe oder eines Prozesses nicht im gleichen Zeitintervall stattfinden.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt wird für die korrekten Zeitintervalle und die richtigen Abnahmewerte vergeben. Toleranzintervall für relative Abnahme: $[-0{,}46; -0{,}45]$ bzw. $[-46\,\%; -45\,\%]$; die Vorzeichen müssen nicht angegeben sein

- Ein Punkt wird für eine (sinngemäß) richtige verbale Begründung vergeben. Dabei kann die Begründung auch anhand konkreter Zahlen erfolgen.

(b) **Lösungserwartung:**

$f(t) = -0{,}065t + 3{,}7$

Diese Funktion kann höchstens 57 Jahre, also bis zum Beginn des Jahres 2028, zur Modellbildung herangezogen werden.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt wird für die Angabe eines korrekten Funktionsterms vergeben. (Der Punkt kann auch vergeben werden, wenn eine andere Variable als t verwendet wird.) Toleranzintervall für die ersten Parameter: $[-0{,}08; -0{,}05]$.
- Ein Punkt wird für die Angabe der entsprechenden Zeitspanne und/oder des entsprechenden Jahres vergeben. Toleranzintervalle: [51 Jahre; 70 Jahre], [2022; 2042].

(c) **Lösungserwartung:**

Die Anzahl der Unfälle mit Personenschäden nahm durchschnittlich um 607,3 pro Jahr ab.

Anzahl der Unfälle mit Personenschaden pro tausend KFZ:

- 1961: 30 (berechneter Wert liegt bei $\approx 29{,}9$)
- 1971: 23 (berechneter Wert liegt bei $\approx 22{,}5$)

Bezogen auf die Anzahl der zugelassenen KFZ hat die Anzahl der Unfälle mit Personenschaden also tatsächlich abgenommen.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt wird für die korrekte Angabe der durchschnittlichen jährlichen Abnahme vergeben. Toleranzintervall: [600; 610].
- Ein Punkt wird für das Heranziehen des entsprechenden Datenmaterials und eine korrekte Berechnung vergeben. Die Aussage kann auch anhand der relativen Werte präzisiert werden.

(d) **Lösungserwartung:**

Verkehrsart	Anzahl der Verletzten	Anzahl der Getöteten	Summe
einspuriges KFZ	8 605	85	8 690
PKW	24 853	290	25 143
sonstiges	11 567	148	11 715
Summe	45 025	523	45 548

$\frac{(85+290)}{45\,548} \approx 0{,}008$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt ca. 0,8 %.

Die Wahrscheinlichkeit, den Unfall zu überleben, wenn man mit einem PKW verunglückt, beträgt 99 %.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt wird für die richtige Angabe der Wahrscheinlichkeit vergeben. Toleranzintervall: $[0{,}008; 0{,}0083]$ bzw. $[0{,}8\,\%; 0{,}83\,\%]$.
- Ein Punkt wird für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation vergeben.

---

44 - MAT - FA 6.4, AN 4.2, AN 4.3 - Atmung - Matura 2013/14 2. Nebentermin

44. Beim Ein- bzw. Ausatmen wird Luft in unsere Lungen gesaugt bzw. wieder aus ihnen herausgepresst. Ein Atemzyklus erstreckt sich über den gesamten Vorgang des einmaligen Einatmens und anschließenden Ausatmens. Während des Atemvorganges lässt sich das bewegte Luftvolumen messen. Der Luftstrom wird in Litern pro Sekunde angegeben. ____/0

Der Luftstrom $L(t)$ kann in Abhängigkeit von der Zeit t (t in Sekunden) näherungsweise durch die Sinusfunktion L beschrieben werden. Ein Atemzyklus beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$ mit dem Einatmen. Nach einer Messung kann der Atemvorgang einer bestimmten Person modellhaft durch folgende Sinusfunktion beschrieben werden:

$$L(t) = 0{,}6 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right)$$

Aufgabenstellung:

(a) Ermittle die Periodenlänge der gegebenen Funktion L!

Die Periodenlänge beträgt 4Skunden.

Erkläre die Bedeutung der Periodenlänge in Bezug auf den Atemvorgang!

(b) $\boxed{\text{A}}$ Berechne $\int_0^2 L(t)\mathrm{d}t$ und runde das Ergebnis auf zwei Nachkommastellen!

Beschreibe für das in Diskussion stehende Problem, was mit dem oben stehenden mathematischen Ausdruck berechnet wird!

(a) **Lösungserwartung:**

Die Periodenlänge beträgt 4 Sekunden.

Die Periodenlänge gibt die Zeitdauer eines Atemzyklus (= einmal Einatmen und einmal Ausatmen) an.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die korrekte Ermittlung der Periodenlänge. Es genügt dabei die Angabe des gesuchten Wertes, eine Rechnung oder Zeichnung ist nicht erforderlich.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Deutung der Periodenlänge. Zulässig sind auch andere sinngemäß richtige Antworten, die auf den Atemvorgang konkret Bezug nehmen. Ohne konkreten Bezug zum gegebenen Kontext ist die Antwort nicht als korrekt zu werten.

(b) **Lösungserwartung:**

$$\int_0^2 L(t)dt = \int_0^2 0{,}6\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)dt = \left(-0{,}6\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)\right)\Bigg|_0^2 \approx 0{,}76$$

Durch das bestimmte Integral wird das gesamte Luftvolumen (in Litern) berechnet, das während des Einatmens (in den ersten beiden Sekunden) in die Lunge strömt.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung. Toleranzintervall: [0,76; 0,80]. Die Einheit muss beim Ergebnis nicht zwingend angeführt werden.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation. Zulässig sind auch andere sinngemäß richtige Antworten, die auf den Atemvorgang konkret Bezug nehmen.

45 - MAT - AN 3.3, AN 1.3, AN 1.2 - 200-m-Lauf - Matura 2014/15 Haupttermin

45. In der Leichtathletik gibt es für Läufer/innen spezielle Trainingsmethoden. Dazu werden Trainingspläne erstellt. Es ist dabei sinnvoll, bei Trainingsläufen Teilzeiten zu stoppen, um Stärken und Schwächen der Läuferin/des Läufers zu analysieren. ____/0

Zur Erstellung eines Trainingsplans für eine Läuferin wurden die Teilzeiten während eines Trainingslaufs gestoppt. Für die 200 Meter lange Laufstrecke wurden bei diesem Trainingslauf 26,04 Sekunden gemessen. Im nachstehenden Diagramm ist der zurückgelegte Weg $s(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t für diesen Trainingslauf mithilfe einer Polynomfunktion s vom Grad 3 modellhaft dargestellt.

Für die Funktion s gilt die Gleichung $s(t) = -\frac{7}{450}t^3 + 0{,}7t^2$ ($s(t)$ in Metern, t in Sekunden).

Aufgabenstellung:

(a) Berechne die Wendestelle der Funktion s!

Interpretiere die Bedeutung der Wendestelle in Bezug auf die Geschwindigkeit der Läuferin!

(b) $\boxed{\text{A}}$ Bestimme die mittlere Geschwindigkeit der Läuferin für die 200 Meter lange Laufstrecke in Metern pro Sekunde!

Der Mittelwertsatz der Differenzialrechnung besagt, dass unter bestimmten Voraussetzungen in einem Intervall $[a; b]$ für eine Funktion f mindestens ein

$x_0 \in (a; b)$ existiert, sodass $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ gilt. Interpretiere diese Aussage im vorliegenden Kontext für die Funktion s im Zeitintervall $[0; 26{,}04]$!

(a) **Lösungserwartung:**

$s''(t) = -\frac{7}{75} \cdot t + 1{,}4$

$s'''(t) = -\frac{7}{75}$

$s''(t) = 0 \Leftrightarrow t = 15$

$s'''(15) = -\frac{7}{75} \neq 0$

Mögliche Interpretation:

Nach ca. 15 Sekunden erreicht die Läuferin ihre Höchstgeschwindigkeit.

oder:

Bis zum Zeitpunkt $t = 15$ Sekunden nimmt die Geschwindigkeit der Läuferin zu.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei der Nachweis, dass bei $t = 15$ eine Wendestelle vorliegt (z. B. durch $s'''(15) \neq 0$), nicht angeführt werden muss. Toleranzintervall für $t: [14;\ 16]$
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation.

(b) **Lösungserwartung:**

$\frac{200}{26{,}04} \approx 7{,}68$

Die mittlere Geschwindigkeit beträgt ca. $7{,}68\, m/s$.

Es gibt mindestens einen Zeitpunkt, für den die Momentangeschwindigkeit der Läuferin gleich der mittleren Geschwindigkeit für die gesamte Laufstrecke ist.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit nicht angeführt werden muss. Toleranzintervall: $[7{,}6; 7{,}7]$.

- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation.

---

46 - MAT - FA 5.5, AN 1.3, AN 1.4 - Altersbestimmung - Matura 2014/15 Haupttermin

46. Die Radiokohlenstoffdatierung, auch ^{14}C-Methode genannt, ist ein Verfahren zur Altersbestimmung von kohlenstoffhaltigen Materialien. Das Verfahren beruht darauf, dass in abgestorbenen Organismen die Menge an gebundenen radioaktiven ^{14}C-Atomen gemäß dem Zerfallsgesetz exponentiell abnimmt, während der Anteil an ^{12}C-Atomen gleich bleibt. Lebende Organismen sind von diesem Effekt nicht betroffen, da sie ständig neuen Kohlenstoff aus der Umwelt aufnehmen, sodass der ^{14}C-Anteil nahezu konstant bleibt und somit auch das Verhältnis zwischen ^{14}C und ^{12}C. ____/0

Die Anzahl der noch vorhandenen ^{14}C-Atome in einem abgestorbenen Organismus wird durch die Funktion N beschrieben. Für die Anzahl $N(t)$ der ^{14}C-Atome t Jahr nach dem Tod des Organismus gilt daher näherungsweise die Gleichung $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$, wobei N_0 die Anzahl der ^{14}C-Atome zum Zeitpunkt $t = 0$ angibt und die Zerfallskonstante für ^{14}C den Wert $\lambda = 1{,}21 \cdot 10^{-4}$ pro Jahr hat.

Eine frische Probe enthält pro Billion (10^{12}) Kohlenstoffatomen nur ein ^{14}C-Atom. Die Nachweisgrenze von ^{14}C liegt bei einem Atom pro Billiarde (10^{15})Kohlenstoffatomen (also einem Tausendstel der frischen Probe).

Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Berechne die Halbwertszeit von ^{14}C!

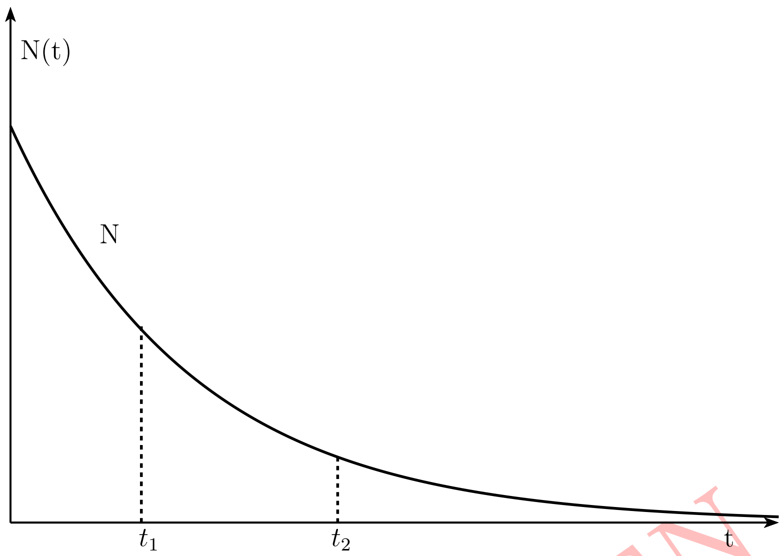
Zeige, dass nach zehn Halbwertszeiten die Nachweisgrenze von ^{14}C unterschritten ist!

(b) Im Jahr 1991 wurde in den Ötztaler Alpen von Wanderern die Gletschermumie „Ötzi" entdeckt. Die ^{14}C-Methode ergab, dass bereits $47\,\% \pm 0{,}5\,\%$ der ursprünglich vorhandenen ^{14}C-Atome zerfallen waren (d. h., das Messverfahren hat einen Fehler von $\pm 0{,}5\,\%$ der in der frischen Probe vorhandenen Anzahl an ^{14}C-Atomen).

Berechne ein Intervall für das Alter der Gletschermumie zum Zeitpunkt ihres Auffindens!

Angenommen, Ötzi wäre nicht im Jahr $t_1 = 1991$, sondern zu einem späteren Zeitpunkt t_2 gefunden worden. Gib an, welche Auswirkung auf die

Breite des für das Alter der Gletschermumie ermittelten Intervalls dies hat (den gleichen Messfehler vorausgesetzt)! Begründe deine Aussage anhand der unten abgebildeten Grafik!



(c) $N(t)$ beschreibt die Anzahl der ^{14}C-Atome zum Zeitpunkt t.
Interpretiere $N'(t)$ im Hinblick auf den radioaktiven Zerfallsprozess!

Nach den Gesetzmäßigkeiten des radioaktiven Zerfalls zerfällt pro Zeiteinheit ein konstanter Prozentsatz p der vorhandenen Menge an ^{14}C-Atomen. Welche der folgenden Differenzengleichungen beschreibt diese Gesetzmäßigkeit? Kreuze die zutreffende Differenzengleichung an!

$N(t+1) - N(t) = p$	
$N(t+1) - N(t) = -p$	
$N(t+1) - N(t) = p \cdot t$	
$N(t+1) - N(t) = -p \cdot t$	
$N(t+1) - N(t) = p \cdot N(t)$	
$N(t+1) - N(t) = -p \cdot N(t)$	☒

(a) **Lösungserwartung:**

$\tau = \frac{\ln(2)}{\lambda} \approx 5\,728$

Die Halbwertszeit von ^{14}C beträgt ca. 5 728 Jahre.

Mögliche Überprüfungen:

$\left(\frac{1}{2}\right)^1 0 \approx 0{,}00098 < \frac{1}{1\,000}$

oder:

$N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot 5\,728 \cdot 10} \approx 0{,}00098 \cdot N_0 < \frac{N_0}{1\,000}$

Das bedeutet, dass die Nachweisgrenze von ^{14}C nach 10 Halbwertszeiten unterschritten ist.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit *Jahre* nicht angeführt werden muss.
  Toleranzintervall: $[5\,727; 5\,730]$
- Ein Punkt für einen korrekten Nachweis. Jeder korrekte Nachweis, der zeigt, dass nach 10 Halbwertszeiten die Nachweisgrenze von ^{14}C unterschritten ist, ist ebenfalls als richtig zu werten.

(b) **Lösungserwartung:**

$0{,}535 \cdot N_0 = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t_1} \Rightarrow t_1 = \frac{\ln(0{,}535)}{-\lambda} \approx 5\,169$

$0{,}525 \cdot N_0 = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t_2} \Rightarrow t_2 = \frac{\ln(0{,}525)}{-\lambda} \approx 5\,325$

Das Alter der Mumie (in Jahren) lag zum Zeitpunkt ihres Auffindens im Intervall $[5\,169; 5\,325]$.

Für große Werte von t wird der Graph der Funktion N flacher, d.h., einem Intervall konstanter Länge auf der $N(t)$-Achse entspricht ein größeres Intervall auf der t-Achse.

Lösungsschlüssel:

- Ein punkt für ein korrektes Intervall.
  Toleranzintervall für $t_1 : [5\,164; 5\,174]$, für $t_2 : [5\,320; 5\,330]$
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Begründung.

(c) **Lösungserwartung:**

Mögliche Interpretationen:

$N'(t)$ beschreibt die (momentane) Zerfallsgeschwindigkeit von ^{14}C zum Zeitpunkt t.

oder:

$N'(t)$ beschreibt die (momentane) Änderungsrate (Abnahmerate) der Anzahl der ^{14}C-Atome zum Zeitpunkt t.

Lösung MC - siehe oben!

Lösungsschlüssel:

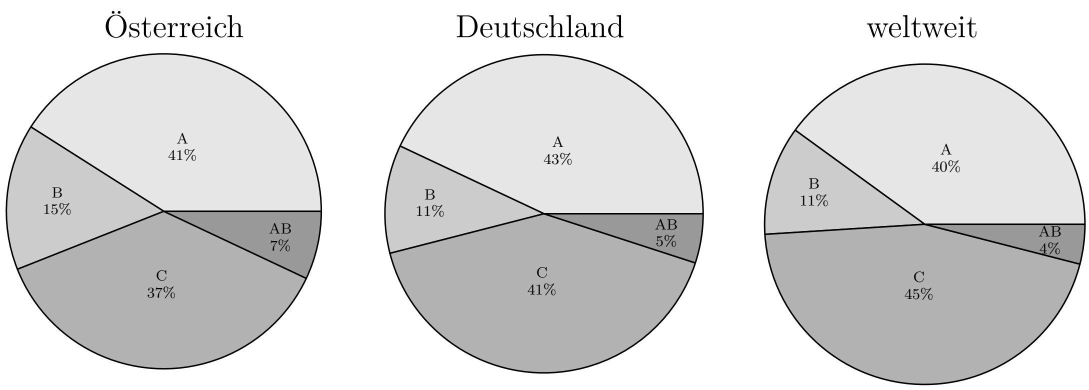
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation.
- Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die laut Lösungserwartung richtige Differenzengleichung angekreuzt ist.

---

47 - MAT - WS 1.1, WS 1.3, WS 3.4, WS 4.1, WS 2.3, - Blutgruppen - Matura 2014/15 Haupttermin

47. Die wichtigsten Blutgruppensysteme beim Menschen sind das AB0-System und das Rhesussystem. Es werden dabei die vier Blutgruppen A, B, AB und 0 unterschieden. Je nach Vorliegen eines bestimmten Antikörpers, den man erstmals bei Rhesusaffen entdeckt hat, wird bei jeder Blutgruppe noch zwischen *Rhesus-positiv* (+) und *Rhesus-negativ* (-) unterschieden. A- bedeutet z. B. Blutgruppe A mit Rhesusfaktor negativ. ____/0

In den nachstehenden Diagrammen sind die relativen Häufigkeiten der vier Blutgruppen in Österreich und Deutschland und im weltweiten Durchschnitt ohne Berücksichtigung des Rhesusfaktors dargestellt.



Die nachstehende Tabelle enthält die relativen Häufigkeiten der Blutgruppen in Deutschland und Österreich zusätzlich aufgeschlüsselt nach den Rhesusfaktoren.

Land/Blutgruppe	A+	A-	B+	B-	0+	0-	AB+	AB-
Deutschland	37 %	6 %	9 %	2 %	35 %	6 %	4 %	1 %
Österreich	33 %	8 %	12 %	3 %	30 %	7 %	6 %	1 %

Aufgrund von Unverträglichkeiten kann für eine Bluttransfusion nicht Blut einer beliebigen Blutgruppe verwendet werden. Jedes Kreuz (X) in der nachstehenden Tabelle bedeutet, dass eine Transfusion vom Spender zum Empfänger möglich ist.

	Spender							
Empfänger	0-	0+	B-	B+	A-	A+	AB-	AB+
AB+	X	X	X	X	X	X	X	X
AB-	X		X		X		X	
A+	X	X			X	X		
A-	X				X			
B+	X	X	X	X				
B-	X		X					
0+	X	X						
0-	X							

Datenquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Blutgruppe [26.11.2014]

Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Gib diejenigen Blutgruppen an, die laut der abgebildeten Diagramme sowohl in Österreich als auch in Deutschland häufiger anzutreffen sind als im weltweiten Durchschnitt!

Jemand argumentiert anhand der gegebenen Diagramme, dass die Blutgruppe B in Deutschland und Österreich zusammen eine relative Häufigkeit von 13 % hat. Entscheide, ob diese Aussage richtig ist, und begründe deine Entscheidung!

(b) Eine in Österreich lebende Person X hat Blutgruppe A-.

Gib anhand der in der Einleitung angeführten Daten und Informationen die Wahrscheinlichkeit an, mit der diese Person X als Blutspender/in für eine zufällig ausgewählte, in Österreich lebende Person Y geeignet ist!

Wie viele von 100 zufällig ausgewählten Österreicherinnen/Österreichern kommen als Blutspender/in für die Person X in Frage? Gib für die Anzahl der potenziellen Blutspender/innen näherungsweise ein um den Erwartungswert symmetrisches Intervall mit 90 % Wahrscheinlichkeit an!

(c) In einer österreichischen Gemeinde, in der 1 800 Einwohner/innen Blut spenden könnten, nahmen 150 Personen an einer freiwilligen Blutspendeaktion teil. Es wird angenommen, dass die Blutspender/innen eine Zufallsstichprobe darstellen. 72 Blutspender/innen hatten Blutgruppe A.

Berechne aufgrund dieses Stichprobenergebnisses ein symmetrisches 95-%-Konfi denzintervall für den tatsächlichen (relativen) Anteil p der Einwohner/innen dieser Gemeinde mit Blutgruppe A, die Blut spenden könnten.

Die Breite des Konfidenzintervalls wird vom Konfidenzniveau (Sicherheitsniveau) und vom Umfang der Stichprobe bestimmt. Gib an, wie jeweils einer der beiden Parameter geändert werden müsste, um eine Verringerung der Breite des Konfidenzintervalls zu erreichen! Gehe dabei von einem unveränderten (gleichbleibenden) Stichprobenergebnis aus.

(d) Blutgruppenmerkmale werden von den Eltern an ihre Kinder weitervererbt. Dabei sind die Wahrscheinlichkeiten in der nachstehenden Tabelle angeführt.

Blutgruppe der Eltern	mögliche Blutgruppe des Kindes			
	A	B	AB	0
A und A	93,75 %	–	–	6,25 %
A und B	18,75 %	18,75 %	56,25 %	6,25 %
A und AB	50 %	12,5 %	37,5 %	–
A und 0	75 %	–	–	25 %
B und B	–	93,75 %	–	6,25 %
B und AB	12,5 %	50 %	37,5 %	–
B und 0	–	75 %	–	25 %
AB und AB	25 %	25 %	50 %	–
AB und 0	50 %	50 %	–	–
0 und 0	–	–	–	100 %

Datenquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/AB0-System [26.11.2014]

Eine Frau mit Blutgruppe A und ein Mann mit Blutgruppe 0 haben zwei (gemeinsame) leibliche Kinder. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kinder die gleiche Blutgruppe haben!

Ein Kind aus der Nachbarschaft dieser Familie hat Blutgruppe 0. Gibt es eine Blutgruppe bzw. Blutgruppen, die der leibliche Vater dieses Kindes sicher nicht haben kann? Begründe deine Antwort anhand der gegebenen Daten!

(a) **Lösungserwartung:**

Blutgruppen: A und AB

Die Aussage ist nicht richtig, weil die Anzahl der Einwohner/innen in den beiden genannten Ländern nicht gleich groß ist.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die ausschließliche Angabe der beiden Blutgruppen A und AB
- Ein Punkt für die Angabe, dass die Aussage nicht richtig ist, und eine (sinngemäß) korrekte Begründung dafür.

(b) **Lösungserwartung:**

Die Wahrscheinlichkeit beträgt 48 %.

Mögliche Berechnung:

$n = 100, p = 0{,}15 \Rightarrow \mu = 15$

$2 \cdot \Phi(z) - 1 = 0{,}9 \Rightarrow z = 1{,}645$

$\mu \pm z \cdot \sigma = 15 \pm 1{,}645 \cdot \sqrt{100 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}85} \approx 15 \pm 6 \Rightarrow [9; 21]$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung. Äquivalente Schreibweisen des Ergebnisses (als Bruch oder Dezimalzahl) sind ebenfalls als richtig zu werten.
- Ein Punkt für ein korrektes Intervall.
  Toleranzintervall für den unteren Wert: $[9; 10]$
  Toleranzintervall für den oberen Wert: $[20; 21]$
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

(c) **Lösungserwartung:**

Mögliche Berechnung:

$n = 150, h = 0{,}48$

$2 \cdot \Phi(z) - 1 = 0{,}95 \Rightarrow z = 1{,}96$

$h \pm z \cdot \sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}} = 0{,}48 \pm 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}48 \cdot (1-0{,}48)}{150}} \approx 0{,}48 \pm 0{,}08 \Rightarrow [40\,\%; 56\,\%]$

Bei gleichem Stichprobenergebnis führen eine größere Stichprobe und/oder ein geringeres Konfidenzniveau zu einer Verringerung der Breite des Konfidenzintervalls.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für ein korrektes Intervall. Äquivalente Schreibweisen des Ergebnisses (als Bruch oder Dezimalzahl) sind ebenfalls als richtig zu werten.
  Toleranzintervall für den unteren Wert: $[39\,\%; 43\,\%]$
  Toleranzintervall für den oberen Wert: $[53\,\%; 57\,\%]$
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Angabe der entsprechenden Änderungen beider Parameter.

(d) **Lösungserwartung:**

$0{,}75^2 + 0{,}25^2 = 0{,}625$

Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kinder die gleiche Blutgruppe haben, beträgt 62,5 %.

Der Vater kann nicht Blutgruppe AB haben, denn sobald ein Elternteil Blutgruppe AB hat, hat das Kind laut Tabelle nie Blutgruppe 0.

Lösungsschlüssel:

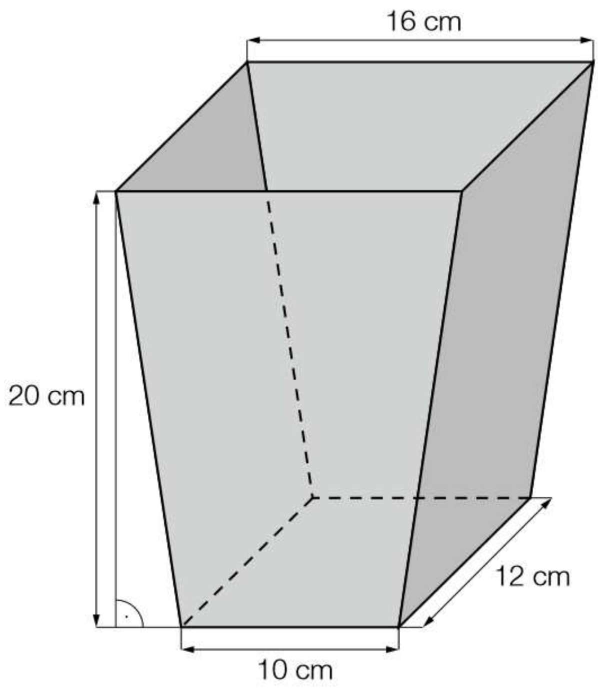
- Ein Punkt für die richtige Lösung. Äquivalente Schreibweisen des Ergebnisses (als Bruch oder in Prozenten) sind ebenfalls als richtig zu werten. Toleranzintervall: $[0{,}62; 0{,}63]$.
- Ein Punkt für die richtige Antwort und eine (sinngemäß) korrekte Begründung, warum (nur) Blutgruppe AB auszuschließen ist.

---

48 - MAT - FA 2.2, AN 4.3, AN 1.3, AN 4.2 - Füllen eines Gefäßes - Matura 2014/15 Haupttermin

48. Der Innenraum eines 20 cm hohen Gefäßes hat in jeder Höhe h eine rechteckige, horizontale Querschnittsfläche. Ihre Länge beträgt am Boden 10 cm und nimmt ____/0

dann mit der Höhe linear bis auf 16 cm zu, ihre Breite beträgt in jeder Höhe 12 cm.



Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Gib eine Formel für die Länge $a(h)$ der rechteckigen Querschnittsfläche in der Höhe h an.

In das Gefäß wird Flüssigkeit gefüllt.

Gib an, was der Ausdruck $12 \cdot \int^{1} 5_0 a(h)\mathrm{d}h$ in diesem Zusammenhang bedeutet!

(b) Das leere Gefäß wird bis zum Rand mit Flüssigkeit gefüllt.

Nach t Sekunden befindet sich die Wassermenge $q(t)$ (in ml) im Gefäß. Die Füllung dauert 39 Sekunden. Für $t \in [0; 39]$ gilt: $q'(t) = 80$.

Interpretiere $q'(t) = 80$ im gegebenen Zusammenhang!

Ermittle $\frac{q(t_2)-q(t_1)}{t_2-t_1}$ für beliebige t_1, t_2 mit $t_1 < t_2$ aus dem gegebenen Zeitintervall!

(c) Das Fassungsvermögen des Gefäßes (in ml) bis zur Höhe x kann durch das Integral $\int_0^x (3{,}6 \cdot h + 120)\mathrm{d}h$ dargestellt werden.

Ermittle, bei welcher Höhe x das Wasser im Gefäß steht, wenn man 2,5 Liter Wasser in das Gefäß gießt.

Interpretiere den im Integral vorkommenden Wert 3,6 im gegebenen Kontext!

(a) **Lösungserwartung:**

$a(h) = k \cdot h + d$

$a(0) = d = 10$

$a(20) = 20 \cdot k + 10 = 16 \Rightarrow k = 0{,}3$

$a(h) = 0{,}3 \cdot h + 10$

Das Integral gibt das Volumen der enthaltenen Flüssigkeit (in ml) an, wenn das Gefäß bis 5 cm unter dem Rand (bzw. bis zu einer Höhe von 15 cm) gefüllt ist.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für eine korrekte Formel. Äquivalente Formeln sind ebenfalls als richtig zu werten. Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation.

(b) **Lösungserwartung:**

Die momentane Änderungsrate der Wassermenge beträgt im gesamten Zeitintervall 80 Milliliter pro Sekunde.

$\frac{q(t_2) - q(t_1)}{t_2 - t_1} = 80$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation.
- Ein Punkt für die richtige Lösung.

(c) **Lösungserwartung:**

$2500 = \int_0^x (3{,}6 \cdot h + 120)\mathrm{d}h = 1{,}8x^2 + 120x$

$1{,}8x^2 + 120x - 2500 = 0$

$x_1 \approx 16{,}7, (x_2 < 0)$

Das Wasser steht ca. 16,7 cm hoch.

3,6 gibt diejenige Fläche in cm^2 an, um die die Querschnittsfläche mit jedem zusätzlichen cm Höhe zunimmt.

oder:

3,6 ist die Steigung der Funktion, die den Inhalt der Querschnittsfläche in der Höhe h angibt.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei weder die negative Lösung der quadratischen Gleichung noch die Einheit cm angeführt werden müssen.
  Toleranzintervall: $[16{,}5; 17]$
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation.

---

49 - MAT - FA 1.4, AN 3.3, AN 1.3 - Die Bedeutung der Parameter in der Funktionsgleichung einer Polynomfunktion - Matura 2014/15 1. Nebentermin

49. Betrachtet werden Polynomfunktion f mit $f(x) = x^2 + b \cdot x + 16$ $(b \in \mathbb{R}$ ____/0

Aufgabenstellung:

(a) Der Graph einer solchen Funktion f verläuft durch den Punkt $P = (-1|7)$.

$\boxed{\text{A}}$ Bestimme den Parameter b dieser Funktion f!

Gib die Steigung dieser Funktion f an der Stelle $x = -1$ an!

(b) Gib an, welcher allgemeine Zusammenhang zwischen der Extremstelle x_E einer solchen Funktion f und dem Parameter b besteht!

Berechne alle Werte des Parameters b, für die $f(x_E) = -9$ gilt!

(c) Für bestimmte Werte von b liegt der Tiefpunkt des Graphen von f auf einer der Koordinatenachsen. Bestimme diese Tiefpunkte!

Der Graph der Polynomfunktion g zweiten Grades geht durch diese Punkte. Bestimme eine Funktionsgleichung für g!

(d) Auf dem Graphen einer solchen Funktion f liegt der Punkt $Q = (2|f(2))$.

Drücke den Funktionswert $f(2)$ in Abhängigkeit vom Parameter b aus!

Die Tangente im Punkt Q an den Graphen der Funktion f schneidet die senkrechte Achse in einem Punkt R. Zeige mittels einer Rechnung, dass die Lage dieses Punktes R von der Wahl von b unabhängig ist!

(a) **Lösungserwartung:**

$7 = (-1)^2 + b \cdot (-1) + 16 \Rightarrow -10 = -b$
$b = 10$

$f'(-1) = 2 \cdot (-1) + 10 = 8$

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die korrekte Angabe des Parameters b.
- Ein Punkt für die korrekte Angabe der Steigung der Funktion f an der Stelle $x = -1$.

(b) **Lösungserwartung:**

$f'(x) = 2 \cdot x + b \Rightarrow 2 \cdot x_E + b = 0$
oder:
$x_E = -\frac{b}{2}$
$f\left(-\frac{b}{2}\right) = -9 \Rightarrow \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{2} + 16 = -9$
$\Rightarrow b = \pm 10$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für einen korrekten Zusammenhang zwischen x_E und b.
- Ein Punkt für die Angabe der beiden korrekten Werte für b.

(c) **Lösungserwartung:**

Mögliche Bestimmung der Tiefpunkte:

- Tiefpunkt des Graphen von f liegt auf der x-Achse $\Rightarrow$ Die Funktion f besitzt genau eine relle Nullstelle.
  $f(x) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{b}{2}\right)^2 - 16}$
  $\Rightarrow \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - 16 = 0 \Rightarrow b_1 = -8, \quad b_2 = 8$
  $\Rightarrow x_1 = 4, \quad x_2 = -4 \Rightarrow T_1 = (4|0), T_2 = (-4|0)$

- Tiefpunkt des Graphen von f liegt auf der senkrechten Achse
  $\Rightarrow b = 0 \Rightarrow T_3 = (0|16)$

  $g(x) = a \cdot x^2 + c$
  $g(0) = 16 \qquad c = 16$
  $g(4) = 0 \Rightarrow 16 \cdot a + 16 = 0 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow g(x) = -x^2 + 16$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die Angabe aller drei Tiefpunkte
- Ein Punkt für die Angabe einer korrekten Funktionsgleichung der Funktion g. Äquivalente Funktionsgleichungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

(d) **Lösungserwartung:**

$f(2) = 2^2 + 2 \cdot b + 16 = 2 \cdot b + 20$

Die Lage der Tangente ergibt sich aus $f(2) = f'(2) \cdot 2 + d$.

Daraus folgt: $2 \cdot b + 20 = (4 + b) \cdot 2 + d$ und daraus $d = 12$, daher ist die Lage des Punktes R unabhängig von b.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die korrekte Angabe des Funktionswertes $f(2)$ in Abhängigkeit von b.
- Ein Punkt für einen korrekten rechnerischen Nachweis.

---

50 - MAT - AG 2.1, AN 1.3, AN 2.1, FA 2.2, FA 1.5 - Mehrkampf - Matura 2014/15 1. Nebentermin

50. Für die beiden Leichtathletikwettbewerbe *Zehnkampf der Männer* und *Siebenkampf der Frauen* gibt es eine international gültige Punktewertung für Großveranstaltungen (Weltmeisterschaften, Olympische Spiele). Die Einzelbewerbe werden nach den unten angeführten Formeln bepunktet. Die Summe der Punkte der Einzelbewerbe ergibt die Gesamtpunkteanzahl, die ein Sportler bzw. eine Sportlerin beim Zehn- bzw. Siebenkampf erreicht. ____/0

Für die Errechnung der Punkte P bei Laufwettberwerben gilt:

$P = a \cdot (b - M)^c$ für $M < b$, sonst $P = 0$.

Für die Errechnung der Punkte P bei Sprung- und Wurfwettbewerben gilt:

$P = a \cdot (M - b)^c$ für $M > b$, sonst $P = 0$.

In beiden Formeln beschreibt M die erzielte Leistung. Dabei werden Läufe in Sekunden, Sprünge in Zentimetern und Würfe in Metern gemessen. Die Parameter a, b und c sind vorgegebene Konstanten für die jeweiligen Sportarten. Die errechneten Punkte P werden im Allgemeinen auf zwei Dezimalstellen gerundet.

Aus den beiden folgenden Tabellen kann man die Werte der Parameter a, b und c entnehmen:

Tabelle 1: Zehnkamp der Männer

		Parameter		
		a	b	c
Disziplin	100m	25,4347	18	1,81
	400m	1,53775	82	1,81
	1 500m	0,03768	480	1,85
	110m Hürden	5,74352	28,5	1,92
	Weitsprung	0,14354	220	1,4
	Hochsprung	0,8465	75	1,42
	Stabhochsprung	0,2797	100	1,35
	Kugelstoß	51,39	1,5	1,05
	Diskurswurf	12,91	4	1,1
	Speerwurf	10,14	7	1,08

Tabelle 1: Siebenkampf der Frauen

		Parameter		
		a	b	c
Disziplin	200m	4,99087	42,5	1,81
	800m	0,11193	254	1,88
	100 m Hürden	9,23076	26,7	1,835
	Weitsprung	0,188807	210	1,41
	Hochsprung	1,84523	75	1,348
	Kugelstoß	56,0211	1,5	1,05
	Speerwurf	15,9803	3,8	1,04

Datenquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Punktewertung_(Leichtathletik) [26.06.2015]

Aufgabenstellung:

(a) Am 1. Mai 1976 gelang dem US-Amerikaner Mac Wilkins der erste Diskuswurf über 70 m. Wilkins erreichte eine Wurfweite von 70,24 m, also $M = 70{,}24$.

$\boxed{\text{A}}$ Berechne sein Punkteergebnis im Diskurswurf!

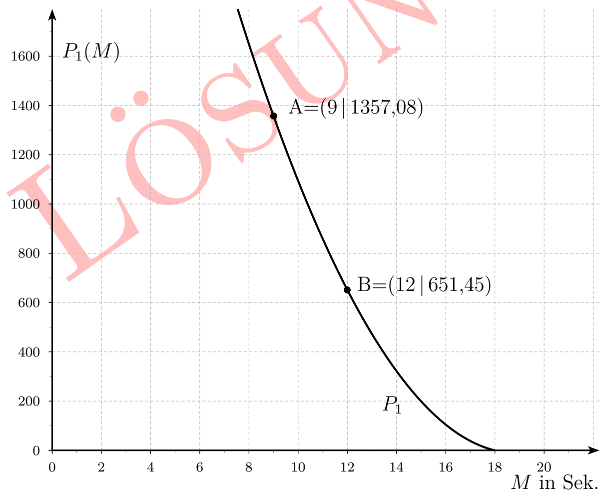
Gib eine Bedeutung des Parameters b der Punkteformel im Hinblick auf die erzielte Punktezahl für den Diskuswurf der Herren an!

(b) Die Bulgarin Stefka Kostadinows übersprang am 30. August 1987 in Rom eine Höhe von 2,09 m und hät seitdem den Hochsprung-Weltrekord. Die Funktion $P : M \mapsto P(M)$ beschreibt die Abhängigkeit der Punktezahl $P(M)$ von der Leistung M bei Hochsprungleistungen.

Berechne die Steigung der Tangente an die Funktion P bei dieser Weltrekordhöhe im Hochsprung!

Interpretiere den Wert der Steigung im gegebenen Kontext!

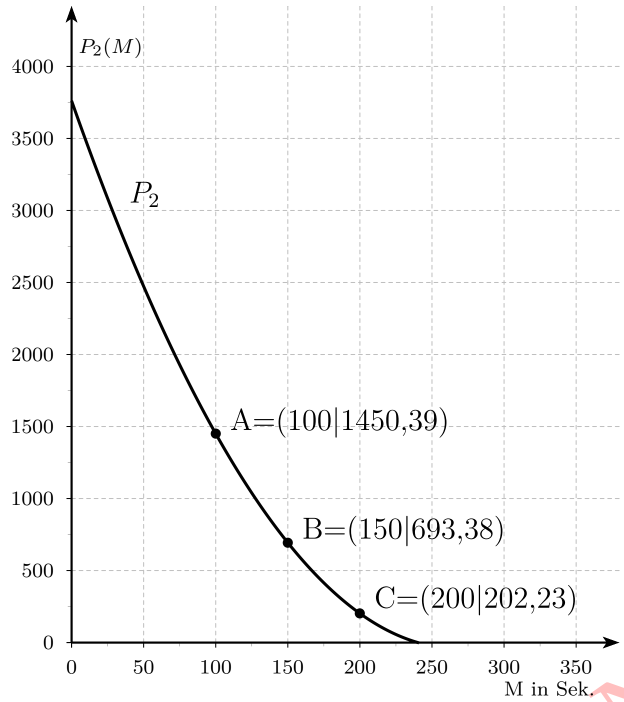
(c) Die folgende Grafik zeigt den funktionalen Zusammenhang $P_1(M)$ für den 100-m-Lauf beim Zehnkampf der Männer:



Näher den Graphen P_1 durch eine lineare Funktion an, deren Graph durch die Punkte A und B geht! Gib eine Gleichung dieser Näherungsfunktion an!

Gib an, wie viele Sekunden die Laufzeit bei dieser Näherung betragen dürfte, um Punkte zu erhalten!

(d) Die folgende Grafik zeigt den funktionalen Zusammenhang $P_2(M)$ für den 800-m-Lauf beim Siebenkampf der Frauen:



Berechne die mittlere Änderungsrate von P_2 sowohl zwischen den Stellen $M = 100$ und $M = 150$ als auch zwischen den Stellen $M = 150$ und $M = 200$ in Punkten pro Sekunde!

Begründe anhand der Grafik, warum sich eine Änderung der Leistung bei besserer Leistung stärker auf die Punktezahl auswirkt als bei schwächerer Leistung!

(a) **Lösungserwartung:**

$P = 12{,}91 \cdot (70{,}24 - 4)^{1{,}1} \approx 1\,300{,}64$

Eine mögliche Interpretation bon b:

b beschreibt die (Mindest-)Leistung (Wurfweite), die übertroffen werden muss, um Punkte zu erhalten.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall: $[1\,300; 1\,301]$
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation. Andere korrekte Interpretationen sind ebenfalls als richtig zu werten.

(b) **Lösungserwartung:**

$P(M) = 1{,}84523 \cdot (M - 75)^{1{,}348}$

$P'(M) = 2{,}48737004 \cdot (M - 75)^{0{,}348}$

$P'(209) \approx 13{,}68$

Der Wert der Steigung dieser Tangente gibt näherungsweise an, um wie viel sich die Punktezahl bei dieser Leistung pro Zentimeter Sprunghöhenänderung verändert.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall: $[13; 14]$
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation. Andere korrekte Interpretationen sind ebenfalls als richtig zu werten.

(c) **Lösungserwartung:**

$P_{1,\text{linear}}(M) = -235{,}21 \cdot M + 3\,473{,}97$

$P_{1,\text{linear}}(M) = 0 \Rightarrow M \approx 14{,}77$

Um Punkte zu erhalten, dürfte die Laufzeit maximal 14,77 s betragen.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine korrekte Funktionsgleichung. Äquivalente Funktionsgleichungen sind ebenfalls als richtig zu werten.
  Toleranzintervall für $k: [-236; -235]$
  Toleranzintervall für $d: [3\,473; 3\,474]$
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit nicht angegeben werden muss.
  Toleranzintervall: $[14{,}7\,s; 15\,s]$

(d) **Lösungserwartung:**

mittlere Änderungsrate zwischen $M = 100$ und $M = 150$: $-15{,}14$ Punkte pro Sekunde

mittlere Änderungsrate zwischen $M = 150$ und $M = 200$: $-9{,}82$ Punkte pro Sekunde

Da die Funktion linksgekrümmt ist, sind die Änderungsraten bei kürzeren Laufzeiten (betragsmäßig) größer als bei längeren Laufzeiten.

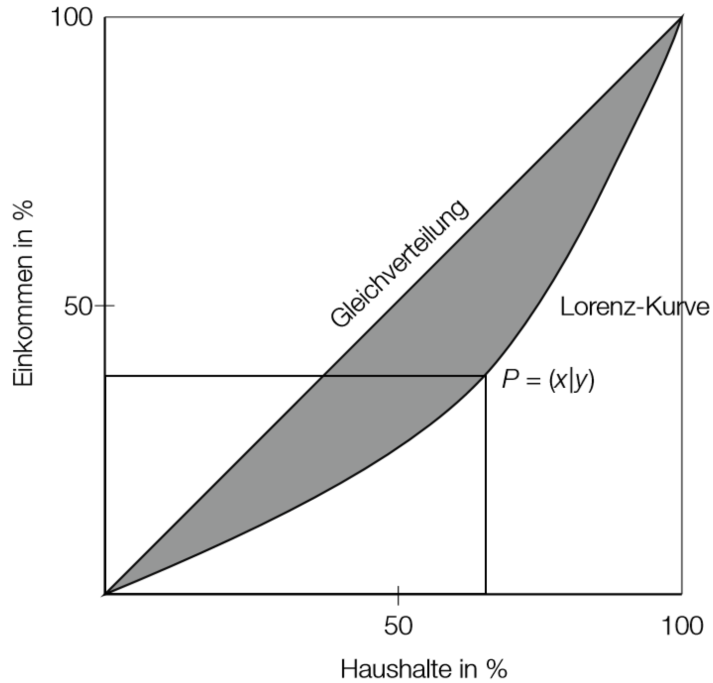
Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die korrekte Angabe beider Werte.
  Toleranzintervalle: $[-16; -14]$ und $[-10; -9]$
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

---

51 - MAT - FA 1.4, AN 2.1, AN 3.3, AN 4.2 - Lorenz-Kurve - Matura 2014/15 1. Nebentermin

51. Der US-amerikanische Statistiker Max Otto Lorenz entwickelte im Jahr 1905 zur Veranschaulichung von Einkommensverteilungen die Lorenz-Kurve. Für die Darstellung der Lorenz-Kurve ordnet man die Haushalte eines Staates nach der Höhe ihres Einkommens. Die Lorenz-Kurve gibt für jeden Prozentsatz der Haushalte an, wie viel Prozent des Volkseinkommens auf ihn entfallen. So steht jeder Punkt $P = (x|y)$ auf der Kurve für folgende Aussage: „Die unteren $x\,\%$ aller Haushalte beziehen $y\,\%$ des Gesamteinkommens.“ Die nachstehende Abbildung zeigt die Lorenz-Kurve von Österreich für das Jahr 2009. ____/0



Quelle: http://diepresse.com/home/wirtschaft/economist/446997/Sozialbericht_Einkommen-in-Oesterreich-ungleicher-verteilt [26.05.2015] (bearbeitet)

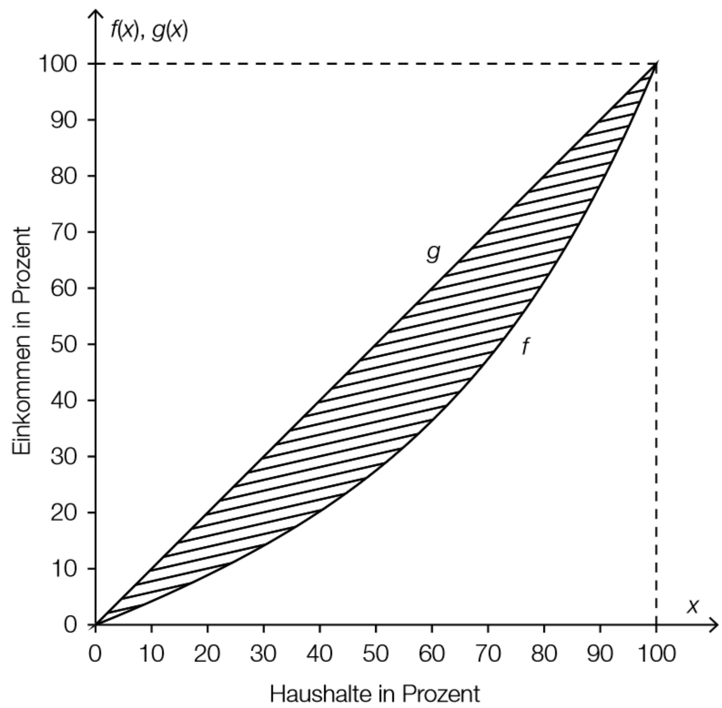
Nimm an, dass die Lorenz-Kurve eines Landes durch die Funktion f mit

$$f(x) = 4 \cdot 10^{-7} \cdot x^4 + 2 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 + 4 \cdot 10^{-1} \cdot x$$

und die Gleichverteilungsgerade durch die Funktion g mit

$$g(x) = x$$

modelliert werden können (x in %; $f(x)$ in %; $g(x)$ in %). Die nachstehende Abbildung zeigt die Graphen der Funktionen f und g. Der charakteristische „Bauch" der Lorenz-Kurve unterhalb der Diagonalen ist ein Maß für die Ungleichverteilung der Einkommen. Er ist in der Abbildung schraffiert dargestellt.



Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Berechne, wie viel Prozent des Gesamteinkommens auf die reichsten 20 % der Haushalte des Landes entfallen!

Zeige mithilfe der Differenzialrechnung, dass die Funktion f im Intervall $[0; 100]$ linksgekrümmt ist!

(b) Der Gini-Koeffizient ist der Anteil der schraffierten Fläche an der Fläche zwischen der Gleichverteilungsgeraden und der x-Achse im Intervall $[0; 100]$.

Berechne den Gini-Koeffizienten des Landes mit der Lorenz-Kurve f!

Gib den Gini-Koeffizienten für einen Staat an, in dem alle Haushalte gleich viel verdienen!

(a) **Lösungserwartung:**

$100 - f(80) = 38{,}816$

Es entfallen ca. 38,8 % des Gesamteinkommens auf die reichsten 20 % der Haushalte.

$f(x) = 4 \cdot 10^{-7} \cdot x^4 + 2 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 + 4 \cdot 10^{-1} \cdot x$

$f'(x) = 1{,}6 \cdot 10^{-6} \cdot x^3 + 4 \cdot 10^{-3} \cdot x + 4 \cdot 10^{-1}$
$f''(x) = 4{,}8 \cdot 10^{-6} \cdot x^2 + 4 \cdot 10^{-3}$

Die Funktion f ist linksgekrümmt, weil: $f''(x) = 4{,}8 \cdot 10^{-6} \cdot x^2 + 4 \cdot 10^{-3} > 0$ für alle $x \in [0; 100]$.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung. Äquivalente Schreibweisen des Ergebnisses (als Bruch oder Dezimalzahl) sind ebenfalls als richtig zu werten.
  Toleranzintervalle: $[38\,\%; 39\,\%]$ bzw. $[0{,}38; 0{,}39]$
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Begründung.

(b) **Lösungserwartung:**

$A_1 = \int_0^{100} f(x)\mathrm{d}x = 3\,466{,}\bar{6}$
$A_2 = \frac{100 \cdot 100}{2} = 5\,000$
$\frac{A_2 - A_1}{A_2} = \frac{1\,533{,}\bar{3}}{5\,000} = 0{,}30\bar{6} \approx 0{,}31$
Der Gini-Koeffizient für das Land mit der Lorenz-Kurve f beträgt 0,31.

$\frac{0}{5\,000} = 0$
Der Wert des Gini-Koeffizienten für einen Staat, in dem alle Haushalte gleich viel verdienen beträgt 0.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall: $[0{,}30; 0{,}31]$
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für die richtige Lösung.

52 - MAT - WS 2.3, WS 4.1 - FSME-Impfung - Matura 2014/15 1. Nebentermin

52. Die Frühsommer-Meningoenzephalitis (FSME) ist eine durch das FSME-Virus ausgelöste Erkrankung, die mit grippeähnlichen Symptomen und bei einem Teil der Patientinnen und Patienten mit einer Entzündung von Gehirn und Hirnhäuten verläuft. Die FSME wird durch den Biss einer infizierten Zecke übertragen, wobei die Übertragungswahrscheinlichkeit bei einem Biss 30 % beträgt. Nur bei 10 % bis 30 % der mit dem FSME-Virus infizierten Personen treten Krankheitserscheinungen auf. Im Durchschnitt verläuft 1 % der Erkrankungen tödlich. In Risikogebieten liegt der Anteil der FSME-infizierten Zecken bei etwa 0,5 % bis 5 %, während man sonst davon ausgeht, dass nur jede 20000. Zecke das FSME-Virus in sich trägt. ____/0

Aufgabenstellung:

(a) Eine nicht geimpfte Person wird in einem Risikogebiet von einer Zecke gebissen.

Gib die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person Krankheitserscheinungen zeigt, in Prozent an; gehe dazu bei den angegebenen Wahrscheinlichkeiten immer von dem Fall aus, der für die gebissene Person am ungünstigsten ist!

Gib an, mit welchem Faktor sich die berechnete Wahrscheinlichkeit für eine FSME-Erkrankung verändert, wenn der Zeckenbiss nicht in einem Risikogebiet erfolgt ist!

(b) $\boxed{\text{A}}$ Im Jahr 2011 gab es in Österreich vier FSME-bedingte Todesfälle. Waren dies weniger oder mehr Todesfälle, als bei 113 Erkrankungen zu erwarten waren? Begründe deine Antwort auf Basis der gegebenen Daten.

In einem österreichischen Risikogebiet nahmen 400 Personen an einer Umfrage teil. Es wird angenommen, dass die Personen, die an dieser Umfrage teilnahmen, eine Zufallsstichprobe darstellen. Von den befragten Personen gaben 64 Personen an, schon einmal von einer Zecke gebissen worden zu sein.

Berechne auf Basis dieses Umfrageergebnisses ein symmetrisches 95-%-Konfidenzintervall für den tatsächlichen (relativen) Anteil p der Personen in diesem Gebiet, die schon einmal von einer Zecke gebissen worden sind!

(a) **Lösungserwartung:**

$0{,}05 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}0045$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt 0,45 %.

In einem Risikogebiet ist schlimmstenfalls jede zwanzigste Zecke mit FSME infiziert, d.h., der Anteil infizierter Zecken ist bis zu 1 000-mal höher als in einem Nichtrisikogebiet. Daher ändert sich die berechnete Wahrscheinlichkeit für eine FSME-Erkrankung um den Faktor $\frac{1}{1\,000}$.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung. Äquivalente Schreibweisen des Ergebnisses (als Bruch oder Dezimalzahl) sind ebenfalls als richtig zu werten.
  Toleranzintervalle: $[0{,}4\,\%; 0{,}5\,\%]$ bzw. $[0{,}004; 0{,}005]$
- Ein Punkt für die richtige Lösung sowie eine (sinngemäß) korrekte Begründung. Bei einer entsprechenden (sinngemäß) korrekten Begründung ist der Faktor 1 000 ebenfalls als richtig zu werten.

(b) **Lösungserwartung:**

Da im Durchschnitt 1 % der Erkrankungen tödlich verlaufen, war nur ein Todesfall (1 % von 113) zu erwarten. Vier Todesfälle sind aher mehr, als zu erwarten war.

Mögliche Berechnung:

$n = 400, h = 0{,}16$

$2 \cdot \Phi(z) - 1 = 0{,}95 \Rightarrow z = 1{,}96$

$$h \pm z \cdot \sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}} = 0{,}16 \pm 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}16 \cdot (1-0{,}16)}{400}} \approx 0{,}16 \pm 0{,}036 \Rightarrow [0{,}124; 0{,}196]$$

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die richtige Antwort sowie eine (sinngemäß) korrekte Begründung.
- Ein Punkt für ein korrektes Intervall. Andere Schreibweisen des Ergebnisses (als Bruch oder Dezimalzahl) sind ebenfalls als richtig zu werten.
  Toleranzintervall für den unteren Wert: $[0{,}12; 0{,}13]$
  Toleranzintervall für den oberen Wert: $[0{,}19; 0{,}2]$
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist

---

53 - MAT - AG 2.3, FA 4.3, AN 4.2 - Quadratische Gleichungen und ihre Lösungen - Matura 2014/15 2. Nebentermin

53. Gegeben sind eine (normierte) quadratische Gleichung $x^2 + p \cdot x + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{R}$ und die zugehörige Polynomfunktion f mit $f(x) = x^2 + p \cdot x + q$. ____/0

Aufgabenstellung:

(a) Lässt sich die Gleichung $x^2 + p \cdot x + q = 0$ in der Form $(x - z) \cdot \left(x - \frac{1}{z}\right) = 0$ mit $z \in \mathbb{R}$ und $z \neq 0$ schreiben, dann spricht man von einer reziproken quadratischen Gleichung.

Gib mithilfe von Gleichungen an, wie die Parameter p und q jeweils von z abhängen!

Bestimme die Werte für z, für die die reziproke quadratische Gleichung genau eine Lösung besitzt. Gib für jeden dieser Werte von z jeweils die lokalen Minimumstellen von f an!

(b) Wählt man in der gegebenen Funktionsgleichung den Wert $q = -1$, dann erhält man eine Polynomfunktion zweiten Grades f mit $f(x) = x^2 + p \cdot x - 1$.

$\boxed{\text{A}}$ Begründe rechnerisch, warum die Gleichung $f(x) = 0$ genau zwei verschiedene Lösungen in $\mathbb{R}$ haben muss!

Begründe, warum die Funktion f eine positive und eine negative Nullstelle haben muss!

(c) Für $q = p - \frac{1}{3}$ erhält man eine Funktion f mit $f(x) = x^2 + p \cdot x + p - \frac{1}{3}$.

Bestimme für diese Funktion f denjenigen Wert für p, für den $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = -6$ gilt!

Gib an, ob für dieses p die Gleichung $\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x$ eine wahre Aussage ergibt, und begründe deine Entscheidung!

(a) **Lösungserwartung:**

$p = -\left(\frac{1}{z} + z\right)$
$q = \frac{1}{z} \cdot z = 1$, q ist somit unabhängig von z

Die reziproke quadratische Gleichung hat genau eine Lösung, wenn $z = 1$ oder $z = -1$ ist.

Minimumstelle für $z = 1$: bei $x = 1$

Minimumstelle für $z = -1$: bei $x = -1$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die korrekte Angabe beider Parameter p und q in Abhängigkeit von z. Äquivalente Gleichungen sind ebenfalls als richtig zu werten.
- Ein Punkt für die Angabe der richtigen Werte von z und der jeweils richtigen Minimumstelle.

(b) **Lösungserwartung:**

$x^2 + p \cdot x - 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + 1}$
Da der Ausdruck $\frac{p^2}{4}$ für alle $p \in \mathbb{R}$ größer oder gleich null ist, ist der Ausdruck unter der Wurzel (die Diskriminante) positiv. Somit gibt es genau zwei Lösungen in $\mathbb{R}$.

Mögliche Begrüdungen:

Jeder mögliche Funktionsgraph von f verläuft durch den Punkt $(0|-1)$ und ist eine nach oben offene Parabel. Somit hat jede Funktion f genau eine positive und eine negative Nullstelle. Diese Werte entsprechen genau den Lösungen der quadratischen Gleichung $f(x) = 0$.

oder:

Es gilt: $\frac{p^2}{4} + 1 > \frac{p^2}{4}$ und somit auch $\sqrt{\frac{p^2}{4} + 1} > \frac{p}{2}$.
Daraus folgt: $-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + 1} > 0$ und $-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} + 1} < 0 \Rightarrow$ Es gibt immer genau eine positive und eine negative Lösung in $\mathbb{R}$.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für eine korrekte rechnerische Begründung.
- EEin Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Begründung dafür, dass die Parabel genau eine positive und eine negative Nullstelle hat.

(c) **Lösungserwartung:**

$$\int_{-1}^{1} \left(x^2 + p \cdot x + p - \frac{1}{3}\right) dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{px^2}{2} + px - \frac{x}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = -6 \Rightarrow p = -3$$

Für $p = 3$ ergibt die gegebene Gleichung keine wahre Aussage, weil für eine solche Funktion der Graph der Funktion f achsensymmetrisch liegen müsste, damit die Gleichung eine wahre Aussage ergibt, und das ist nur für $p = 0$ der Fall.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für den korrekten Wert von p. Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für die korrekte Angabe, ob die Aussage zutrifft, und eine korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen, zum Beispiel durch Rechnung, sind ebenfalls als richtig zu werten.

54 - MAT - FA 4.3, AN 4.3 - Design-Center Linz - Matura 2014/15 2. Nebentermin

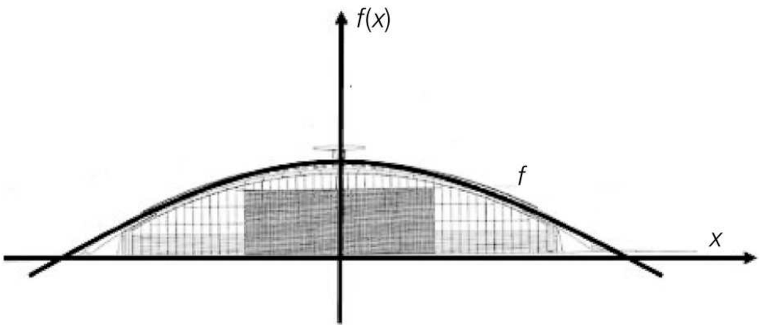
54. ____/0

Das Design-Center ist eines der modernen Wahrzeichen der Stadt Linz. Erbaut wurde es von Juli 1991 bis Ende Oktober 1993. Im Jänner 1994 wurde es als Veranstaltungs- und Messezentrum in Betrieb genommen. Die Träger der Konstruktion lassen sich in guter Näherung durch Parabelbögen beschreiben. Die Spannweite der Bögen beträgt ungefähr 72 m, die maximale Höhe der Bögen liegt bei ca. 13 m. Die Grundfläche des Design-Centers ist ein Rechteck mit 200 m Länge und 72 m Breite.

Bildquelle: www.linz.at/images/dc_druck.jpg [09.09.2015]

Aufgabenstellung:

(a) Zur Modellierung der parabelförmigen Träger wurde, wie in der folgenden Grafik dargestellt, ein Koordinatensystem durch die Frontansicht des Design-Centers gelegt:



$\boxed{\text{A}}$ Gib eine Gleichung der Polynomfunktion zweiten Grades f an, welche diese Parabel beschreibt!

Gib an, was durch $200 \cdot 2 \cdot \int_0^{36} f(x)\mathrm{d}x$ in Bezug auf das Design-Center berechnet wird!

(b) Die Baukosten für das Design-Center betrugen zur Zeit der Baufertigstellung (1993) umgerechnet ca. € 66 Mio.

Der Baukostenindex ist ein Maß für die Entwicklung derjenigen Kosten, die Bauunternehmern bei der Ausführung von Bauleistungen durch Veränderungen der Kostengrundlagen (Material und Arbeit) entstehen. Er gibt z.B. an, wie stark die Kosten für Hochbauten pro Jahr steigen.

Berechne unter der Annahme, dass der Baukostenindex für Österreich 3,5 % pro Jahr beträgt, die Höhe der Baukosten für das Design-Center, wenn es erst 10 Jahre später gebaut worden wäre!

Die nachstehende Tabelle gibt Auskunft über die Entwicklung des Baukostenindex der Gesamtbaukosten für den Wohnhaus- und Siedlungsbau im Zeitraum von fünf aufeinanderfolgenden Jahren.

Jahr	Baukostenindex
2010	+3,2 %
2011	+2,3 %
2012	+2,1 %
2013	+1,9 %
2014	+1,1 %

Quelle: http://www.statistik.at/web_de/statistiken/wirtschaft/preise/baukostenindex/index.html [30.10.2015]

Jemand interessiert sich für den durchschnittlichen Baukostenindex in diesen fünf Jahren. Zur Abschätzung führt er die folgende Rechnung aus:

$$\frac{3{,}2 + 2{,}3 + 2{,}1 + 1{,}9 + 1{,}1}{5} = 2{,}12$$

Die Vorgehensweise ist für die Berechnung des durchschnittlichen Baukostenindex allerdings nicht ganz korrekt. Gib an, wie diese Berechnung korrekt zu erfolgen hätte!

(a) Lösungserwartung:

$f(x) = -\frac{13}{1\,296} \cdot x^2 + 13$

oder:

$f(x) \approx -0{,}01 \cdot x^2 + 13$

Durch den angegebenen Term wird das (umbaute) Volumen des Design-Centers berechnet.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für das Aufstellen einer korrekten Funktionsgleichung. Äquivalente Funktionsgleichungen sind ebenfalls als richtig zu werten.
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Deutung.

(b) **Lösungserwartung:**

2003 würden die Baukosten für das Design-Center ca. € 93,1 Mio. betragen.

Korrekte Vorgehensweise:
$K \cdot 1{,}032 \cdot 1{,}023 \cdot 1{,}021 \cdot 1{,}019 \cdot 1{,}011 = K \cdot a^5 \Rightarrow$
$a = \sqrt[5]{1{,}032 \cdot 1{,}023 \cdot 1{,}021 \cdot 1{,}019 \cdot 1{,}011} \Rightarrow a \approx 1{,}02118$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine korrekte Berechnung.
  Toleranzintervall [€ 93 Mio.; € 94 Mio.]
- Ein Punkt für die Angabe einer korrekten Vorgehensweise. Die numerische Berechnung des Wertes muss dabei nicht erfolgen.

---

55 - MAT - FA 3.2, AN 3.2, FA 2.2, FA 2.3, AN 1.2 - Schiefer Turm von Pisa - Matura 2014/15 2. Nebentermin

55. Der Schiefe Turm von Pisa zählt zu den bekanntesten Gebäuden der Welt. Historisch nicht verbürgt sind Galileo Galileis (1564 - 1642) Fallversuche aus verschiedenen Höhen des Schiefen Turms von Pisa. Tatsache ist jedoch, dass Galilei die Gesetze des freien Falls erforscht hat. Die Fallzeit eines Körpers aus der Höhe h_0 ist bei Vernachlässigung des Luftwiderstandes (im Vakuum) unabhängig von seiner Form und seiner Masse. ____/0

    Modellhaft kann die Höhe des fallenden Körpers in Abhängigkeit von der Zeit näherungsweise durch die Funktion h mit der Gleichung $h(t) = h_0 - 5t^2$ beschrieben werden.

    Die Höhe $h(t)$ wird in Metern und die Zeit t in Sekunden gemessen.

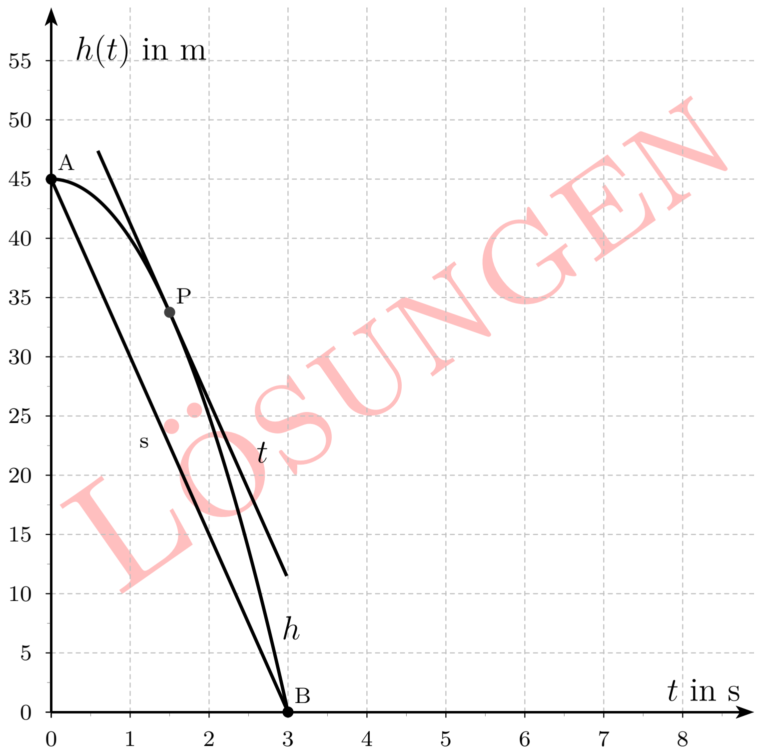
Aufgabenstellung:

(a) Ein Körper fällt im Vakuum aus einer Höhe $h_0 = 45\,\text{m}$.

$\boxed{\text{A}}$ Berechne seine Geschwindigkeit in m/s zum Zeitpunkt t_1 des Aufpralls!

Begründe, warum der Betrag der Geschwindigkeit dieses Körpers im Intervall $[0; t_1]$ monoton steigt!

(b) In der unten stehenden Abbildung ist der Graph der Funktion h für $h_0 = 45\,\text{m}$ dargestellt. Bestimmen Sie die Steigung der Sekante s durch die Punkte $A = (0|45)$ und $B = (3|0)$ und deuten Sie diesen Wert im Hinblick auf die Bewegung des Körpers!



Die Tangente t im Punkt $P = (1{,}5|h(1{,}5))$ ist parallel zur Sekante s. Interpretiere diese Tatsache im Hinblick auf die Bewegung des Körpers.

(a) **Lösungserwartung:**

Zeit-Weg-Funktion $h(t) = 45 - 5t^2$

$0 = 45 - 5t^2$

$t_1 = 3$

Geschwindigkeitsfunktion $v(t) = h'(t) = -10t$

$v(3) = h'(3) = -30$

Der Betrag der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt des Aufpralls beträgt 30 m/s.

Die Geschwindigkeitsfunktion ist eine lineare Funktion, die im Intervall $[0\,s; 3\,s]$ von $v(0) = h'(0) = 0$ ausgehend monoton fallend ist - daher wird der Betrag der Geschwindigkeit immer größer.

Die Bewegung ist gleichmäßig beschleunigt - das heißt, der Betrag der Geschwindigkeit ist monoton wachsend.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m/s" nicht angeführt sein muss und auch -30 m/s als korrekt zu werten ist. Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Begründung.

(b) **Lösungserwartung:**

Die Steigung der Sekante beträgt -15.

Das bedeutet, dass der Betrag der Durchschnittsgeschwindigkeit bei der Bewegung des Körpers im Zeitraum von 0 Sekunden bis 3 Sekunden 15 m/s beträgt.

Mögliche Interpretation:

Der Betrag der Momentangeschwindigkeit ist zum Zeitpunkt $t = 1{,}5$ gleich groß wie die Durchschnittsgeschwindigkeit des Körpers im Intervall $[0\,s; 3\,s]$.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine korrekte Bestimmung der Sekantensteigung und eine (sinngemäß) korrekte Deutung.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation.

56 - MAT - WS 1.3, WS 1.4, WS 1.1, WS 3.3, WS 3.2 - Reaktionstest - Matura 2014/15 2. Nebentermin

56. Bei einem Reaktionstest am Computer werden der getesteten Person am Bildschirm nacheinander 20 Muster gezeigt, die klassifiziert werden müssen. Protokolliert werden die für die 20 Reaktionen insgesamt benötigte Reaktionszeit t sowie die Anzahl f der dabei auftretenden fehlerhaften Klassifikationen. ____/0

In der nachstehenden Tabelle sind die Ergebnisse eines Reaktionstests am Computer einer Testperson in einer Serie von zehn Testdurchgängen angegeben.

Nummer der Testdurchführung	t (in Sekunden)	f
1*	$t_1 = 22{,}3$	$f_1 = 3$
2	$t_2 = 24{,}6$	$f_2 = 2$
3	$t_3 = 21{,}8$	$f_3 = 3$
4	$t_4 = 23{,}5$	$f_4 = 1$
5	$t_5 = 32{,}8$	$f_5 = 5$
6	$t_6 = 21{,}7$	$f_6 = 4$
7	$t_7 = 22{,}6$	$f_7 = 3$
8	$t_8 = 22{,}8$	$f_8 = 2$
9	$t_9 = 35{,}4$	$f_9 = 3$
10	$t_{10} = 22{,}5$	$f_10 = 1$

* Erläuterung: Die Person benötigt bei der ersten Testdurchführung 22,3 Sekunden, drei ihrer Klassifikationen waren falsch.

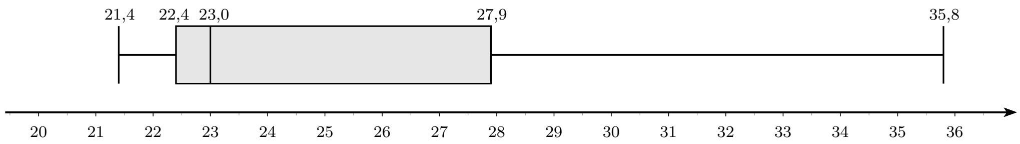
Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Berec hne das arithmetische Mittel $\bar{t}$ der zehn Reaktionszeiten $t_1, t_2, ..., t_{10}$ sowie die Standardabweichung s_t dieser zehn Werte!

Die getestete Person absolviert zwei weitere Testdurchgänge und erreicht dabei die Zeiten t_{11} und t_{12}. Das arithmetische Mittel der neuen Datenreihe $t_1, t_2, ..., t_{10}, t_{11}, t_{12}$ wird mit $\bar{t}_{\text{neu}}$ bezeichnet, die entsprechende Standardabweichung mit s_{neu}. Gib Werte für t_{11} und t_{12} so an, dass $t_{11} \neq t_{12}, \bar{t}_{\text{neu}} = \bar{t}$ und $s_{\text{neu}} < s_t$ gilt!

(b) Im Laufe einer Diskussion vertritt eine Person die Meinung, dass das arithmetische Mittel der 10 Reaktionszeiten die gegebene Datenliste nicht optimal beschreibt. Gib ein mögliches Argument an, das diese Meinung stützt, und nenne ein alternatives statistisches Zentralmaß!

Die Datenreihe der 500 Reaktionszeiten von insgesamt 50 Testpersonen wird durch das nachstehende Kastenschaubild dargestellt.



Entscheide, ob die folgende Aussage jedenfalls korrekt ist: „Höchstens 125 der 500 Reaktionszeiten betragen höchstens 22,4 s.“ Begründe deine Entscheidung!

(c) Die Zufallsvariable H ordnet jedem Testdurchgang, bei dem einer bestimmten Person 20 Bilder vorgelegt werden, die Anzahl der dabei auftretenden fehlerhaften Reaktionen zu.

Nenne unter Bezugnahme auf den dargelegten Sachverhalt die Voraussetzungen, die für den Reaktionstest als erfüllt angesehen werden müssen, damit die Zufallsvariable H durch eine Binomialverteilung beschrieben werden kann!

Berechne $P(H > 2)$, wenn die getestete Person mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0{,}15$ fehlerhaft reagiert!

(a) **Lösungserwartung:**

$\bar{t} = 25\,\text{s}$

$s_1 \approx 4{,}9\,2$

Mögliche Angaben der Werte für t_{11} und t_{12}:

$t_{11} = 23\,\text{s}$, $t_{12} = 27\,\text{s}$

oder:

$t_{11} = 24\,\text{s}$, $t_{12} = 26\,\text{s}$

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die korrekten Werte von $\bar{t}$ und s_t, wobei die Einheit nicht angeführt sein muss.
  Toleranzintervall für s_t : $[4{,}6\,s; 5{,}0\,s]$
- Ein Punkt für eine geeignete Angabe von je einem Wert für t_{11} und t_{12}, wobei die Eineit „s" nicht angheführt sein muss und wobei allgemein gilt: Eine der beiden Zeiten muss den Wert $25+x$, die andere den Wert $25-x$ annehmen, wobei $x \in [0; s_t)$. Der Punkt ist auch dann zu geben, wenn die Werte für t_{11} und t_{12} aus der Basis falsch berechneter Werte von $\bar{t}$ bzw. s_t ermittelt werden, der Lösungsweg aber prinzipiell korrekt ist.

(b) **Lösungserwartung:**

Mögliches Argument:

Durch die beiden „Ausreißer" 32,8 und 35,4 wird das arithmetische Mittel stark nach oben verzerrt. Das alternative Zentralmaß *Median* ist gegenüber Ausreißern robust.

Die Aussage ist so nicht korrekt, da aus dem Kastenschaubild nicht hervorgeht, ob es mehrere Reaktionszeiten gibt, die genau 22,4 s betragen und die im zweiten Viertel der geordneten Datenreihe liege.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für ein richtiges Argument und die Angabe des Medians als alternatives Zentralmaß.
- Ein Punkt für eine korrekte Entscheidung und eine (sinngemäß) korrekte Begründung.

(c) **Lösungserwartung:**

Damit die Zufallsvariable H als binomialverteilt angesehen werden kann, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

(i) Die Wahrscheinlichkeit für eine fehlerhafte Reaktion muss für alle 20 Reaktionen gleich hoch sein (darf also bei bestimmten Bildern nicht höher oder niedriger sein als bei anderen Bildern).

(ii) Die Reaktionen müssen voneinander unabhängig sein. (Ob eine vorangegangene Reaktion richtig oder falsch war, darf keinen Einfluss auf die Richtigkeit einer nachfolgenden Reaktion haben.)

(iii) Die Reaktionen können nur entweder fehlerhaft oder korrekt sein.

oder:

Jeder einzelne Versuch wird unter denselben Bedingungen durchgeführt.

$P(H > 2) = 1 - [P(H = 0) + P(H = 1) + P(H = 2)] \approx 0{,}595$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die (sinngemäß) richtige Angabe erforderlicher kontextbezogener Voraussetzungen für die Verwendung der Binomialverteilung, wobei der 3. Punkt nicht angeführt sein muss.
- Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen des Ergebnisses (z.B. in Prozent) sind ebenfalls als richtig zu werten.
  Toleranzintervall: $[0{,}59; 0{,}61]$
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

---

57 - MAT - WS 4.1, AN 3.3 - Überraschungseier - Matura 2014/15 2. Nebentermin

57. Ein italienischer Süßwarenhersteller erzeugt das Produkt Kinder Überraschung (auch als „Überraschungsei“ bekannt). Das Ei soll aus 20 g Schokolade bestehen. Im Inneren des Eies befindet sich in einer gelben Kapsel ein Spielzeug. Diese Kapsel hat näherungsweise die Form eines Drehzylinders, auf dessen Grund- und Deckfläche Halbkugeln aufgesetzt werden. Das Volumen der Kapsel beträgt ungefähr $36\,\text{cm}^3$ und deren Oberfläche $55\,\text{cm}^2$. ____/0

Bildquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Überraschungsei.jpg [01.06.2015] (Urheber: A. Kniesel, Lizenz: CC BY-SA 3.0)

Aufgabenstellung:

(a) Bei der Qualitätskontrolle gelten Schokoladeneier, deren Masse um mehr als 0,5 g vom Sollwert 20 g abweichen, als Ausschuss. Bei einer Kontrolle wurden nach dem Zufallsprinzip 500 Schokoladeneier einer Produktionsserie ausgewählt und überprüft. Dabei wurden 15 als Ausschuss aussortiert.

Gib ein symmetrisches 90-%-Konfidenzintervall für den relativen Anteil p an Ausschusseiern in der gesamten Produktionsserie an!

Gib an, durch welche Maßnahme man die Breite des Konfidenzintervalls bei vorgegebenem Konfidenzniveau (Sicherheit) verringern kann!

(b) Der Hersteller überlegt, die gelbe Kapsel in Zukunft nur in Form eines Drehzylinders ohne aufgesetzte Halbkugeln zu produzieren. Das Volumen V der Kapsel soll dabei unverändert bleiben, ebenso wie die Form des Schokoladeneies. Die Oberfläche $O(r)$ des angedachten Drehzylinders kann in Abhängigkeit vom Radius r durch die Funktion O mit der Gleichung $O(r) = 2r^2\pi + 2 \cdot V \cdot r^{-1}$ beschrieben werden. Der Radius r darf dabei nur Werte im Bereich $(0\,cm; 1{,}9\,cm]$ annehmen, damit der Zylinder in das Schokoladenei passt.

Berechne die minimal mögliche Oberfläche der geplanten zylindrischen Kapsel!

Weise durch Differenzialrechnung nach, dass an der berechneten Stelle tatsächlich ein Minimum vorliegt!

(a) **Lösungserwartung:**

$h = 0{,}03$

$0{,}03 \pm 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{0{,}03 \cdot (1-0{,}03)}{500}} \approx 0{,}03 \pm 0{,}013 \Rightarrow [0{,}017; 0{,}043]$

Mögliche Maßnahme:

Durch eine Erhöhung der Anzahl der kontrollierten Schokoladeneier auf mehr als 500 kann eine Verringerung der Breite des Konfidenzintervalls erreicht werden.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für ein korrektes Intervall. Andere Schreibweisen des Ergebnisses (als Bruch oder Dezimalzahl) sind ebenfalls als richtig zu werten.
  Toleranzintervall für den unteren Wert: $[0{,}017; 0{,}02]$
  Toleranzintervall für den oberen Wert: $[0{,}042; 0{,}05]$
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Angabe der entsprechenden Änderung. Andere angeführte korrekte Maßnahmen sind ebenfalls als richtig zu werten.

(b) **Lösungserwartung:**

$O'(r) = 4r\pi - 72 \cdot r^{-2} = 4r\pi - \frac{72}{r^2}$

$4r\pi - \frac{72}{r^2} = 0$

$r^3 = \frac{18}{\pi}$

$r = \sqrt[3]{\frac{18}{\pi}} \Rightarrow r \approx 1{,}79\,\text{cm}$

$O(1{,}79) \approx 60{,}4\,\text{cm}^2$

$O''(r) = 4\pi + 144 \cdot r^{-3} = 4\pi + \frac{144}{r^3}$

$O''(1{,}79) \approx 37{,}7 > 0$, daher liegt ein lokales Maximum vor.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine korrekte Berechnung der minimalen Oberfläche, wobei die Einheit „cm^2" nicht angeführt sein muss.
  Toleranzintervall: $[60\,\text{cm}^2; 61\,\text{cm}^2]$
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für einen korrekten Nachweis. Andere angeführte korrekte Nachweise sind ebenfalls als richtig zu werten.

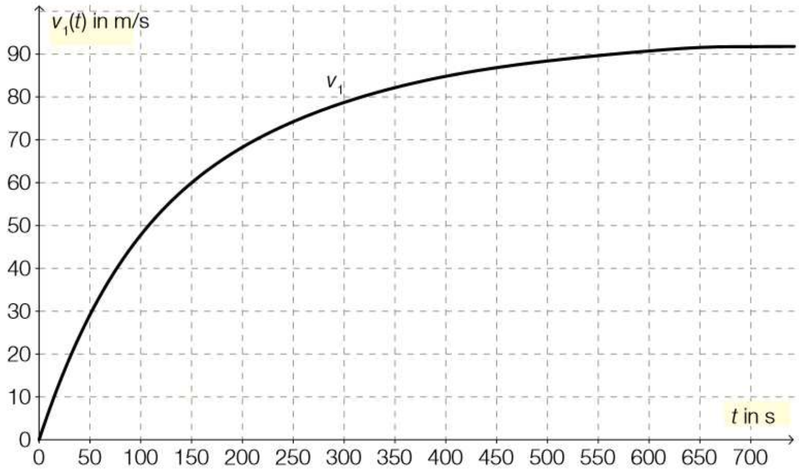
---

58 - MAT - AN 1.2, AN 4.3, AN 2.1, FA 2.3, FA 2.2, FA 4.3 - Intercity-Express (ICE) - Matura 2015/16 Haupttermin

58. Als ICE werden verschiedene Baureihen von Hochgeschwindigkeitszügen der Deutschen Bahn bezeichnet. Mit einer Höchstgeschwindigkeit von bis zu 330 km/h (rund 91,7 m/s) handelt es sich dabei um die schnellsten Züge Deutschlands. Sie sind ca. 200 Meter lang und ca. 400 Tonnen schwer und bestehen aus jeweils acht Wagen. Im Rahmen von Zulassungsfahrten müssen Beschleunigungs- und Bremstests absolviert werden. Ergebnisse dieser Tests können grafisch dargestellt werden. ____/0

Aufgabenstellung:

(a) Die Daten eines Beschleunigungstests vom Stillstand bis zur Höchstgeschwindigkeit (die Geschwindigkeit $v_1(t)$ ist in Metern pro Sekunde und die Zeit t in Sekunden angegeben) sind im nachstehenden Zeit-Geschwindigkeit-Diagramm näherungsweise dargestellt.



Bestimme die mittlere Änderungsrate der Geschwindigkeit im Zeitintervall [0 s; 700 s] und gib einen Zeitpunkt an, zu dem die momentane Änderungsrate der Geschwindigkeit größer ist als die ermittelte mittlere Änderungsrate!

$\boxed{\text{A}}$ Interpretiere das bestimmte Intergral $\int_0^{700} v_1(t)\mathrm{d}t$ im gegebenen Kontext!

(b) Bei einem Bremstest werden Daten aufgezeichnet. Diesen Daten kann man für den zurückgelegten Weg $s(t)$ entnehmen: $s(t) = 70 \cdot t - 0{,}25 \cdot t^2$ mit t in Sekunden und $s(t)$ in Metern ab Bremsbeginn.

Gib die Zeit-Geschwindigkeit-Funktion v_2 für den Bremstest in Form von $v_2(t) = k \cdot t + d$ an und deute die auftretenden Parameter k und d im gegebenen Kontext!

Bestimme die Länge derjenigen Strecke, die der ICE vom Bremsbeginn bis zum Stillstand zurücklegt!

(a) Lösungserwartung:

mittlere Änderungsrate: $0{,}131\,\mathrm{m/s^2}$

möglicher Zeitpunkt für die momentane Änderungsrate: $t = 150\,\mathrm{s}$

Der Wert des angegebenen bestimmten Integrals entspricht dem im Zeitintervall [0 s; 700 s] zurückgelegten Weg (in Metern).

Lösungsschlüssel:

- EEin Punkt für die Angabe sowohl einer korrekten mittleren Änderungsrate als auch eines entsprechenden Zeitpunkts, wobei die Einheiten „m/s²" bzw. „s" nicht angeführt sein müssen.
  Toleranzintervall für die mittlere Änderungsrate: $[0{,}130\,\text{m/s}^2; 0{,}133\,\text{m/s}^2]$
  Toleranzintervall für den Zeitpunkt: $[0\,\text{s}; 230\,\text{s}]$
- Ein Ausgleichspunkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation.

(b) **Lösungserwartung:**

$v_2(t) = 70 - 0{,}5 \cdot t$

Mögliche Deutungen von k:

Die Geschwindigkeit nimmt während des Bremsvorgangs in jeder Sekunde (konstant) um $0{,}5\,\text{m/s}$ ab.

oder:

Die Beschleunigung (ist konstant und) beträgt $-0{,}5\,\text{m/s}^2$.

oder:

Die Verzögerung durch das Bremsen (ist konstant und) beträgt $0{,}5\,\text{m/s}^2$.

Mögliche Deutung von d:

Die Geschwindigkeit zu Beginn des Bremsvorgangs beträgt $70\,\text{m/s}$.

$v_2(t) = 0 \Rightarrow t = 140\,\text{s} \Rightarrow s(140) = 4\,900\,\text{m}$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine korrekte Gleichung und eine (sinngemäß) korrekte Deutung beider Parameter. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m" nicht angeführt sein muss.

59 - MAT - AN 1.1, FA 5.6, FA 2.2, FA 2.5 - ZAMG-Wetterballon - Matura 2015/16 Haupttermin

59. Ein Wetterballon ist ein mit Helium oder Wasserstoff befüllter Ballon, der in der Meteorologie zum Transport von Radiosonden (Messgeräten) verwendet wird. Die Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik (ZAMG) lässt an 365 Tagen im Jahr zwei Mal am Tag einen Wetterballon von der Wetterstation Hohe Warte aufsteigen. Während des Aufstiegs werden kontinuierlich Messungen von Temperatur, Luftfeuchtigkeit, Luftdruck, Windrichtung und Windgeschwindigkeit durchgeführt. ____/0

Die bei einem konkreten Aufstieg eines Wetterballons gemessenen Werte für den Luftdruck und die Temperatur in der Höhe h über dem Meeresspiegel liegen in der nachstehenden Tabelle vor.

Die Höhe h des Ballons über dem Meeresspiegel (in m)	Luftdruck p (in hPa)	Temperatur (in °C)
1 000	906	1,9
2 000	800	-3,3
3 000	704	-8,3
4 000	618	-14,5
5 000	544	-21,9
6 000	479	-30,7
7 000	421	-39,5
8 000	370	-48,3

Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Bestimme die relative (prozentuelle) Änderung des Luftdrucks bei einem Anstieg des Wetterballons von 1 000 m auf 2 000 m!

Die Abhängigkeit des Luftdrucks von der Höhe kann näherungsweise durch eine Exponentialfunktion beschrieben werden. Beschreibe, wie dies anhand obiger Tabelle begründet werden kann!

(b) Die Temperatur in Abhängigkeit von der Höhe lässt sich im Höhenintervall $[5\,000\,\text{m}; 8\,000\,\text{m}]$ durch eine lineare Funktion T beschreiben.

Begründe dies anhand der in der obigen Tabelle angegebenen Werte!

Berechne für diese Funktion T mit $T(h) = k \cdot h + d$ die Werte der Parameter k und d!

(c) Das Volumen des Wetterballons ist näherungsweise indirekt proportional zum Luftdruck p. In 1 000 Metern Höhe hat der Wetterballon ein Volumen von $3\,\text{m}^3$.

Beschreibe die funktionale Abhängigkeit des Volumens (in m^3) vom Luftdruck (in hPa) durch eine Gleichung!

$V(p) =$ ____________________

Berechne die absolute Änderung des Ballonvolumens im Höhenintervall $[1\,000\,\text{m}; 2\,000\,\text{m}]$

(a) **Lösungserwartung:**

$\frac{800-906}{906} \approx -0{,}117$

Der Luftdruck nimmt bei diesem Anstieg um ca. 11,7 % ab.

Eine Exponentialfunktion eignet sich in diesem Fall, da eine gleiche Zunahme der Höhe h stets eine Verminderung des Luftdrucks um den annähernd gleichen Prozentsatz vom jeweiligen Ausgangswert bewirkt (z.B. Höhenzunahme um 1 000 m $\Leftrightarrow$ Luftdruckabnahme um ca. 12 %).

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall: $[-0{,}12; -0{,}115]$ bzw. $[-12\,\%; -11{,}5\,\%]$
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Begründung.

(b) **Lösungserwartung:**

Eine lineare Funktion eignet sich in diesem Fall, da eine gleiche Zunahme der Höhe h stets eine gleiche Verminderung der Temperatur vom jeweiligen Ausgangswert bewirkt (z.B. Höhenzunahme um 1 000 m $\Leftrightarrow$ Temperaturverminderung um 8,8 °C).

$k = -0{,}0088$

$d = 22{,}1$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Begründung.

- Ein Punkt die korrekte Angabe beider Parameterwerte k und d.
  Toleranzintervall für $k : [-0{,}009; -0{,}0088]$

(c) **Lösungserwartung:**

$V(p) = \frac{2\,718}{p}$

$V(800) - V(906) = 0{,}3975$

Die absolute Änderung des Ballonvolumens in diesem Höhenintervall beträgt $0{,}3975\,\text{m}^3$.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine korrekte Gleichung. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m^3" nicht angeführt sein muss.
  Toleranzintervall: $[0{,}39\,\text{m}^3; 0{,}4\,\text{m}^3]$

---

60 - MAT - AG 2.1, FA 2.2 - Einkommensteuer - Matura 2015/16 Haupttermin

60. Erwerbstätige Personen müssen einen Teil ihrer Einkünfte in Form von Einkommensteuer an den Staat abführen. Im Steuermodell für das Kalenderjahr 2015 unterscheidet man vier Steuerklassen mit den sogenannten Steuersätzen: 0 %, 36,5 %, 43,2 % und 50 %. _____/0

Modellhaft wird angenommen:

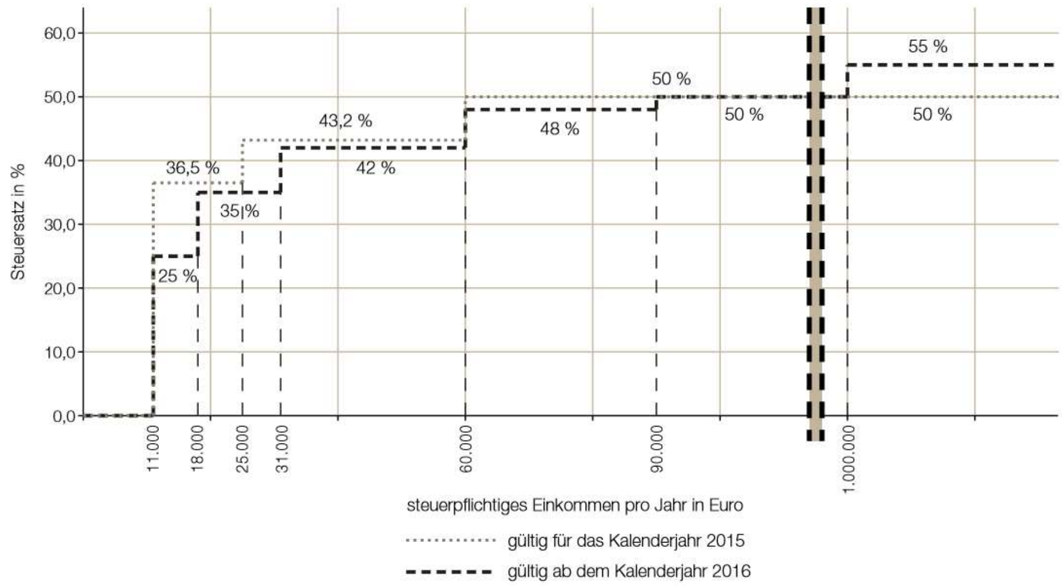
Jahresnettoeinkommen = steuerpflichtiges Jahreseinkommen - Einkommensteuer

Die Berechnung der Einkommensteuer bezieht sich auf das steuerpflichtige Jahreseinkommen und unterliegt für das Kalenderjahr 2015 den folgenden Regeln:

- Einkommen bzw. Einkommensteile bis € 11.000 sind steuerfrei.
- Einkommensteile über € 11.000 bis € 25.000 werden mit 36,5 % besteuert. Das heißt: Liegt das Einkommen über € 11.000, sind die ersten verdienten € 11.000 steuerfrei, die darüber hinausgehenden Einkommensteile bis € 25.000 werden mit 36,5 % besteuert.

- Einkommensteile über € 25.000 bis € 60.000 werden mit 43,2 % (genau: $43\frac{3}{14}$ %) besteuert.
- Einkommensteile über € 60.000 werden mit 50 % besteuert.

Am 7. Juli 2015 wurde vom Nationalrat das Steuerreformgesetz 2015/2016 beschlossen. Das ab dem 1. Jänner 2016 gültige Steuermodell ist ein Modell mit sieben Steuersätzen. Das 2015 gültige Modell (mit vier Steuerklassen) und das ab 2016 gültige Modell (mit sieben Steuerklassen) sind in der nachstehenden Grafik dargestellt.



Datenquelle: http://www.parlament.gv.at/ZUSD/BUDGET/BD_-_Steuerreform_2015_und_2016.pdf, S. 15 [11.11.2015]

Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Berechne mithilfe der 2015 geltenden Steuersätze das Jahresnettoeinkommen einer Person, deren steuerpflichtiges Jahreseinkommen € 20.000 beträgt!

Gib (für das Jahr 2015) eine Formel für das Jahresnettoeinkommen N einer Person an, deren steuerpflichtiges Jahreseinkommen E zwischen € 11.000 und € 25.000 liegt!

(b) Der sogenannte *Durchschnittssteuersatz* ist wie folgt definiert:

Durchschnittssteuersatz $= \frac{\text{gezahlte Einkommensteuer}}{\text{steuerpflichtiges Jahreseinkommen}}$

Jemand bezog im Jahr 2015 ein steuerpflichtiges Jahreseinkommen von € 40.000. Berechne für diese Person für das Jahr 2015 den Durchschnittssteuersatz!

Interpretiere unter Verwendung der gegebenen Grafik, was für diese Person mit dem Term $7\,000 \cdot 0{,}115 + 7\,000 \cdot 0{,}015 + 6\,000 \cdot 0{,}082 + 9\,000 \cdot 0{,}012$ berechnet wird!

(c) Jemand behauptet:

(i) „Bei einem steuerpflichtigen Jahreseinkommen von € 100.000 tritt trotz der Gesetzesänderung keine Veränderung hinsichtlich der abzuführenden Einkommensteuer ein.“

(ii) „Der Steuersatz für steuerpflichtige Jahreseinkommen von über € 11.000 bis € 18.000 ändert sich um 11,5 Prozent.“

Sind diese Behauptungen richtig? Formuliere jeweils eine mathematisch begründete Antwort!

(d) Das Bundesministerium für Finanzen gibt auf seiner Website die Berechnung der Einkommensteuer 2015 (ESt) für die Einkommensklasse über € 25.000 bis € 60.000 steuerpflichtiger Jahreseinkommen mit folgender Formel an:

$$\text{ESt} = \frac{(\text{steuerpflichtiges Jahreseinkommen} - 25\,000) \cdot 15\,125}{35\,000} + 5\,110$$

Deute den Faktor $\frac{15\,125}{35\,000}$ und den Summanden $5\,110$ im Hinblick auf die Berechnung der Einkommensteuer!

Stelle eine Formel zur Berechnung der Einkommensteuer (ESt_{neu}) für ein steuerpflichtiges Jahreseinkommen von über € 31.000 bis € 60.000 für das ab 2016 gültige Steuermodell auf!

$(\text{ESt}_{\text{neu}}) =$ ____________________

(a) **Lösungserwartung:**

$20\,000 - 9\,000 \cdot 0{,}365 = 16\,715 \Rightarrow$ € 16.715

Mögliche Formeln:

$N = E - (E - 11\,000) \cdot 0{,}365$

oder:

$N = 11\,000 + (E - 11\,000) \cdot 0{,}635$

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „€ “ nicht angegeben sein muss.
  Toleranzintervall: [€ 16.700; € 16.720]
- Ein Punkt für die Angabe einer korrekten Formel für das Jahresnettoeinkommen. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.

(b) **Lösungserwartung:**

$\frac{14\,000 \cdot 0{,}365 + 15\,000 \cdot 0{,}432}{40\,000} \approx 0{,}29$, d.h. ca. 29 % Durschnittssteuersatz

Mit dem Term wird die Steuerersparnis (in Euro) dieser Person durch das neue Steuermodell (im Vergleich zum 2015 gültigen Modell) berechnet.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall: [0,28; 0,29] bzw. [28 %; 29 %]
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) richtige Interpretation.

(c) **Lösungserwartung:**

Beide Behauptungen sind falsch.

(i) Auch Bezieher/innen von einem steuerpflichtigen Jahreseinkommen von € 100.000 bezahlen beim neuen Steuermodell weniger Einkommensteuer, nämlich für die Einkommensanteile unter € 90.000.

(ii) Tatsächlich ändert sich der Steuersatz für das steuerpflichtige Jahreseinkommen um 11,5 *Prozentpunkte*, das sind $\frac{11{,}5}{36{,}5} \approx 31{,}5$ *Prozent*.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine (sinngemäß) richtige Begründung, warum die Behauptung (i) falsch ist.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) richtige Begründung, warum die Behauptung (ii) falsch ist.

(d) **Lösungserwartung:**

$\frac{15\,125}{35\,000} \approx 0{,}432$ ist der Steuersatz für diese Einkommensklasse.

5 110 ist die Einkommensteuer für die ersten € 25.000 an steuerpflichtigem Jahreseinkommen.

$\text{ESt}_{\text{neu}} = (\text{steuerpflichtiges Jahreseinkommen} - 31\,000) \cdot 0{,}42 + 6\,300$

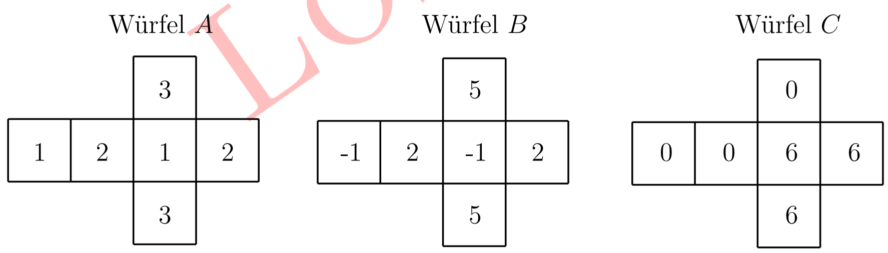
Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine (sinngemäß) richtige Interpretation beider Zahlenwerte.
- Ein Punkt für eine korrekte Formel. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.

---

61 - MAT - WS 3.1, WS 3.2, WS 3.4, - Würfel mit unterschiedlichen Zahlen - Matura 2015/16 Haupttermin

61. Gegeben sind die Netze von drei fairen Würfeln, deren Seitenflächen auf unterschiedliche Weise mit verschiedenen Zahlen beschriftet sind. (Ein Würfel ist „fair“, wenn die Wahrscheinlichkeit, nach einem Wurf nach oben zu zeigen, für alle Seitenflächen gleich groß ist.) ____/0



Aufgabenstellung:

(a) Herr Fischer wirft Würfel A zweimal. Die Zufallsvariable X gibt die Summe der beiden geworfenen Zahlen an. Die Zufallsvariable X kann die Werte 2,3,4,5 und 6 annehmen.

Frau Fischer wirft die Würfel A und B. Die Zufallsvariable Y gibt die Summe der beiden geworfenen Zahlen an.

$\boxed{\text{A}}$ Gib für die Zufallsvariable Y alle möglichen Werte an!

mögliche Wert für Y: ____________________

Es gibt Werte der Zufallsvariablen, die bei Herrn Fischer wahrscheinlicher auftreten als bei Frau Fischer. Gib denjenigen Wert an, bei dem der Unterschied der beiden Wahrscheinlichkeiten am größten ist, und berechne diesen Unterschied!

(b) Bei einem Spiel wird Würfel B dreimal geworfen. Der Einsatz des Spiels für eine Spielerin/einen Spieler beträgt € 2. Die jeweilige Auszahlung ist von der Summe der drei geworfenen Zahlen abhängig und wird in der nachstehenden Tabelle teilweise angegeben

Summe der drei geworfenen Zahlen	Auszahlung an die Spielerin/den Spieler
positiv	0
null	2
negativ	?

Eine Person spielt dieses Spiel fünfmal. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass dabei genau zweimal die Summe der drei geworfenen Zahlen genau null ist!

Berechne, welchen Betrag der Anbieter des Spiels für das Würfeln einer negativen Summe höchstens auszahlen darf, um langfristig mit keinem Verlust rechnen zu müssen!

(c) Peter wirft den Würfel C 100-mal. Die Zufallsvariable Z beschreibt die Anzahl der gewürfelten Sechser.

Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung von Z!

Ermittle die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der geworfenen Zahlen größer als 350 ist!

(a) **Lösungserwartung:**

mögliche Werte für Y: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

Bei Y hat jeder Wert die gleiche Wahrscheinlichkeit $\left(= \frac{1}{9}\right)$, bei X hat 4 die größte Wahrscheinlichkeit $\left(= 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\right)$. Der Unterschied ist bei 4 am größten, er beträgt $\frac{2}{9}$.

oder:

Die Wahrscheinlichkeit für 4 ist bei Herrn Fischer dreimal so groß wie bei Frau Fischer.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die vollständige Angabe der korrekten Werte für Y.
- Ein Punkt für die Angabe des gesuchten Wertes und einer korrekten Berechnung des Unterschieds.

(b) **Lösungserwartung:**

Mögliche Berechnung:

Zufallsvariable X = Anzahl der Spiele, bei denen die Summe der drei geworfenen Zahlen genau null ist.

P(„Summe der drei geworfenen Zahlen ist null“) $= p = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 = \frac{1}{9}$

Binomialverteilung mit den Parametern $n = 5, k = 2, p = \frac{1}{9}$

$P(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^3 \approx 0{,}087 \Rightarrow$ Die gesuchte Wahrscheinlichkeit liegt bei ca. 8,7 %.

Mögliche Berechnung:

x ... Auszahlung für das Würfeln einer negativen Summe

$2 \cdot \frac{1}{9} + x \cdot \frac{1}{27} < 2 \Rightarrow x < 48$

Die Auszahlung für das Würfeln einer negativen Summe darf höchstens € 48 betragen, damit der Anbieter des Spiels langfristig mit keinem Verlust rechnen muss.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.
  Toleranzintervall: [0,08; 0,09] bzw. [8 %; 9 %]
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „€ “ nicht angegeben sein muss. Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

(c) **Lösungserwartung:**

$n = 100$ und $p = 0{,}5$

Erwartungswert: $E(Z) = 50$

Standardabweichung: $\sqrt{V(Z)} = 5$

Mögliche Berechnung (z.B. durch Approximation durch die Normalverteilung ohne Stetigkeitskorrektur):

Die Summe ist größer als 350, wenn die Anzahl der Sechser mindestens 59 ist. Es ist möglich, die (für die Anzahl der Sechser) zugrunde liegende Binomialverteilung mit $n = 100$ und $p = 0{,}5$ durch die Normalverteilung mit $\mu = 50$ und $\sigma = 5$ zu approximieren.

$P(Z \geq 59) \approx 0{,}036 = 36\,\%$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die Angabe der beiden korrekten Werte für den Erwartungswert und die Standardabweichung.
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei Ergebnisse durch Berechnung mit Stetigkeitskorrektur oder exakt mittels Binomialverteilung ebenfalls als richtig zu werten sind.
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
  Toleranzintervall: $[0{,}035; 0{,}045]$ bzw. $[3{,}5\,\%; 4{,}5\,\%]$

---

62 - MAT - AN 1,3, FA 4.3, AN 2.1, FA 1.5 - Schilauf-Trainingsstrecke - Matura 2015/16 1. Nebentermin

62. Schirennläuferinnen absolvieren Trainingsfahrten auf einer eigens dafür präparierten Strecke. Die Trainerin legt den Schwerpunkt ihrer Analyse auf einen 240 m langen Streckenabschnitt vom Starthaus A bis zu einem Geländepunkt B. Mithilfe von Videoanalysen wird die von den Rennläuferinnen zurückgelegte Weglänge in Abhängigkeit von der Zeit ermittelt. ____/0

Für eine bestimmte Trainingsfahrt einer Läuferin kann die Abhängigkeit des zurückgelegten Weges von der Zeit während der Fahrt von A nach B modellhaft durch die Funktion s mit $s(t) = -\frac{1}{144} \cdot t^4 + \frac{8}{3} \cdot t^2$ beschrieben werden. Die Läuferin verlässt zum Zeitpunkt $t = 0$ das Starthaus. Die Zeit t wird in Sekunden gemessen. $s(t)$ gibt die bis zum Zeitpunkt t zurückgelegte Weglänge in Metern an.

Die folgenden Fragestellungen beziehen sich auf die gegebene Zeit-Weg-Funktion s.

Aufgabenstellung:

(a) Um die Effektivität des Starts zu überprüfen, wird die mittlere Geschwindigkeit $\bar{v}$ der Läuferin im Zeitintervall $[0\,\text{s}; 3\,\text{s}]$ ermittelt.

Berechne die mittlere Geschwindigkeit $\bar{v}$ der Läuferin in m/s!

Berechne die für die Fahrt von A nach B benötigte Zeit!

(b) $\boxed{\text{A}}$ Berechne denjenigen Zeitpunkt t_1, für den $s''(t_1) = 0$ gilt!

Interpretiere t_1 im Hinblick auf die Fahrt der Rennläuferin von A nach B!

(c) Berechne die Momentangeschwindigkeit der Läuferin zum Zeitpunkt $t_2 = 6$!

Angenommen, die Geschwindigkeit der Rennläuferin bleibe ab dem Zeitpunkt t_2 unverändert. Gib an, nach wie vielen Sekunden ab dem Zeitpunkt t_2 die Läuferin den Geländepunkt B erreichen würde!

(d) Bei einem mathematischen Modell für die zeitliche Abhängigkeit des von der Läuferin zurückgelegten Weges sollen folgende Sachverhalte gelten:

(i) Zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt die momentane Geschwindigkeit der Läuferin 0 m/s.

(ii) Während der Fahrt von A nach B nimmt die zurückgelegte Weglänge streng monoton zu.

Gib an, welche mathematischen Eigenschaften einer differenzierbaren Zeit-Weg-Funktion s_1 diese Sachverhalte garantieren.

(a) **Lösungserwartung:**

$\bar{v} = \frac{s(3)-s(0)}{3-0} = \frac{23{,}4375-0}{3} \approx 7{,}8$

Die mittlere Geschwindigkeit innerhalb der ersten drei Fahrsekunden beträgt ca. 7,8 m/s

Mögliche Berechnung:

$-\frac{1}{144} \cdot t^4 + \frac{8}{3} \cdot t^2 = 240 \Rightarrow t_{1,2} = \pm 12; t_{3,4} \approx \pm 15{,}5$

also: $t = 12\,\text{s}$

Die Fahrt von A nach B dauert 12 Sekunden.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m/s“ nicht angegeben sein muss.
  Toleranzintervall: $[7{,}5\,\text{m/s}; 8\,\text{m/s}]$

- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „s" nicht angegeben sein muss.
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

(b) **Lösungserwartung:**

Mögliche Berechnung:

$s'(t) = -\frac{1}{36} \cdot t^3 + \frac{16}{3} \cdot t$

$s''(t) = -\frac{1}{12} \cdot t^2 + \frac{16}{3}$

$s''(t) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{12} \cdot t^2 + \frac{16}{3} = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \pm 8$

also: $t_1 = 8\,\text{s}$

Mögliche Interpretation:

Die Läuferin erreicht nach 8 Sekunden die maximale Geschwindigkeit.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „s" nicht angegeben sein muss.
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation.

(c) **Lösungserwartung:**

$s'(t) = -\frac{1}{36} \cdot t^3 + \frac{16}{3} \cdot t \Rightarrow s'(6) = 26$

Zum Zeitpuinkt $t_2 = 6$ hat die Läuferin eine Geschwindigkeit von $26\,\text{m/s}$.

Mögliche Berechnung:

$s(6) = 87 \Rightarrow \frac{240-87}{26} \approx 5{,}9$

Die Läuferin würde den Geländepunkt B ca. $5{,}9\,\text{s}$ nach dem Zeitpunkt t_2 erreichen.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m/s" nicht angegeben sein muss.
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „s" nicht angegeben sein muss.
  Toleranzintervall: [5,8 s; 5,9 s]

(d) **Lösungserwartung:**

Die Funktion s_1 muss die Eigenschaften

- $s_1'(0) = 0$ und
- $s_1'(t) > 0$

während der Fahrt von A nach B erfüllen.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die Nennung der Eigenschaft $s_1'(0) = 0$.
- Ein Punkt für die Nennung der Eigenschaft $s_1'(t) > 0$.

---

63 - MAT - FA 5.1, AN 4.3, AN 1.3, FA 2.5, FA 2.3 - Bevölkerungswachstum in den USA - Matura 2015/16 1. Nebentermin

63. Die erste Volkszählung in den USA fand im Jahre 1790 statt. Seit diesem Zeitpunkt werden Volkszählungen im Abstand von zehn Jahren abgehalten. Zwischen den Volkszählungen wird die Zahl der Einwohner/innen durch die Meldeämter ermittelt. ____/0

Nachstehend wird ein Überblick über die Bevölkerungsentwicklung in den USA im Zeitraum von 1790 bis 1890 (Tabelle) bzw. 2003 bis 2013 (Grafik) gegeben.

Tabelle: Bevölkerungsentwicklung in den USA von 1790 bis 1890

Jahr	Einwohnerzahl in Millionen
1790	3,9
1800	5,2
1810	7,2
1820	9,6
1839	12,9
1840	17,1

Jahr	Einwohnerzahl in Millionen
1850	23,2
1860	31,4
1870	38,6
1880	49,3
1890	49,3

Quelle: Keller, G. (2011). Mathematik in den Life Sciences. Stuttgart: Ulmer. S. 55.

Grafik: Bevölkerungsentwicklung in den USA von 2003 bis 2013

Datenquelle: http://de.statista.com/statistik/daten/studie/19320/umfrage/gesamtbevoelkerung-der-usa/ [19.09.2013] (adaptiert).

Für den Zeitraum von 1790 bis 1890 kann die Entwicklung der Zahl der Einwohner/innen der USA näherungsweise durch eine Exponentialfunktion B mit $B(t) = B_0 \cdot a^t$ beschrieben werden. Dabei gibt t die Zeit in Jahren, die seit 1790 vergangen sind, an. $B(t)$ wird in Millionen Einwohner/innen angegeben.

Aufgabenstellung:

(a) Ermittle eine Gleichung der Funktion B unter Verwendung der Daten aus den beiden Jahren 1790 und 1890!

Interpretiere das bestimmte Integral $\int_0^{50} B'(t)\mathrm{d}t$ im gegebenen Zusammenhang!

(b) Die erste Ableitung der Funktion B ist gegeben durch $B'(t) = B_0 \cdot \ln(a) \cdot a^t$.

Gib t^* so an, das $B'(t^*) = B_0 \cdot \ln(a)$ gilt!

Interpretiere $B'(t^*)$ im Zusammenhang mit dem Bevölkerungswachstum in den USA!

(c) $\boxed{\text{A}}$ Begründe, warum die Bevölkerungsentwicklung in den USA im Zeitraum von 2003 bis 2013 näherungsweise durch eine lineare Funktion N mit $N(t) = k \cdot t + d$ beschrieben werden kann (dabei gibt t die Zeit in Jahren, die seit 2003 vergangen sind, an)!

Interpretiere die Bedeutung des Parameters k dieser linearen Funktion! Eine Berechnung des Parameters k ist nicht erforderlich.

(a) Lösungserwartung:

Mögliche Berechnung:

$B_0 = 3{,}9$ und $B(100) = 62{,}9 \Rightarrow 62{,}9 = 3{,}9 \cdot a^{100} \Rightarrow a = \sqrt[100]{\frac{62{,}9}{3{,}9}} \Rightarrow a \approx 1{,}0282$

$B(t) = 3{,}9 \cdot 1{,}0282^t$

Das bestimmte Integral $\int_0^{50} B'(t)\mathrm{d}t$ gibt denjenigen Wert näherungsweise an, um den die Einwohnerzahl von 1790 bis 1840 gewachsen ist.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine korrekte Funktionsgleichung. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.
  Toleranzintervall für a : $[1{,}028; 1{,}029]$
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation.

(b) Lösungserwartung:

$t^* = 0$

$B_0 \cdot \ln(a)$ ist die Wachstumsgeschwindigkeit der Bevölkerung (momentane Änderungsrate der Einwohnerzahl) zum Zeitpunkt $t = 0$ in Millionen Einwohner/innen pro Jahr.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation.

(c) **Lösungserwartung:**

Mögliche Begründung:

Im Zeitraum von 2003 bis 2013 ist die (absolute) Zunahme der Bevölkerung pro Jahr annähernd konstant.

Der Parameter k entspricht der (durchschnittlichen) Zunahme der Bevölkerung pro Jahr.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für eine (sinngemäß) richtige Begründung.
- Ein Punkt für die (sinngemäß) richtige Interpretation des Parameters k.

---

64 - MAT - AG 4.1, AG 3.3, AG 3.4, WS 4.1 - Pong - Matura 2015/16 1. Nebentermin

64. Das 1972 vom Unternehmen Atari veröffentlichte *Pong* wurde zum ersten weltweit populären Videospiel. (Quelle: http://de.wikipedia.org/wiki/Pong) ____/0

Das Spielprinzip von *Pong* ist wie folgt: Ein Punkt („Ball“) bewegt sich auf dem Bildschirm entlang geradliniger Bahnen hin und her. Jede/r der beiden Spieler/innen steuert einen senkrechten Strich („Schläger“), den sie/er mit einem Drehknopf („Joystick“) nach oben und unten verschieben kann.

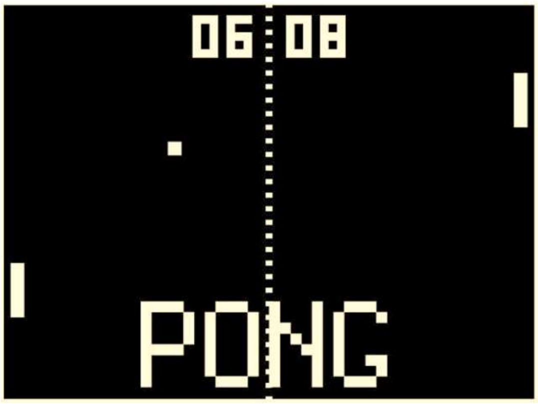
Lässt man den Ball am Schläger vorbei, erhält die Gegnerin / der Gegner einen Punkt.

Das Spielfeld, in dem sich der Ball und die Schläger bewegen, hat eine Breite von 800 Pixeln und eine Höhe von 600 Pixeln (ein Pixel ist ein quadratischer Bildpunkt). Vereinfachend wird angenommen, dass der Ball als Pixel dargestellt wird.

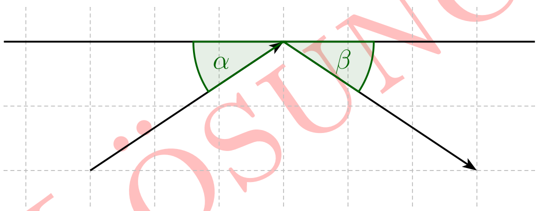
Wenn der Ball den oberen bzw. unteren Spielfeldrand oder einen Schläger berührt, dann wird er von dort reflektiert. Dabei gilt das Reflexionsgesetz; dieses besagt: $\alpha = \beta$ (vgl. die unten abgebildete Grafik).

Man kann sich das Spielfeld als Ebene mit Koordinatensystem vorstellen. Der Bildpunkt $(1|1)$ liegt dann in der linken unteren Ecke, der Bildpunkt $(800|600)$ in der rechten oberen Ecke.

Auf dem Schirm wird das Bild alle 0,02 Sekunden neu generiert. Der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v} = \binom{v_x}{v_y}$ das Balls gibt an, um wie viele Pixel sich der Ball von einem Bildaufbau zum nächsten in horizontaler Richtung (v_x) und in vertikaler Richtung (v_y) weiterbewegt hat.



Bildquelle: http://www.overclockers.at/games_forum/euer-erstes-computerspiel_237146/page_2 [15.10.2015].



Aufgabenstellung:

(a) In einer konkreten Spielsituation hat der Ball beim Aufprall auf den oberen Spielfeldrand einen Geschwindigkeitsvektor von $\vec{v} = \binom{4}{7}$ Pixeln pro Bildaufbau.

$\boxed{\text{A}}$ Gib denjenigen Winkel α an, unter dem der Ball auf den Spielfeldrand trifft!

$\alpha=$ ______________________

Die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors sind immer ganzzahlig. Nehmen Sie an, dass die Summe der Beträge der Komponenten nicht größer als 20 sein darf.

Der Ball wird am oberen Spielfeldrand unter dem Winkel β reflektiert. Welchen kleinstmöglichen Wert β_{min} kann unter diesen Voraussetzungen der Winkel β annehmen? Gib β_{min} an!

$\beta_{\text{min}}=$ ______________________

(b) In einem anderen Spielverlauf befindet sich der Ball im Punkt (401|301) und sein Geschwindigkeitsvektor ist dabei $\vec{v} = \binom{2}{-3}$ Pixel pro Bildaufbau.

Gib an, wie viele *Sekunden* es dauert, bis der Ball am unteren Spielfeldrand reflektiert wird.

Nach dieser Reflexion bewegt sich der Ball entlang einer Geraden bis zum nächsten Auftreffen auf den Schläger oder den Spielfeldrand.

Gib eine Parameterdarstellung dieser Geraden an!

(c) Zwei Kinder, Nicola und Florian, spielen über einen längeren Zeitraum oft gegeneinander *Pong*. Von 45 Spielen gewinnt Nicola 31-mal, Florian gewinnt 14-mal.

Gib auf Basis dieser Information ein symmetrisches 95−%−Konfidenzintervall für Nicolas Gewinnwahrscheinlichkeit an!

Erkläre, wieso es nicht sinnvoll ist, ein 100-%-Konfidenzintervall zu bestimmen!

(a) Lösungserwartung:

$\tan(\alpha) = \frac{7}{4} = 1{,}74$

$\alpha \approx 60{,}26°$

Unter diesen Bedingungen lautet der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v} = \binom{\pm 19}{\pm 1}$ Pixel pro Bildaufbau. Für den Winkel $\beta_{\min}$ gibt das in jedem Fall:

$\tan(\beta_{\min}) = \frac{1}{19}$

$\beta_{\min} \approx 3{,}01°$

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „Grad“ nicht angegeben sein muss. Eine korrekte Angabe der Lösung in einer anderen Einheit ist ebenfalls als richtig zu werten.
  Toleranzintervall: $[6011°; 60{,}3°]$
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „Grad“ nicht angegeben sein muss. Eine korrekte Angabe der Lösung in einer anderen Einheit ist ebenfalls als richtig zu werten.
  Toleranzintervall: $[3°; 3{,}02°]$

(b) Lösungserwartung:

$301 - 3n = 1 \Rightarrow n = 100$

$100 \cdot 0{,}02 = 2$

Es dauert zwei Sekunden, bis der Ball am unteren Spielfeldrand reflektiert wird.

$g: X = \binom{601}{1} + s \cdot \binom{2}{3}$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall: $[2\,\text{s}; 2{,}02\,\text{s}]$
- Ein Punkt für eine korrekte Parameterdarstellung bzw. Gleichung der Geraden. Äquivalente Parameterdarstellungen bzw. Gleichungen sind als richtig zu werten.

(c) **Lösungserwartung:**

$n = 45, h = \frac{31}{45}$

$\frac{31}{45} \pm 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{\frac{31}{45} \cdot \frac{14}{45}}{45}} \approx 0{,}689 \pm 0{,}135 \Rightarrow [0{,}554; 0{,}824]$

Mögliche Erklärungen:

Es ist nicht sinnvoll, ein 100-%-Konfidenzintervall zu bilden, da die Intervallgrenzen dann 0 % bis 100% wären, man hätte also keinen Informationsgewinn.

oder:

Ein 100-%-Konfidenzintervall erstreckt sich über den gesamten Definitionsbereich.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für ein korrektes Intervall. Andere Schreibweisen des Ergebnisses (als Bruch oder in Prozent) sind ebenfalls als richtig zu werten.
  Toleranzintervall für den unteren Wert: $[0{,}54; 0{,}56]$
  Toleranzintervall für den oberen Wert: $[0{,}81; 0{,}83]$
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Erklärung.

65 - MAT - WS 2.1, WS 3.4, WS 2.3 - Roulette - Matura 2015/16 1. Nebentermin

65. Beim Glücksspiel *Roulette* versucht man, diejenige Zahl bzw. Gruppe von Zahlen zu erraten, die durch den Wurf einer Kugel in die Roulettemaschine bestimmt wird. ____/0

Beim *französischen Roulette* besteht die Roulettemaschine aus einer in eine Schüssel eingelassenen, drehbaren Scheibe mit 36 abwechselnd roten und schwarzen Nummernfächern sowie einem 37., grün gekennzeichneten Fach für die Null (vgl. Abbildung 1). Die Roulettescheibe wird in Bewegung gesetzt und die Kugel wird gegen die Drehrichtung in die Roulettemaschine geworfen. Dabei wird kein Nummernfach bevorzugt und es gibt keine Möglichkeit, das Ergebnis (etwa durch „geschicktes“ Werfen) zu beeinflussen.

Ziel ist es, in jedem einzelnen Spiel im Vorhinein zu erraten, in welchem Nummernfach die Kugel zu liegen kommen wird.

Auf dem Spielfeld (vgl. Abbildung 2) werden die Spieleinsätze (Jetons) platziert. Beispielsweise sind die Felder mit der „1“ und der „7“ rot („rouge“), die Felder mit der „4“ und der „6“ schwarz („noir“).

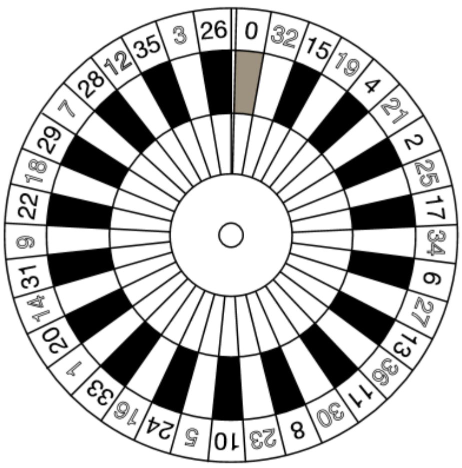


Abbildung 1
Quelle:http://www.rouletteplay.com/images/software_logos_small/european-roulette-wheel.gif [23.03.2016]

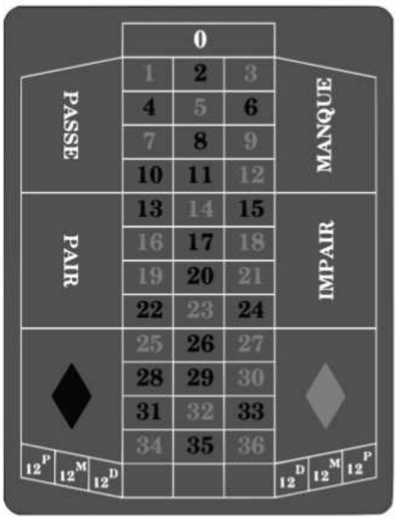


Abbildung 2
Quelle:http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Roulette_frz.png [23.03.2016]

Aufgabenstellung:

(a) Jemand argumentiert: „Wenn die Kugel bei fünf Spielen hintereinander jedes Mal auf ein rotes Feld gefallen ist, fällt die Kugel beim 6. Spiel mit höherer Wahrscheinlichkeit auf ein schwarzes Feld als auf ein rotes, da bei einer längeren Spielserie dieselben Häufigkeiten für 'Rouge' und 'Noir' zu erwarten sind.“ Gib an, ob diese Argumentation richtig oder falsch ist, und begründe deine Entscheidung!

An einem Roulettetisch werden an einem Abend 100 Spiele gespielt.

$\boxed{\text{A}}$ Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel dabei höchstens 40-mal in ein rotes Nummernfach fällt!

(b) In der folgenden Tabelle sind einige Wettmöglichkeiten sowie die jeweiligen Gewinnquoten angeführt:

Wettart	Gewinnquote
Rouge: Die Kugel fällt in ein rotes Nummernfach.	1:1
Noir: Die Kugel fällt in ein schwarzes Nummernfach.	1:1
12^{P}: erstes Dutzend (Zahlen 1 bis 12)	2:1
12^{M}: mittleres Dutzend (Zahlen 13 bis 24)	2:1
12^{D}: letztes Dutzend (Zahlen 25 bis 36)	2:1
Plein: Man setzt auf eine der 37 Zahlen	35:1
Cheval: Man setzt auf zwei auf dem Spielfeld horizontal oder vertikal benachbarte Zahlen, z.B. 2 und 5 oder 8 und 9.	17:1

Eine Gewinnquote von 2 : 1 bedeutet beispielsweise, dass im Falle eines Gewinns der Einsatz und zusätzlich das Doppelte des Einsatzes ausbezahlt wird. Im Falle eines Verlustes verliert man den Einsatz.

Als Bankvorteil bezeichnet man bei Glücksspielen den erwarteten Verlust der Spielerin/des Spielers bezogen auf ihren/seinen Einsatz.

Eine Spielerin setzt € 10 auf 12^{M}.

Berechne den Bankvorteil in Prozent des Einsatzes!

Gib an, ob der in Prozent angegebene Bankvorteil größer wird, kleiner wird oder gleich bleibt, wenn die Spielerin/der Spieler bei einem Einsatz von € a eine Cheval-Variante wählt!

Begründe deine Entscheidung!

(a) **Lösungserwartung:**

Die Argumentation ist falsch. Da die einzelnen Spiele unabhängig voneinander sind, gilt auch für das sechste Spiel (unabhängig von den vorherigen Spielausgängen):
$P(\text{„Rouge“}) = P(\text{„Noir“}) = \frac{18}{37}$

Mögliche Berechnung (z.B. durch Approximation durch die Normalverteilung ohne Stetigkeitskorrektur):
Die binomialverteilte Zufallsvariable X beschreibt, wie oft die Kugel in ein rotes Nummernfach fällt.
$n = 100, p = \frac{18}{37}$
$P(X \leq 40) \approx 0{,}0418$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die Angabe, dass die Argumentation nicht richtig ist, und für eine (sinngemäß) korrekte Begründung.
- Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung, wobei Ergebnisse durch Berechnung mit Stetigkeitskorrektur oder exakt mittels Binomialverteilung ebenfalls als richtig zu werten sind. Andere Schreibweisen des Ergebnisses (in Prozent) sind ebenfalls als richtig zu werten.
  Toleranzintervall: $[0{,}03; 0{,}06]$
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

(b) **Lösungserwartung:**

Mögliche Berechnung:
Bei 12^M erhält die Spielerin bei einem Einsatz von € 10 mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{12}{37}$ einen Gewinn von € 20.
$\frac{12}{37} \cdot 20 - \frac{25}{37} \cdot 10 \approx -0{,}27$
D.h., der erwartete Verlust beträgt ca. € 0,27.
Bankvorteil: € 0,27 bzw. 2,7 % des Einsatzes

Cheval bei einem Einsatz von € a:
erwarteter Gewinn: $\frac{2}{37} \cdot 17 \cdot a - \frac{35}{37} \cdot a = -\frac{1}{37} \cdot a \approx -0{,}027 \cdot a$
Der Bankvorteil bleibt mit ca. 2,7 % des Einsatzes gleich.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei diese sowohl in Prozentangabe als auch als Geldbetrag als richtig zu werten ist.
  Toleranzintervall: [€ 0,27; € 0,30] bzw. [2,7 %; 3 %]
- Ein Punkt für die Angabe, dass der Bankvorteil gleich bleibt, und für eine (sinngemäß) korrekte Begründung.

---

66 - MAT - FA 4.4, AN 3.3, AN 4.3 - Graphen von Polynomfunktionen dritten Grades - Matura 2015/16 2. Nebentermin

66. Der Verlauf des Graphen einer Polynomfunktion f dritten Grades mit der Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0$ hängt von den Werten der Koeffizienten a, b, c, d ab. ____/0

    Je nach Wahl der Werte für die Koeffizienten ergibt sich unter anderem die Anzahl und Lage der Nullstellen, Extremstellen und Wendestellen von f.

Aufgabenstellung:

(a) Wie viele lokale Extremstellen kann f höchstens haben? Gib die Anzahl an und begründe deine Antwort mithilfe der Ableitungsfunktion von f!

$\boxed{\text{A}}$ Zeige für den Spezialfall $a = 1, b = -3, c = 3, d = 0$, dass die Funktion f keine lokale Extremstelle hat.

(b) Wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ die Beziehung $f(-x) = -f(x)$ gilt, dann ist der Graph von f symmetrisch bezüglich des Ursprungs.

Gib diejenigen Werte an, die die Koeffizienten b und d annehmen müssen, damit der Graph von f mit der Gleichung $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ symmetrisch bezüglich des Ursprungs ist.

Ermittle für eine solche Funktion f den Wert des Integrals $\int_{-x_1}^{x_1} f(x)\mathrm{d}x$ für ein beliebiges $x_1 > 0$ und gib eine Begründung für deine Lösung an!

(c) Der Graph von f hat auf jeden Fall einen Wendepunkt. Welcher der Koeffizienten a, b, c, d ist ausschlaggebend dafür, dass der Wendepunkt der Funktion f auf der senkrechten Koordinatenachse liegt?

Gib diesen Koeffizienten und die zugehörige Bedingung an!

Geben Sie eine zusätzliche Bedingung dafür an, dass der Graph von f im Wendepunkt $W = (0|f(0))$ eine zur x-Achse parallele Tangente hat!

(a) Lösungserwartung:

Mögliche Begründung:

Nur an denjenigen Stellen, an denen $f'(x) = 0$ ist, können lokale Extremstellen von f liegen. Die Ableitungsfunktion f' ist eine Polynomfunktion zweiten Grades. Da die quadratische Gleichung $f'(x) = 0$ maximal zwei Lösungen hat, kann die Funktion f höchstens zwei Extremstellen haben.

Mögliche Vorgehensweise:

Die 1. Ableitung $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$ hat genau eine Nullstelle bei $x = 1$ und hat sowohl links als auch rechts von der Nullstelle positive Werte. Damit ist die Funktion f auf ihrem gesamten Definitionsbereich streng monoton wachsend und hat keine Extremstelle.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine (sinngemäß) richtige Begründung.
- Ein Ausgleichspunkt für einen korrekten Nachweis. Andere korrekte Nachweise sind ebenfalls als richtig zu werten.

(b) Lösungserwartung:

$b = 0$

$d = 0$

$$\int_{-x_1}^{x_1} f(x)dx = 0$$

Mögliche Begründung:

Wegen der Symmetrie des Graphen von f bezüglich des Ursprungs begrenzt der Graph von f mit der x-Achse in den Intervallen $[-x_1; 0]$ und $[0; x_1]$ zwei gleich große Flächenstücke, von denen eines oberhalb und eines unterhalb der x-Achse liegt.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die Angabe der beiden korrekten Werte.
- Ein Punkt für die richtige Lösung und eine korrekte Begründung.

(c) **Lösungserwartung:**

$f''(x) = 0$

$6a \cdot x + 2b = 0$

$x = -\frac{b}{3a}$

$x = 0 \Rightarrow b = 0$

$f'(x) = 3a \cdot x^2 + c$

$f'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung.
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Aufgabe auch bei korrektem Ansatz als richtig gelöst zu werten ist.

---

67 - MAT - AN 1.1, FA 5.2 - Ebola - Matura 2015/16 2. Nebentermin

67. Ebola ist eine durch Viren ausgelöste, ansteckende Krankheit. Die Ebola-Epidemie, die 2014 in mehreren Ländern Westafrikas ausbrach, gilt nach der Weltgesundheitsorganisation WHO als die bisher schwerste Ebola-Epidemie. Der Verlauf der Epidemie wurde von der WHO genau beobachtet und dokumentiert. ____/0

In der nachstehenden Tabelle ist ein Auszug der Dokumentation der WHO für die Staaten Guinea, Liberia und Sierra Leone für drei Tage im September 2014 dargestellt. Angeführt ist jeweils die Gesamtanzahl der Erkrankten.

Datum	6. September	13. September	20. September
Gesamtzahl der Erkrankten	4 269	4 963	5 843

Datenquelle: http://www.who.int/csr/disease/ebola/situation-reports/en/ [20.09.2014].

Aufgabenstellung:

(a) Gib die Bedeutung der Ausdrücke $4\,963 - 4\,269$ und $\frac{4\,963-4\,269}{4\,269}$ im gegebenen Kontext an!

Mithilfe dieser Ausdrücke kann auf Basis der Anzahl der Erkrankungen vom 6. September 2014 und vom 13. September 2014 die Anzahl der Erkrankungen vom 20. September 2014 vorhergesagt werden, wenn man ein lineares oder ein exponentielles Wachstumsmodell zugrunde legt.

Ermittle die Werte beider Wachstumsmodelle für den 20. September 2014, vergleiche sie mit den tatsächlichen Daten und gib an, welches der beiden Modelle zur Modellierung der Anzahl der Erkrankungen im betrachteten Zeitraum eher angemessen ist!

(b) Mitte September 2014 zitierte die New York Times die Behauptung von Wissenschaftlern, die Epidemie könne 12 bis 18 Monate dauern; es könne allein bis Mitte Oktober 2014 bereits 20 000 Infektionsfälle geben.

Datenquelle: http://www.nytimes.com/2014/09/13/world/africa/us-scientists-see-long-fight-against-ebola.html [29.06.2016].

Die zeitliche Entwicklung der Anzahl von Erkrankungsfällen bei einer Epidemie kann für einen beschränkten Zeitraum durch eine Exponentialfunktion beschrieben werden. Auf Basis der Anzahl der Erkrankten vom 6. September 2014 und vom 20. September 2014 soll die Anzahl der Erkrankungsfälle in Form einer Exponentialfunktion f mit $f(t) = a \cdot b^t$ modelliert werden.

Die Zeit t wird dabei in Tagen ab dem 6. September 2014 gemessen, der Zeitpunkt $t = 0$ entspricht dem 6. September 2014

$\boxed{\text{A}}$ Gib den Wert von b an!

Ermittle, wie viele Tage nach dem 6. September 2014 die Anzahl der Erkrankten gemäß der Modellfunktion die Zahl 20 000 überschreitet, und vergleiche dein Resultat mit der Aussage der Wissenschaftler!

(a) Lösungserwartung:

$4\,963 - 4\,269$ gibt die absolute Zunahme der Erkrankungen in dieser Woche an.

$\frac{4\,963-4\,269}{4\,269}$ gibt die relative Zunahme der Erkrankungen in dieser Woche an.

prognostizierte Erkrankungen für den 20. September 2014:

lineares Modell: $4\,963 + (4\,963 - 4\,269) = 5\,657$

exponentielles Modell: $4\,963 \cdot \left(\frac{4\,963-4\,269}{4\,269} + 1\right) \approx 5\,770$

Das exponentielle Modell ist eher angemessen, da es näher beim tatsächlichen Wert von 5 843 Erkrankungen liegt.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Deutung beider Ausdrücke.
- Ein Punkt für die Angabe der beiden korrekten Werte und die Angabe der entsprechenden angemessenen Modellierung.
  Toleranzintervall für den exponentiellen Wert: $[5\,450; 5\,960]$

(b) **Lösungserwartung:**

Mögliche Vorgehensweise:

$f(0) = 4\,269$

$f(14) = 5\,843 = 4\,269 \cdot b^{14}$

$b = \sqrt[14]{\frac{5\,843}{4\,269}} \approx 1{,}0227$

$t = \frac{\ln\left(\frac{20\,000}{4\,269}\right)}{\ln(1{,}0227)} \approx 68{,}80$, also am 69. Tag nach dem 6. September 2014. Dieser Zeitpunkt ist Mitte November.

Die Aussage der Wissenschaftler, es könne bis Mitte Oktober 2014 bereits 20 000 Erkrankungsfälle geben, erscheint daher (nach vorliegendem Modell) nicht gerechtfertigt.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall: $[1{,}02; 1{,}03]$
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für die richtige Lösung und einen (sinngemäß) korrekten Vergleich.

Toleranzintervall: [68; 70]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

---

68 - MAT - WS 1.2, WS 1.3, WS 1.4 - Nettomonatseinkommen - Matura 2015/16 2. Nebentermin

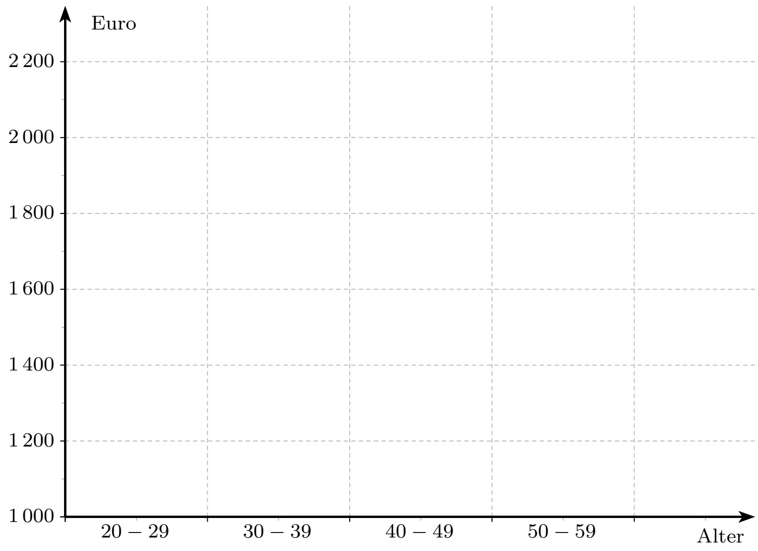
68. Das Nettomonatseinkommen erwerbstätiger Personen hängt von sozioökonomischen Faktoren wie Alter, Staatsangehörigkeit, Schulbildung, Beschäftigungsausmaß und beruflicher Stellung ab. Die nachstehende Tabelle zeigt Daten zu den Nettomonatseinkommen unselbständig Erwerbstätiger in Österreich im Jahresdurchschnitt 2010 in Abhängigkeit von sozioökonomischen Faktoren. Alle folgenden Aufgabenstellungen beziehen sich auf diese Daten des Jahres 2010. ____/0

Merkmale	unselbstständig Erwerbstätige	arithmetisches Mittel	10 %	Quartile 25 %	Quartile 50 % (Median)	Quartile 75 %	90 %
	in 1000 Personen	in Euro	verdienen weniger als oder gleich viel wie ... Euro				
Insgesamt	3 407,9	1 872,7	665,0	1 188,0	1 707	2 303,0	3 122,0
Alter							
15-19 Jahre	173,5	799,4	399,0	531,0	730,0	1 020,0	1 315,0
20-29 Jahre	705,1	1 487,0	598,0	1 114,0	1 506,0	1 843,0	2 175,0
30-39 Jahre	803,1	1 885,7	770,0	1 252,0	1 778,0	2 306,0	2 997,0
40-49 Jahre	1 020,4	2 086,1	863,0	1 338,0	1 892,0	2 556,0	3 442,0
50-59 Jahre	632,8	2 205,0	893,0	1 394,0	1 977,0	2 779,0	3 710,0
60+ Jahre	73,0	2 144,7	258,0	420,0	1 681,0	3 254,0	4 808,0
Höchste abgeschlossene Schulbildung							
Pflichtschule	523,4	1 183,0	439	677,0	1 104,0	1 564,0	1 985,0
Lehre	1 385,2	1 789,3	833,0	1 303,0	1 724,0	2 143,0	2 707,0
BMS	454,4	1 777,1	733,0	1 199,0	1 677,0	2 231,0	2 824,0
Höhere Schule	557,2	2 061,6	590,0	1 218,0	1 824,0	2 624,0	3 678,0
Universität	487,7	2 723,4	1 157,0	1 758,0	2 480,0	3 376,0	4 567,0
Berufliche Stellung							
Lehrlinge	134,2	775,3	466,0	551,0	705,0	930,0	1 167,0
Angestellte(r)	1 800,3	2 018,1	705,0	1 222,0	1 771,0	2 489,0	3 550,0
Arbeiter(in)	1 030,9	1 539,3	627,0	1 135,0	1 554,0	1 922,0	2 274,0
Beamte und Vertragsbedienstete	442,5	2 391,4	1 377,0	1 800,0	2 295,0	2 848,0	3 492,0

Datenquelle: Statistik Austria (Hrsg.) (2012). Arbeitsmarktstatistik. Jahresergebnisse 2011. Mikrozensus-Arbeitskräfteerhebung. Wien: Statistik Austria. S. 81 (adaptiert)

Aufgabenstellung:

(a) Zeichne in der nachstehenden Grafik ein Diagramm, das die Medianeinkommen der 20- bis 59-Jährigen darstellt! Verwende dafür die auf die Hunderterstelle gerundeten Medianeinkommen.



Ist es anhand der Daten in der gegebenen Tabelle möglich, die Nettomonatseinkommen der 20- bis 29-Jährigen und der 30- bis 39-Jährigen in Boxplots (Kastenschaubildern) gegenüberzustellen? Begründe deine Antwort!

(b) Jemand hat das arithmetische Mittel aller Nettomonatseinkommen anhand der arithmetischen Mittel der sechs Altersklassen folgendermaßen berechnet:
$\frac{799{,}4+1\,487{,}0+1\,885{,}7+2\,086{,}1+2\,205{,}0+2\,144{,}7}{6} \approx 1\,768{,}0$
In der gegebenen Tabelle ist allerdings für das arithmetische Mittel aller Einkommen der Wert 1 872,7 angegeben.

Begründe, warum die oben angeführte Rechnung nicht das richtige Ergebnis liefert, und gib den richtigen Ansatz für die Berechnung an!

Bei der Altersklasse 60+ ist das arithmetische Mittel der Nettomonatseinkommen deutlich (um fast € 500) größer als das Medianeinkommen dieser Altersklasse. Gib eine daraus ableitbare Schlussfolgerung im Hinblick auf sehr niedrige bzw. sehr hohe Nettomonatseinkommen in dieser Altersklasse an!

(c) $\boxed{\text{A}}$ Gib die Werte des 1. und des 3. Quartils der Nettomonatseinkommen der unselbstständig Erwerbstätigen mit Pflichtschulabschluss als höchste abgeschlossene Schulbildung an!

1. Quartil: ______________

3. Quartil: ______________

Der Interquartilsabstand ist die Differenz von 3. und 1. Quartil.

Ein Experte behauptet: „Mit zunehmender höchster abgeschlossener Schulbildung, die über einen Pflichtschulabschluss hinausgeht, nimmt auch der Interquartilsabstand der Nettomonatseinkommen zu.“

Verifiziere oder widerlege diese Behauptung und verwende dazu die Daten in der gegebenen Tabelle!

(d) Die Daten in der gegebenen Tabelle zeigen, dass ungefähr 53 % der unselbständig Erwerbstätigen Angestellte und ungefähr 30 % Arbeiter/innen sind.

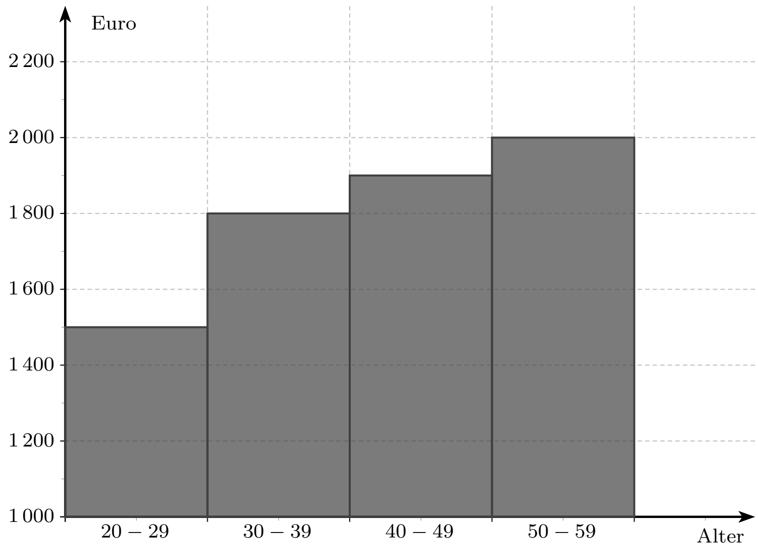
In einem Kommentar zum Arbeitsmarktbericht ist zu lesen: „Der relative Anteil der Angestellten ist um ungefähr 23 % höher als der relative Anteil der Arbeiter/innen.“ Ist diese Aussage richtig? Begründe deine Antwort!

Überprüfe folgende Aussagen über Nettomonatseinkommen anhand der Daten in der gegebenen Tabelle! Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an!

Angestellte verdienen im Durchschnitt um über € 500 mehr als Arbeiter/innen.	
Höchstens ein Viertel der Arbeiter/innen verdient mehr als € 1.922.	⊠
Die Spannweite des Nettomonatseinkommens kann anhand der Daten in der Tabelle nicht exakt angegeben werden.	⊠
Drei Viertel der Lehrlinge verdienen mindestens € 930.	
Genau die Hälfte der Beamten und Vertragsbediensteten verdient exakt € 1.800.	

(a) **Lösungserwartung:**

Mögliches Diagramm:



Die Gegenüberstellung der Nettomonatseinkommen in Boxplots (Kastenschaubildern) ist anhand der gegebenen Daten nicht möglich, da die niedrigsten und die höchsten Nettomonatseinkommen (Minimum und Maximum) in der Tabelle nicht angegeben sind.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für ein korrektes Diagramm.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) richtige Begründung.

(b) **Lösungserwartung:**

Mögliche Begründung:

Die angeführte Rechnung ist falsch, da die Anzahl der Erwerbstätigen in den einzelnen Altersklassen nicht berücksichtigt ist.

Ein richtiger Ansatz lautet:

$$\frac{799{,}4\cdot 173{,}5+1\,487\cdot 705{,}1+1\,885{,}7\cdot 803{,}1+2\,086{,}1\cdot 1\,020{,}4+2\,205\cdot 632{,}8+2\,144{,}7\cdot 73}{3\,407{,}9}$$

Mögliche Begründung:

In der Altersklasse 60+ weichen die sehr hohen Nettomonatseinkommen viel stärker vom Medianeinkommen ab als die sehr niedrigen Einkommen.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine (sinngemäß) richtige Begründung und einen korrekten Ansatz.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) richtige Begründung.

(c) **Lösungserwartung:**

1. Quartil: € 677,0

3. Quartil: € 1.564,0

Die Behauptung ist richtig, wie die folgenden Interquartilsabstände zeigen:

Lehrabschluss: € 840

BMS-Abschluss: € 1.032

Abschluss einer höheren Schule: € 1.406

Universitätsabschluss: € 1.618

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die Angabe beider korrekten Werte.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) richtige Begründung.

(d) **Lösungserwartung:**

Die Aussage ist nicht richtig.

Mögliche Begründungen:

Für diesen Vergleich muss der relative Anteil (in Prozent) der Arbeiter/innen als Grundwert verwendet werden.

oder:

In der Aussage wurde ein relativer Zuwachs (in Prozent) mit einem Zuwachs von Prozentpunkten verwechselt.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die Angabe, dass die Aussage nicht richtig ist, und eine (sinngemäß) richtige Begründung. Eine richtige Berechnung des relativen Anteils (ca. 75 % mehr Angestellte) ist auch als richtig zu werten.
- Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

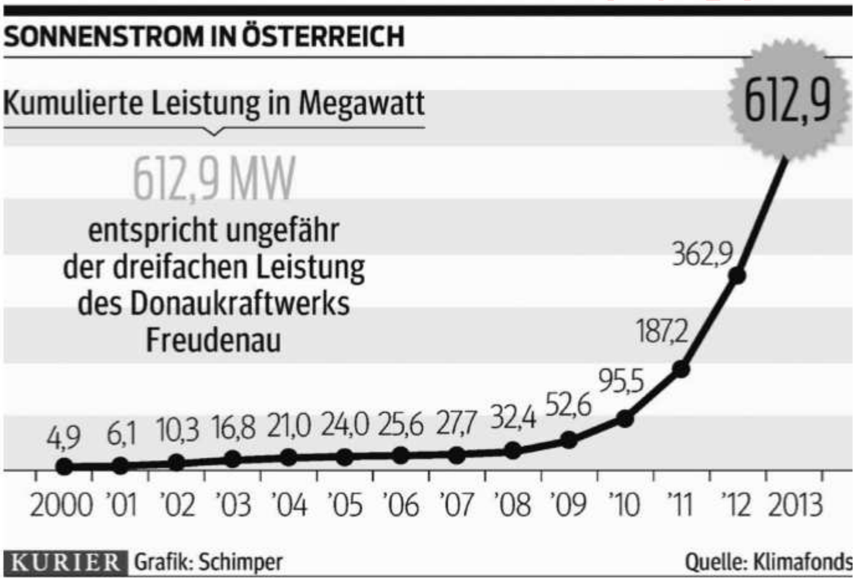
69 - MAT - AN 1.3, AN 4.3, FA 5.6 - Sonnenstrom in Österreich - Matura 2015/16 2. Nebentermin

69. In einer Fotovoltaikanlage wird Sonnenstrahlung mithilfe von Solarzellen in elektrische Energie umgewandelt und somit „Sonnenstrom“ erzeugt. In Österreich arbeiten Solarmodule am effizientesten, wenn sie nach Süden ausgerichtet sind. ____/0

Man unterscheidet dabei die sogenannten aufgeständerten Systeme, bei denen die Module entsprechend dem Einfall der Sonnenstrahlung bewegt werden können, und die kostengünstigeren Systeme mit einer dachparallelen Montage.

Überschüssiger Strom kann ins öffentliche Stromnetz eingespeist werden, was die Stromkosten eines Haushalts weiter verringert.

Die nachstehende Grafik zeigt die Zunahme an Sonnenstrom seit dem Jahr 2000.



Es sei t die Anzahl der seit dem Jahr 2000 vergangenen Jahre und $f(t)$ die in der obigen Grafik dargestellte Leistung (in MW) nach t Jahren.

Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Berechne und interpretiere den Differenzenquotienten $\frac{f(13)-f(0)}{13}$ im gegebenen Kontext.

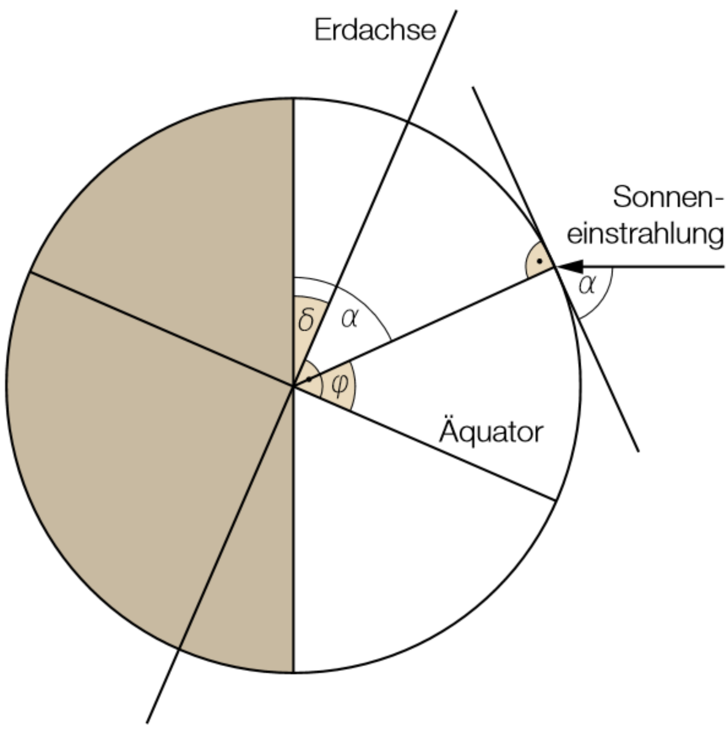
Gib die Bedeutung des Integrals $\int_0^{13} f(t)\mathrm{d}t$ im Hinblick auf die Erzeugung von Sonnenstrom an!

(b) Begründe, warum die in der obigen Grafik im Zeitintervall [9 Jahre; 12 Jahre] dargestellte Leistung (in MW) durch eine Exponentialfunktion g mit der Gleichung $g(t) = a \cdot b^t$ gut angenähert werden kann!

Gib den Ausdruck $\frac{f(12)-f(9)}{f(9)} + 1$ mithilfe des Parameters b der Funktion g an!

(c) Die Energiegewinnung durch eine Fotovoltaikanlage ist am größten, wenn das Sonnenlicht im rechten Winkel auf die Solarzellen trifft.

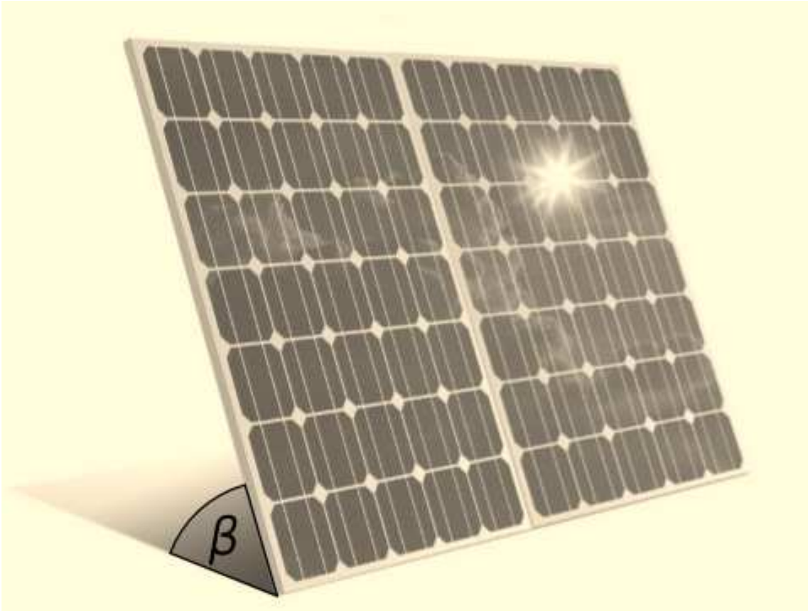
Die optimale Neigung der Fotovoltaikmodule hängt daher vom Einfallswinkel der Sonne ab, der auf der nördlichen Erdhalbkugel am 21. Juni am größten ist.



In der obigen Abbildung ist der Einfallswinkel α der Sonne am 21. Juni zu Mittag dargestellt.

Der Winkel $\delta \approx 23{,}5°$ gibt dabei die Neigung der Erdachse zur Bahnebene um die Sonne und der Winkel φ die geografische Breite an.

Gib eine Formel für den Einfallswinkel α der Sonnenstrahlung in Abhängigkeit von der geografischen Breite φ an!



Bildquelle: http://www.solaranlage.eu/sites/default/files/bilder/re?exionsverluste-solarmodule.jpg [14.11.2016] (adaptiert).

Die obige Abbildung zeigt Fotovoltaikmodule, die unter einem Winkel β gegen die Horizontale geneigt sind. Die Solarzellen sind dabei der Sonne zugewandt.

Ermittle eine Formel für den optimalen Neigungswinkel β_{opt} der Fotovoltaikmodule in Abhängigkeit von demjenigen α, bei dem das Sonnenlicht im rechten Winkel auftrifft! Gib an, wie sich dieser Winkel im Winter bzw. in höheren Breiten (d.h. bei einer Zunahme der geografischen Breite) verändert! Begründe deine Antwort!

(a) **Lösungserwartung:**

$\frac{f(13)-f(0)}{13} \approx 46{,}8$

Im Zeitraum von 2000 bis 2013 hat die Leistung durchschnittlich um ca. 47 MW pro Jahr zugenommen.

Das Integral gibt näherungsweise an, wie viel elektrische Energie („Sonnenstrom“) in den Jahren 2000 bis 2013 mithilfe von Solarzellen insgesamt erzeugt wurde.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung und eine (sinngemäß) korrekte Interpretation.

Toleranzintervall: $[46\text{MW}; 47\text{MW}]$

- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation.

(b) **Lösungserwartung:**

Im Zeitintervall [9 Jahre; 12 Jahre] kommt es jährlich ungefähr zu einer Verdoppelung der Leistung.

$\frac{f(12)-f(9)}{f(9)} + 1 = b^3$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine (sinngemäß) richtige Begründung.
- Ein Punkt für die richtige Lösung.

(c) **Lösungserwartung:**

$\alpha = 90° + \delta - \varphi = 113{,}5° - \varphi$

$\beta_{\text{opt}} + 90° + \alpha = 180° \Rightarrow \beta_{\text{opt}} = 90° - \alpha$

Mögliche Begründung:

Da der Einfallswinkel in höheren Breiten bzw. im Winter kleiner ist, vergrößert sich die optimale Neigung der Fotovoltaikmodule.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine korrekte Formel. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.
- Ein Punkt für eine korrekte Formel, eine korrekte Schlussfolgerung und eine (sinngemäß) korrekte Begründung. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.

---

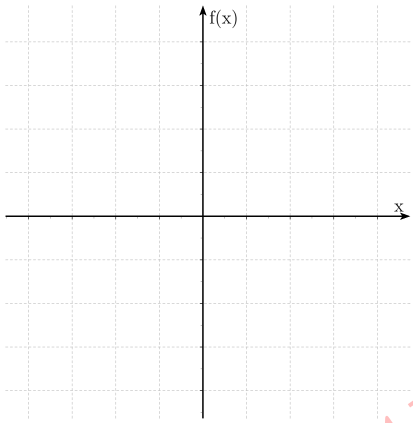
70 - MAT - FA 1.5, AN 4.3, AG 2.3 - Quadratische Funktion - Matura 2016/17 Haupttermin

70. Betrachtet werden quadratische Funktionen der Form $x \mapsto a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$. Die Wahl der Koeffizienten a, b und c beeinflusst verschiedene Eigenschaften wie Monotonie, Monotoniewechsel, Achsensymmetrie und Schnittpunkte mit den Achsen. ____/0

Aufgabenstellung:

(a) Der Graph einer quadratischen Funktion f ist symmetrisch zur senkrechten Achse und schneidet die x-Achse an den Stellen x_1 und x_2 mit $x_1 < x_2$. Es gilt: $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x = d$ mit $d \in \mathbb{R}^+$.

Veranschauliche den Wert d mithilfe eines passenden Graphen einer solchen Funktion f im nachstehenden Koordinatensystems!



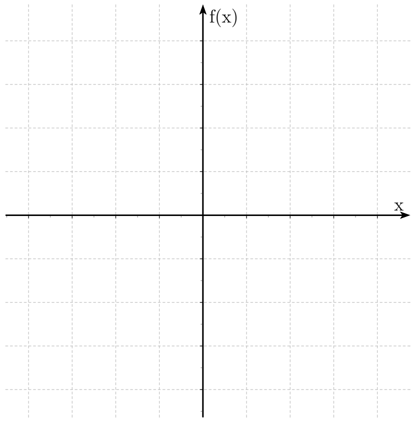
Gib für jeden der Koeffizienten a, b und c dieser Funktion f an, ob er positiv, negativ oder genau null sein muss!

(b) Der Graph einer quadratischen Funktion g hat einen Tiefpunkt und an den Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 > 0$ Schnittpunkte mit der x-Achse. Die Nullstelle x_2 lässt sich mithilfe der Koeffizienten der Funktion g berechnen. Stelle eine entsprechende Formel auf!

Der Graph der Funktion g begrenzt mit der x-Achse eine endliche Fläche. Gib ein bestimmtes Integral an, mit dessen Hilfe der Inhalt dieser endlichen Fläche berechnet werden kann!

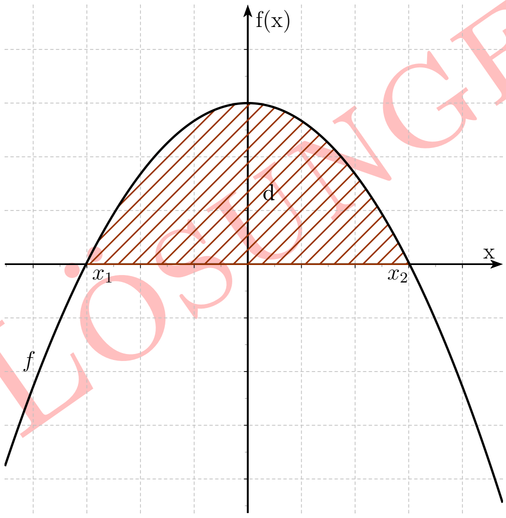
(c) Für eine Stelle k ($k \in \mathbb{R}$) des Graphen einer quadratischen Funktion h gelten die Bedingungen $h(k) = 0$ und $h'(k) = 0$.

$\boxed{\text{A}}$ Skizziere einen möglichen Verlauf des Graphen von h und kennzeichne die Stelle k im nachstehenden Koordinatensystem!



Zeige rechnerisch, dass eine Funktion h mit der Funktionsgleichung $h(x) = x^2 - 2 \cdot k \cdot x + k^2$ die Bedingungen $h(k) = 0$ und $h'(k) = 0$ erfüllt!

(a) **Lösungserwartung:**



$a < 0, b = 0$ und $c > 0$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine korrekte Veranschaulichung des Wertes d, wobei der Graph von f klar erkennbar die Form einer achsensymmetrischen und nach unten offenen Parabel haben muss.
- Ein Punkt für die Angabe der richtigen Bedingungen für die Koeffizienten a, b und c.

(b) **Lösungserwartung:**

Mögliche Vorgehensweise:

$g(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$

$a \cdot x^2 + b \cdot x = 0 \Rightarrow (x_1 = 0), x_2 = -\frac{b}{a}$ mit $a > 0$ und $b < 0$

Mögliche Berechnung des gesuchten Flächeninhalts:

$$\int_{-\frac{b}{a}}^{0} g(x)dx$$

oder:

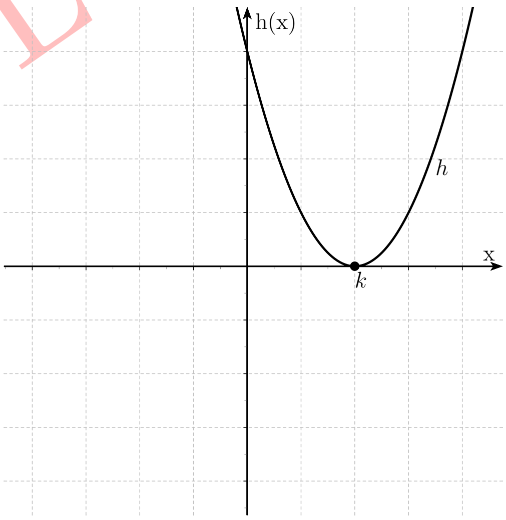
$$-\int_{0}^{x_2} g(x)dx$$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine korrekte Formel, wobei die Bedingungen $a > 0$ und $b < 0$ nicht angeführt werden müssen. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.
- Ein Punkt für ein korrektes bestimmtes Integral. Äquivalente Ausdrücke sind als richtig zu werten.

(c) **Lösungserwartung:**

Mögliche Graph von h:



$h(k) = k^2 - 2 \cdot k^2 + k^2 = 0 \Rightarrow h(k) = 0$

$h'(x) = 2 \cdot x - 2 \cdot k$

$h'(k) = 2 \cdot k - 2 \cdot k = 0 \Rightarrow h'(k) = 0$

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für eine korrekte Skizze eines entsprechenden Graphen von h. Der Graph von h muss die Form einer nach oben oder unten offenen Parabel haben und an der gekennzeichneten Stelle von k müssen die Nullstelle und (somit) die Extremstelle der Funktion h klar erkennbar sein, die Symmetrie bezüglich der Geraden $x = k$ muss erkennbar sein
- Ein Punkt für einen korrekten rechnerischen Nachweis beider Bedingungen.

---

71 - MAT - FA 1.4, FA 1.5 - Muskelkraft - Matura 2016/17 Haupttermin

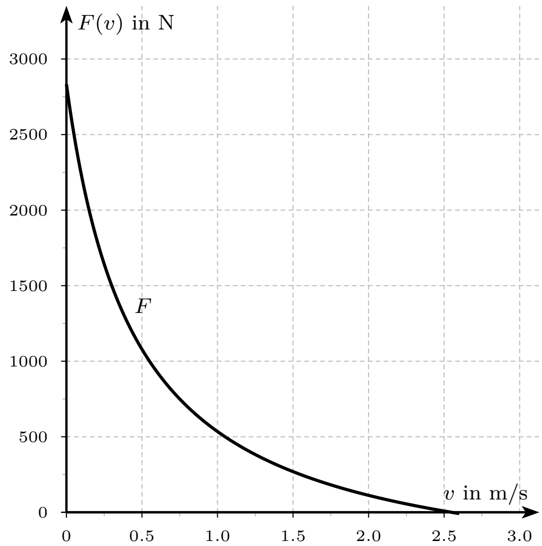
71. Muskeln werden in ihrer Funktion of mit (metallischen) Federn verglichen. Im Gegensatz zur Federkraft hängt die Muskelkraft auch von der Geschwindigkeit ab, mit der ein Muskel kontrahiert (d.h. aktiv verkürzt bzw. angespannt) wird. ____/0

Diese Beziehung kann modellhaft durch die Formel $F = \frac{c}{v+b} - a$ beschrieben werden.

Dabei beschreibt F den unter idealen Bedingungen möglichen Betrag (in Newton) der Muskelkraft bei vorgegebener Kontraktionsgeschwindigkeit v (in Metern pro Sekunde). Die Parameter a (in N), b (in m/s) und c (in Watt) sind positive reelle Größen, die die Eigenschaften eines Muskels beschreiben.

Die oben angeführte Formel kann als Funktionsgleichung einer Funktion F aufgefasst werden, durch die die Kraft $F(v)$ in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit v der Muskelkontraktion beschrieben wird. Die Werte von a, b und c sind dabei für einen bestimmten Muskel konstant.

Der Graph der Funktion F ist nachstehend abgebildet.



Aufgabenstellung:

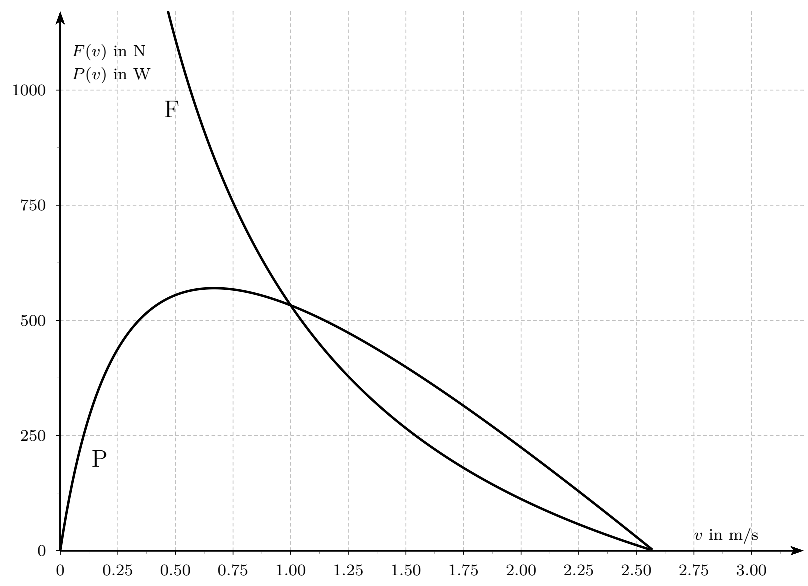
(a) Gib mithilfe der Grafik den Wert $F(0)$ und dessen Bedeutung im gegebenen Kontext an!

Gib an, ob durch die Funktion F eine indirekte Proportionalität zwischen F und v beschrieben wird, und begründe deine Entscheidung!

(b) Für die Leistung, die ein Muskel aufbringen kann, gilt die Formel $P = F \cdot v$.

Diese Formel kann bei konstanter Kraft F als Funktion P aufgefasst werden, durch die die Leistung $P(v)$ in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit v der Muskelkontraktion beschrieben wird ($P(v)$ in W, v in m/s, und F in N).

In der nachstehenden Abbildung sind für einen bestimmten Muskel die Graphen der Funktion P und der Funktion F jeweils in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit v der Muskelkontraktion dargestellt.



A Ermittle mithilfe der Grafik näherungsweise den Wert derjenigen Kraft (in N), die zu einer maximalen Leistung dieses Muskels führt!

Ermittle mithilfe der Grafik näherungsweise den Wert der Geschwindigkeit v_1 der Muskelkontraktion, für den $P'(v_1) = 0$ gilt!

(a) **Lösungserwartung:**

$F(0) \approx 2\,900\,\mathrm{N}$

$F(0)$ gibt den Wert derjenigen Kraft an, die der Muskel bei einer Kontraktionsgeschwindigkeit von $v = 0$ aufbringt.

Zwischen F und v wird keine indirekte Proportionalität beschrieben.

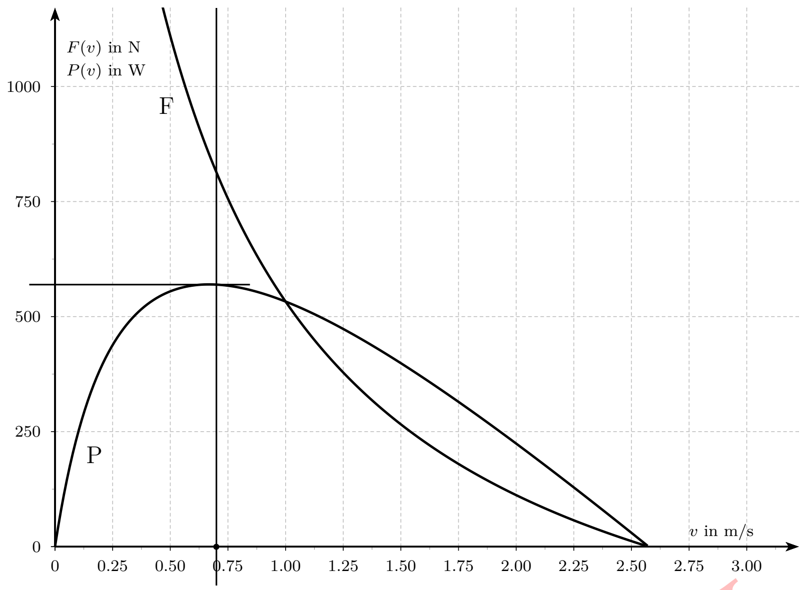
Mögliche Begründung:

Eine Verdoppelung der Kontraktionsgeschwindigkeit v führt nicht zu einer Halbierung der Muskelkraft F.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung und eine (sinngemäß) korrekte Deutung, wobei die Einheit „Newton“ nicht angeführt sein muss.
  Toleranzintervall: $[2\,750\,\mathrm{N}; 3\,000\,\mathrm{N}]$
- Ein Punkt für die Angabe, dass keine indirekte Proportionalität beschrieben wird, und eine korrekte Begründung.

(b) **Lösungserwartung:**



Bei ungefähr 800 N erreicht der Musekl seine maximale Leistung.

$v_1 \approx 0{,}7\,\text{m/s}$

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „Newton" nicht angeführt sein muss.
  Toleranzintervall: $[650\,\text{N}; 950\,\text{N}]$
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m/s" nicht angeführt sein muss.
  Toleranzintervall: $[0{,}6\,\text{m/s}; 0{,}9\,\text{m/s}]$

---

72 - MAT - FA 5.1, FA 5.2, FA 2.2, FA 2.1, AN 4.3 - Zerstörung des Tropenwaldes - Matura 2016/17 Haupttermin

72. Unterschiedliche Studien befassen sich mit der Zerstörung des Tropenwaldes. ____/0

1992 wurde von einem Team um den US-amerikanischen Ökonomen Dennis Meadows die Studie Die neuen Grenzen des Wachstums veröffentlicht.

In dieser Studie wird der Tropenwaldbestand der Erde Ende 1990 mit 800 Millionen Hektar beziffert. Im Jahr 1990 wurden etwa 17 Millionen Hektar gerodet.

Die nachstehenden drei „Katastrophenszenarien“ werden in der Studie entworfen:

Szenario 1: Die jährliche relative Abnahme von ca. 2,1 % bleibt konstant.

Szenario 2: Die Abholzung von 17 Millionen Hektar jährlich bleibt konstant.

Szenario 3: Der Betrag der Abholzungsrate (in Millionen Hektar pro Jahr) wächst exponentiell.

In der nachstehenden Abbildung 1 sind die Graphen der Funktionen f_1 und f_3 dargestellt, die den Waldbestand der Tropen entsprechend den oben angeführten Szenarien 1 und 3 beschreiben.

Die nachstehende Abbildung 2 zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion f_3' der in der Abbildung 1 dargestellten Funktion f_3.

Abbildung 1:

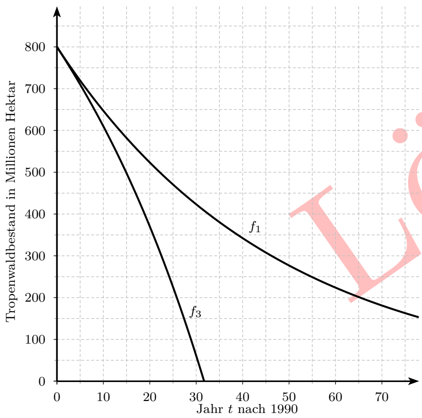
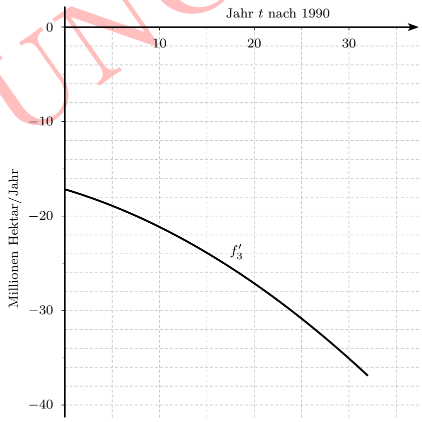


Abbildung 2:



Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Ermittle die Funktionsgleichung von f_1, wobei die Variable t die nach dem Jahr 1990 vergangene Zeit in Jahren angibt!

Berechne, wann gemäß Szenario 1 der Tropenwaldbestand auf weniger als 100 Millionen Hektar gesunken sein wird!

(b) Gib die Gleichung derjenigen Funktion f_2 an, die den Bestand t Jahre nach 1990 unter der Annahme einer konstanten Abnahme von 17 Millionen Hektar pro Jahr modelliert!

Gib an, in welchem Jahr entsprechend diesem Modell der Tropenwald von der Erdoberfläche verschwinden würde, und zeichne den Graphen dieser Funktion in der Abbildung 1 ein!

(c) Geh in den nachstehenden Aufgabenstellungen auf Meadows' Annahme einer exponentiell zunehmenden Abholzungsrate ein und beantworte mithilfe der gegebenen Abbildungen.

Gib näherungsweise denjenigen Zeitpunkt t_1 an, zu dem die momentane Abholzungsrate auf ca. 24 Millionen Hektar pro Jahr angewachsen ist!

Bestimme näherungsweise den Wert des Integrals $\int_0^{t_1} f'(t)\mathrm{d}t$ durch Ablesen aus den Abbildungen und gib seine Bedeutung im Zusammenhang mit der Abholzung der tropischen Wälder an!

(d) Ein internationales Forscherteam um den Geografen Matthew Hansen von der University of Maryland hat mithilfe von Satellitenfotos die Veränderung des Baumbestands des Tropenwaldes von 2000 bis 2012 ermittelt. Dabei wurde festgestellt, dass in jedem Jahr durchschnittlich um a Millionen Hektar ($a > 0$) mehr abgeholzt wurden als im Jahr davor.

Begründe, warum das von Meadows entworfene Szenario 3 am ehesten den Beobachtungen von Matthew Hansen entspricht!

Das Team von Hansen gibt für a den Wert 0,2101 Millionen Hektar pro Jahr an. Gib an, ob die im Modell von Meadows für den Zeitraum 2000 bis 2012 vorhergesagten Änderungsraten der Abholzungsrate größer oder kleiner als die von Hansen beobachteten sind, und begründe deine Entscheidung!

(a) **Lösungserwartung:**

$f_1(t) = 800 \cdot 0{,}979^t$

$800 \cdot 0{,}979^t < 100 \Rightarrow t > 97{,}977\ldots$

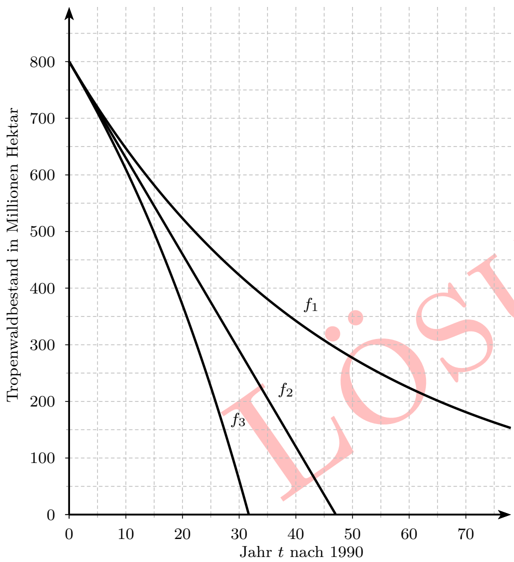
Nach Szenario 1 wird der Tropenwaldbestand nach ca. 98 Jahren auf weniger als 100 Millionen Hektar gesunken sein.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für eine korrekte Funktionsgleichung. Äquivalente Funktionsgleichungen sind als richtig zu werten.
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „Jahre“ nicht angegeben sein muss.
  Toleranzintervall: [93 Jahre; 104 Jahre]
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

(b) Lösungserwartung:

$f_2(t) = -17 \cdot t + 800$ (bzw. $f_2(t) = -17\,000\,000 \cdot t + 800\,000\,000$)



Entsprechend diesem Modell würde der Tropenwald im Laufe des Jahres 2037 verschwinden.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine korrekte Funktionsgleichung.
- Ein Punkt für die Angabe einer korrekten Jahreszahl sowie eines korrekten Graphen, wobei dieser als Gerade erkennbar sein muss, die durch (0|800) verläuft und deren Schnittpunkt mit der Zeitachse im Toleranzintervall [45; 50] liegt.
  Toleranzintervall für das gesuchte Jahr: [2035; 2040]

(c) **Lösungserwartung:**

$t_1 \approx 15$ (also im Jahr 2005)

$\int_0^{t_1} f_3'(t)\mathrm{d}t \approx -300$ (bzw. $-300\,000\,000$)
In den 15 Jahren nach 1990 wurden ca. 300 Millionen Hektar Tropenwald gerodet.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall: $[14; 16]$ bzw. $[2004; 2006]$
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei auch der Betrag der Lösung als richtig zu werten ist, sowie für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation.
  Toleranzintervall: $[-350; -250]$ (bzw. $[-350000000; -250000000]$)

(d) **Lösungserwartung:**

Eine Übereinstimmung ist am ehesten mit dem Szenario 3 festzustellen, da dieses Modell ebenso von einer jährlich zunehmenden Abholzungsrate ausgeht.
Das Modell von Meadows sagt für diesen Zeitraum eine deutlich größere Änderung der Abholzungsrate voraus.
Mögliche Begründung: Der Betrag der Steigung der Funktion f_3' ist im Zeitraum 2000 bis 2012 deutlich größer als 0,2101.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Begründung.
- Ein Punkt für eine richtige Entscheidung und eine korrekte Begründung.

---

73 - MAT - AG 2.1, FA 2.5, WS 2.2, WS 3.2, WS 4.1 - Buccolam - Matura 2016/17 Haupttermin

73. Buccolam ist ein flüssiges Arzneimittel zur Behandlung akuter, länger anhaltender Krampfanfälle bei Personen, die mindestens drei Monate alt und jünger ____/0

als 18 Jahre sind (im Folgenden „Kinder“). Es enthält als Wirkstoff Midazolam, ein stark wirksames Beruhigungsmittel. Im Rahmen einer klinischen Studie wurde Buccolam 440 Kindern mit Krampfanfällen verabreicht. Bei 22 Kindern traten dabei als Nebenwirkung Übelkeit und Erbrechen auf. Bei 308 Kindern verschwanden sichtbare Zeichen der Krampfanfälle innerhalb von 10 Minuten nach Verabreichung des Medikaments.

Aufgabenstellung:

(a) Es gibt vier Arten von Buccolam-Spritzen mit der dem jeweiligen Altersbereich entsprechenden Midazolam-Dosis:

Altersbereich	Midazolam-Dosis	Farbe des Etiketts
bis < 1 Jahr	2,5 mg	Gelb
1 Jahr bis < 5 Jahre	5 mg	Blau
5 Jahre bis < 10 Jahre	7,5 mg	Violett
10 Jahre bis < 18 Jahre	10 mg	Orange

Datenquelle: http://www.ema.europa.eu/docs/de_DE/document_library/EPAR_-_Product_Information/human/002267/WC500112310.pdf [02.12.2016].

Diese Spritzen beinhalten je nach Altersbereich eine Lösung mit der entsprechenden Midazolam-Dosis. Zum Beispiel beinhalten die Spritzen mit gelbem Etikett eine Lösung mit einem Volumen von 0,5 ml.

Allgemein besteht zwischen dem Volumen V (in ml) einer Lösung und der Midazolam-Dosis D (in mg) ein direkt proportionaler Zusammenhang.

Beschreiben den Zusammenhang zwischen dem Volumen V einer Lösung und der Midazolam-Dosis D mithilfe einer Gleichung!

Gib an, ob zwischen dem Alter (in Jahren) der Patientin/des Patienten und der zu verabreichenden Midazolam-Dosis ein linearer Zusammenhang besteht, und begründe deine Entscheidung anhand der in der obigen Tabelle angegebenen Daten!

(b) Die relative Häufigkeit H von Nebenwirkungen nach Verabreichung eines Medikaments wird folgendermaßen klassifiziert:

häufig	$0{,}01 \leq H < 0{,}1$
gelegentlich	$0{,}001 \leq H < 0{,}01$
selten	$0{,}0001 \leq H < 0{,}001$
sehr selten	$H < 0{,}0001$

Datenquelle: https://www.vfa.de/de/patienten/patientenratgeber/ratgeber031.html [02.12.2016] (adaptiert).

$\boxed{\text{A}}$ Gib an, wie die relative Häufigkeit von Nebenwirkungen der Art „Übelkeit und Erbrechen" bei der Verabreichung von Buccolam gemäß der in der Einleitung erwähnten klinischen Studie klassifiziert werden müsste!

In der Packungsbeilage von Buccolam wird die Häufigkeit der Nebenwirkung „Hautausschlag" mit „gelegentlich" angegeben.

Die Zufallsvariable X beschreibt, bei wie vielen von den 440 im Rahmen der Studie mit Buccolam behandelten Kindern die Nebenwirkung „Hautausschlag" auftritt, und kann als binomialverteilte Zufallsvariable mit dem Parameter $p = 0{,}01$ sowie dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ angenommen werden.

Gib an, bei wie vielen Kindern in der erwähnten Studie die Nebenwirkung „Hautausschlag" auftreten darf, damit die Anzahl der davon betroffenen Kinder im Intervall $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$ liegt!

(c) Der tatsächliche Anteil derjenigen Patientinnen/Patienten, bei denen sichtbare Zeichen der Krampfanfälle innerhalb von 10 Minuten nach der Medikamentenverabreichung verschwinden, wird mit p bezeichnet.

Ermittle für p anhand der in der Einleitung angegebenen Daten der klinischen Studie ein symmetrisches Konfidenzintervall mit dem Konfidenzniveau $\gamma = 0{,}95$!

In einer anderen Studie zur Wirksamkeit von Buccolam wurden n_1 Kinder untersucht. Die Ergebnisse führten mit derselben Methodik zu dem symmetrischen Konfidenzintervall $[0{,}67; 0{,}73]$ mit dem Konfidenzniveau γ_1.

Begründe, warum die Werte $n_1 < 400$ und $\gamma_1 = 0{,}99$ nicht die Grundlage zur Berechnung dieses Konfidenzintervalls gewesen sein können

(a) Lösungserwartung:

$V(D) = 0{,}2 \cdot D$

Zwischen dem Alter (in Jahren) der Patientin/des Patienten und der zu verabreichenden Midazolam-Dosis besteht kein linearer Zusammenhang.

Mögliche Begründung: Bei einem linearen Zusammenhang würden z. B. 3-jährige Kinder eine niedrigere Dosis als 4-jährige Kinder erhalten. Laut Tabelle ist dies nicht der Fall.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine korrekte Gleichung. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.
- Ein Punkt für eine richtige Entscheidung und eine korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen (z. B. mithilfe einer Skizze oder mit einem Hinweis auf das Vorliegen einer unstetigen Funktion) sind ebenfalls als richtig zu werten.

(b) Lösungserwartung:

Da bei 22 von 44 Kindern die Nebenwirkung „Übelkeit und Erbrechen“ auftrat, beträgt die relative Häufigkeit $\frac{22}{440} = 0{,}05$.
Wegen $0{,}01 \leq 0{,}05 < 0{,}1$ würde sich für die Nebenwirkung „Übelkeit und Erbrechen“ die Klassifizierung „häufig“ ergeben.

Mögliche Vorgehensweise:
$\mu = 4{,}4 \; \sigma \approx 2{,}09 \Rightarrow [\mu - \sigma; \mu + \sigma] \approx [2{,}31; 6{,}49]$
Die Nebenwirkung „Hautausschlag“ muss demnach bei mindestens drei und darf bei höchstens sechs Kindern der erwähnten Studie auftreten.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für eine korrekte Klassifizierung.
- Ein Punkt für die richtige Lösung.

(c) Lösungserwartung:

$n = 440, h = 0{,}7$
$0{,}7 \pm 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}7 \cdot 0{,}3}{440}} \approx 0{,}7 \pm 0{,}04 \Rightarrow [0{,}66; 0{,}74]$

Die Werte $n_1 < 400$ und $\gamma_1 = 0{,}99$ würden zu einem wesentlich breiteren Konfidenzintervall führen und können daher nicht die Grundlage zur Berechnung gewesen sein.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für ein korrektes Intervall. Andere Schreibweisen des Ergebnisses (als Bruch oder in Prozent) sind ebenfalls als richtig zu werten.

Toleranzintervall für den unteren Wert: $[0{,}65; 0{,}66]$
Toleranzintervall für den oberen Wert: $[0{,}74; 0{,}75]$
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Begründung.

---

74 - MAT - AG 2.1, AN 2.1, AN 3.3, FA 1.2, FA 1.5, FA 1.7 - Aufnahme einer Substanz ins Blut - BIFIE Aufgabensammlung

74. Wenn bei einer medizinischen Behandlung eine Substanz verabreicht wird, kann die Konzentration der Substanz im Blut (kurz: Blutkonzentration) in Abhängigkeit von der Zeit t in manchen Fällen durch eine sogenannte Bateman-Funktion $c(t) = d \cdot (e^{-a \cdot t} - e^{-b \cdot t})$ mit den personenbezogenen Parametern $a, b, d > 0, a < b$ modelliert werden. Die Zeit t wird in Stunden gemessen, $t = 0$ entspricht dem Zeitpunkt der Verabreichung der Substanz. ____/0

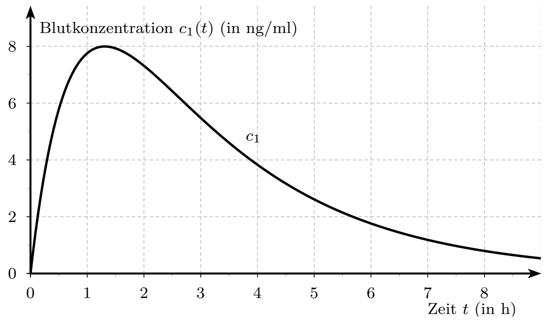
Die Bioverfügbarkeit f gibt den Anteil der verabreichten Substanz an, der unverändert in den Blutkreislauf gelangt. Bei einer intravenösen Verabreichung (d.h. einer direkten Verabreichung in eine Vene) beträgt der Wert der Bioverfügbarkeit 1.

Das Verteilungsvolumen V beschreibt, in welchem Ausmaß sich die Substanz aus dem Blut in das Gewebe verteilt.

Der Parameter d ist direkt proportional zur verabreichten Dosis D und zur Bioverfügbarkeit f, außerdem ist d indirekt proportional zum Verteilungsvolumen V.

Die Nachstehende Abbildung zeigt exemplarisch den zeitlichen Verlauf der Blutkonzentration in Nanogramm pro Milliliter (ng/ml) für den Fall der Einnahme einer bestimmten Dosis der Substanz Lysergsäurediethylamid und kann mit der Bateman-Funktion c_1 mit den Parametern $d = 19{,}5, a = 0{,}4$ und $b = 1{,}3$ beschrieben werden.

Der Graph der Bateman-Funktion weist für große Zeiten t einen asymptotischen Verlauf gegen die Zeitachse auf.



Aufgabenstellung:

(a) Gib eine Gleichung an, mit der der Zeitpunkt der maximalen Blutkonzentration für die in der Einleitung beschriebene Bateman-Funktion c_1 berechnet werden kann, und ermittle diesen Zeitpunkt!

Begründe allgemein, warum der Wert des Parameters d in der Bateman-Funktion c nur die Größe der maximalen Blutkonzentration beeinflusst, aber nicht den Zeitpunkt, zu dem diese erreicht wird!

(b) Die Werte der Parameter a, b und d der Bateman-Funktion variieren von Patient zu Patient. Es wird im Folgenden angenommen, dass der Wert des Parameters d für drei untersuchte Patienten P_1, P_2, P_3 identisch ist.

Für den Patienten P_1 gelten die Parameter aus der Einleitung. Bei Patient P_2 ist der Wert des Parameters a etwas größer als bei Patient P_1.
Beschreibe, wie sich der Graph der Bateman-Funktion verändert, wenn der Wert des Parameters a erhöht wird, der Parameter b unverändert bleibt und $a < b$ gilt!
Interpretiere diese Veränderung im gegebenen Kontext.

Patient P_3 erreicht (bei gleicher verabreichter Dosis) die maximale Blutkonzentration zeitgleich mit Patient P_1, die maximale Blutkonzentration von Patient P_3 ist aber größer.
Ermittle, wie sich die Werte von a und b bei der Bateman-Funktion für Patient P_3 von jenen von Patient P_1 unterscheiden!

(c) Kreuze diejenige Formel an, die den Zusammenhang zwischen dem Parameter d der Bateman-Funktion und den in der Einleitung beschriebenen Größen V, D und f korrekt beschreibt! Der Parameter λ ist dabei ein allgemeiner Proportionalitätsfaktor.

$d = \lambda \cdot \frac{D}{V \cdot f}$	
$d = \lambda \cdot \frac{D \cdot V}{f}$	
$d = \lambda \cdot \frac{V \cdot f}{D}$	
$d = \lambda \cdot \frac{D \cdot f}{V}$	⊠
$d = \lambda \cdot \frac{V}{D \cdot f}$	
$d = \lambda \cdot \frac{f}{V \cdot D}$	

Bei einem konstanten Wert des Parameters d und der Bioverfügbarkeit f kann man die verabreichte Dosis $D(V)$ als Funktion D in Abhängigkeit vom Verteilungsvolumen V auffassen. Beziehe dich auf die von dir angekreuzte Formel und gib für die Parameterwerte der in der Einleitung dargestellten Bateman-Funktion und für den Fall einer intrevenösen Verabreichung die Funktionsgleichung $D(V)$ an! Gib weiters an, um welchen Funktionstyp es sich bei D handelt!

(a) **Lösungserwartung:**

$c_1(t) = 19{,}5 \cdot (e^{-0{,}4 \cdot t} - e^{-1{,}3 \cdot t})$

$c_1'(t) = 19{,}5 \cdot (-0{,}4 \cdot e^{-0{,}4 \cdot t} + 1{,}3 \cdot e^{-1{,}3 \cdot t}) = 0$

$t \approx 1{,}31$ Stunden

$c_1''(1{,}31) \approx -4{,}15 < 0$

Mögliche Begründungen:

Für die Berechnung des Zeitpunkts der (lokalen) maximalen Blutkonzentration muss die Gleichung $c'(t) = 0$ nach t gelöst werden. Der Parameter d fällt bei dieser Berechnung weg und beeinflusst somit nur die Höhe der maximalen Blutkonzentration zum ermittelten Zeitpunkt.

oder:

$c'(t) = d \cdot (-a \cdot e^{-a \cdot t} + b \cdot e^{-b \cdot t}) = 0 \Rightarrow t = \frac{\ln(a)-\ln(b)}{a-b} \Rightarrow$ Der Parameter d tritt in dieser Formel nicht auf. Der Zeitpunkt der maximalen Blutkonzentration t ist somit von d unabhängig.

(b) **Lösungserwartung:**

Bei einer Erhöhung des Wertes von a verschiebt sich das lokale Maximum der Funktion bei einem niedrigeren Funktionswert „nach link". Das bedeutet, dass die maximale Blutkonzentration früher erreicht wird und geringer ist.

Der Patient P_3 ist (bei der Bateman-Funktion) der Wert von a kleiner und der Wert von b größer als bei (der Bateman-Funktion von) Patient P_1.

(c) **Lösungserwartung:**

Multiple Choice - siehe oben.

Die Funktionsgleichung lautet $D(V) = \frac{19{,}5}{\lambda} \cdot V$.
Es handelt sich um eine lineare Funktion.

---

75 - MAT - AG 2.1, AN 1.3, FA 2.1, FA 2.2 - Stratosphärensprung - BIFIE Aufgabensammlung

75. Am 14.10.2012 sprang der österreichische Extremsportler Felix Baumgartner aus einer Höhe von 38 969 m über dem Meeresspiegel aus einer Raumkapsel. Er erreichte nach 50 s in der nahezu luftleeren Stratosphäre eine Höchstgeschwindigkeit von 1 357,6 km/h (≈ 377,1 m/s) und überschritt dabei als erster Mensch im freien Fall die Schallgeschwindigkeit, die bei 20°C ca. 1 236 km/h (≈ 343,3 m/s) beträgt, in der Stratosphäre wegen der niedrigen Lufttemperaturen aber deutlich geringer ist. ____/0

Die Schallgeschwindigkeit in trockener Luft hängt bei Windstille nur von der Lufttemperatur T ab. Für die Berechnung der Schallgeschwindigkeit in Metern pro Sekunde (m/s) werden nachstehend zwei Formeln angegeben, die - bis auf einen (gerundeten) Faktor - äquivalent sind.

Die Lufttemperatur T wird in beiden Formeln in °C angegeben.

$v_1 = \sqrt{401{,}87 \cdot (T + 273{,}15)}$

$v_2 = 331{,}5 \cdot \sqrt{1 + \frac{T}{273{,}15}}$

Aufgabenstellung:

(a) Die Fallbeschleunigung a eines Körpers im Schwerefeld der Erde ist abhängig vom Abstand des Körpers zum Erdmittelpunkt. Die Fallbeschleunigung an der Erdoberfläche auf Meeresniveau, d.h. bei einer Entfernung von $r = 6\,371\,000\,\text{m}$ vom Erdmittelpunkt, beträgt bei vernachlässigbarem Luftwiderstand ca. $9{,}81\,\text{m/s}^2$.

Für die Fallbeschleunigung a gilt: $a(r) = \frac{G \cdot M}{r^2}$, wobei G die Gravitationskonstante, M die Erdmasse und r der Abstand des Körpers vom Erdmittelpunkt ist. Es gilt:

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\text{N}\frac{\text{m}^2}{\text{kg}^2}$; $M = 5{,}97 \cdot 10^{24}\,\text{kg}$

Berechne den Wert der Fallbeschleunigung, die auf Felix Baumgartner beim Absprung aus der Raumkapsel wirkte!

$a =$ ______________ m/s^2

Berechne die mittlere Fallbeschleunigung, die auf Felix Baumgartner bis zum Erreichen der Höchstgeschwindigkeit wirkte, wenn von konstanter Lufttemperatur während dieser Zeit ausgegangen wird!

(b) Als Felix Baumgartner seine Höchstgeschwindigkeit erreichte, bewegte er sich um 25 % schneller als der Schall in dieser Höhe.

Gib eine Gleichung an, mit der unter Verwendung einer der beiden in der Einleitung genannten Formeln die Lufttemperatur, die zu diesem Zeitpunkt geherrscht hat, berechnet werden kann, und ermittle diese Lufttemperatur!

Untersuche mithilfe der beiden Formeln den Quotienten der Schallgeschwindigkeiten im Lufttemperaturintervall $[-60\,°\text{C}; 20\,°\text{C}]$ in Schritten von $10\,°\text{C}$ und gib eine Formel an, die in diesem Lufttemperaturintervall den Zusammenhang zwischen v_1 und v_2 beschreibt!

(c) Zeige mithilfe von Äquivalenzumformungen, dass die beiden Formeln für die Schallgeschwindigkeit in der Einleitung bis auf einen (gerundeten) Faktor äquivalent sind! Geh dabei von der Formel für v_1 aus!

Die Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit v_1 von der Lufttemperatur T kann im Lufttemperaturintervall $[-20\,°\mathrm{C}; 40\,°\mathrm{C}]$ in guter Näherung durch eine lineare Funktion f mit $f(T) = k \cdot T + d$ modelliert werden.

Ermittle die Werte der Parameter k und d und interpretiere diese Werte im gegebenen Kontext!

(a) **Lösungserwartung:**

$r_1 = 6\,371\,000 + 38\,969 = 6\,409969\,\mathrm{m}$

$a(r_1) = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}}{6\,409\,969^2} = 9{,}69\,\mathrm{m/s^2}$

mittlere Fallbeschleunigung: $a = \frac{377{,}1}{50} = 7{,}54\,\mathrm{m/s^2}$

(b) **Lösungserwartung:**

$\frac{377{,}1}{1{,}25} = 301{,}7\,\mathrm{m/s}$

$v_1(T) = 301{,}7 \Rightarrow T \approx -46{,}7\,°\mathrm{C}$

bzw. $v_2(T) = 301{,}7 \Rightarrow T \approx -46{,}9\,°\mathrm{C}$

T in °C	v_1 in m/s	v_2 in m/s	$\frac{v_2}{v_1}$
−60	292,67	292,84	1,00055
−50	299,46	299,63	1,00055
−40	306,10	306,27	1,00055
−30	312,59	312,77	1,00055
−20	318,96	319,13	1,00055
−10	325,20	325,38	1,00055
0	331,32	331,50	1,00055
10	337,33	337,51	1,00055
20	343,23	343,42	1,00055

$v_2 \approx 1{,}00055 \cdot v_1$ bzw. $v_1 \approx 0{,}99945 \cdot v_2$

(c) **Lösungserwartung:**

$v_1 = \sqrt{401{,}87 \cdot (T + 273{,}15)} = \sqrt{401{,}87 \cdot 273{,}15 \cdot (\frac{T}{273{,}15} + 1)} \approx$

$\approx \sqrt{109\,770{,}8 \cdot (\frac{T}{273{,}15} + 1)} \approx 331{,}3 \cdot \sqrt{\frac{T}{273{,}15} + 1}$

Der Faktor 331,3 unterscheidet sich nur geringfügig vom Faktor 331,5 in der Formel für v_2.

$k = \frac{v_1(40) - v_1(-20)}{60} \approx 0{,}6$ ... pro 1 °C nimmt die Schallgeschwindigkeit um ca 0,6 m/s zu

$d = v_1(0) \approx 331{,}3$ ... Schallgeschwindigkeit bei $0\,°\mathrm{C}$

---

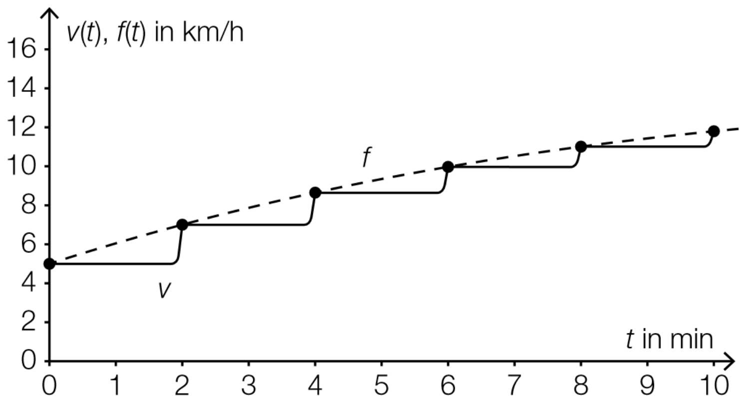
76 - MAT - AG 2.1, AN 1.3, AN 3.2, AN 3.3, AN 4.2, FA 1.4, FA 1.7, FA 2.6, WS 1.3 - Laufband - BIFIE Aufgabensammlung

76. Ein Laufband ist ein Sportgerät, auf dem verschiedene Lauftrainingsprogramme absolviert werden können. ____/0

Bei einem individuell erstellen, 30-minütigen Trainingsprogramm ändert sich die Laufbahngeschwindigkeit alle zwei Minuten. Die von der Zeit t (in min) abhängigen Laufbahngeschwindigkeiten (in km/h) sind Funktionswerte an bestimmten Stellen der Funktion f mit $f(t) = 0{,}0008 \cdot t^3 - 0{,}05 \cdot t^2 + 1{,}1 \cdot t + 5$.

Die Laufbahngeschwindigkeit während der ersten beiden Minuten entspricht dem Funktionswert $f(0)$, die Geschwindigkeit in den beiden darauffolgenden Minuten dem Wert $f(2)$ usw. Für die Berechnung wird vereinfacht angenommen, dass sich die Laufbandgeschwindigkeit innerhalb sehr kurzer Zeit ändert.

Die nachstehende Abbildung zeigt modellhaft die Entwicklung der Laufbahngeschwindigkeit in den ersten zehn Minuten des Trainings, wobei $v(t)$ die Geschwindigkeit des Laufbands zum Zeitpunkt t angibt. Das Training beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$.



Aufgabenstellung:

(a) Gib einen Ausdruck an, mit dem das arithmetische Mittel der Laufbandgeschwindigkeiten während des 30-minütigen Trainingsprogramms berechnet werden kann, und ermittle diesen Wert!

Begründe, warum das arithmetische Mittel der Laufbandgeschwindigkeiten der mittleren Geschwindigkeit $\bar{v}$ während des 30-minütigen Trainingsprogramms entspricht!

Berechne unter Verwendung der mittleren Geschwindigkeit $\bar{v}$ die während des 30-minütigen Trainingsprogramms bewältigte Strecke!

(b) Gib die minimale und die maximale Geschwindigkeit des Laufbands während des 30-minütigen Trainingsprogramms an!

v_{min} = ______________________ km/h

v_{max} = ______________________ km/h

Begründe, warum zu den Zeitpunkten t_{min} und t_{max}, zu denen die minimale bzw. die maximale Geschwindigkeit des Laufbands in dem 30-minptigen Trainingsprogramm erreicht wird, $f'(t_{\text{min}}) \neq 0$ und $f'(t_{\text{max}}) \neq 0$ gilt!

(c) Gib den Wert von $v'(1)$ an und interpretiere diesen Wert (mit Angabe der Einheit) im gegebenen Kontext!

$v'(1)$ = ______________________

Beschreibe anhand des Graphen in der Einleitung, wie der Graph der Ableitungsfunktion v' im Intervall $[0; 30]$ verlaufen müsste!

(d) Die in den ersten zehn Trainingsminuten zurückgelegte Weglänge kann näherungsweise mit dem Integral $\frac{1}{60} \cdot \int_0^{10} f(t)\mathrm{d}t$ berechnet werden.

Berechne diesen Näherungswert und erläuter die Bedeutung des Faktors $\frac{1}{60}$!

Gib die absolute Abweichung des berechneten Näherungswertes von der tatsächlich zurückgelegten Weglänge während der ersten zehn Minuten in Metern an!

(e) Unter bestimmten Voraussetzungen ist der Energiebedarf einer Person bei einem Lauftraining direkt proportional zur Masse der Person (in kg) und zur zurückgelegten Weglänge (in km).

Die nachstehende Tabelle zeigt den Energiebedarf (in kcal) einer 80 kg schweren Person bei einem Lauftraining in Abhängigkeit von der Dauer t des Trainings. Die Person läuft mit einer konstanten Geschwindigkeit von 10 km/h.

	$t = 15$ min	$t = 30$ min	$t = 45$ min	$t = 60$ min
Energiebedarf in kcal	194	388	582	776

Zeige anhand der Tabellenwerte die direkte Proportionalität des Energiebedarfs zur zurückgelegten Wegstrecke und berechne den Proportionalitätsfaktor k!

Beim Lauftraining wird die Geschwindigkeit häufig als „Tempo" in min/km umschrieben. Berechne für die unten angeführten Geschwindigkeiten unter Verwendung des Proportionalitätsfaktors k für eine 90 kg schwere Person jeweils das Tempo und den Energiebedarf (in kcal) für die angegebene Zeitdauer!

Geschwindigkeit in km/h	Tempo in min/km	Energiebedarf in 15 min	Energiebedarf in 30 min
7,5	8		
10			
12			

(a) **Lösungserwartung:**

$\bar{v} = \frac{1}{15} \cdot (f(0) + f(2) + f(4) + ... + f(28) \approx 11{,}57$

Das arithmetische Mittel der Laufbahngeschwindigkeiten beträgt 11,57 km/h

Das Arithmetische Mittel entspricht der mittleren Geschwindigkeit während des 30-minütigen Trainingsprogramms, weil die Geschwindigkeiten $v(0), ..., v(28)$ in gleich langen Zeitintervallen (2 min) jeweils konstant sind.

zurückgelegte Weglänge: $0{,}5\,\text{h} \cdot 11{,}57\,\text{km/h} = 5{,}785\,\text{km}$

(b) **Lösungserwartung:**

$v_{\text{min}} = 5\,\text{km/h}$

$v_{\text{max}} = 14{,}16\,\text{km/h}$

$t_{\min}$ und $t_{\max}$ sind keine lokalen Extremstellen der Funktion f, weshalb die 1. Ableitung von f an diesen Stellen nicht null ist.

(c) **Lösungserwartung:**

$v'(1) = 0$

Mögliche Interpretationen:

Die Beschleunigung (momentane Geschwindigkeitsänderung) des Laufbands nach 1 Minute beträgt $0\,\mathrm{m/s^2}$.

oder:

Das Laufband (die Läuferin/der Läufer) bewegt sich während der ersten 2 Minuten mit konstanter Geschwindigkeit, d.h., seine Beschleunigung ist zum Zeitpunkt $t = 1\,\mathrm{min}$ gleich null.

Der Graph von v' würde auf der 1. Achse verlaufen und nur zu den Zeitpunkten der Geschwindigkeitsänderungen ($t = 2, t = 4, t = 6, \ldots$) sehr hohe Werte annehmen.

(d) **Lösungserwartung:**

$\frac{1}{60} \cdot \int_0^{10} f(t)\mathrm{d}t \approx 1{,}506$

zurückgelegte Weglänge: ca. $1{,}51\,\mathrm{km}$

Mögliche Begründungen:

Der Faktor $\frac{1}{60}$ ist erforderlich, um die Geschwindigkeiten von km/h in km/min umzurechnen, da die Zeiten (Intervallgrenzen) in Minuten gegeben sind ($1\,\mathrm{h}=60\,\mathrm{min}$).

oder:

Der Faktor $\frac{1}{60}$ ist erforderlich, um die pro Stunde zurückgelegten Wegstrecken auf die pro Minute zurückgelegten Wegstrecken umzurechnen.

Für die tatsächlich zurückgelegte Weglänge gilt:

$\frac{2}{60} \cdot (f(0) + f(2) + f(4) + f(6) + f(8)) \approx 1{,}388\,\mathrm{km}$

$\Rightarrow$ Der Näherungswert für die Weglänge weicht um ca. $118\,\mathrm{m}$ vom exakten Wert ab.

(e) **Lösungserwartung:**

$194 = k \cdot 80 \cdot 2{,}5$

$k = 0{,}97$

Bei der doppelten/dreifachen/vierfachen Laufzeit wird die doppelte/dreifache/vierfache Strecke zurückgelegt und auch der Energiebedarf ist doppelt/dreimal/viermal so groß.

Geschwindigkeit in km/h	Tempo in min/km	Energiebedarf in 15 min	Energiebedarf in 30 min
7,5	8	163,7	327,4
10	6	218,25	436,5
12	5	261,9	523,8

---

77 - MAT - AG 2.5, AN 1.1, AN 1.3, FA 1.4, FA 1.5, FA 1.7, FA 3.2 - Kettenlinie - BIFIE Aufgabensammlung

77. Hängt man ein Seil (oder beispielsweise eine Kette) an zwei Punkten auf, so kann der Verlauf des Seils unter bestimmten Bedingungen durch eine Funktion der Form $x \mapsto \frac{a}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ modelliert werden. ____/0

Der Wert der Konstanten a hängt dabei von der Seillänge und vom Abstand der beiden Aufhängepunkte ab.

Der vertikale Abstand zwischen dem tiefsten Punkt des Seils und seinen Aufhängepunkten wird als Durchhang bezeichnet.

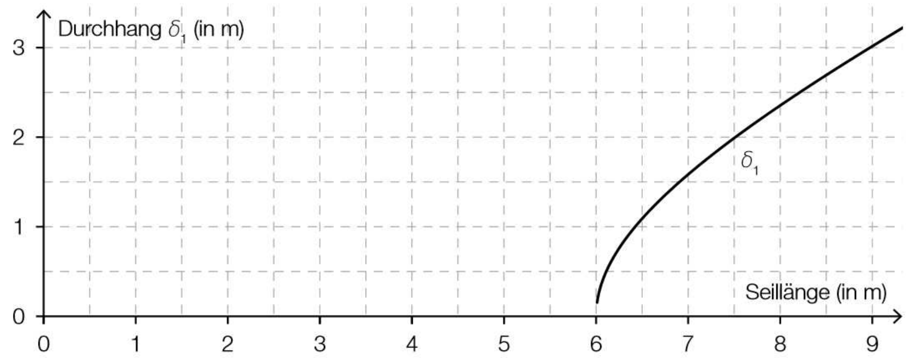
Ein bestimmtes Seil kann modellhaft durch eine Funktion f der obigen Form mit $a = 4$ beschrieben werden (x und $f(x)$ in Metern). Die beiden Aufhängepunkte P_1 und P_2 befinden sich in gleicher Höhe und ihr Abstand beträgt $d = 6\,\text{cm}$.

Aufgabenstellung:

(a) Gib eine Gleichung an, mit der die Stelle mit dem maximalen Durchhang des durch f beschriebenen Seils berechnet werden kann, und ermittle diese Stelle!

Gib eine Funktionsgleichung f_1 an, mit der ein Seil modelliert werden kann, welches an jeweils 1 m tieferen Aufhängepunkten montiert ist und denselben Durchhang wie das durch f beschriebene Seil aufweist!

(b) Gib eine Gleichung an, mit der der Durchhang δ_1, der die Abhängigkeit des Durchhangs von der Länge des Seils zwischen den Aufhängepunkten P_1 und P_2 beschreibt.



Gib mithilfe der oben dargestellten Abbildung die Länge des in der Einleitung beschriebenen Seils an! Ermittle weiters, um wie viele Meter der Durchhang zunimmt, wenn das Seil durch ein zwei Meter längeres Seil (gleicher Beschaffenheit) ersetzt wird, das an denselben Aufhängepunkten montiert ist!

(c) Der Graph der Funktion f kann durch den Graphen einer quadratischen Funktion g mit $g(x) = b \cdot x^2 + c$ mit $b, c \in \mathbb{R}^+$ angenähert werden. Der Graph von g verläuft durch die Aufhängepunkte P_1 und P_2 und den Tiefpunkt des Graphen von f.

Gib alle Gleichungen an, die für die Berechnung von b und c notwendig sind, und ermittle die Werte dieser Parameter!

Gib eine Gleichung an, mit der der größte vertikale Abstand von f und g zwischen den beiden Aufhängepunkten berechnet werden kann!

(d) Der Graph der Funktion f kann auch durch den Graphen einer Polynomfunktion f vierten Grades angenähert werden. Für den Graphen von h gelten folgende Bedingungen: er verläuft durch die Aufhängepunkte P_1 und P_2 und den Tiefpunkt des Graphen von f und hat in den beiden Aufhängepunkten dieselbe Steigung wie der Graph von f.

Drücke <u>alle</u> gegebenen Bedingungen mithilfe von Gleichungen aus!

Ermittle anhand dieser Gleichungen eine Funktionsgleichung von h!

(a) **Lösungserwartung:**

$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{4}} + e^{-\frac{x}{4}}\right) = 0 \Rightarrow x = 0$

$f_1(x) = f(x) - 1 = \frac{4}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{4}} + e^{-\frac{x}{4}}\right) - 1$

(b) **Lösungserwartung:**

$\delta = f(3) - f(0)$

$\delta = 1{,}2\,\text{m}$

Die Seillänge beträgt ca. 6,6 m.

$\delta_1(8{,}6) \approx 2{,}8 \Rightarrow$ Der Durchhang nimmt um ca. 1,6 m zu.

(c) **Lösungserwartung:**

$g(0) = 4 = c$

$g(3) = f(3) \approx 5{,}18 = 9 \cdot b + 4 \Rightarrow b \approx 0{,}13$

größter vertikaler Abstand:

$(g(x) - f(x))' = 0$

(d) **Lösungserwartung:**

$h(-3) = f(-3)$

$h(0) = f(0)$

$h(3) = f(3)$

$h'(-3) = f'(-3)$

$h'(3) = f'(3)$

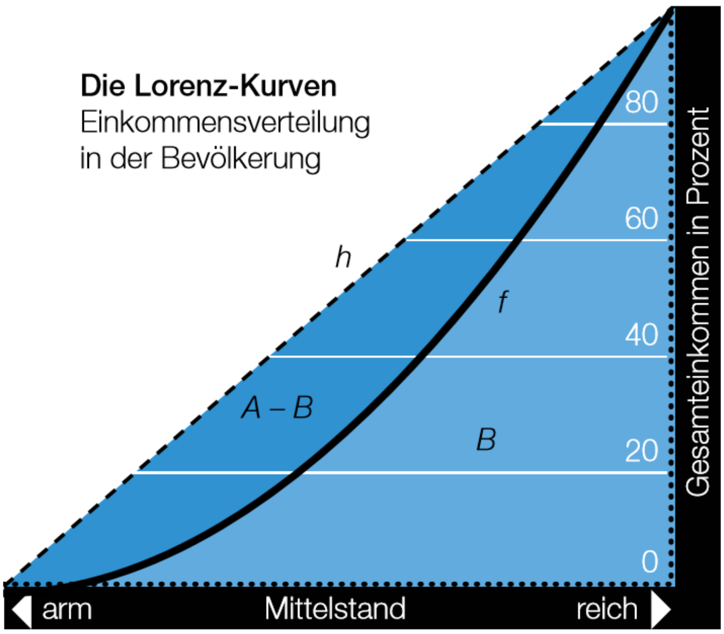
$h(x) \approx 0{,}0007 \cdot x^4 + 0{,}125 \cdot x^2 + 4$

78 - MAT - AG 2.4, AN 4.2, AN 4.3, FA 1.4, FA 1.7, FA 3.2, FA 4.1, FA 5.6, WS 1.1, WS 1.2 - Einkommensverteilung - BIFIE Aufgabensammlung

78. Der Statistiker Max Lorenz beschrieb bereits im Jahr 1905 statistische Verteilungen mithilfe der nach ihm benannten Lorenz-Kurve. Eine Lorenz-Kurve f kann z.B. zur Beschreibung er Einkommensverteilung in einem Staat herangezogen werden. Je ausgeprägter ihr „Bauch“ ist, desto größer ist der Einkommensunterschied zwischen niedrigem und hohem Einkommen. ____/0

Die Lorenz-Kurve der Einkommensverteilung eines Staates, in dem alle Personen bis auf eine Person nichts verdienen und diese eine Person alles bekommt, wird in der nachstehenden Grafik durch die punktrierten Linien (Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks) dargestellt. Das andere Extrem ist ein Staat, in dem alle Personen gleich viel verdienen. In diesem Fall die die Lorenz-Kurve zu einer Geraden h, welche durch die strichlierte Linie dargestellt ist. Zwischen den beiden Extremen verläuft die Lorenz-Kurve f eines Staates.

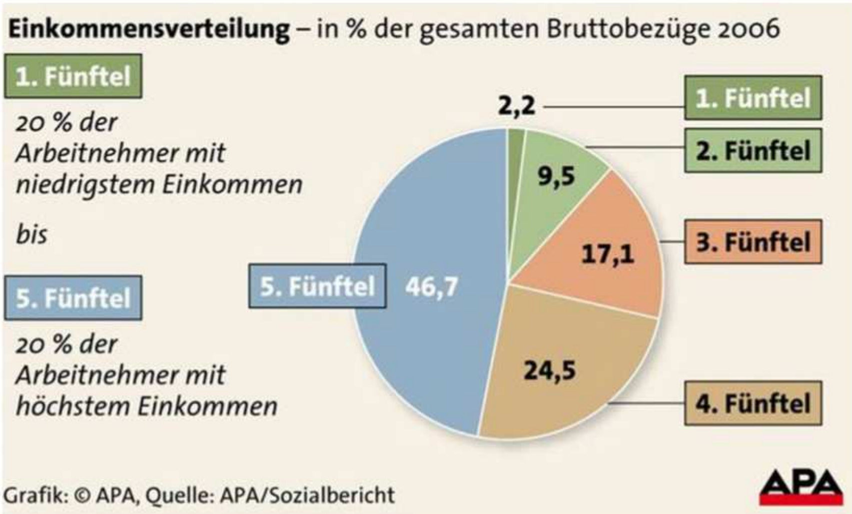
Jeder Punkt $P = (x|f(x))$ auf der Kurve f steht für folgende Aussage: Die einkommensschwächsten $x\,\%$ aller Haushalte beziehen $f(x)\,\%$ des Gesamteinkommens.“



Der Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks wird mit A bezeichnet. Der Graph der Lorenz-Kurve f schließt mit den beiden Katheten des rechtwinkeligen Dreiecks eine Fläche mit Inhalt B ein. Setzt man den Inhalt der Fläche zwischen der

Lorenz-Kurve f und der Geraden h mit der Dreiecksfläche A in Bezug, erhält man den Gini-Ungleichheitskoeffizienten $GUK = \frac{A-B}{A}$, eine Zahl zwischen null und ein. Je kleiner der GUK ist, desto gleichmäßiger ist das Gesamteinkommen auf die Bevölkerung verteilt.

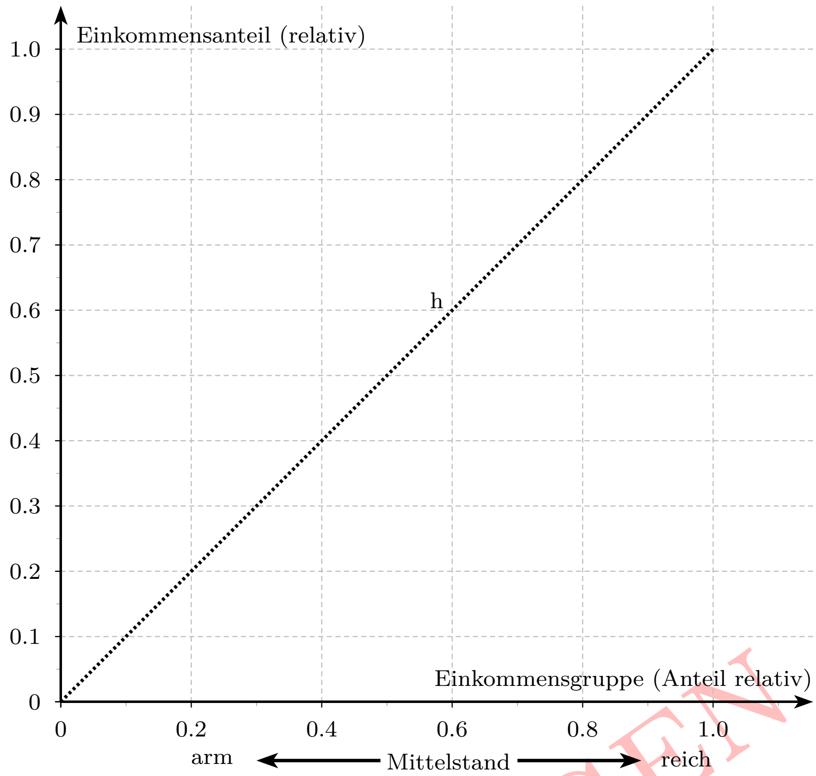
In der nachstehenden Grafik ist die Einkommensverteilung in Österreich in Prozent der gesamten Bruttobezüge im jahr 2006 dargestellt. Daraus ist z.B. abzulesen, dass jene 20 % der Bevölkerung mit den niedrigsten Bruttoeinkommen nur 2,2 % des Gesamtbruttoeinkommens erhalten haben.



Quelle: http://diepresse.com/home/wirtschaft/economist/446997/Sozialbericht_Einkommen-in-Oesterreich-ungleicher-verteilt [04.05.2017].

Aufgabenstellung:

(a) Zeichne die Lorenzkurve für die Einkommensverteilung der Bruttobezüge in Österreich im Jahr 2006 in den nachstehenden Grafik als Streckenzug ein!



Berechne mithilfe des eingezeichneten Streckenzuges den GUK für die Bruttobezüge in Österreich für das Jahr 2006!

(b) Die Verteilung der Bruttoeinkommen in Österreich im Jahr 2006 soll durch eine Polynomfunktion p so modelliert werden, dass alle Daten, die aus dem Kreisdiagramm aus der Einleitung abgelesen werden können mit Funktionswerten dieser Polynomfunktion übereinstimmen.

Begründe, welchen Grad die Polynomfunktion p bei konkreter Berechnung (maximal) hat!

Begründe, warum eine Exponentialfunktion e mit $e(x) = a \cdot b^x (a, b \in \mathbb{R}^+$ nicht für die Modellierung einer Lorenz-Kurve geeignet ist!

(c) Um politische Maßnahmen abschätzen zu können, werden verschiedene Szenarien entworfen. So soll beispielsweise für die Bruttoeinkommen langfristig eine Lorenz-Kurve angestrebt werden, die durch die Funktion g mit der Funktionsgleichung $g(x) = 0{,}245 \cdot x^3 + 0{,}6 \cdot x^2 + 0{,}155 \cdot x$ beschrieben werden kann.

Gib eine Gleichung an, mit der der GUK für die angestrebte Einkommensverteilung berechnet werden kann, und ermittle diesen GUK!

Gib mithilfe konkreter Zahlenwerte an, wie sich in diesem Fall die Einkommensverteilung der „20 % der Arbeitnehmer/innen mit den niedrigsten Bruttoeinkommen“ und die Einkommensverteilung der „20 % der Arbeitnehmer/innen mit den höchsten Bruttoeinkommen“ im Vergleich zu den Bruttobezügen im Jahr 2006 in Österreich ändern würde!

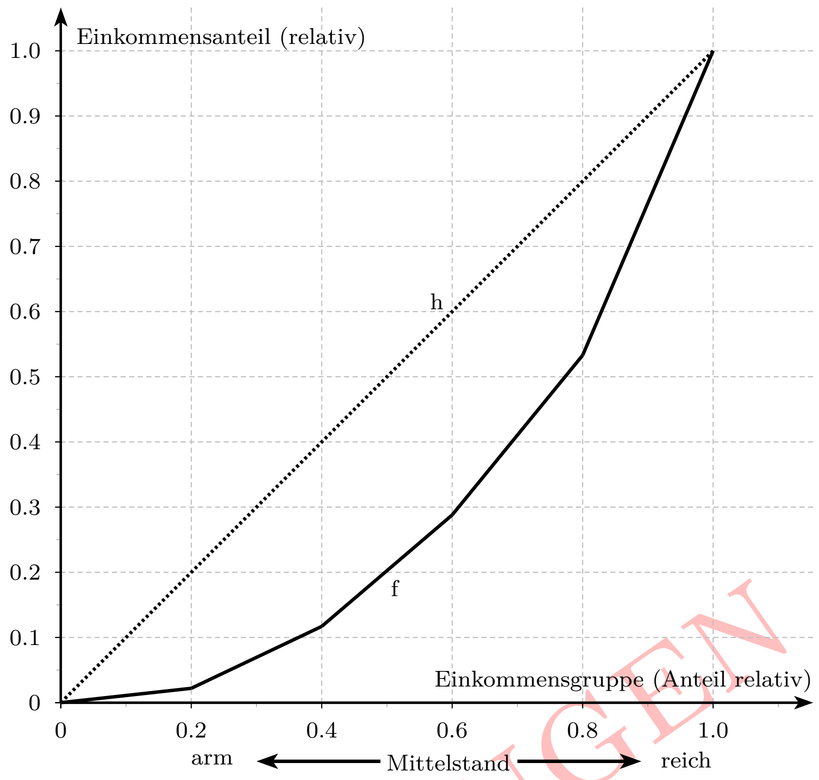
(d) Für das Jahr 2007 kann die Einkommensverteilung für Österreich mit einem GUK von 0,26 beschrieben werden.
Datenquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Liste_der_L%C3%A4nder_nach_Einkommensverteilung [04.05.2017].

Angenommen, die Lorenz-Kurve für die Einkommenverteilung kann für ein bestimmtes Land, das eine ausgeglichenere Einkommensverteilung als Österreich aufweisen soll, durch eine Potenzfunktion h mit $h(x) = a \cdot x^z + b$ mit $a, b, z \in \mathbb{R}$ beschrieben werden.

Gib an, welche Werte die Parameter a und b haben müssen, und begründe deine Wahl!

Gib eine Ungleichung an, die für das Jahr 2007 einen Zusammenhang zwischen dem GUK von Österreich und dem GUK von demjenigen Land, das eine ausgeglichenere Einkommensverteilung als Österreich aufweisen soll, beschreibt! Ermittle für diesen Fall einen möglichen Wert für den Exponenten z mit $z > 1$!

(a) **Lösungserwartung:**



Der Inhalt der Fläche zwischen dem Polygonzug f und der Strecke h beträgt 0,208 Flächeneinheiten (die Ermittlung des Flächeninhalts zwischen der waagrechten Achse und dem Streckenzug kann z.B. aus zwei Dreiecksflächen und drei Trapezflächen erfolgen).

$\Rightarrow GUK = \frac{0{,}208}{0{,}5} = 0{,}416$

(b) **Lösungserwartung:**

Aus den Daten des Kreisdiagramms ergeben sich (für die Argumente $x = 0, x = 0{,}2, x = 0{,}4, x = 0{,}6, x = 0{,}8, x = 1$) sechs Funktionswerte von p und somit sechs „Bedingungen“ für die Koeffizienten der Funktionsgleichung. Eine Polynomfunktion fünften Grades hat sechs Koeffizienten und ist daher geeignet.

(Anmerkung: Bei „besonderer“ Lage der Punkte kann auch ein Grad kleiner als fünf ausreichend sein.

Jede Lorenz-Kurve verläuft durch den Punkt $(0|0)$. Da eine Exponentialfunktion e mit $e(x) = a \cdot b^x$ $(a, b \in \mathbb{R}^+)$ nicht durch den Koordinatenursprung verläuft, ist sie nicht für die Modellierung geeignet.

(c) **Lösungserwartung:**

$$GUK = \frac{0{,}5 - \int_0^1 (0{,}245x^3 + 0{,}6x^2 + 0{,}155x)dx}{0{,}5} = 0{,}3225$$

$g(0{,}2) \approx 0{,}057$

$g(0{,}8) \approx 0{,}633$

Der Einkommensanteil der „20 % mit den niedrigsten Bruttoeinkommen“ würde (um ca. 3,5 Prozentpunkte) von 2,2 % auf ca. 5,7 % steigen.

Der Einkommensanteil der „20 % mit den höchsten Bruttoeinkommen“ würde (um ca. 10 Prozentpunkte) von 46,7 % auf 36,7 % sinken.

(d) **Lösungserwartung:**

$b = 0$, da der Graph durch den Punkt (0|0) verlaufen muss

$a = 1$, da der Graph durch den Punkt (1|1) verlaufen muss

$$\frac{0{,}5 - \int_0^1 x^z dx}{0{,}5} < 0{,}26$$

$z \in \left(1; \frac{63}{37}\right)$

---

79 - MAT - AN 1.3, AN 2.1, AN 4.3, FA 1.5, FA 1.6, FA 1.7 - Abkühlungsprozesse - BIFIE Aufgabensammlung

79. Wird eine Tasse mit heißem Kaffe am Frühstückstisch abgestellt, kühlt der Kaffee anfangs rasch ab, bleibt aber relativ lange warm. ____/0

Die Temperatur einer Flüssigkeit während des Abkühlens kann nach dem Newton'schen Abkühlungsgesetz durch eine Funktion der Form $t \mapsto T_U + (T_0 - T_U) \cdot e^{-k \cdot t}$ beschrieben werden. Dabei gibt T_0 die Anfangstemperatur der Flüssigkeit (in °C) zum Zeitpunkt $t = 0$ an, T_U ist die konstante Umgebungstemperatur (in °C) und $k \in \mathbb{R}^+$ (in s^{-1}) ist eine von den Eigenschaften der Flüssigkeit und des Gefäßes abhängige Konstante.

Ein zu untersuchender Abkühlungsprozess wird durch eine Funktion T der obigen Form beschrieben. Dabei beträgt die Anfangstemperatur $T_0 = 90$ °C und die Umgebungstemperatur $T_U = 20\,°\mathrm{C}$. Die Abkühlungskonstante hat den Wert $k = 0{,}002$. Die Zeit t wird in Sekunden gemessen, die Temperatur $T(t)$ in °C.

Aufgabenstellung:

(a) Berechne den Wert des Differenzenquotienten der Funktion T im Intervall $[0\,\mathrm{s}; 300\,\mathrm{s}]$ und interpretiere den berechneten Wert im Hinblick auf den beschriebenen Abkühlungsprozess!

Beschreibe den Verlauf des Graphen von T für große Werte von t und interpretiere den Verlauf im gegebenen Kontext!

(b) Der Wert $T'(t)$ kann als „Abkühlungsgeschwindigkeit" der Flüssigkeit zum Zeitpunkt t gedeutet werden.

Gib für den zu untersuchenden Abkühlungsprozess eine Funktionsgleichung für T' an!

Gib weiters denjenigen Zeitpunkt an, zu dem der Betrag der Abkühlungsgeschwindigkeit am größten ist!

Der Graph von T' und die $t-$Achse schließen im Intervall $[0\,\mathrm{s}; 600\,\mathrm{s}]$ eine Fläche von ca. 49 Flächeneinheiten ein.

Interpretiere diesen Wert unter Verwendung der entsprechenden Einheit im gegebenen Kontext!

(c) Eine zweite Flüssigkeit in einem anderen Gefäß hat zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Temperatur von $95\,°\mathrm{C}$. Nach einer Minute ist die Temperatur auf $83{,}4\,°\mathrm{C}$ gesunken, die Umgebungstemperatur beträgt $T_U = 20\,°\mathrm{C}$. Die Funktion T_2 beschreibt den Abkühlungsprozess dieser Flüssigkeit.

Gib eine Gleichung an, mit der die Abkühlungskonstante k_2 für diesen Abkühlungsprozess berechnet werden kann, und ermittle diesen Wert!

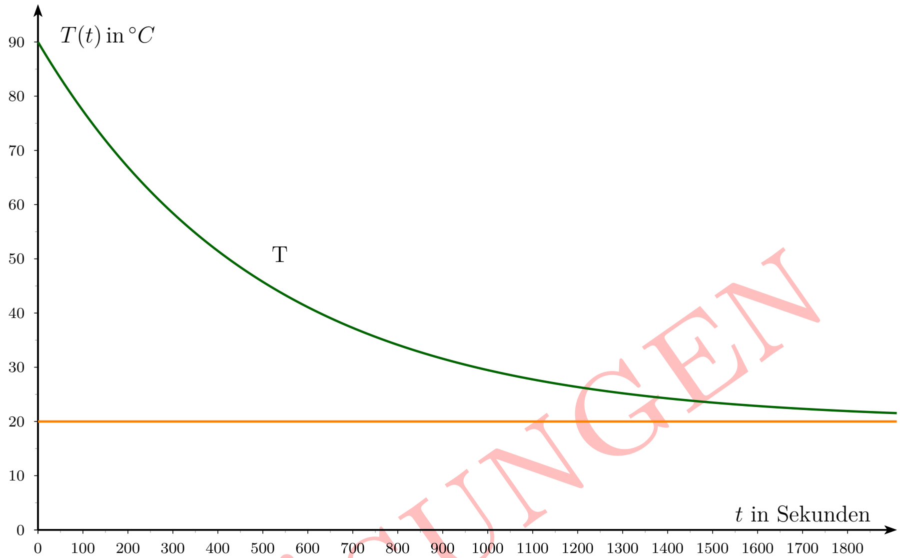
Ermittle den Schnittpunkt der Graphen der Funktionen T und T_2 und interpretiere die Koordinaten des Schnittpunkts im gegebenen Kontext!

(a) **Lösungserwartung:**

$\frac{T(300-T(0)}{300} \approx -0{,}1053$

In den ersten fünf Minuten kühlt die Flüssigkeit durchschnittlich um ca. 0,1 °C pro Sekunde ab.

Der Graph von T nähert sich im Laufe der Zeit der Umgebungstemperatur (20 °C an.



(b) **Lösungserwartung:**

$T'(t) = -0{,}14 \cdot e^{-0{,}002 \cdot t}$

Der Betrag der Abkühlungsgeschwindigkeit ist zum Zeitpunkt $t = 0$ am größten.

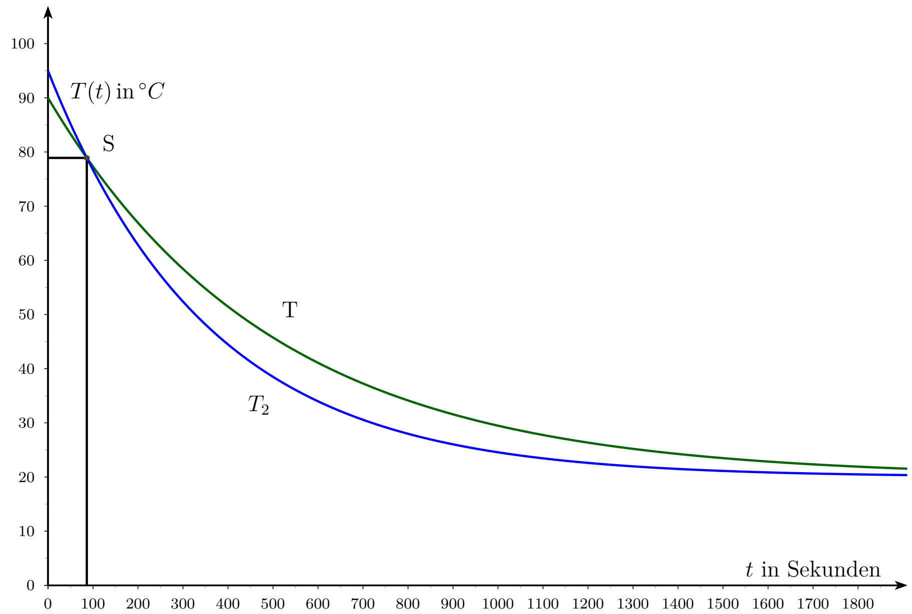
Die Flüssigkeit kühlt in den ersten zehn Minuten insgesamt um ca. 49 °C ab.

(c) **Lösungserwartung:**

$T_2(t) = 20 + 75 \cdot e^{-k_2 \cdot t} \Rightarrow$

$T_2(60) = 20 + 75 \cdot e^{-k_2 \cdot 60} = 83{,}4$

$k_2 \approx 0{,}0028\,\mathrm{s}^{-1}$



Schnittpunkt: $S \approx (86{,}2|78{,}9)$

Nach ca. 86,2 Sekunden haben beide Flüssigkeiten eine Temperatur von ca. 78,9 °C.

---

80 - MAT - AN 1.3, FA 5.1, FA 5.2, FA 5.4, FA 5.5 - Aktivität und Altersbestimmung - Matura NT 1 16/17

80. Beim Zerfall eines radioaktiven Stoffes nimmt die Anzahl der noch nicht zerfallenen Atomkerne exponentiell ab und lässt sich näherungsweise durch eine Funktion N mit $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ beschreiben. Dabei ist N_0 die Anzahl der Atomkerne zum Zeitpunkt $t = 0, N(t)$ die Anzahl der noch nicht zerfallenen Atomkerne zum Zeitpunkt $t \geq 0$ und λ die sogenannte Zerfallskonstante. ____/6

Die Aktivität $A(t)$ ist der Absolutbetrag der momentanen Änderungsrate der Funktion N zum Zeitpunkt t. Sie wird in Becquerel (Bq) gemessen. Eine Aktivität von 1 Bq entspricht einem radioaktiven Zerfall pro Sekunde.

Bei radioaktiven Stoffen nimmt die Aktivität ebenfalls exponentiell ab und kann durch eine Funktion A mit $A(t) = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ modelliert werden. Dabei ist A_0 die Aktivität zum Zeitpunkt $t = 0$ und $A(t)$ die Aktivität zum Zeitpunkt $t \geq 0$.

Aufgabenstellung:

(a) Gib eine Formel an, mit der die Anzahl der Atomkerne N_0 aus der gemessenen Aktivität A_0 berechnet werden kann!

Eine Probe von ^{238}U (Uran-238) hat zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Aktivität von 17 Bq. Die Zerfallskonstante von ^{238}U hat den Wert $\lambda \approx 4{,}92 \cdot 10^{-18}$ pro Sekunde.

Bestimme die Anzahl der ^{238}U-Atomkerne zum Zeitpunkt $t = 0$ in der Probe!

(b) Mithilfe des Anteils des in einer Probe enthaltenen Kohlenstoffisotops ^{14}C kann das Alter der Probe ermittelt werden. Durch den Stoffwechsel hat sich zwischen der Bildung und dem radioaktiven Zerfall des Isotops sowohl in der Atmosphäre als auch in lebenden Organismen eine Gleichgewichtskonzentration von ^{14}C bzw. eine Aktivität von ca. 0,267 Bq pro Gramm Kohlenstoff eingestellt. Mit dem Absterben eines Organismus (z.B. eines Baumes) endet die Aufnahme von ^{14}C. Der ^{14}C-Anteil nimmt ab diesem Zeitpunkt exponentiell (mit der Zerfallskonstante $\lambda \approx 1{,}21 \cdot 10^{-4}$ pro Jahr) ab und damit nimmt auch die Aktivität exponentiell ab.

Ein Fundstück aus Holz hat einen Kohlenstoffanteil von 25 Gramm und eine Aktivität von ca. 4 Bq. Gib an, vor wie vielen Jahren dieses Holz abgestorben ist!

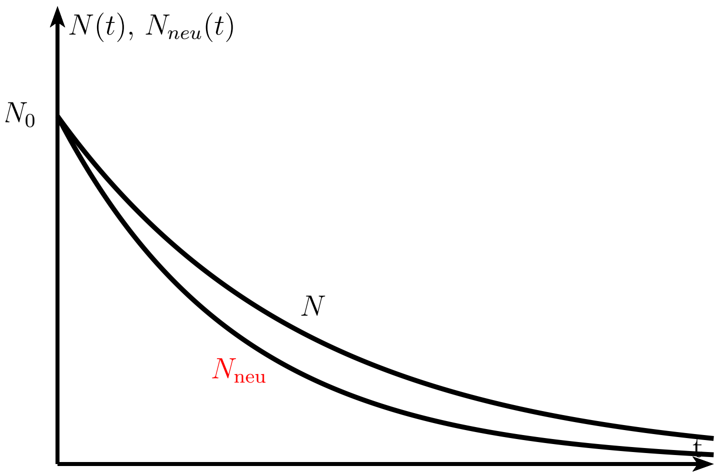
Gib an, ob zum Zeitpunkt des Fundes mehr oder weniger als die Hälfte des ursprünglich vorhandenen ^{14}C-Atomkerne zerfallen ist, und begründe deine Entscheidung!

(c) Die Funktion N kann auch in der Form $N(t) = N_0 \cdot 0{,}5^{\frac{t}{c}}$ mit $c \in \mathbb{R}^+$ angegeben werden.

$\boxed{\text{A}}$ Gib an, welcher Zusammenhang zweischen der Konstanten c und der Halbwertszeit τ eines radioaktiven Stoffes besteht!

In der unten stehenden Abbildung ist der Graph einer Funktion N mit $N(t) = N_0 \cdot 0{,}5^{\frac{t}{c}}$ mit $c \in \mathbb{R}^+$ dargestellt.

Zeichne den Verlauf des Graphen einer Funktion N_{neu} mit $N_{\text{neu}}(t) = N_0 \cdot 0{,}5^{\frac{t}{c_{\text{neu}}}}$ mit $c_{\text{neu}} \in \mathbb{R}^+$ in dieser Abbildung ein, wenn $c_{\text{neu}} < c$ gelten soll!



(a) **Lösungserwartung:**

Mögliche Vorgehensweise:

$A(t) = |N'(t)| = \lambda \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

$A_0 = \lambda \cdot N_0$

$N_0 = \frac{A_0}{\lambda} = \frac{17}{4{,}92 \cdot 10^{-18}} \approx 3{,}46 \cdot 10^{18}$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinden sich ca. $3{,}46 \cdot 10^{18}$ Atomkerne von $^{2}38$U in der Probe.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine korrekte Formel. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.
- Ein Punkt für die richtige Lösung. Toleranzintervall: $[3{,}4 \cdot 10^{18}$ Atomkerne; $3{,}5 \cdot 10^{18}$ Atomkerne$]$

(b) **Lösungserwartung:**

Mögliche Vorgehensweise:

lebender Organismus: $A_0 = 25 \cdot 0{,}267 = 6{,}675\,\text{Bq}$ für 25 g Kohlenstoff

$4 = 6{,}675 \cdot e^{-1{,}21 \cdot 10^{-4} \cdot t}$

$t \approx 4\,232$ Jahre

Mögliche Vorgehensweise:

τ ... Halbwertszeit

$\frac{N_0}{2} = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot \tau}$

$\ln(2) = \lambda \cdot \tau$

$\tau = \frac{\ln(2)}{\lambda} \approx 5\,730$

Zum Zeitpunkt des Fundes sind weniger als die Hälfte der ursprünglich vorhandenen Atomkerne zerfallen, da die Halbwertszeit von ^{1}4C ca. 5 730 Jahre beträgt, das Holz aber erst vor ca. 4 232 Jahren abgestorben ist.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung. Toleranzintervall: [4 225 Jahre; 2 240 Jahre] Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Begründung dafür, dass weniger als die Hälfte der ursprünglich vorhandenen ^{1}4C-Atomkerne zerfallen sind. Andere korrekte Begründungen (z.B. über das Absinken der Aktivität) sind ebenfalls als richtig zu werten.

(c) **Lösungserwartung:**

Mögliche Vorgehensweise:

$\frac{1}{2} = \frac{N(\tau)}{N_0} = \frac{N_0 \cdot 0{,}5^{\frac{\tau}{c}}}{N_0} = 0{,}5^{\frac{\tau}{c}} \Leftrightarrow \frac{\tau}{c} = 1 \Leftrightarrow \tau = c$

Die Konstante c entspricht der Halbwertszeit eines radioaktiven Stoffes.

Lösung Abbildung: siehe oben!

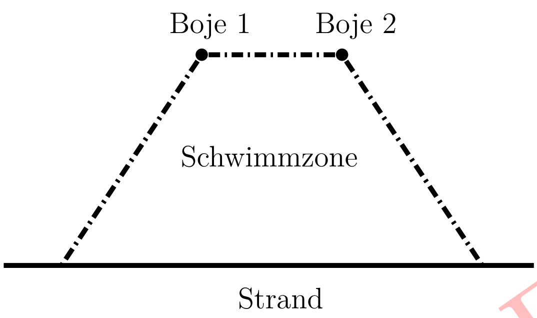
Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die Angabe des richtigen Zusammenhangs.
- Ein Punkt für das Einzeichnen eines korrekten Verlaufs des Graphen einer möglichen Funktion N_{neu}. Der skizzierte Graph muss den Punkt $(0|N_0)$ enthalten, zwischen dem Graphen der Funktion N und der Zeitachse liegen und als Graph einer (streng) monoton fallenden linksgekrümmten Funktion erkennbar sein.

81 - MAT - AG 2.1, AN 3.3, AG 2.3, FA 1.4 - Schwimmzonen - Matura NT 1 16/17

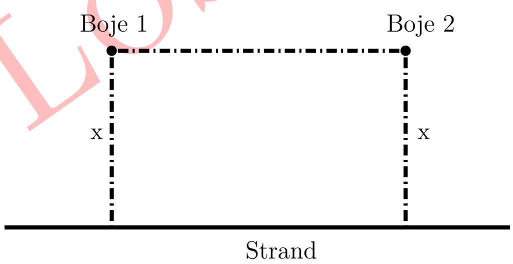
81. Wegen der großen Anzahl an Motorbooten, Jetskis etc. hat man an einigen Stränden spezielle Schwimmzonen eingerichtet. ____/6

Alle in dieser Aufgabe beschriebenen Schwimmzonen sind mit je zwei Bojen und einem 180 Meter langem Seil an einem nahezu geraden Strand angelegt.



Aufgabenstellung:

(a) Gegeben ist eine rechteckige Schwimmzone (x in Metern).



$\boxed{\text{A}}$ Zeige, dass für den Flächeninhalt $A(x)$ einer derartigen Schwimmzone die Gleichung $A(x) = 180 \cdot x - 2 \cdot x^2$ gilt!

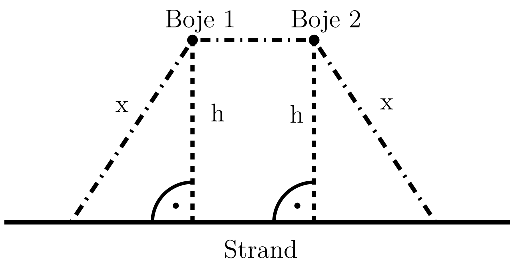
Ermittle die Länge, die Breite und den Flächeninhalt derjenigen Schwimmzone, die den größten Flächeninhalt aufweist!

Länge = 90 m

Breite = 45 m

Flächeninhalt = 4 050 m^2

(b) Gegeben sind trapezförmige Schwimmzonen (x und h in Metern).

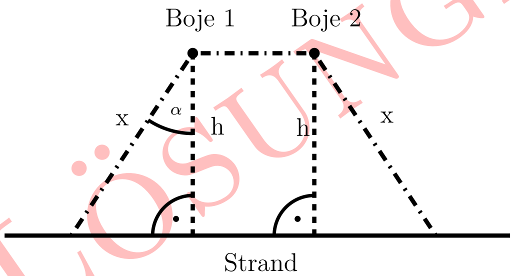


Um den Flächeninhalt einer solchen trapezförmigen Schwimmzone berechnen zu können, kann die Formel $A(x,h) = h \cdot (180 - 2 \cdot x + \sqrt{x^2 - h^2})$ herangezogen werden.

Gib alle Werte an, die x annehmen darf, wenn h 40 m lang ist!

Gib alle Werte an, die h annehmen darf, wenn x 50 m lang ist!

(c) Gegeben sind trapezförmige Schwimmzonen, bei denen alle drei Seilabschnitte gleich lang sind (x und h in Metern).

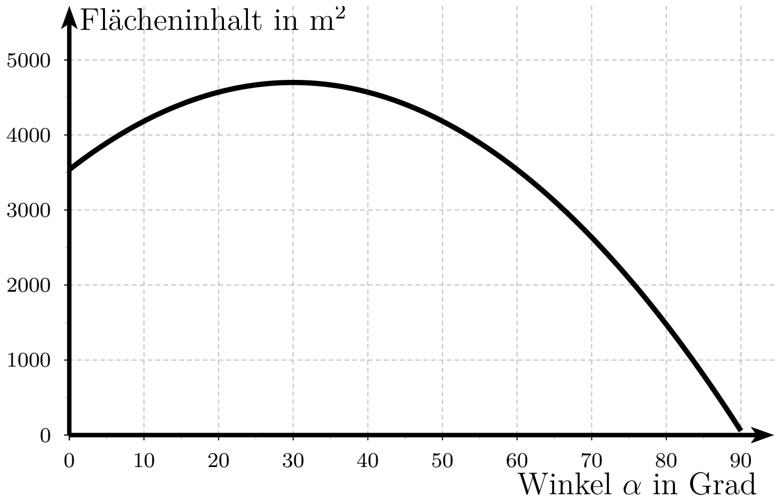


Der Flächeninhalt $A(\alpha)$ einer derartigen Schwimmzone kann in Abhängigkeit vom Winkel α beschrieben werden ($A(\alpha)$ in m^2, α in Grad).

Stelle eine Formel auf, mit deren Hilfe der Flächeninhalt einer solchen Schwimmzone in Abhängigkeit vom Winkel α berechnet werden kann!

$A(\alpha) = 3\,600 \cdot \cos(\alpha) + 1\,800 \cdot \sin(2 \cdot \alpha)$ oder $3\,600 \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)$

In der nachstehenden Abbildung sind die Werte der Flächeninhalte für den jeweiligen Winkel α dargestellt.



Es soll eine Schwimmzone mit größtmöglichem Flächeninhalt angelegt werden. Berechne untr Zuhilfenahme der obigen Abbildung diejenige Länge, die sich dabei für den Strandabschnitt, von dem aus man die Schwimmzone betreten kann, ergibt!

(a) **Lösungserwartung:**

$A(x) = x \cdot (180 - 2 \cdot x) = 180 \cdot x - 2 \cdot x^2$

Mögliche Vorgehensweise:

$A'(x) = 180 - 4 \cdot x = 0 \Rightarrow x = 45$

$(A''(45) = -4 < 0 \Rightarrow x = 45$

Aus $A''(x) < 0$ für alle x folgt, dass A rechtsgekrümmt ist und das lokale Maximum daher ein globales Maximum ist.)

Länge, Breite und Flächeninhalt siehe oben

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für einen korrekten Nachweis. Andere korrekte Nachweise sind ebenfalls als richtig zu werten.
- Ein Punkt für die Angabe aller drei richtigen Werte. Der Nachweis für das Vorliegen eines Maximums ist nicht erforderlich.

(b) **Lösungserwartung:**

alle Werte, die x bei $h = 40\,\text{m}$ annehmen darf: $x \in [40; 90]$

alle Werte, die h bei $x = 50\,\text{m}$ annehmen darf: $h \in [0; 50]$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die Angabe eines korrekten Intervalls für x.
  Andere Schreibweisen des Intervalls (offen oder halboffen) sowie korrekte formale oder verbale Beschreibung sind ebenfalls als richtig zu werten.
- Ein Punkt für die Angabe eines korrekten Intervalls für h.
  Andere Schreibweisen des Intervalls (offen oder halboffen) sowie korrekte formale oder verbale Beschreibungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

(c) **Lösungserwartung:**

Lösung $A(\alpha)$ siehe oben!

Mögliche Vorgehensweise: größtmöglicher Flächeninhalt: bei $\alpha = 30°$

$30 + 60 + 30 = 120$

Der Strandabschnitt ist dabei 120 m lang.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine korrekte Formel. Andere korrekte Formeln sind ebenfalls als richtig zu werten.
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m" nicht angeführt sein muss. Toleranzintervall: [115 m; 125 m]

---

82 - MAT - FA 5.1, FA 5.3, FA 5.6, FA 2.2, AN 1.4 - Brasilien - Matura NT 1 16/17

82. Brasilien ist der größte und bevölkerungsreichste Staat Südamerikas. ____/6

Im Jahr 2014 hatte Brasilien eine Einwohnerzahl von 202,74 Millionen.

Aufgrund von Volkszählungen sind folgende Einwohnerzahlen bekannt:

Jahr	Einwohnerzahl
1970	94 508 583
1980	121 150 573
1991	146 917 459
2000	169 590 693
2010	190 755 799

Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Gib die Bedeutung der nachstehend angeführten Werte im Kontext der Entwicklung der Einwohnerzahl an!

$$\sqrt[10]{\frac{121\,150\,573}{94\,508\,583}} \approx 1{,}02515$$

$$\sqrt[9]{\frac{169\,590\,693}{146\,917\,459}} \approx 1{,}01607$$

Begründe anhand der beiden angeführten Werte, warum man die Entwicklung der Einwohnerzahl im gesamten Zeitraum von 1970 bis 2010 nicht angemessen durch eine Exponentialfunktion beschreiben kann!

(b) Gib unter Annahme eines linearen Wachstums anhand der Einwohnerzahlen von 1991 und 2010 eine Gleichung derjenigen Funktion f an, die die Einwohnerzahl beschreibt! Die Zeit t wird dabei in Jahren gemessen, der Zeitpunkt $t = 0$ entspricht dem Jahr 1991.

Berechne, um wie viel Prozent die Vorhersage des linearen Modells für das Jahr 2014 von dem in der Einleitung angegebenen tatsächlichen Wert abweicht!

(c) Für Brasilien wird für die Jahre 2010 bis 2015 jeweils eine konstante Geburtenrate $b = 14{,}6$ sowie eine konstante Sterberate $d = 6{,}6$ angenommen. Das bedeutet, dass es jährlich 14,6 Geburten pro 1 000 Einwohner/innen und 6,6 Todesfälle pro 1 000 Einwohner/innen gibt.

Die Entwicklung der Einwohnerzahl kann in diesem Zeitraum mithilfe der Differenzengleichung $x_{n+1} = x_n + x_n \cdot \frac{1}{1\,000} \cdot (b - d) + m_n$ beschrieben werden, wobei x_n die Anzahl der Einwohner/innen im Jahr n beschreibt und m_n die Differenz aus der Anzahl der zugewanderten und jener der abgewanderten Personen angibt. Diese Differenz wird als Wnaderungsbilanz bezeichnet.

Gib die Bedeutung des Ausdrucks $x_n \cdot \frac{1}{1\,000} \cdot (b - d)$ im Kontext der Entwicklung der Einwohnerzahl an!

Berechne die maximale Größe der Wanderungsbilanz für den Fall, dass die Einwohnerzahl im Jahr 2015 gegenüber der Einwohnerzahl des Vorjahres maximal um 1 % größer ist!

(a) **Lösungserwartung:**

Im Zeitintervall [1970; 1980] steigt die Einwohnerzahl pro Jahr um ca. 2,515 %, im Zeitintervall [1991; 2000] steigt die Einwohnerzahl pro Jahr um ca. 1,607 %.

Damit eine Beschreibung durch eine Exponentialfunktion angemessen ist, müsste die relative jährliche Zunahme der Einwohnerzahl in den beiden betrachteten Zeitintervallen annähernd gleich sein. Im Zeitintervall [1970; 1980] ist die relative jährliche Zunahme der Einwohnerzahl mit ca. 2,5 % deutlich größer als im Zeitintervall [1991; 2000], wo es nur mehr ca. 1,6 % beträgt. Daher wäre eine Beschreibung der Entwicklung der Einwohnerzahl durch eine Exponentialfunktion nicht angemessen.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für eine (sinngemäß) korrekte Deutung der beiden Werte.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Begründung.

(b) **Lösungserwartung:**

Mögliche Vorgehensweise:

$f(t) = 146\,917\,459 + k \cdot t$

$k = \frac{190\,755\,799 - 146\,917\,459}{19} \approx 2\,307\,281$

$f(t) = 146\,917\,459 + 2\,307\,281 \cdot t$

Mögliche Vorgehensweise:

$f(23) = 199\,984\,922$

$\frac{199\,984\,922}{202\,740\,000} \approx 0{,}986$

Die Abweichung zur Vorhersage beträgt ca. 1,4 %

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine korrekte Funktionsgleichung. Äquivalente Funktionsgleichungen sind als richtig zu werten.
  Toleranzintervall für k : $[2\,305\,000; 2\,310\,000]$
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Abweichung auch als negativer Wert angegeben sein kann.
  Toleranzintervall: $[1\,\%; 2\,\%]$ bzw. $[0{,}01; 0{,}02]$

(c) **Lösungserwartung:**

Mögliche Duetung:

Der angeführte Ausdruck gibt die Anzahl derjenigen Personen an, die die Einwohnerzahl x_n im Zeitintervall $[n; n+1]$ aufgrund von Geburten und/oder Todesfällen erhöhen (bzw. verringern).

Mögliche Vorgehensweise:

$x_{2015} \leq 1{,}01 \cdot x_{2014}$

$x_{2014} + x_{2014} \cdot \frac{14{,}6-6{,}6}{1\,000} + m_{2014} \leq 1{,}02 \cdot x_{2014}$

daher

$m_{2014} \leq \left(1{,}01 - 1 - \frac{14{,}6-6{,}6}{1\,000}\right) \cdot x_{2014}$

$m_{2014} \leq 0{,}002 \cdot 202\,740\,000 = 405\,480$

Damit die Einwohnerzahl im Jahr 2015 gegenüber der Einwohnerzahl im Jahr davor maximal um $1\,\%$ größer wird, dürfen höchstens 405 480 Personen mehr zuwandern als abwandern.

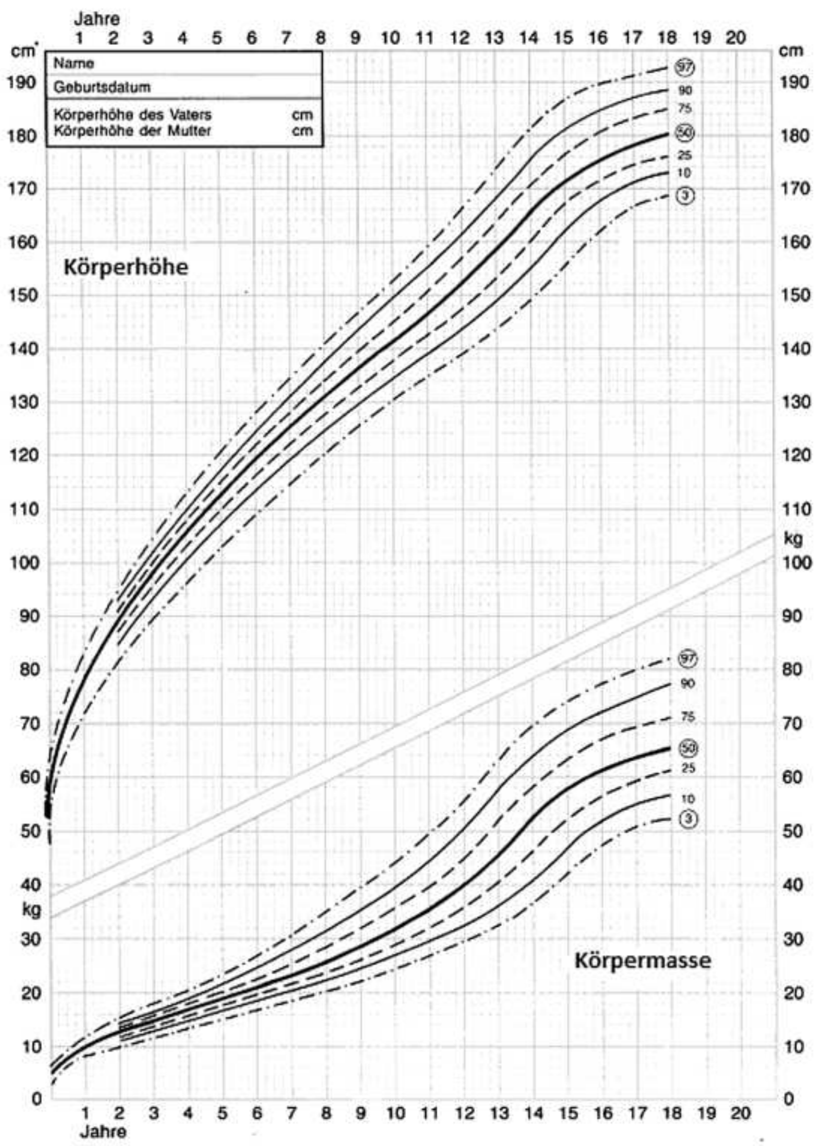
Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine korrekte Deutung.
- Ein Punkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall: [405 000 Personen; 406 000 Personen]
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

83 - MAT - WS 4.1, AN 1.2, AN 1.3, WS 1.3, WS 1.2 - Wachstumskurve von Kindern - Matura NT 1 16/17

83. Um die Entwicklung der Körperhöhe und der Masse eines Kinder kontrollieren zu können, sind im Mutter-Kind-Pass die Perzentielenkurven für Körperhöhen (Größe) und Masse angegeben (Körperhöhe in cm, Masse in kg). Perzentile teilen die Körperhöhen und Massen der Kinder in Prozent-Bereiche auf. Liegt ein Wert auf dem 10. Wachstumsperzentil, so sind 10 % der Kinder des ausgewählten Alters kleiner oder gleich dem angegebenen Wert und 90 % größer oder gleich dem angegebenen Wert. ____/6

Es ist üblich, alle Werte zwischen dem 3. und dem 97. Perzentil als „normal" zu bezeichnen. Das folgende Diagramm zeigt die Wachstums- und Körpermassekurven für Buben im Alter von 0 bis 18 Jahren:



Aufgabenstellung:

(a) Ein Schularzt untersucht eine zufällige Stichprobe von 8-jährigen Buben aus seinem Schulbezirk und erhebt unter anderem deren Körpermassen (in kg). Anhand der Ergebnisse dieser Messung erstellt er für den Anteil der 8-jährigen Buben aus einem Schulbezirk, deren Körpermasse im „Normalbereich“ [20 kg; 35 kg] liegt, das symmetrische Konfidenzintervall [0,8535; 0,9465] mit dem Konfidenzniveau $\gamma = 0{,}95$.

Gib den Unterschied des der Berechnung zugrundeliegenden Stichprobenanteils zum Anteil der 8-jährigen Buben mit einer Körpermasse im „Normalbereich“ laut Diagramm in Prozentpunkten an!

Berechne die Anzahl der bei dieser Stichprobe gemessenen 8-jährigen Buben!

(b) Angenommen, für ein bestimmtes Kind sind die Körperhöhen $g(1), g(2), g(3), \ldots$ zum ersten, zweiten, dritten usw. Geburtstag bekannt.

Gib verbal oder als Formel an, wie sich die durchschnittliche Wachstumsgeschwindigkeit dieses Kindes in dem dreijährigen Zeitraum zwischen dem 6. und dem 9. Geburtstag bestimmen lässt.

Betrache das Größenwachstum auf dem 50. Perzentil nach dem 8. Lebenjahr. Gib das ungefähre Alter von Buben an, bei dem deren momentane Wachstumsgeschwindigkeit am größten ist!

(c) Gib an, welcher statistischen Kennzahl derjenige Wert entspricht, den man auf dem 50. Perzentil ablesen kann.

Erläutere, welche Schwierigkeiten auftreten, wenn man aus dem angegebenen Diagramm ein Kastenschaubild (Boxplot) zur Darstellung der Körperhöhen von 8-jährigen Buben erstellen möchte!

(a) **Lösungserwartung:**

Stichprobenanteil: 0,9

Anteil laut Diagramm: 0,94

Unterschied: 4 Prozentpunkte

Mögliche Berechnung:

$0{,}9465 = 0{,}9 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}9 \cdot (1 - 0{,}9)}{n}} \Rightarrow \approx 160$ Buben

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung.
- Ein Punkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall: [155 Buben; 165 Buben]
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

(b) Lösungserwartung:

Die durchschnittliche Wachstumsgeschwindigkeit in diesem Zeitraum entspricht einem Drittel der Größenzunahme.

oder:

$\frac{g(9)-g(6)}{3}$

Das ungefähre Alter von Buben, bei dem deren momentane Wachstumsgeschwindigkeit am größten ist, liegt bei ca. 13 Jahren.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Antwort bzw. eine richtige Formel. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „Jahre“ nicht angeführt sein muss.
  Toleranzintervall: [12 Jahre; 14 Jahre]

(c) Lösungserwartung:

Die statistische Kennzahl, die demjenigen Wert entspricht, den man auf dem 50. Perzentil ablesen kann, ist der Median.

Die Schwierigkeiten bestehen darin, dass man zwar das 1. und das 3. Quartil sowie den Median, jedoch weder Minimum noch Maximum ablesen kann (und auch keine Informationen bezüglich Ausreißern hat).

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für das Anführen der korrekten statistischen Kennzahl.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Erläuterung.

---

84 - K5 - TR - AG 4.1, AG-L 4.3, AG-L 4.4 - Flugzeuge - ChriGrü

84. (a) Der Start eines Flugzeugs, bis es seine Reiseflughöhe von 10.000 m erreicht, dauert etwa 10 Minuten. Wie groß ist der durchschnittliche Steigungswinkel des Flugzeugs, bei einer anfänglichen Durchschnittsgeschwindigkeit von 550 km/h? ____/0

$sin^{-1}(\frac{10}{91{,}6}) = 6{,}2°$

(b) Zwei Flugzeuge starten um 8.00 Uhr gleichzeitig in verschiedene Richtungen. Flugzeug F_1 fliegt den Kurs N 33° O mit durchschnittlich 800 km/h, Flugzeug F_2 den Kurs N 20° W mit 770 km/h. Wie weit sind die beiden Flugzeuge um 8.30 Uhr voneinander entfernt?

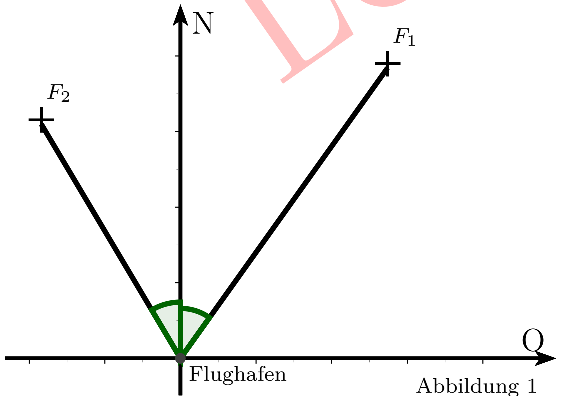


Abbildung 1

ca. 350 km

(c) Legt man über die Abbildung 1 (siehe oben) ein Koordinatensystem, würde der Flughafen dem Punkt (0/0) entsprechen. Bei welchen kartesischen Koordinaten wäre das Flugzeug F_2 nach einer Stunde?

F_2=(-263,36;723,56)

(d) Um 10.00 Uhr muss das Flugzeug F_1 eine Gewitterfront umfliegen. Dazu ändert es den Kurs um 46° (siehe Abbildung 2), bleibt aber auf gleicher Höhe, und fliegt bis 10.30 Uhr bis zum Punkt U. Dort ändert es wieder seinen Kurs um 88° und fliegt, bis es um 11.00 Uhr zum Punkt V gelangt um auf seinen ursprünglichen Kurs zurückzukommen. Wie viel weiter war der Umweg als der direkte Kurs (bei der aus (b) angenommen Geschwindigkeit)?

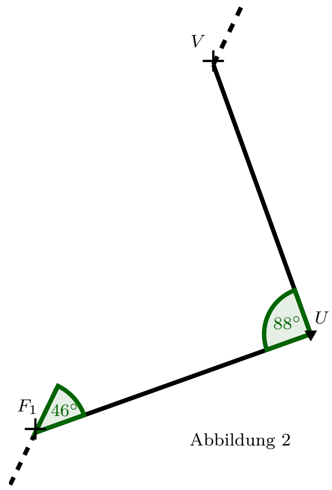


Abbildung 2

$\overline{AF_1}$=555,72 km; Umweg = 244,28 km

---

85 - MAT - AN 1.2, FA 2.2, AG 2.3, FA 4.2, FA 4.3 - Funktion - Matura 2016/17 2. NT

85. Gegeben ist eine quadratische Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ mit den Koeffizienten $a, b, c \in \mathbb{R}$. ____/3

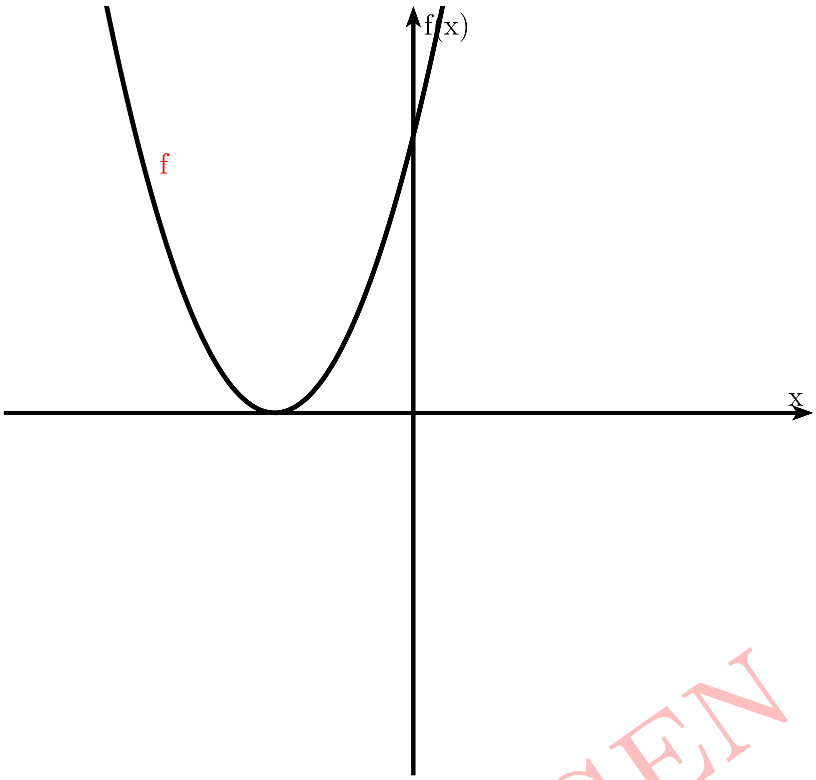
Aufgabenstellung:

(a) Bestimme die Koordinaten desjenigen Punktes P des Graphen einer solchen Funktion f, in dem der Anstieg der Tangente an den Graphen der Funktion f den Wert b hat, und gib weiter eine (allgemeine) Gleichung dieser Tangente f an!

Der Graph einer solchen Funktion f verläuft durch den Punkt $A = (-1|20)$ und hat im Punkt P eine Tangente t mit $t(x) = 9 \cdot x + 4$. Gib für diese Funktion f die Werte von a, b und c an!

(b) Gib a in Abhängigkeit von b und c so an, dass die Funktion f genau eine Nullstelle hat!

Skizziere im nachstehenden Koordinatensystem einen möglichen Graphen einer solchen Funktion f mit genau einer Nullstelle und $a > 0, b > 0, c > 0$!



(c) $\boxed{\text{A}}$ Gib für $a = 16$ und $c = 9$ sowohl die Stelle des lokalen Extremums der Funktion f als auch zu den zugehörigen Funktionswert in Abhängigkeit von b an!

Zeig, dass dieser Extrempunkt unabhängig von der Wahl von b auf dem Graphen der Funktion g mit $g(x) = 9 - 16 \cdot x^2$ liegt!

(a) **Lösungserwartung:**

Mögliche Vorgehensweise:

$f'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$

$f'(0) = b,\ x_P = 0,\ f(x_P) = x \Rightarrow P = (0|c)$

Steigung der Tangente: b, Abschnitt auf der senkrechten Achse: c

$\Rightarrow t(x) = b \cdot x + c$

$b = 9$ und $c = 4,\ f(-1) = a - 9 + 4 = 20 \Rightarrow a = 25$

$\Rightarrow a = 25, b = 9, c = 4$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die Angabe der richtigen Koordinaten von P und einer korrekten Gleichung von t. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu wertden.

- Ein Punkt für die Angabe der richtigen Werte von a, b und c.

(b) **Lösungserwartung:**

Mögliche Vorgehensweise:

$b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0 \Rightarrow a = \frac{b^2}{4 \cdot c}$

Mögliche Skizze: siehe oben

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung.
- Ein Punkt für eine korrekte Skizze, wobei der Scheitel erkennbar auf der negativen x-Achse liegen und die Parabel nach oben geöffner sein muss.

(c) **Lösungserwartung:**

$f(x) = 16 \cdot x^2 + b \cdot x + 9,\ f'(x) = 32 \cdot x + b = 0$

$\Rightarrow$ Stelle des loaklen Extremumgs: $x_E = -\frac{b}{32}$

Funktionswert an der Stelle $x_E : f\left(-\frac{b}{32}\right) = 9 - \frac{b^2}{64}$

$g\left(-\frac{b}{32}\right) = 9 - 16 \cdot \frac{b^2}{32^2} = 9 - \frac{b^2}{64}$, dieser Ausdruck stimmt mit dem Funktionswert an der Stelle des lokalen Extremums der Funktion f überein.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die Angabe der beiden korrekten Werte.
- Ein Punkt für einen korrekten Nachweis. Andere korrekte Nachweise sind ebenfalls als richtig zu werten.

---

86 - MAT - AG 2.1, FA 1.4, FA 2.2, FA 2.4, WS 1.1, WS 1.4 - Human Development Index - Matura 2016/17 2. NT

86. Der Human Development Index (HDI) der Vereinten Nationen ist ein Wohlstandsindikator für Länder, der eine Messung des Entwicklungsstandes des jeweiligen Landes ermöglichen sollte. Der HDI beinhaltet drei dimensionslose Größen (Lebenserwartungsindex (LEI), Bildungsindex (BI) und Einkommensindex (EI)) und wird mit der Formel $HDI = \sqrt[3]{LEI \cdot BI \cdot EI}$ berechnet. ____/0

Dimensionslos bedeutet, dass diese Größen keine Einheiten haben.

Für die Berechnung des Indizes LEI und EI gilt seit 2010:

$LEI = \frac{LE-20}{85-20}$, wobei LE die Lebenserwartung zum Zeitpunkt der Geburt in Jahren beschreibt

$EI = \frac{\ln(B)-\ln(100)}{\ln(75\,000)-\ln(100)}$, wobei B das Bruttonationaleinkommen pro Kopf in US-Dollar (immer zu Jahresbeginn) beschreibt.

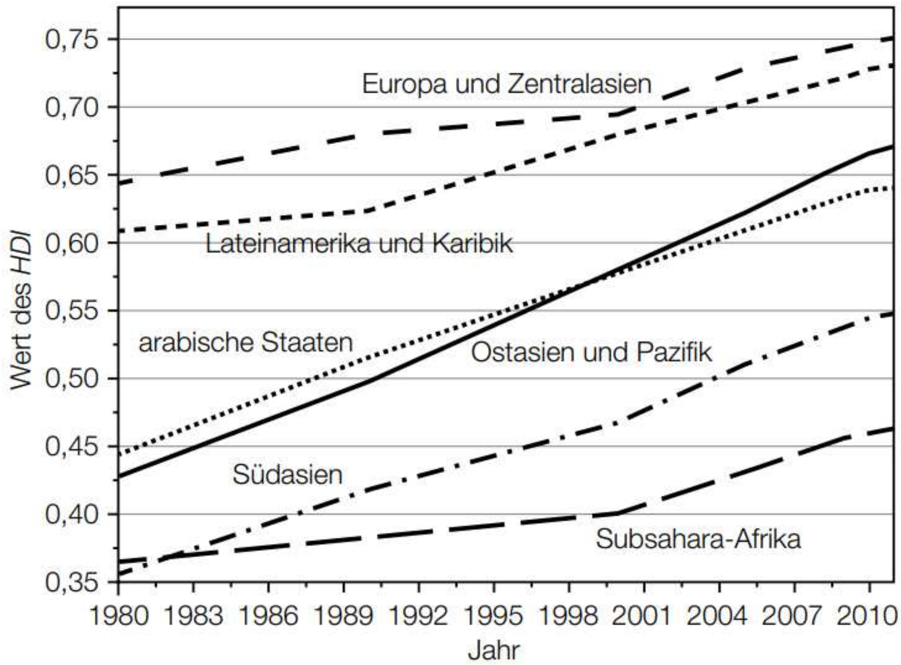
Das Entwicklungsprogramm der Vereinten Nationen unterteilt die Länder nach dem Wert des HDI seit 2009 in vier Entwicklungskategorien:

Entwicklungskategorie eines Landes	Wert des HDI
E_1	$\leq 0{,}8$
E_2	$[0{,}7; 0{,}8)$
E_3	$[0{,}55; 0{,}7)$
E_4	$< 0{,}55$

Datenquelle: Deutsche Gesellschaft für die Vereinten Nationen (Hrsg.): Bericht über die menschliche Entwicklung 2015. Arbeit und menschliche Entwicklung. Berlin: Berliner Wissenschafts-Verlag 2015, S. 240

Der HDI einer Region in einem bestimmten Jahr ergibt sich aus dem arithmetischen Mittel der HDIs der zu dieser Region zählenden Länder.

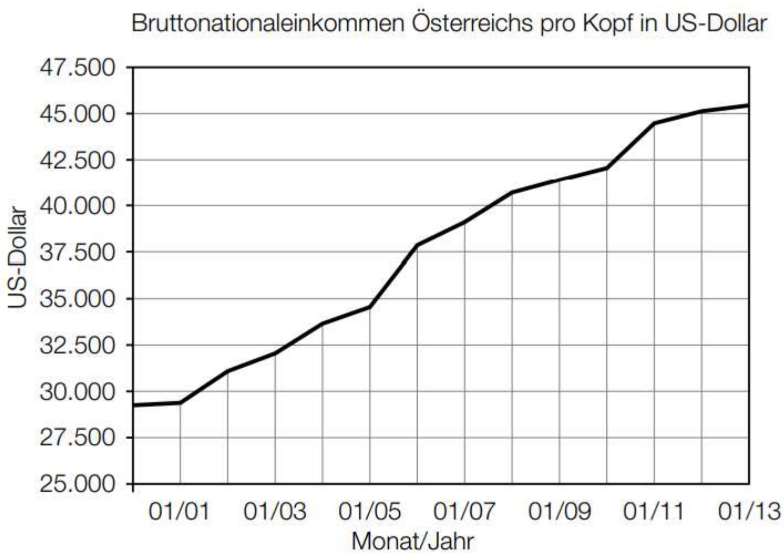
Die Entwicklung des HDI verschiedener Regionen zwischen 1980 und 2011 ist nachstehend abgebildet.



Datenquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/ Index__der__menschlichen__Entwicklung#/ media/File:Human-Development-IndexTrends-2011.svg [08.06.2017].

Aufgabenstellung:

(a) Für Österreich wurde im Human Development Report für das Jahr 2013 die Lebenserwartung mit $LE = 81{,}1$ Jahren und der Bildungsindex mit $BI = 0{,}819$ angegeben. Die nachstehende Abbildung zeigt für die Jahre 2000 bis 2013 (jeweils zu Jahresbeginn) das Bruttonationaleinkommen Österreichs pro Kopf in US-Dollar.



Datenquelle: http://www.factfish.com/de/statistik/bruttonationaleinkommen [08.06.2017].

Ermittle für das Jahr 2013 den HDI von Österreich ($= HDI_{2013}$)!

Der HDI von Österreich für das Jahr 2013 (HDI_{2013}) war um ca. 2,5 % größer als der HDI von Österreich für das Jahr 2008 (HDI_{2008}). Gib eine Gleichung an, die diesen Zusammenhang beschreibt, und berechne den HDI_{2008}!

(b) Die jährliche Entwicklung des HDI der Region „arabische Staaten" kann im Zeitraum von 1980 bis 2010 näherungsweise durch eine lineare Funktion H mit der Gleichung $H(t) = k \cdot t + d$ mit $k, d \in \mathbb{R}$ und t in Jahren beschrieben werden, wobei $H(0)$ dem Wert des Jahres 1980 entspricht.

Bestimme die Werte der Parameter k und d!

Begründen Sie anhand der entsprechenden Abbildung, in welcher Region/in welchen Regionen die mittlere jährliche Zunahme des HDI im Zeitraum von 1980 bis 2010 am ehesten jener der Region „arabische Staaten" entsprach!

(c) $\boxed{\text{A}}$ Ermittle aus der entsprechenden Abbildung diejenige Jahreszahl, ab der die Region „Lateinamerika und Karibik" die Entwicklungskategorie E_2 aufweist!

Gilt ab diesem Zeitpunkt sicher, dass ungefähr die Hälfte der zu dieser Region zählenden Länder eine Entwicklungskategorie E_2 aufweist? Begründe deine Antwort!

(a) **Lösungserwartung:**

$LEI = \dfrac{81{,}1 - 20}{85 - 20} = 0{,}94$

$EI \approx \dfrac{\ln(45\,400) - \ln(100)}{\ln(75\,000) - \ln(100)} \approx 0{,}924$

$HDI_{2013} = \sqrt[3]{0{,}94 \cdot 0{,}819 \cdot 0{,}924} \approx 0{,}893$

$HDI_{2013} = HDI_{2008} \cdot 1{,}025$

$HDI_{2008} \approx 0{,}871$

Lösungsschlüssel

- Ein Punkt für die richtige Lösung. Toleranzintervall: $[0{,}88; 0{,}91]$ Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist. - Ein Punkt für eine korrekte Gleichung und die richtige Lösung. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten. Toleranzintervall: $[0{,}85; 0{,}89]$

(b) **Lösungserwartung:**

$k = \dfrac{0{,}64 - 0{,}44}{30} = 0{,}006\dot{6}$
$d = 0{,}44$

In der Region „Südasien" entsprach die mittlere jährliche Zunahme des HDI im Zeitraum 1980 bis 2010 am ehesten jener der Region „arabische Staaten".

Mögliche Begründung:
Die Sekanten durch die Punkte $(1980|0{,}44)$ und $(2010|0{,}64)$ sowie $(1980|0{,}36)$ und $(2010|0{,}54)$ verlaufen annähernd parallel zueinander.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die Angabe der beiden korrekten Werte. Toleranzintervall für k: $[0{,}005; 0{,}01]$ Toleranzintervall für d: $[0{,}43; 0{,}45]$ - Ein Punkt für die Angabe der Region „Südasien" und für eine (sinngemäß) korrekte Begründung.

(c) **Lösungserwartung:**

Ab dem Jahr 2004 weist die Region „Lateinamerika und Karibik" die Entwicklungskategorie E_2 auf.

Nein, es gilt nicht als sicher, dass ab diesem Zeitpunkt ungefähr die Hälfte der zu dieser Region zählenden Länder die Entwicklungskategorie E_2 aufweist.

Mögliche Begründung: Wenn eine sehr kleine Anzahl an Ländern mit sehr hohen HDI-Werten einer großen Anzahl an Ländern mit niedrigen HDI-Werten ($< 0{,}7$) gegenübersteht, kann dennoch das arithmetische Mittel der HDIs größer als 0,7 sein, ohne dass ungefähr die Hälfte der zu dieser Region zählenden Länder die Entwicklungskategorie E_2 aufweist.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung. Toleranzintervall: $[2003; 2005]$
- Ein Punkt für eine richtige Antwort und eine korrekte Begründung. An-

dere korrekte Begründungen (z.B. anhand sinnvoller Zahlenbeispiele oder mit der Feststellung, dass das arithmetische Mittel nicht notwendigerweise der Median sein muss) sind ebenfalls als richtig zu werten.

---

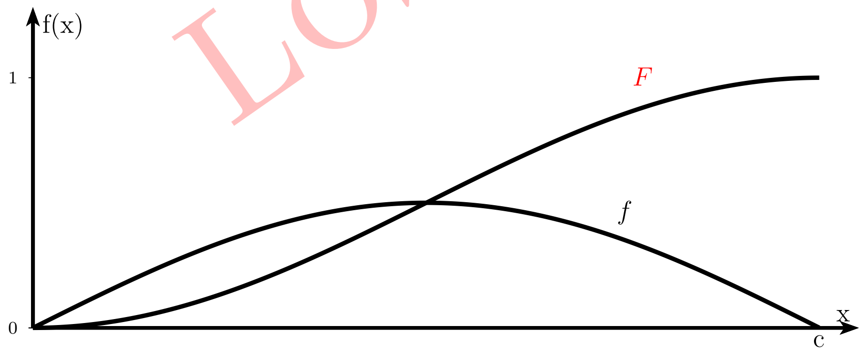
87 - MAT - AN 3.2, AN 3.2, AN 4.3, AN 4.2, WS 3.2 - Dichtefunktion und Verteilungsfunktion - Matura 2016/17 2. NT

87. Es sei X eine Zufallsvariable, für die sich die Wahrscheinlichkeit, dass X in einem Intervall I liegt, mithilfe einer sogenannten Dichtefunktion f folgendermaßen ermitteln lässt: ____/3

$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ für alle $a, b \in I$ mit $a \leq b$

In diesem Fall gilt für die Verteilungsfunktion $F : F(x) = P(X \leq x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, d.h. insbesondere $F(b) - F(a) = P(a \leq X \leq b)$ für $a, b \in I$ und $a \leq b$.

Die nachstehende Grafik zeigt den Graphen einer Dichtefunktion f mit $f(x) = k \cdot \sin(x)$ für $x \in [0; c]$, wobei $k \in \mathbb{R}, k > 0$ und $f(c) = 0$ gilt. Für $x \neq [0; c]$ gilt: $f(x) = 0$.



Aufgabenstellung:

(a) Gib für die gegebenen Dichtefunktion f den Funktionswert $F(0)$ der zugehörigen Verteilungsfunktion F an und begründe, warum $F(c) = 1$ ist!

$F(0) = 0$

Skizziere in der oben stehenden Grafik den Graphen der zugehörigen Verteilungsfunktion F und beschreibe das Krümmungsverhalten von F im Intervall $[0; c]$!

(b) Gib an, durch welche Eigenschaft von f der Wert des Parameters k festgelegt ist, und berechne den Wert von k!

Gib einen Term der zugehörigen Verteilungsfunktion F im Intervall $[0; c]$ an!

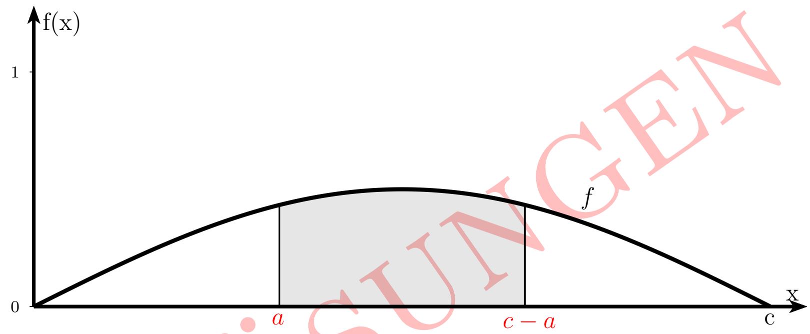
$F(x) = -0{,}5 \cdot \cos(x) + 0{,}5$

(c) Für ein Ereignis E gilt: $P(E) = 1 - P(X \leq c - a)$ für ein beliebiges $a \in [0; c]$.

$\boxed{\text{A}}$ Beschreibe dieses Ereignis E verbal!

Stelle für $a \leq \frac{c}{2}$ die Wahrscheinlichkeit $P(a \leq X \leq c - a)$ in nachstehender Grafik als Fläche dar und begründe den Zusammenhang

$P(a \leq X \leq c - a) = 1 - 2 \cdot P(X \leq a)$ anhand dieser Darstellung!



(a) **Lösungserwartung:**

$F(c) = 1$ bzw. $P(X \leq c) = 1$, d.h., die Wahrscheinlichkeit, dass X einen Wert kleiner gleich c annimmt, beträgt 100 %, da $f(x) = 0$ für $x > c$.

Skizze: siehe oben.

Bis zum lokalen Maximum von f ist die Funktion F linksgekrümmt, danach ist die Funktion F rechtsgekrümmt.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung und eine (sinngemäß) korrekte Begründung.
- Ein Punkt für eine korrekte Skizze und eine (sinngemäß) korrekte Beschreibung des Krümmungsverhaltens der Funktion F. Die Skizze ist als korrekt zu betrachten, wenn das korrekte Krümmungsverhalten des Graphen von F in der Skizze klar erkennbar ist und die Wendestelle von F dabei bei

$x = \frac{c}{2}$ liegt. Für $x > c$ muss der Graph von F, sofern er in diesem Bereich skizziert ist, waagrecht verlaufen.

(b) **Lösungserwartung:**

Der Wert von k ist durch die Eigenschaft $F(c) = 1$ festgelegt, d.h., der Inhalt der vom Graphen von f und der x-Achse im Intervall $[0; c]$ eingeschlossenen Fläche muss 1 sein. Da die rechte Nullstelle bei $x = \pi$ liegt und somit $c = \pi$ ist, muss gelten:

$\int_0^{\pi} k \cdot \sin(x)\mathrm{d}x = 1 \Rightarrow k = 0{,}5$

Mögliche Vorgehensweise:

$F(x) = -0{,}5 \cdot \cos(x) + C$

$F(0) = 0 \Rightarrow C = 0{,}5$

$F(x) = -0{,}5 \cdot \cos(x) + 0{,}5$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Angabe, welche Eigenschaft von f den Wert von k festlegt, und für die richtige Lösung.
- Ein Punkt für einen korrekten Term. Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.

(c) **Lösungserwartung:**

Das Ereignis E beschreibt, dass die Zufallsvariable X einen Wert annimmt, der größer (oder gleich) $c - a$ ist.

Grafik siehe oben

Mögliche Begründung:

Wegen der Symmetrie der Dichtefunktion gilt: $P(X \leq a) = P(x \geq c - a)$.

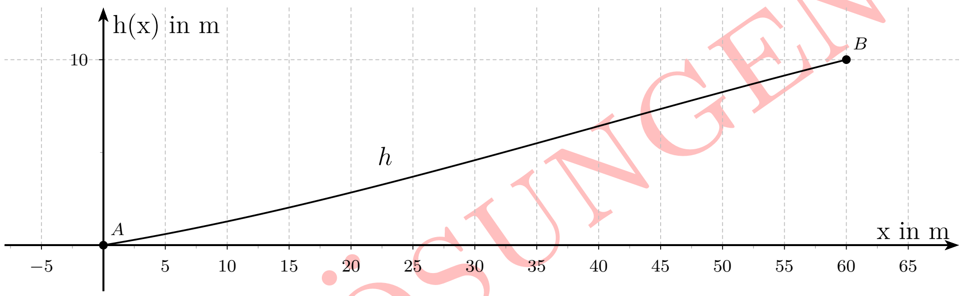
Aus $F(c) = 1$ folgt: $P(a \leq X \leq c - a) = 1 - P(X \leq a) - P(X \geq c - a) = 1 - 2 \cdot P(X \leq a)$.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für eine (sinngemäß) korrekte Beschreibung.
- Ein Punkt für eine korrekte Darstellung der Wahrscheinlichkeit als Fläche, wobei die beiden Grenzen symmetrisch zur Stelle des Maximums der Funktion f liegen müssen, und eine korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

88 - MAT - AG 2.1, AG 4.1, AN 1.3, AN 2.1, AN 3.3 - Ansteigende Straße - Matura 2016/17 2. NT

88. Ein Auto legt auf einem ansteigenden, kurvenfreien Straßenabschnitt in einem bestimmten Zeitintervall den Weg zwischen den Punkten A und B zurück. Der Höhenverlauf dieses Straßenabschnitts zwischen A und B bezogen auf das Niveau des Punktes A wird durch den Graphen einer Polynomfunktion h in Abhängigkeit von x modelliert. Dabei ist x die waagrechte Entfernung des (punktförmig modellierten) Autos vom Ausgangspunkt A und $h(x)$ die jeweilige Höhe der Position des Autos über dem Niveau des Punktes A ($h(x)$ in m, x in m). In diesem Modell haben die Punkte A und B die Koordinaten $A = (0|0)$ und $B = (60|10)$. ____/0



Eine Gleichung der Funktion h lautet:

$$h(x) = \frac{1}{64\,800} \cdot (-x^3 + 120 \cdot x^2 + 7\,200 \cdot x) \qquad \text{für } x \in [0; 60]$$

Aufgabenstellung:

(a) Gib den Wert des Differenzenquotienten der Funktion h im Intervall $[0; 60]$ an und interpretiere diesen Wert im gegebenen Kontext!

Eine Person behauptet: „Wenn ein (beliebiger) ansteigender Straßenabschnitt durch eine Polynomfunktion dritten Grades modelliert werden kann, deren Wendestelle im betreffenden Abschnitt liegt, so handelt es sich bei dieser Wendestelle um diejenige Stelle, an der die Straße am steilsten verläuft.“

Gib an, ob diese Behauptung mit Sicherheit zutrifft, und begründe deine Entscheidung!

(b) Ein Neubau der Straße ist geplant, wobei die Straße zwischen A und B nach dem Neubau eine konstante Steigung aufweisen soll.

$\boxed{\text{A}}$ Bestimme eine Gleichung der Funktion h_1, die den Verlauf der neuen Straße zwischen A und B beschreibt, wobei $h_1(x)$ wieder die Höhe (in m) der Position des Autos über dem Niveau des Punktes A ist!

Berechne denjenigen Winkel α, unter dem die neu gebaute Straße (bezüglich der Horizontalen) ansteigt!

(c) Bei einer Fahrt ins Gebirge entsteht ein unangenehmer Druck auf das Trommelfell, den viele Menschen als ein „Verschlagen“ der Ohren beschreiben. Man kann annehmen, dass bei einer Person im Auto dieses unangenehme Druckgefühl auftritt, wenn die momentane Änderungsrate der Höhe einen Wert von 4 m/s überschreitet.

Die Funktion g mit $g(t) = \frac{1}{5} \cdot t^2 + t$ modelliert die Position des Autos über dem Niveau von A während der Fahrt von $A = (0|0)$ nach $B = (60|10)$ in Abhängigkeit von der Zeit. Dabei beschreibt $g(t)$, in welcher Höhe sich das Auto zum Zeitpunkt t befindet ($g(t)$ in Metern; t in Sekunden gemessen ab dem Zeitpunkt, in dem sich das Auto im Punkt A befindet).

Berechne, wie viele Sekunden die Fahrt von A nach B dauert! Gib an, ob die momentane Änderungsrate der Höhe während dieser Zeitspanne einen Wert von 4 m/s überschreitet, und begründe deine Entscheidung!

(a) **Lösungserwartung:**

$\frac{h(60)-h(0)}{60-0} = \frac{10-0}{60} = \frac{1}{6} = 0{,}1\dot{6} \approx 0{,}17$

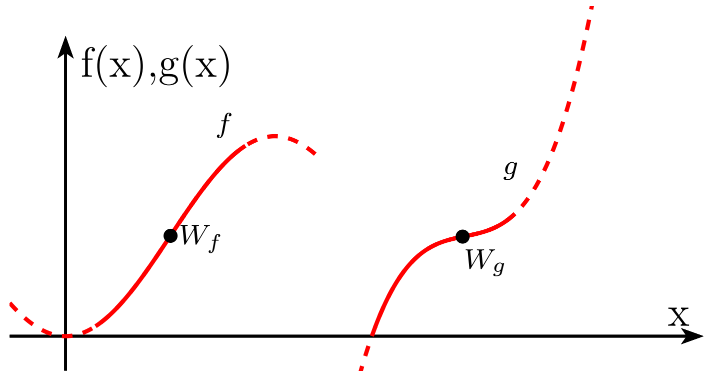
Mögliche Interpretation:

Die Straße steigt von A nach B pro Meter in waagrechter Richtung im Mittel um ca. 17 cm in senkrechter Richtung an.

Die Behauptung trifft nicht zu.

Mögliche Begründung:

Die Wendestelle einer Funktion 3. Grades kann auch derjenigen Stelle entsprechen, an der der Anstieg minimal ist.



W_f... Wendepunkt der Funktion f, in dem die Steigung der Tangente Maximal ist

W_g... Wendepunkt der Funktion g, in dem die Steigung der Tangente minimal ist.

oder:

$f(x) = x^3$... Die Funktion f hat eine Wendestelle, an der die Steigung der Tangente minimal ist.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung und eine korrekte Interpretation. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten. Toleranzintervall: [0,16; 0,17] bzw. [16 %; 17 %].
- Ein Punkt für die richtige Entscheidung und eine korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

(b) **Lösungserwartung:**

$h_1(x) = \frac{1}{6} \cdot x$

$\tan(\alpha) = \frac{1}{6} \Rightarrow \alpha \approx 9{,}5°$

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für eine korrekte Gleichung. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten. Toleranzintervall für den Wert der Steigung der linearen Funktion h_1 : [0,16; 0,17]
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „Grad“ nicht angeführt sein muss. Toleranzintervall: [9°; 10°]
  Eine korrekte Angabe der Lösung in einer anderen Einheit ist ebenfalls als richtig zu werten.

(c) **Lösungserwartung:**

$g(t) = 10 \Leftrightarrow t^2 + 5 \cdot t - 50 = 0 \Rightarrow t_1 = 5, (t_2 = -10)$

Die Fahrt von A nach B dauert 5 Sekunden.

Die maximale momentane Änderungsrate der Höhe im Zeitintervall [0 s; 5 s] beträgt 3 m/s, also überschreitet die momentane Änderungsrate der Höhe während dieser Zeitspanne einen Wert von 4 m/s nicht.

Mögliche Begründung:

$g'(t) = 0{,}4 \cdot t + 1$

Die momentane Änderungsrate der Höhe ist im Intervall [0 s; 5 s] streng monoton steigend, also liegt ihr maximaler Wert an der Stelle $t = 5$.

$g'(5) = 3$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „s" nicht angeführt sein muss.
- Ein Punkt für die richtige Entscheidung und eine korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

---

89 - MAT - AG 2.3, AN 1.2, AN 4.3, AN 4.2 - Eigenschaften einer Polynomfunktion dritten Grades - Matura 2017/18

89. Gegeben ist eine Polynomfunktion dritten Grades f mit der Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x$, wobei die Koeffizienten $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sind. ____/4

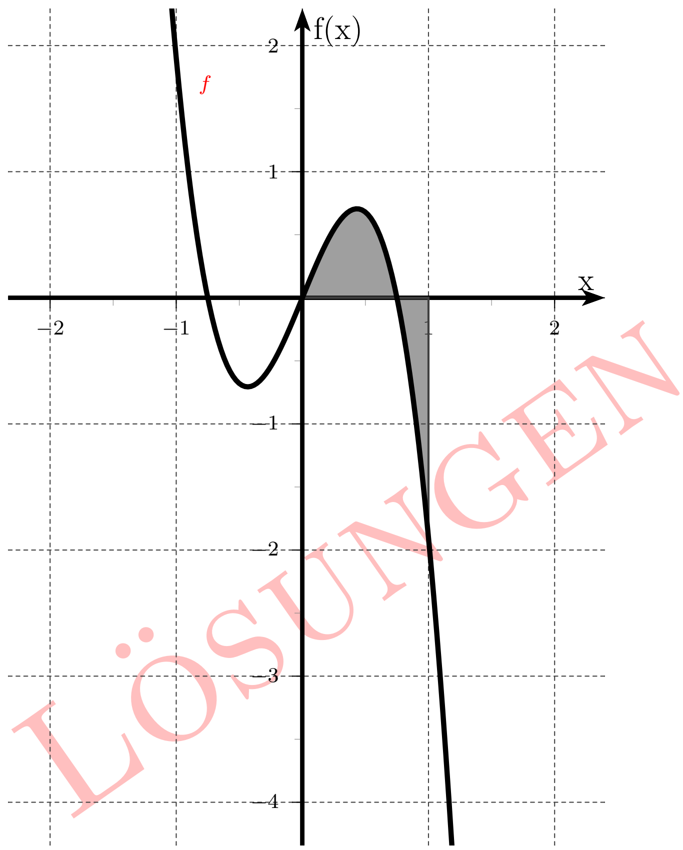
Aufgabenstellung:

(a) Begründe, warum die Funktion f genau drei verschiedene reelle Nullstellen hat, wenn die Koeffizienten a und b unterschiedliche Vorzeichen haben!

$\boxed{\text{A}}$ Die Steigung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x = 0$ entspricht dem Wert des Koeffizienten b. Begründe, warum diese Aussage wahr ist!

(b) Gib eine Beziehung zwischen den Koeffizienten a und b an, sodass $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$ gilt!

Begründe, warum aus der Annahme $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$ folgt, dass f eine Nullstelle im Intervall $(0;1)$ hat, und skizziere einen möglichen Graphen einer solchen Funktion f im nachstehenden Koordinatensystem.



(a) **Lösungserwartung:**

Mögliche Begründung:

Berechnung der Nullstellen: $a \cdot x^3 + b \cdot x = x \cdot (a \cdot x^2 + b) = 0$

Eine Nullstelle ist daher $x_1 = 0$.

Berechnung weiterer Nullstellen: $a \cdot x^2 + b = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{b}{a}$

Wenn die Koeffizienten a und b unterschiedliche Vorzeichen haben, dann gilt: $-\frac{b}{a} > 0$.

Damit hat diese Gleichung zwei verschiedene reelle Lösungen und die Funktion f hat insgesamt drei verschiedene Nullstellen.

Mögliche Begründung:

Der Wert der Steigung der Tangente an den Graphen von f an einer Stelle x entspricht dem Wert $f'(x)$.

$f'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + b \Rightarrow f'(0) = b$

(b) **Lösungserwartung:**

Mögliche Vorgehensweise:

$\int_0^1 (a \cdot x^3 + b \cdot x)\mathrm{d}x = \left(a \cdot \frac{x^4}{4} + b \cdot \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = 0 \Rightarrow a = -2 \cdot b$

Mögliche Begründung:

Das bestimmte Integral liefert die Summe der orientierten Flächeninhalte, die vom Graphen von f und von der x-Achse begrenzt werden. Hätte f keine Nullstelle im Intervall $(0; 1)$, dann würde der Graph von f in diesem Intervall entweder zur Gänze oberhalb der x-Achse (mit $f(x) > 0$ für alle $x \in (0; 1)$) oder zur Gänze unterhalb der x-Achse (mit $f(x) < 0$ für alle $x \in (0; 1)$) verlaufen. Somit wäre das bestimmte Integral von f im Intervall $(0; 1)$ entweder größer oder kleiner null, aber keinesfalls gleich null.

Für einen möglichen Graphen von f siehe oben!

---

90 - MAT - AN 1.1, AN 3.3, AN 3.2, FA 2.1, FA 2.2, FA 5.3 - Hopfen - Matura 2017/18

90. Hopfen ist eine schnell wachsende Kletterpflanze. Die Modellfunktion $h: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^+$ mit $h(t) = \dfrac{a}{1 + b \cdot e^{k \cdot t}}$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+, k \in \mathbb{R}^-$ gibt näherungsweise die Pflanzenhöhe einer bestimmten Hopfensorte zum Zeitpunkt t an, wobei $h(t)$ in Metern und t in Wochen angegeben wird. ____/8

In der nachstehenden Tabelle sind die gemessenen Höhen einer Hopfenpflanze ab Anfang April ($t = 0$) zusammengefasst.

Zeit (in Wochen)	0	2	4	6	8	10	12
Höhe (in m)	0,6	1,2	2,3	4,2	5,9	7,0	7,6

Anhand dieser Messwerte wurden für die Modellfunktion h die Parameterwerte $a = 8, b = 15$ und $k = -0{,}46$ ermittelt.

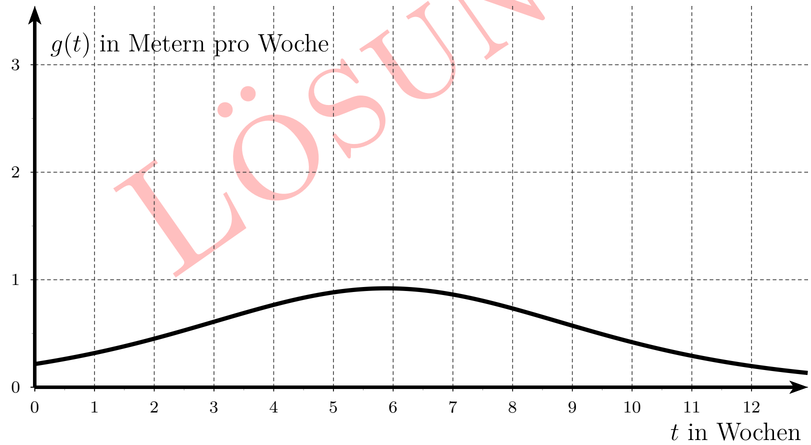
Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Gib unter Verwendung der Modellfunktion h einen Ausdruck an, mit dem berechnet werden kann, um wie viele Meter die Hopfenpflanze im Zeitintervall $[0; t_1]$ gewachsen ist!

Berechne unter Verwendung der Modellfunktion h mithilfe deines Ausdrucks, wie viele Meter die Pflanze in den ersten 10 Wochen gewachsen ist und gib die prozentuelle Abweichung vom tatsächlichen gemessenen Wert an!

(b) Wird das Wachstum der Pflanze mithilfe der Funktion h modelliert, gibt es einen Zeitpunkt t_2, zu dem sie am schnellsten wächst. Gib eine Gleichung an, mit der dieser Zeitpunkt berechnet werden kann, und ermittle diesen Zeitpunkt!

Berechne die zugehörige maximale Wachstumsgeschwindigkeit und skizziere im nachstehenden Koordinatensystem unter Berücksichtigung des von dir ermittelten Maximums den Verlauf des Graphen derjenigen Funktion g, die basierend auf der Modellfunktion h die Wachstumsgeschwindigkeit der Hopfenplfanze in Abhängigkeit von t beschreibt!



(c) Ermittle eine lineare Funktion h_1, deren Werte bei $t = 0$ und $t = 12$ mit den gemessenen Höhen aus der angegebenen Tabelle übereinstimmen, und interpretiere die Steigung dieser linearen Funktion im gegebenen Kontext!

$h_1(t) = 0{,}58\dot{3} \cdot t + 0{,}6$

Begründe anhand des Verlaufs der Graphen von h und h_1, warum es mindestens zwei Zeitpunkte gibt, in denen die Wachstumsgeschwindigkeit der Pflanze denselben Wert hat wie die Steigung von h_1!

(d) Für größer werdende t nähert sich $h(t)$ einem Wert an, der als h_{max} bezeichnet wird. Weise anhand der gegebenen Funktionsgleichung der Modellfunktion h rechnerisch nach, dass der Parameter k (mit $k < 0$) keinen Einfluss auf h_{max} hat, und gib h_{max} an!

Günstige Witterungsverhältnisse können dazu führen, dass die Hopfenpflanze schneller und höher wächst, d.h., dass sie sich früher einem größeren Wert von h_{max} annähert. Gib für ein derartiges Pflanzenwachstum an, wie a und k verändert werden müssen!

(a) **Lösungserwartung:**

Mögliche Ausdruck: $h(t_1) - h(0)$

$h(10) - h(0) = 6{,}45$

Die Pflanze ist in den ersten 10 Wochen um ca. 6,45 m gewachsen.

Die mit der Modellfunktion h berechnete Zunahme der Höhe der Pflanze im Zeitintervall $[0; 10]$ ist um ca. 0,8 %größer als die in diesem Zeitintervall tatsächlich beobachtete Zunahme (6,4 m)

Toleranzintervall: $[6{,}4\,m; 6{,}5\,m]$

(b) **Lösungserwartung:**

Mögliche Gleichung: $h''(t) = 0 \Rightarrow t_2$

$t_2 \approx 5{,}9$ Wochen Toleranzintervall: [5,4 Wochen; 6,3 Wochen]

$h'(t) \approx 0{,}92$

Die maximale Wachstumsgeschwindigkeit beträgt ca. 0,92 Meter pro Woche. Toleranzintervall: [0,90 Meter pro Woche; 1 Meter pro Woche]

Graph: siehe oben!

(c) **Lösungserwartung:**

h_1: siehe oben

Mögliche Intepretation:

Die Pflanze wächst in den ersten 12 Wochen durchschnittlich um ca. 58 cm pro Woche. Toleranzintervall: $[0{,}58; 0{,}59]$

Mögliche Begründung:

Die Steigung von h ist anfangs kleiner als jene von h_1, dann größer und dann wieder kleiner. Es gibt daher mindestens zwei Zeitpunkte, in denen sie gleich ist.

(d) **Lösungserwartung:**

Möglicher Nachweis:

Für alle $k < 0$ gilt: $\lim\limits_{t\to\infty} h(t) = \frac{a}{1+b\cdot 0} = a$, also ist $h_{\max}$ unabhängig von k.

$h_{\max} = a$

Für das beschriebene Pflanzenwachstum muss a vergrößert werden und k verkleinert werden.

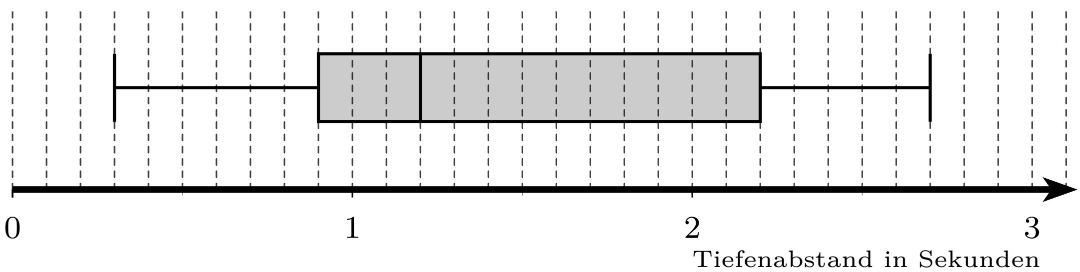
---

91 - MAT - WS 1.1, WS 1.3, WS 3.3, WS 3.2, FA 2.1, FA 2.2 - Abstandsmessung - Matura 2017/18

91. Im Rahmen der polizeilichen Kontrollmaßnahmen des öffentlichen Verkehrs werden Abstandsmessungen vorgenommen. Im Folgenden beschreibt der Begriff Abstand eine Streckenlänge und der Begriff Tiefenabstand eine Zeitspanne. ____/6

Beträgt der Abstand zwischen dem hinteren Ende des voranfahrenden Fahrzeugs und dem vorderen Ende des nachfahrenden Fahrzeugs Δs Meter, so versteht man unter dem Tiefenabstand diejenige Zeit t in Sekunden, in der das nachfahrende Fahrzeug die Strecke der Länge Δs zurücklegt.

Nachstehend sind Tiefenabstände, die im Rahmen einer Schwerpunktkontrolle von 1 000 Fahrzeugen ermittelt wurden, in einem Kastenschaubild (Boxplot) dargestellt. Alle kontrollierten Fahrzeuge waren mit einer Geschwindigkeit von ca. 130 km/h unterwegs.



Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Gib das erste Quartil q_1 und das dritte Quartil q_3 der Tiefenabstände an und deute den Bereich von q_1 bis q_3 im gegebenen Kontext!

Nach den Erfahrungswerten eines österreichischen Autofahrerclubs halten ungefähr drei Viertel der Kraftfahrer/innen bei einer mittleren Fahrgeschwindigkeit von ca. 130 km/h einen Abstand von mindestens 30 Metern zum voranfahrenden Fahrzeug ein. Gib an, ob die im Kastenschaubild dargestellten Daten in etwa diese Erfahrungswerte bestätigen oder nicht und begründe deine Entscheidung!

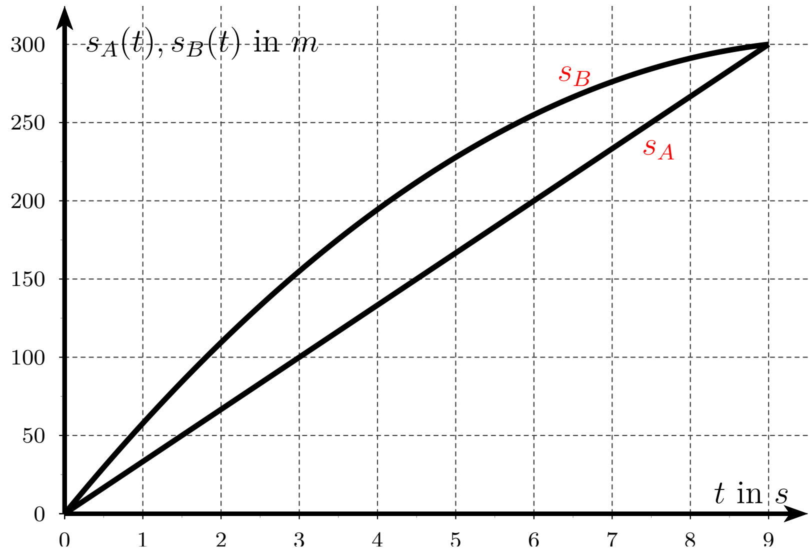
(b) Einer üblichen Faustregel zufolge wird auf Autobahnen generell ein Tiefenabstand von mindestens zwei Sekunden empfohlen. Jemand behauptet, dass aus dem dargestellten Kastenschaubild ablesbar ist, dass mindestens 20 % der Kraftfahrer/innen diesen Tiefenabstand eingehalten haben. Gib einen größeren Prozentsatz an, der aus dem Kastenschaubild mit Sicherheit abgelesen werden kann, und begründe deine Wahl!

Nimm den von dir ermittelten Prozentsatz als Wahrscheinlichkeit an, dass der empfohlene Tiefenabstand eingehalten wird. Gib an, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass bei zehn zufällig und unabhängig voneinander ausgewählten Messungen dieser Schwerpunktkontrolle zumindest sechs Mal der empfohlene Tiefenabstand von mindestens zwei Sekunden eingehalten wurde!

(c) Bei einer anderen Abstandsmessung wird ein kontrolliertes Fahrzeug auf den letzten 300 Metern vor der Messung zusätzlich gefilmt, damit die Messung nicht verfälscht wird, wenn sich ein anderes Fahrzeug vor das kontrollierte Fahrzeug drängt.

Fahrzeug A fährt während des Messvorgangs mit konstanter Geschwindigkeit und benötigt für die gefilmten 300 Meter eine Zeit von neun Sekunden. Stelle den zurückgelegten Weg $s_A(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t im unten stehenden Zeit-Weg-Diagramm dar ($s_A(t)$ in Metern, t in Sekunden) und gib an, mit welcher Geschwindigkeit in km/h das Fahrzeug unterwegs ist!

Ein Fahrzeug B legt die 300 Meter ebenfalls in neun Sekunden zurück, verringert dabei aber kontinuierlich seine Geschwindigkeit. Skizziere ausgehend vom Ursprung einen möglichen Graphen der entsprechenden Zeit-Weg-Funktion s_B in das unten stehende Zeit-Weg-Diagramm!



(a) **Lösungserwartung:**

$q_1 = 0{,}9$
$q_3 = 2{,}1$
Etwa die Hälfte der kontrollierten Fahrzeuge halten einen Tiefenabstand von mindestens 0,9 Sekunden und höchsten 2,1 Sekunden ein.

Die im Kastenschaubild dargestellten Daten bestätigen etwa diese Erfahrungswerte.

Mögliche Begründung:
$130\,\text{km/h} = 36,\dot{1}\,\text{m/s}$
$36,\dot{1}\,\text{m/s} \cdot 0{,}9\,\text{s} = 32{,}5\,\text{m} \Rightarrow$ Mindestens drei Viertel der Kraftfahrer/innen halten einen Abstand von 30 m und mehr ein.

(b) **Lösungserwartung:**

ein möglicher Prozentsatz: 25 %
Toleranzintervall: $(20\,\%; 25\,\%]$
Mögliche Begründung:
Der Tiefenabstand von zwei Sekunden liegt zwischen dem Median und dem dritten Quartil.

Mögliche Vorgehensweise:
Zufallsvariable X = Anzahl der Kraftfahrlenker/innen, die den empfohlenen Mindestabstand eingehalten haben

$p = 0{,}25$ ... Wahrscheinlichkeit, dass der empfohlene Mindestabstand eingehalten wurden
$n = 10$ ... Anzahl der ausgewählten Messungen
$P(X \geq 6) \approx 0{,}0197$

(c) **Lösungserwartung:**

Fahrzeug A fährt mit einer Geschwindigkeit von 120 km/h.
Grafik: siehe oben!

---

92 - MAT - WS 1.1, AN 1.2, AN 1.3, AB 1,1, FA 1.4, WS 4.1 - Bitcoin - Matura 2017/18

92. Bitcoin (Währungskürzel: BTC) ist eine digitale Kunstwährung. Der Marktwert des Bitcoin ergibt sich aufgrund von Angebot und Nachfrage. ____/6

Nutzer/innen des Bitcoin werden in dieser Aufgabe als Bitcoin-User bezeichnet.

Die nachstehende Abbildung zeigt den Bitcoin-Euro-Kurs vom 11. März 2015 bis zum 11. März 2016. Die linke Skala zeigt dabei den absoluten Wert eines Bitcoins in Euro, die rechte Skala zeigt die Veränderung in Prozent bezogen auf den 11. März 2015.

Aufgabenstellung:

(a) Gib an, in welchem der Monate von April 2015 bis Dezember 2015 der Bitcoin-Euro-Kurs jeweils vom Monatsanfang bis zum Monatsende absolut am stärksten gefallen ist, und gib diesen Kursverlust in Euro an!

Monat: August

Kursverlust: ≈ € 55 Toleranzintervall: $[50; 70]$

Es sei K_1 der Bitcoin-Euro-Kurs zum Beginn des betreffenden Monats, K_2 der Bitcoin-Euro-Kurs am Ende des betreffenden Monats sowie AT die Anzahl der Tage des betreffenden Monats.

Berechne den ungefähren Wert des Ausdrucks $\frac{K_2 - K_1}{AT}$ und interpretiere das Ergebnis im gegebenen Kontext!

(b) Anfang Jänner 2016 waren ca. 15 Millionen Bitcoins im Umlauf. Die t Jahre nach dem Jahr 2009 im Umlauf befindliche Menge an Bitcoins ist annährend $f(t) = 21 \cdot 10^6 - 21 \cdot 10^6 \cdot e^{-0{,}18 \cdot t}$. Damit ist $f(0)$ die zu Anfang Jänner 2009 im Umlauf befindliche Menge an Bitcoins.

Bestimmen und interpretiere die relative (prozentuelle) Änderung der im Umlauf befindlichen Menge an Bitcoins im Zeitintervall $[7; 8]$!

Gib eine Gleichung an, mit der derjenige Zeitpunkt berechnet werden kann, ab dem nur mehr eine Million Bitcoins in Umlauf gebracht werden kann, und ermittle diesen Zeitpunkt!

(c) Eine Untersuchung der Demografie von Bitcoin-Usern hat ergeben, dass weltweit 88 % der Bitcoin-User männlich sind.

Es soll festgestellt werden, wie hoch dieser Prozentsatz in Österreich ist. Dazu wird eine große Anzahl an Personen befragt. Diese Befragung ergibt, dass 171 der befragten Personen Bitcoin-User sind, und von diesen 171 Personen sind 138 männlich.

$\boxed{\text{A}}$ Gib aufgrund dieser Daten ein symmetrischen 95-%-Konfidenzintervall für den unbekannten Anteil der männlichen Bitcoin-User unter allen Bitcoin-Usern in Österreich an!

Gib an, welches Konfidenzniveau zur Berechnung eines solchen Intervalls mindestens angenommen werden muss, damit der weltweit ermittelte Anteil von 88 % in diesem Intervall enthalten ist!

(a) **Lösungserwartung:**

$\frac{K_2 - K_1}{AT} \approx -1{,}8$

Mögliche Interpretation:

Im August 2015 betrug die durchschnittliche Kursänderung pro Tag ca. € -1,8.

oder:

Im August 2015 betrug der durchschnittliche Kursverlust pro Tag ca. € 1,8.

Toleranzintervall: $[-2{,}3; -1{,}5]$ bzw. $[1{,}5; 2{,}3]$

(b) **Lösungserwartung:**

$\frac{f(8) - f(7)}{f(7)} \approx 0{,}065$

Toleranzintervall: $[0{,}06; 0{,}07]$

Mögliche Interpretation:

Die Anzahl der im Umlauf befindlichen Bitcoins nimmt im Zeitraum von Anfang Jänner 2016 bis Anfang Jänner 2017 um ca. 6,5 % zu.

Mögliche Gleichung:

$f(t) = 20 \cdot 10^6$

Lösung der Gleichung: $t \approx 17$

Ungefähr Anfang Jänner 2026 kann nur mehr 1 Million Bitcoins in Umlauf gebracht werden.

Toleranzintervall: $[16; 17]$ bzw. $[2025{,}2026]$

(c) **Lösungserwartung:**

$n = 171$, $h \approx 0{,}807$

$0{,}807 \pm 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}807 \cdot (1-0{,}807)}{171}} \approx 0{,}807 \pm 0{,}059 \Rightarrow [0{,}748; 0{,}866]$

Toleranzintervall: unten: $[0{,}74; 0{,}75]$ oben: $[0{,}86; 0{,}87]$

Mögliche Vorgehensweise:

$0{,}880 - \frac{138}{171} \approx 0{,}073$

$0{,}073 \leq z \cdot \sqrt{\frac{0{,}807 \cdot (1-0{,}807)}{171}} \Rightarrow z \geq 2{,}418$

$2 \cdot \Phi(2{,}418) - 1 \approx 0{,}984$

Das Konfidenzniveau muss mindestens 98,4 % betragen.

Toleranzintervall: $[0{,}98; 0{,}99]$

93 - FA 4.3, AN 3.3, AN 3.2, AG 2.3 - Quadratische Funktion - Matura - 1. NT 2017/18

93. Der Graph einer Polynomfunktion f zweiten Grades schneidet die positive senkrechte Achse im Punkt $A = (0 \mid y_A)$ und hat mit der positiven x-Achse den Punkt $B = (x_B \mid 0)$ gemeinsam, wobei B ein Extrempunkt von f ist. ____/1
Die Funktion f ist von der Form $f(x) = \frac{1}{4} \cdot x^2 + b \cdot x + c$ mit $b, c \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Gib an, ob c größer als null, gleich null oder kleiner als null sein muss, und begründe deine Entscheidung!

Gib an, ob b größer als null, gleich null oder kleiner als null sein muss, und begründe deine Entscheidung!

(b) Gegeben ist folgende Aussage: „Der Punkt B ist ein Schnittpunkt der Graphen der Funktion f und ihre Ableitungsfunktion f'." Gib an, ob diese Aussage wahr oder falsch ist, und begründe deine Entscheidung!

Es gibt für alle Werte von b genau eine Stelle x_t mit folgender Eigenschaft: An der Stelle x_t haben f und f' die gleiche Steigung. Gib diese Stelle x_t in Abhängigkeit von b an!

(c) Gib an, welcher Zusammenhang zwischen b und c bestehen muss, damit die Extremstelle x_B von f auch Nullstelle von f ist!

Gib die Koeffizienten b und c der Funktion f in Abhängigkeit von x_B an!

(a) **Lösungserwartung:**

$c > 0$

Mögliche Begründung:
Der Punkt $A = (0 \mid y_A)$ liegt auf der positiven senkrechten Achse, daher ist $y_A = f(0) > 0$.
Da $c = f(0)$ ist, muss $c > 0$ sein.

oder:

Der Parameter c legt fest, in welchem Punkt der Graph von f die senkrechte Achse schneidet.

Da dieser Schnittpunkt auf der positiven senkrechten Achse liegt, muss $c > 0$ gelten.

$b < 0$

Mögliche Begründung:

Der Punkt B ist ein Extrempunkt von f. Da B auf der positiven x-Achse liegt, muss seine x-Koordinate x_B positiv sein. Die Extremstelle $x_E = x_B$ der Funktion f ergibt sich aus dem Ansatz:
$f'(x_E) = 0 \Leftrightarrow x_E = -2 \cdot b$.
Wegen $x_E = -2 \cdot b > 0$ muss $b < 0$ gelten.

oder:

Da aus $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x + b$ folgt, dass $f'(0) = b$ ist, und da f für $(-\infty; x_E)$ mit $x_E > 0$ streng monoton fallend ist, folgt $f'(0) < 0$ und somit gilt: $f'(0) = b < 0$.

oder:

Angenommen, es würde $b \geq 0$ gelten. Wegen $c > 0$ ergibt sich: $\frac{1}{4} \cdot x^2 + c > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Somit würde für alle $x > 0$ auch $\frac{1}{4} \cdot x^2 + b \cdot x + c > 0$ gelten. Dies stellt aber einen Widerspruch dazu dar, dass ein Berührpunkt mit der positiven x-Achse existiert. Folglich muss $b < 0$ gelten.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die Angabe von $c > 0$ und eine korrekte Begründung.
- Ein Punkt für die Angabe von $b < 0$ und eine korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

(b) **Lösungserwartung:**

Die Aussage ist wahr.

Mögliche Begründung:

Da $B = (x_B \mid 0)$ ein Extrempunkt von f ist, gilt $f'(x_B) = 0$. Weil auch $f(x_B) = 0$ ist, ist der Punkt B ein Schnittpunkt der Graphen von f und f'.

oder:

An einer Stelle, wo die Funktion f eine Extremstelle hat, weist f' eine Nullstelle auf. Da die Extremstelle von f im gegebenen Fall eine Nullstelle ist, haben f und f' die gleiche Nullstelle und somit im Punkt B einen Schnittpunkt.

Mögliche Vorgehensweise:
$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x + b \Rightarrow$ Die Steigung der Ableitungsfunktion f' ist $\frac{1}{2}$.
$f'(x_t) = \frac{1}{2} \cdot x_t + b = \frac{1}{2} \Rightarrow x_t = 1 - 2 \cdot b$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die Angabe, dass die Aussage wahr ist, und eine korrekte Begründung.
- Ein Punkt für die richtige Lösung. Äquivalente Ausdrücke sind als richtig zu werten.

(c) **Lösungserwartung:**

Mögliche Vorgehensweise:
Wenn die Extremstelle von f auch Nullstelle von f ist, hat die Gleichung $\frac{1}{4} \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ genau eine Lösung.
$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot 0{,}25 \cdot c}}{0{,}5} \Rightarrow c = b^2$
Mögliche Vorgehensweise:
$f'(x_B) = \frac{1}{2} \cdot x_B + b = 0 \Rightarrow b = \frac{-x_B}{2}$
Aus $c = b^2$ folgt: $c = \frac{x_B^2}{4}$.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für einen korrekten Zusammenhang zwischen b und c. Andere korrekte Zusammenhänge sind ebenfalls als richtig zu werten.
- Ein Punkt für die korrekte Angabe der Koeffizienten b und c in Abhängigkeit von x_B.

---

94 - AN 4.2, FA 6.4, FA 6.3, FA 6.2, AG-L 4.4 - Überlagerung von Schwingungen - Matura - 1. NT 2017/18

94. Ein Ton in der Musik kann im einfachsten Fall durch eine Sinusfunktion s mit $s(t) = a \cdot \sin(b \cdot t)$ für $a, b \in \mathbb{R}^+$ beschrieben werden. Bei einer derartigen Sinusschwingung wird der maximale Funktionswert als Amplitude bezeichnet. Die Anzahl der Schwingungen pro Sekunde wird als Frequenz f bezeichnet und in Herzt (Hz) angegeben. ____/1

Für die Frequenz f gilt: $f0\frac{1}{T}$ (mit T in Sekunden), wobei T die (kleinste) Periodenlänge der jeweiligen Sinusschwingung ist ($T \in \mathbb{R}^+$).

Drei bestimmte Töne werden mithilfe der nachstehenden Funktionen h_1, h_2 und h_3 beschrieben.
Die Zeit t ($t \geq 0$) wird dabei in Millisekunden (ms) gemessen.

$h_1(t) = \sin(2 \cdot \pi \cdot t)$
$h_2(t) = \sin(2{,}5 \cdot \pi \cdot t)$
$h_3(t) = \sin(3 \cdot \pi \cdot t)$

Die Überlagerung mehrerer Töne bezeichnet man als Klang.
Die Funktion h mit $h(t) = h_1(t) + h_2(t) + h_3(t)$ beschreibt einen Klang.

Der Schalldruck eines Tons ist zeitabhängig und kann durch die Funktion ρ mit $\rho(t) = \bar{\rho} \cdot \sin(\omega \cdot t)$ beschrieben werden. Dabei sind $\bar{\rho}$ und ω Konstanten.
Der Schalldruck wird in der Einheit Pascal (Pa) angegeben.

Aufgabenstellung:

(a) Gib für einen Ton, der mithilfe der Funktion g mit $g(t) = \sin(c \cdot \pi \cdot t)$ mit $c \in \mathbb{R}^+$ und t in ms beschrieben wird, eine Formel für die Periodenlänge T (in ms) in Abhängigkeit von c an!

Der Effektivwert ρ_{eff} des Schalldrucks einer Sinusschwingung mit der Periodenlänge T (in ms) kann mit der Formel $\rho_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \rho^2(t)\,\mathrm{d}t}$ berechnet werden.

Berechne den Effektivwert des Schalldrucks eines Tons, wenn $\bar{\rho} = 1$ und $\omega = 2 \cdot \pi$ gilt!

(b) Gib (z.B. unter Zuhilfenahme eines geeigneten Graphen) die (kleinste) Periodenlänge T (in ms) der Funktion h an!

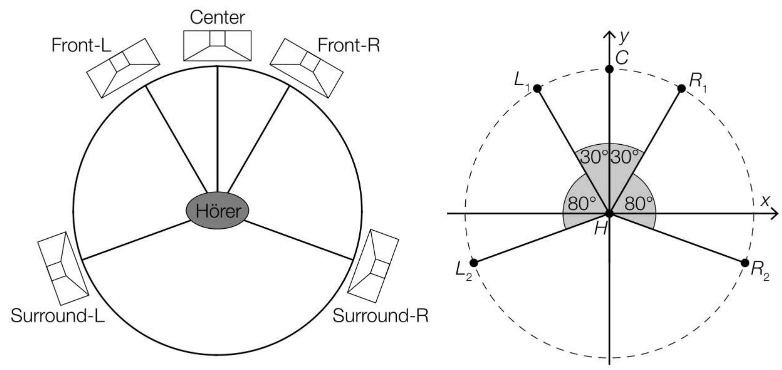
Gib die Frequenz f der Funktion h in Hertz an!

(c) Gib (z.B. unter Zuhilfenahme eines geeigneten Graphen) die Amplitude der Funktion h und denjenigen Zeitpunkt $t \geq 0$ (in ms) an, zu dem die Amplitude erstmals erreicht wird!

Begründe, warum die Amplitude von h nicht gleich der Summe der drei Amplituden der Funktionen h_1, h_2 und h_3 ist!

(d) Für ein angenehmes Raumklangerlebnis (z.B. in einem Heimkino) ist es günstig, wenn die fünf Lautsprecher eines Fünf-Kanal-Tonsystems wie in nachstehender linker Skizze dargestellt angeordnet sind (Ansicht von oben).

Vereinfach kann die Anordnung wie in nachstehender rechter Skizze in einem kartesischen Koordinatensystem (Einheit in Metern) dargestellt werden:



Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/5.1 [23.04.2018] (adaptiert).

Jeder der fünf Lautsprecher (C, L_1, L_2, R_1, R_2) ist in diesem Fall 2 m vom Hörer (H) entfernt.
Der Punkt H liegt im Koordinatenursprung.

(e) $\boxed{\text{A}}$ Gib die kartesischen Koordinaten von R_1 an!

Gib die Entfernung zwischen L_2 und R_2 an!

(a) **Lösungserwartung:**

$T = \frac{2 \cdot \pi}{c \cdot \pi} \Rightarrow T = \frac{2}{c}$

Mögliche Vorgehensweise:

$T = \frac{2 \cdot \pi}{2 \cdot \pi} = 1$

$\rho_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{1} \cdot \int_0^1 \sin^2(2\pi \cdot t)\, \mathrm{d}t} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \rho_{\text{eff}} \approx 0{,}71\,\text{Pa}$

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für eine korrekte Formel. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.
- Ein Punkt für die Berechnung des richtigen Effektivwerts des Schalldrucks, wobei die Einheit „Pa“ nicht angeführt sein muss.

Toleranzintervall: $[0{,}7\,\text{Pa}; 0{,}71\,\text{Pa}]$

(b) **Lösungserwartung:**

$T = 4\,\text{ms}$

Frequenz von h: $\frac{1}{0{,}004} = 250\,\text{Hz}$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die Angabe der richtigen Periodenlänge von h, wobei die Einheit „ms" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: $[3{,}9\,\text{ms}; 4{,}1\,\text{ms}]$ - Ein Punkt für die richtige Lösung.

(c) **Lösungserwartung:**

Amplitude von h: ca. 2,9 nach ca. 0,2 ms

Mögliche Begründung:
Die Amplitude von h ist nicht gleich der Summe der Amplituden von h_1, h_2 und h_3, da die drei Funktionen ihre maximlen Funktionswerte zu unterschiedlichen Zeitpunkten erreichen.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die Angabe der richtigen Amplitude und den richtigen Zeitpunkt, wobei die Einheit „ms" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervalle: $[2{,}85; 2{,}95]$ bzw. $[0{,}19\,\text{ms}; 0{,}21\,\text{ms}]$ - Ein Punkt für eine korrekte Begründung.

(d) **Lösungserwartung:**

$R_1 = (1 \mid \sqrt{3})$

Mögliche Vorgehensweise:
$x(R_1) = 2 \cdot \cos(60°) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$
$y(R_1) = 2 \cdot \sin(60°) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

Mögliche Vorgehensweise:
Entfernung zwischen L_2 und $R_2 = 2 \cdot x(R_2) = 2 \cdot 2 \cdot \cos(20°) \approx 3{,}76\,\text{m}$

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die Angabe der richtigen Koordinaten von R_1.
Toleranzintervall für die y-Koordinate: $[1{,}7; 1{,}75]$ - Ein Punkt für die Angabe der richtigen Lösung.
Toleranzintervall: $[3{,}7\,\text{m}; 3{,}8\,\text{m}]$

95 - FA 5.2, AN 3.3, WS 1.1 - Lachsbestand - Matura - 1. NT 2017/18

95. Der kanadische Wissenschaftler W. E. Ricker untersuchte die Nachkommenanzahl von Fischen in Flüssen Nordamerikas in Abhängigkeit von der Anzahl der Fische der Elterngeneration. Er veröffentlichte 1954 das nach ihm benannte Ricker-Modell. ____/1

Der zu erwartende Bestand $R(n)$ einer Nachfolgegeneration kann näherungsweise anhand der sogenannten Reproduktionsfunktion R mit $R(n) = a \cdot n \cdot e^{-b \cdot n}$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$ aus dem Bestand n der jeweiligen Elterngeneration ermittelt werden.
Lachse kehren spätestens vier Jahre nach dem Schlüpfen aus dem Meer an ihren „Geburtsort" zurück, um dort zu laichen, d.h., die Fischeier abzulegen. Nach dem Laichen stirbt der Großteil der Lachse.
Ricker untersuchte unter anderem die Rotlachspopulation im Skeena River in Kanada. Die nachstehende Tabelle gibt die dortigen Lachsbestände in den Jahren von 1908 bis 1923 an, wobei die angeführten Bestände Mittelwerte der beobachteten Bestände jeweils vier aufeinanderfolgender Jahre sind.

Zeitraum	beobachteter Lachsbestand (in tausend Lachsen)
01.01.1908 - 31.12.1911	1 098
01.01.1912 - 31.12.1915	740
01.01.1916 - 31.12.1919	714
01.01.1920 - 31.12.1923	615

Datenquelle: http://jmahaffy.sdsu.edu/courses/s00/math121/lectures/product_rule/product.html [01.02.2018] (adaptiert).

Anhand dieser Daten für den Lachsbestand im Skeena River wurden für die Reproduktionsfunktion R die Parameterwerte $a = 1{,}535$ und $b = 0{,}000783$ ermittelt ($R(n)$ und n in tausend Lachsen).

Aufgabenstellung:

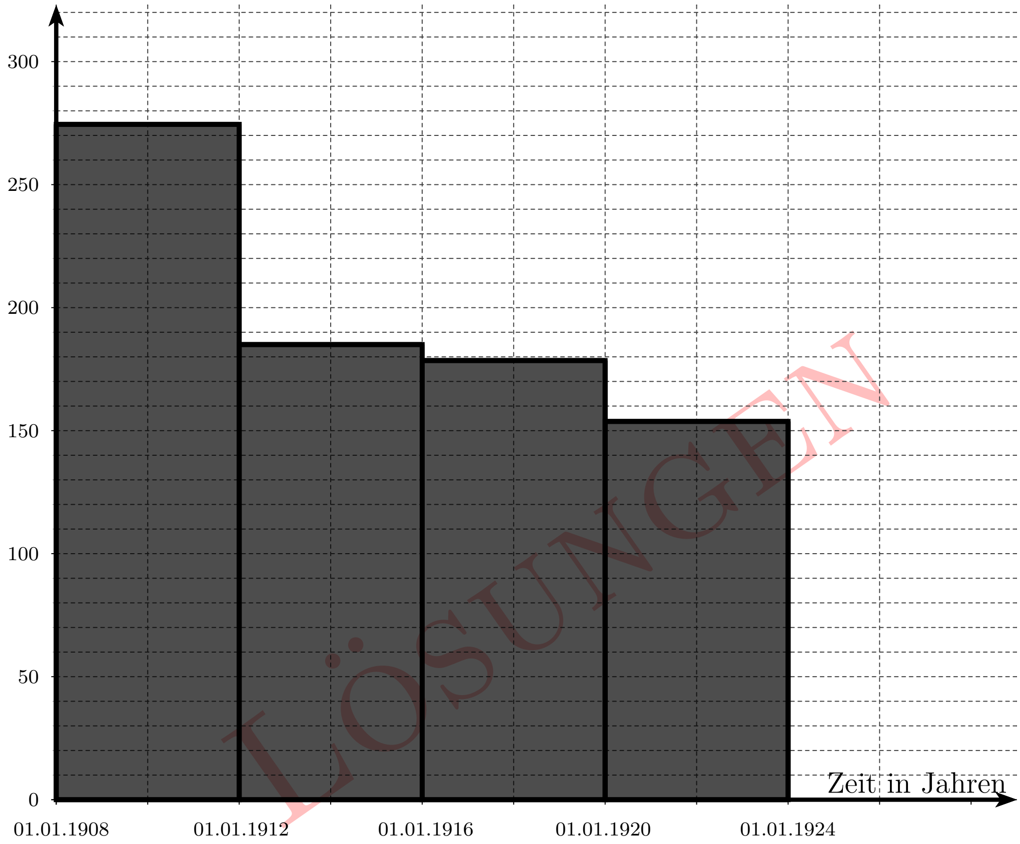
(a) Ermittle für die Lachspopulation im Skeena River für $n > 0$ mithilfe der Reproduktionsfunktion die Lösung n_0 der Gleichung $R(n) = n$ in tausend Lachsen!

$\boxed{\text{A}}$ Interpretiere n_0 im gegebenen Kontext!

(b) Bestimme die Koordinaten des Extrempunkts $E = (n_E \mid R(n_E))$ der Repduktionsfunktion R in Abhängigkeit von a und b und zeige, dass n_E für alle $a, b \in \mathbb{R}^+$ eine Stelle eines lokalen Maximums ist!

Gib an, für welche Werte des Parameters a der Bestand $R(n_E)$ der Nachfolgegeneration stets größer als der vorherige Bestand n_E ist!

(c) Stelle die Daten der obigen Tabelle der beobachteten Lachbestände (in tausend Lachsen) durch ein Histogramm dar, wobei die absoluten Häufigkeiten als Flächeninhalte von Rechtecken abgebildet werden sollen!



Das von Ricker entwickelte Modell zählt zu den Standardmodellen zur Beschreibung von Populationsentwicklungen. Dennoch können die mithilfe der Reproduktionsfunktion berechneten Werte mehr oder weniger stark von den beobachteten Werten abweichen.

Nimm den beobachteten durchschnittlichen Lachsbestand von 1 098 (im Zeitraum von 1908 bis 1911) als Ausgangswert, berechne damit für die jeweils vierjährigen Zeiträume von 1912 bis 1923 die laut Reproduktionsfunktion zu erwartenden durchschnittlichen Lachsbestände im Skeena River und trage die Werte in die nachstehende Tabelle ein!

Zeitraum	berechneter Lachsbestand (in tausend Lachsen)
01.01.1912 - 31.12.1915	713
01.01.1916 - 31.12.1919	626
01.01.1920 - 31.12.1923	589

(a) **Lösungserwartung:**

$n_0 \approx 547$

Mögliche Interpretation:

Im gegebenen Kontext gibt n_0 denjenigen Lachsbestand an, bei dem die Anzahl der Lachse der Nachfolgegeneration unverändert bleibt.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall für den Lachsbestand: $[547; 548]$
- Ein Ausgleichspunkt für eine korrekte Interpretation.

(b) **Lösungserwartung:**

Mögliche Vorgehensweise:

$R'(n) = 0 \Rightarrow n_E = \frac{1}{b}$

$R\left(\frac{1}{b}\right) = \frac{a}{b \cdot e}$

$\Rightarrow E = \left(\frac{1}{b} \middle| \frac{a}{b \cdot e}\right)$

Möglicher Nachweis:

$R''\left(\frac{1}{b}\right) = -\frac{a \cdot b}{e} < 0$ für alle $a, b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow$ Maximumstelle

$\frac{a}{b \cdot e} > \frac{1}{b} \Rightarrow a > e$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die Angabe der richtigen Koordinaten von E und einen korrekten Nachweis.
- Ein Punkt für die richtige Lösung.

(c) **Lösungserwartung:**

Siehe oben!

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für ein korrektes Histogramm.
- Ein Punkt für die Angabe der richtigen Werte in der Tabelle.

---

96 - WS 3.2, WS 3.3 - Roulette - Matura - 1. NT 2017/18

96. Roulette ist ein Glücksspiel, bei dem mittels einer Kugel eine natürliche Zahl aus dem Zahlenbereich von 0 bis 36 zufällig ausgewählt wird, wobei jede der 37 Zahlen bei jedem der voneinander unabhängigen Spieldurchgänge mit derselben Wahrscheinlichkeit ausgewählt wird. Das Spielfeld mit der Zahl Null ist grün gefärbt, die Hälfte der restlichen Zahlenfelder ist rot, die andere Hälfte schwarz gefärbt. ____/1

Die nachstehende Tabelle zeigt eine Auswahl von Setzmöglichkeiten und die im Erfolgsfall ausbezahlten Gewinne. „35-facher Gewinn" bedeutet zum Beispiel, dass bei einem gewonnenen Spiel der Einsatz und zusätzlich der 35-fache Einsatz (also insgesamt der 36-fache Einsatz) ausbezahlt wird.

Einzelzahl (von 0 bis 36)	35-facher Gewinn
Rot/Schwarz	1-facher Gewinn
Ungerade/Gerade (ohne Null)	1-facher Gewinn

Eine der bekanntesten Spielstrategien ist das Martingale-System. Man setzt dabei stets auf dieselbe „einfache Chance" (z. B. auf „Rot" oder „Gerade"). Falls man verliert, verdoppelt man den Einsatz im darauffolgenden Spiel. Sollte man auch dieses Spiel verlieren, verdoppelt man den Einsatz noch einmal für das nächstfolgende Spiel und setzt diese Strategie von Spiel zu Spiel fort. Sobald man ein Spiel gewinnt, endet diese Spielserie, und man hat mit dieser Strategie den Einsatz des ersten Spiels dieser Spielserie (Starteinsatz) als Gewinn erzielt.

Aufgabenstellung:

(a) Die Zufallsvariable X beschreibt, wie oft die Kugel bei 80 Spielen auf eine bestimmte Zahl fällt.
Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel bei 80 Spielen mindestens viermal auf eine bestimmte Zahl fällt!

Ein Spieler möchte seine Gewinnchancen erhöhen und handelt wie folgt: Er notiert während einer Serie von z. B. 37 Spielen, auf welche Zahlen die

Kugel fällt. Weiters geht er davon aus, dass die Kugel in den nachfolgenden Spielen auf die dabei nicht notierten Zahlen fällt, und setzt auf diese Zahlen.

Gib an, ob der Spieler mit dieser Strategie die Gewinnchancen erhöhen kann, und begründe deine Antwort!

(b) Eine Spielerin wendet das Martingale-System an und setzt immer auf „Rot“. Die Spielserie endet, sobald die Spielerin gewinnt bzw. wenn der vom Casino festgelegte Höchsteinsatz von € 10.000 keine weitere Verdoppelung des Spieleinsatzes mehr erlaubt.

Die nachstehende Tabelle zeigt, wie schnell die Einsätze ausgehend von einem Starteinsatz von € 10 bei einer Martingale-Spielserie im Falle einer „Pechsträhne“ ansteigen können.

Spielrunde	Einsatz in *e*
1	10
2	20
3	40
4	80
5	160
6	320
7	640
8	1 280
9	2 560
10	5 120

$\boxed{\text{A}}$ Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Spielerin bei dieser Martingale-Spielserie alle zehn Spiele verliert!

Zeige durch die Berechnung des Erwartungswerts für den Gewinn, dass trotz der sehr geringen Wahrscheinlichkeit, zehn aufeinanderfolgende Spiele zu verlieren, das beschriebene Martingale-System ungünstig für die Spielerin ist!

(a) Lösungserwartung:

$P(X \geq 4) \approx 0{,}171$

a die Spieldurchgänge voneinander unabhängig sind und somit die Ergebnisse der vorherigen Spielrunden keine Auswirkungen auf die nachfolgenden Spielrunden haben, kann der Spieler seine Gewinnchancen mit dieser Strategie nicht beeinflussen.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall für $P(X \geq 4)$: $[0{,}1; 0{,}2]$ bzw, $[10\,\%; 20\,\%]$
- Ein Punkt für die Angabe, dass der Spieler seine Gewinnchancen mit dieser Strategie nicht erhöhen kann, und eine korrekte Begründung.

(b) **Lösungserwartung:**

$\left(\frac{19}{37}\right)^{10} \approx 0{,}00128$

Mögliche Vorgehensweise:

Bei zehn aufeinanderfolgenden verlorenen Spielrunden beträgt der Verlust € 10.230.

Endet die Spielserie mit einem Gewinn, so beträgt dieser € 10.

Erwartungswert für einen Gewinn: $(1 - 0{,}00128) \cdot 10 - 0{,}00128 \cdot 10\,230 \approx -3{,}11$

Ein negativer Erwartungswert zeigt, dass dieses Spiel langfristig gesehen für die Spielerin ungünstig ist.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: $[0{,}0012; 0{,}0013]$
- Ein Punkt für einen korrekten rechnerischen Nachweis.