02 - MAT - WS 2.3, WS 3.2, WS 3.3 - Aufnahmetest - BIFIE Aufgabensammlung

1. Eine Universität führt für die angemeldeten Bewerber/innen einen Aufnahmetest durch. Dabei werden zehn Multiple-Choice-Fragen gestellt, wobei jede Frage vier Antwortmöglichkeiten hat. Nur eine davon ist richtig. Wer mindestens acht Fragen richtig beantwortet, wird sicher aufgenommen. Wer alle zehn Fragen richtig beantwortet, erhält zusätzlich ein Leistungsstipendium. Die Ersteller/innen dieses Tests geben die Wahrscheinlichkeit, bei zufälligem Ankreuzen aller Fragen aufgenommen zu werden, mit 0,04158 % an. Nimm an, dass Kandidat K alle Antworten völlig zufällig ankreuzt. ____/0

Aufgabenstellung:

(a) Nenne zwei Gründe, warum die Anzahl der richtig beantworteten Fragen unter den vorliegenden Angaben binomialverteilt ist!

Gib einen möglichen Grund an, warum in der Realität das Modell der Binomialverteilung hier eigentlich nicht anwendbar ist!

(b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass Kandidat K nicht aufgenommen wird! Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Kandidat K ein Leistungsstipendium erhält!

Lösungserwartung:

(a) Dieser Aufgabenteil ist durch sinngemäßes Angeben von mindestens zwei der vier angeführten Gründe richtig gelöst:

Die Anzahl der richtig beantworteten Fragen ist unter den vorliegenden Angaben binomialverteilt, weil

- es nur die beiden Ausgänge „richtig beantwortet“ und „falsch beantwortet“ gibt
- das Experiment unabhängig mit $n = 10$ Mal wiederholt wird
- die Erfolgswahrscheinlichkeit dabei konstant bleibt
- es sich dabei um ein „Bernoulli-Experiment“ handelt

Der zweite Aufgabenteil ist korrekt gelöst, wenn ein Grund (sinngemäß) angeführt wird, z. B.:

- Eine Bewerberin/ein Bewerber, die/der sich für ein Studium interessiert, wird sicher nicht beim Aufnahmetest zufällig ankreuzen.
- Sobald Kandidat K auch nur eine Antwortmöglichkeit einer Frage ausschließen kann, wäre die Voraussetzung für die Binomialverteilung verletzt. Genau aus diesem Grund wird die Universität mit zehn Multiple-Choice-Fragen nicht das Auslangen finden, da die Erfolgswahrscheinlichkeit für kompetenzbasiertes Antworten sicher wesentlich höher ist als 0,25.
- Die Unabhängigkeit der Wiederholung des Zufallsexperiments ist sicher dadurch verletzt, dass die einzelnen Kandidatinnen und Kandidaten aufgrund ihrer Vorbildung unterschiedliche Erfolgswahrscheinlichkeiten für die Beantwortung der einzelnen Fragen aufweisen. Somit kann unter diesen Voraussetzungen niemals von einer unabhängigen Wiederholung mit Zählen der Anzahl der Erfolge im Sinne eines Bernoulli-Experiments gesprochen werden.

Es sind auch weitere eigenständige Lösungen denkbar.

(b) Für die Lösung ist keine Binomialverteilung nötig, da das gesuchte Ereignis das Gegenereignis zur „Aufnahme“ darstellt. Somit beträgt die (von den Testautorinnen und Testautoren) angegebene Wahrscheinlichkeit:

$$P(\text{Ablehnung}) = 1 - P(\text{Aufnahme}) = 1 - 0{,}0004158 = 0{,}9995842$$

Die Ablehnung des Kandidaten K ist somit praktisch sicher.

Auch hier ist keine Binomialverteilung nötig, da ein Zufallsexperiment mit einer Erfolgswahrscheinlichkeit von 0,25 zehnmal unabhängig wiederholt wird, wobei bei jeder Wiederholung ein „Erfolg“ eintritt.

Die Wahrscheinlichkeit beträgt somit $P(\text{Leistungsstipendium}) = 0{,}25^{10} \approx 0$.

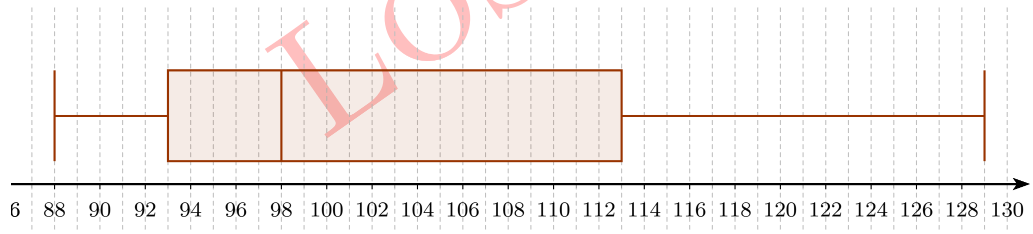
03 - MAT - WS 1.1, WS 1.3, WS 3.1, WS 3.2, WS 3.3 - Section Control - BIFIE Aufgabensammlung

2. Der Begriff Section Control (Abschnittskontrolle) bezeichnet ein System zur Überwachung von Tempolimits im Straßenverkehr, bei dem nicht die Geschwindigkeit an einem bestimmten Punkt gemessen wird, sondern die Durchschnittsgeschwindigkeit über eine längere Strecke. Dies geschieht mithilfe von zwei Überkopfkontrollpunkten, die mit Kameras ausgestattet sind. Das Fahrzeug wird sowohl beim ersten als auch beim zweiten Kontrollpunkt fotografiert. ____/0

Die zulässige Höchstgeschwindigkeit bei einer bestimmten Abschnittskontrolle beträgt 100 km/h. Da die Polizei eine Toleranz kleiner 3 km/h gewährt, löst die Section Control bei 103 km/h aus. Lenker/innen von Fahrzeugen, die dieses Limit erreichen oder überschreiten, machen sich strafbar und werden im Folgenden als „Temposünder“ bezeichnet.

Eine Stichprobe der Durchschnittsgeschwindigkeiten von zehn Fahrzeugen ist in der nachfolgenden Tabelle aufgelistet und im abgebildeten Boxplot dargestellt.

v in km/h	88	113	93	98	121	98	90	98	105	129



Aufgabenstellung:

(a) Bestimme den arithmetischen Mittelwert $\overline{x}$ und die empirische Standardabweichung s der Durchschnittsgeschwindigkeiten in der Stichprobe!

Kreuze die zutreffende(n) Aussage(n) zur Standardabweichung an!

Die Standardabweichung ist ein Maß für die Streuung um den arithmetischen Mittelwert.	☒
Die Standardabweichung ist immer ca. ein Zehntel des arithmetischen Mittelwerts.	
Die Varianz ist die quadrierte Standardabweichung.	☒
Im Intervall $[\overline{x} - s; \overline{x} + 2]$ der obigen Stichprobe liegen ca. 60 % bis 80 % der Werte.	☒
Die Standardabweichung ist der arithmetische Mittelwert der Abweichung von $\overline{x}$.	

(b) Bestimme aus dem Boxplot (Kastenschaubild) der Stichprobe den Median sowie das obere und untere Quartil! Gib an, welche zwei Streumaße aus dem Boxplot ablesbar sind! Bestimme auf deren Werte!

(c) Die Erfahrung zeigt, dass die Wahrscheinlichkeit, ein zufällig ausgewähltes Fahrzeug mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von mindestens 103 km/h zu erfassen, 14 % beträgt. Berechne den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ der Temposünder unter fünfzig zufällig ausgewählen Fahrzeuglenkern! Berechne, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass die Anzahl der Temposünder unter fünfzig Fahrzeuglenkern innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert, d.h. im Intervall $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$ liegt!

Lösungserwartung:

(a) Richtige Lösungen siehe oben. Zusätzliche Information:

$$\overline{x} = \frac{1}{10} \cdot \sum_{i=1}^{10} x_i = 103{,}3\, km/h$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{9} \cdot \sum_{i=1}^{10} (x_i - \overline{x})^2} = 13{,}6\, km/h$$

(b) Daten aus dem Boxplot:

Median ... 98 km/h

unteres Quartil ... 93 km/h

oberes Quartil ... 113 km/h

Spannweite ... 41 km/h

Quartilsabstand ... $20\,km/h$

(c) Lösung mittels Binomialverteilung

$\mu = n \cdot p = 50 \cdot 0{,}14 = 7$

$\sigma = \sqrt{\mu \cdot (1-p)} = 2{,}45$

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = P(5 \leq X \leq 9) = P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) = 0{,}1286 + 0{,}1570 + 0{,}1606 + 0{,}1406 + 0{,}1068 = 0{,}6936 = 69{,}36\,\%$

---

05 - MAT - WS 2.2, WS 3.1, WS 3.3 - Mathematikschularbeiten - BIFIE Aufgabensammlung

3. Wenn in der Oberstufe in einem Semester höchstens zwei Mathematikschularbeiten vorgesehen sind, muss jede versäumte Schularbeit nachgeholt werden. Ein Mathematiklehrer hat auf Basis seiner langjährigen Erfahrung die untenstehende Tabelle erstellt. Dabei beschreibt $h(n)$ die relative Häufigkeit, dass bei einer Schularbeit insgesamt n Schüler/innen fehlen. ____/0

n	0	1	2	3	4	5	6	7	>7
$h(n)$	0,15	0,15	0,2	0,3	0,1	0,05	0,03	0,02	0

Aufgabenstellung:

(a) Gib an, mit wie vielen Fehlenden der Mathematiklehrer im Durchschnitt bei jeder Schularbeit rechnen muss!

Lässt sich aus dem errechneten Durchschnittswert mit Sicherheit behaupten, dass bei jeder Mathematikschularbeit mindestens eine Schülerin/ein Schüler fehlt? Begründe deine Antwort!

(b) Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an!

Es kann nie passieren, dass acht Schüler/innen bei einer Schularbeit fehlen.	
Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Mathematikschularbeit niemand fehlt, ist gleich groß wie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Schülerin/ein Schüler fehlt.	☒
Die Wahrscheinlichkeit, dass drei Schüler/innen bei einer Mathematikschularbeit fehlen, ist größer als die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens zwei oder mindestens vier Schüler/innen fehlen.	
Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Schularbeit nachgeholt werden muss, weil mindestens eine Schülerin/ein Schüler fehlt, beträgt 85 %.	☒
Im Durchschnitt muss eine von vier Schularbeiten pro Jahr nicht nachgeholt werden.	

In einer bestimmten Klasse werden im kommenden Schuljahr vier Schularbeiten (zwei pro Semester) geschrieben.

Gib einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Anzahl der Mathematikschularbeiten dieser Klasse, die aufgrund fehlender SchülerInnen nachgeholt werden müssen, berechnet werden kann!

$P(X=k) = \binom{4}{k} \cdot 0{,}85^k \cdot 0{,}15^{4-k}$ mit $k = 0,1,2,\ldots,4$

Lösungserwartung:

(a) Im Durchschnitt muss der Mathematiklehrer mit 2,42 Fehlenden rechnen.

Eine auf ganze Zahlen gerundete Antwort ist nicht korrekt, da der Erwartungswert nur statistische Aussagekraft hat und somit die Rundung die Aussage verändert.

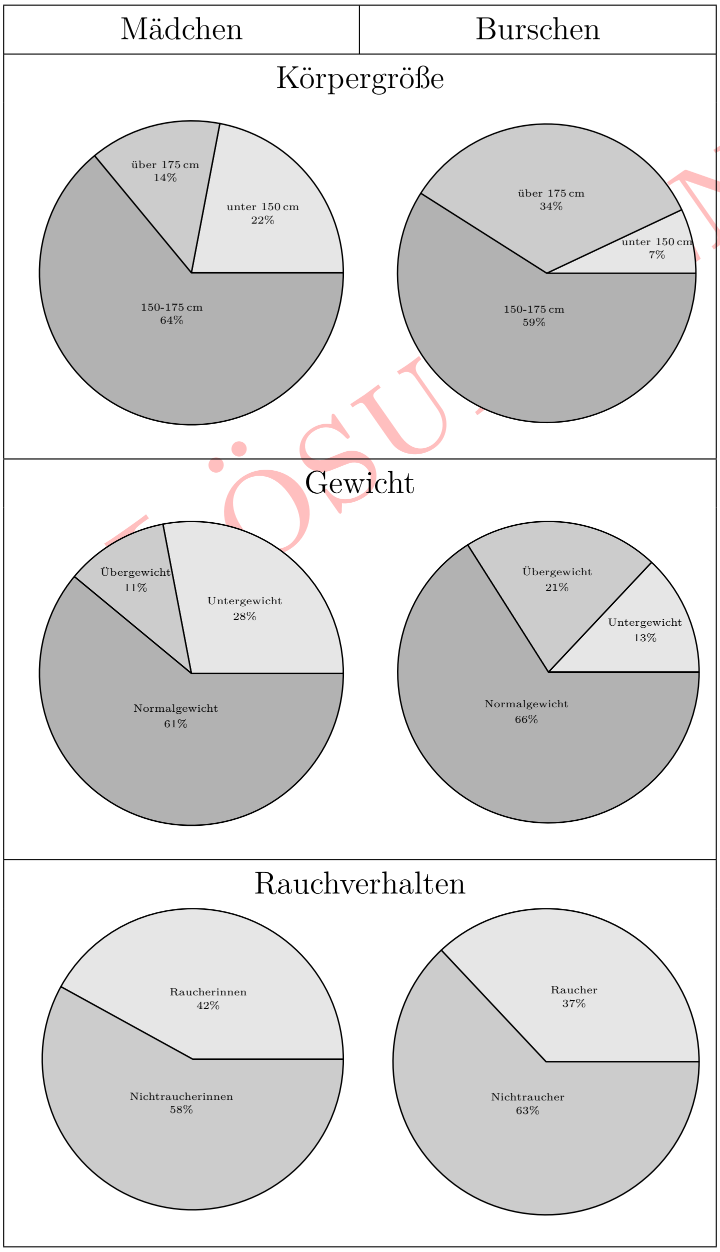
Daraus lässt sich aber nicht mit Sicherheit behaupten, dass bei jeder Mathematikschularbeit jemand fehlt, da es sich dabei um eine statistische Kenngröße handelt, die keine konkrete Aussage über die einzelne Schularbeit erlaubt.

Eine Schülerantwort, die darauf abzielt, dass es entsprechend der empirischen Häufigkeitsverteilung mit 15 %iger Häufigkeit zu keinem Fehlen kommt, ist als nicht korrekt zu bewerten, da in der Aufgabenstellung verlangt wird, den Erwartungswert zu interpretieren.

(b) siehe oben.

06 - MAT - WS 2.2, WS 3.1, WS 3.2 - Ärztliche Untersuchung an einer Schule - BIFIE Aufgabensammlung

4. Eine Schulärztin hat die Untersuchung der Oberstufenschüler/innen einer Schule abgeschlossen. Die Auswertung der Ergebnisse ist in den nachstehenden Abbildungen grafisch dargestellt. ____/0



Von den einzelnen Klassen wurde dabei folgende Schüleranzahl erfasst:

Klasse	5A	5B	6A	6B	7A	7B	8A	8B
weiblich	18	22	20	16	16	15	12	18
männlich	14	9	7	9	10	11	13	8
gesamt	32	31	27	25	26	26	25	26

Aufgabenstellung:

(a) Geben Sie auf Basis der erhobenen Daten einen Term zur Berechnung der Wahscheinlichkeit für folgendes Ereignis an, wobei angenommen wird, dass die angegebenen Prozentsätze unabhängig von der Schulstufe sind:

„In den 5. Klassen gibt es höchstens 2 Raucherinnen.“

In dieser Schule wurden die Schüler/innen nicht nach Klassen geordnet untersucht, sondern jede/r entschied selbst, wann sie/er zur Schulärztin ging (zufällige Reihenfolge angenommen).

Wie viele Schüler/innen musste die Schulärztin untersuchen, um mit absoluter Sicherheit mindestens eine Raucherin/einen Raucher aus den 5. Klassen zu finden, wenn sie weiß, dass es in den 5. Klassen mindestens eine/n davon gibt?

(b) Auf Basis der oben angeführten Daten wurde für die Burschen eines Jahrgangs der folgende statistische Kennwert ermittelt:

$$\mu = n \cdot p = 23 \cdot 0{,}34 = 7{,}82$$

Was drückt dieser Kennwert aus? Interpretieren Sie diesen Kennwert im gegebenen Zusammenhang und nutzen Sie dabei sowohl die grafische Abbildung der Untersuchungsergebnisse als auch die tabellarische Übersicht über die Klassenschülerzahlen.

Ist der so errechnete Kennwert aussagekräftig? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösungserwartung:

(a) X ... Anzahl der Raucherinnen aus allen 5. Klassen

X ... Binomialverteilung mit $n = 40, p = 0{,}42$

$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) =$

$= \binom{40}{0} \cdot 0{,}42^0 \cdot 0{,}58^{40} + \binom{40}{1} \cdot 0{,}42^1 \cdot 0{,}58^{39} + \binom{40}{2} \cdot 0{,}42^2 \cdot 0{,}58^{38}$

Da in der Angabe nur statistische Aussagen gemacht werden, aufgrund derer nicht mit Sicherheit behauptet werden kann, ob es mehr als eine

Raucherin/einen Raucher in den 5. Klassen gibt, müssen alle Schüler/innen untersucht werden, um mit Sicherheit eine Raucherin/einen Raucher in der 5. Klasse zu finden.

(b) In allen 5. Klassen zusammen gibt es 23 Burschen. Der Prozentsatz der Burschen mit einer Körpergröße von über 175 cm beträgt 34 %.

Somit drückt der berechnete Wert $\mu = n \cdot p = 23 \cdot 0{,}34 = 7{,}82$ die Anzahl der zu erwartenden Burschen in den 5. Klassen mit einer Körpergröße von über 175 cm aus.

Wesentlich für die Richtigkeit der Antwort sind:

- sinngemäße Formulierung für „Erwartungswert"
- Burschen aus 5. Klassen mit über 175 cm Körpergröße

Eine Rundung auf 8 ist in diesem Zusammenhang als falsch zu werten, da es sich bei μ nur um einen statistischen Kennwert und nicht um einen realen Ausgang eines Zufallsexperiments handelt.

Da die Daten für die gesamte Oberstufe ausgewertet sind und Schüler/innen während der Oberstufe noch wachsen, werden voraussichtlich weniger so große Schüler in den 5. Klassen zu finden sein. Somit ist der errechnete Erwartungswert nicht aussagekräftig bzw. sinnvoll.

Wesentlich für die Richtigkeit der Antwort ist die sinngemäße Darstellung einer der folgenden Interpretationen:

- Die unabhängige Wiederholung (im Sinne des Bernoulli-Experiments) ist nicht gegeben.
- Die verwendete Wahrscheinlichkeit (über 175 cm Körpergröße) bzw. relative Häufigkeit ist auf die beobachtete Eigenschaft (Bursch aus 5. Klassen) nicht anzuwenden.

Die Burschen/Jugendlichen wachsen im Laufe der Oberstufe, daher ist die relative Häufigkeit auf diese Gruppe nur eingeschränkt übertragbar.

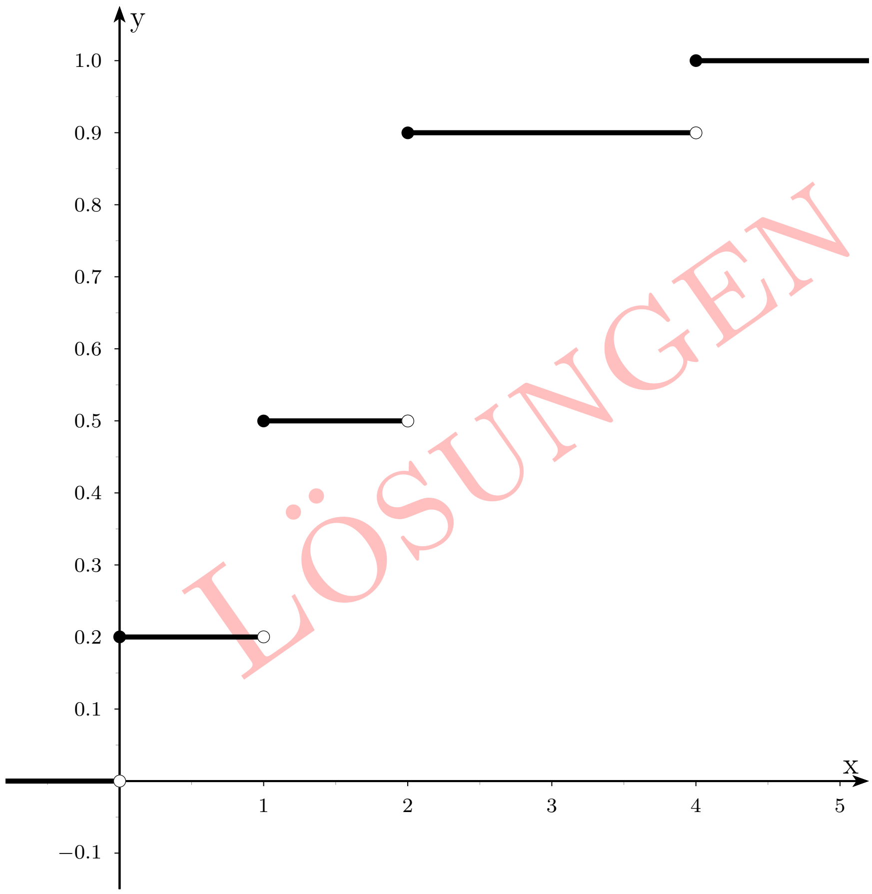
---

07 - MAT - FA 1.4, WS 3.1 - Glücksrad - BIFIE Aufgabensammlung

5. Auf einem Jahrmarkt werden nach dem Drehen eines Glücksrades € 0, € 1, € 2 oder € 4 ausbezahlt.Jedes Mal, bevor das Rad gedreht wird, ist eine Spielgebühr e (in €) zu entrichten. ____/0

Der Spielbetreiber hat für mathematisch Interessierte den Graphen einer sogenannten kumulativen Verteilungsfunktion F mit $F(x) = P(X \leq x)$ angegeben. Die Zufallsvariable X gibt dabei die Größe des auszuzahlenden Betrags an. Aus der Abbildung lassen sich die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Auszahlungsbeträge ermitteln, wobei die Variable x angibt, welche Werte die Zufallsvariable X annimmt, d.h. wie groß die einzelnen auszuzahlenden Beträge sind.

Bei diesem Spiel sind sie, wie oben angegeben, € 0, € 1, € 2 oder € 4.



Aufgabenstellung:

(a) Ermittle mithilfe der Graphik die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X und trag die entsprechenden Werte in der nachstehenden Tabelle ein!

Ausbezahlungsbetrag x in €	0	1	2	4
P(X=x)	0,2	0,3	0,4	0,1

Begründe, warum die Funktion F monoton steigend ist und warum das Maximum von F immer 1 sein muss!

(b) Der Erwartungswert von X beträgt bei diesem Spiel € 1,50, d. h., im Mittel beträgt der auszuzahlende Betrag € 1,50.

Versetze dich in die Lage des Spielbetreibers. Wie groß wählst du den Betrag der Spielgebühr e pro Drehung mindestens, wenn du die Größe des Erwartungswerts von X kennst? Gib eine Begründung für deine Wahl an!

Die Zufallsvariable Y gibt die Höhe des (tatsächlichen) Gewinns aus der Sicht der Spielerin/des Spielers an.

Welche Werte y wird der Gewinn in Abhängigkeit von e bei den bekannten Auszahlungsbeträgen € 0, € 1, € 2 oder € 4 annehmen?

Vervollständige die Tabelle und gib die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y an!

Gewinn y in €	$0 - e$	$1 - e$	$2 - e$	$4 - e$
$P(Y = y)$	0,2	0,3	0,4	0,1

Lösungserwartung:

(a) Tabelle: siehe oben!

Eine kumulierte Verteilungsfunktion entsteht durch Summenbildung der Einzelwahrscheinlichkeiten. Da die Einzelwahrscheinlichkeiten definitionsgemäß immer größer oder gleich 0 sein müssen, ist die Funktion F monoton steigend. Das Maximum muss 1 sein, da die Summe aller Einzelwahrscheinlichkeiten einer Wahrscheinlichkeitsverteilung 1 ergeben muss.

(b) Tabelle: siehe oben!

e muss größer als € 1,50 sein, da der Spielbetreiber auf lange Sicht einen Gewinn und keinen Verlust erzielen möchte, der sich aus $e - 1,5 > 0$ errechnet.

---

14 - MAT - AG 2.2, FA 1.7, FA 5.2, WS 2.3, WS 3.1, WS 3.3 - Schwarzfahren als Volkssport - BIFIE Aufgabensammlung

6. Im Jahr 2010 wurden in den Graz-Linien exakt 36 449 Schwarzfahrer und Schwarzfahrerinnen auf frischer Tat ertappt. ____/0

„Ihren Fahrschein, bitte!“ - diese freundliche, aber bestimmte Aufforderung treibt Schwarzfahrern regelmäßig den Angstschweiß ins Gesicht. Zu Recht, heißt es

dann doch 65 Euro Strafe zahlen. Mehr als 800 000 Fahrschein- kontrollen wurden im Vorjahr in den Grazer Bus- und Straßenbahnlinien durchgeführt. 36 449 Personen waren Schwarzfahrer. Gegenüber 2009 ist das ein leichtes Minus von 300 Beanstandungen. Für die Graz-Linien ist das ein Beweis für den Erfolg der strengen Kontrollen. Für den Vorstand der Graz-Linien steht darum eines fest: „Wir werden im Interesse unserer zahlenden Fahrgäste auch 2011 die Kontrollen im gleichen Ausmaß fortsetzen.“ Denn den Graz-Linien entgehen durch den Volkssport Schwarzfahren jedes Jahr Millionen. Rechnet m an die Quote der bei den Kontrollen ertappten Schwarzfahrer (ca. 5 %) auf die Gesamtzahl der beförderten Personen hoch (ca. 100 Mio. pro Jahr), dann werden aus 36 449 schnell fünf Millionen, die aufs Ticket pfeifen...

(Quelle: Meine Woche Graz, April 2011, adaptiert)

In diesem Zeitungsartikel wird der Begriff Schwarzfahrer für Personen, die ohne gültigen Fahrschein angetroffen werden, verwendet. Fahrgäste, die ihre Zeitkarte (z. B. Wochenkarte, Schülerfreifahrtsausweis) nicht bei sich haben, gelten nicht als Schwarzfahrer/innen.

Nach Angaben der Graz-Linien beträgt der Anteil der Schwarzfahrer/innen etwa 5 %.

Zwei Kontrolleure steigen an der Haltestelle Jakominiplatz in einen Wagen der Straßenbahnlinie 5 und kontrollieren alle 25 Fahrgäste. An der Haltestelle Hauptplatz steigen sie in einen Wagen der Linie 3 um, in dem sie alle 18 Fahrgäste kontrollieren.

Aufgabenstellung:

(a) Es soll die Wahrscheinlichkeit p_1 berechnet werden, dass die Kontrolleure mindestens eine Schwarzfahrerin/einen Schwarzfahrer ermitteln, aber erst in der Linie 3 auf diese Person treffen. Gib einen geeigneten Term an, mit dem diese Wahrscheinlichkeit p_1 ermittelt werden kann, und berechne diese!

Es sei p_2 die Wahrscheinlichkeit, bereits im Wagen der Linie 5 auf mindestens eine Schwarzfahrerin/einen Schwarzfahrer zu treffen. Begründe, warum p_2 größer als p_1 sein muss, ohne p_2 zu berechnen!

(b) Es wird angenommen, dass bei den durchgeführten Kontrollen nur 1 % aller fünf Millionen Personen, die keinen Fahrschein mithaben, entdeckt werden. Man weiß, dass 10 % dieser fünf Millionen Personen eine Zeitkarte besitzen, die sie aber nicht bei sich haben, und daher nicht als Schwarzfahrer/innen gelten. Wird eine Schwarzfahrerin/ein Schwarzfahrer erwischt, muss sie/er zusätzlich zum Fahrpreis von € 2 noch € 65 Strafe zahlen. Gehe davon aus, dass im Durchschnitt die nicht erwischten Schwarzfahrer/innen jeweils entgangene Einnahmen eines Einzelfahrscheins von € 2 verursachen.

Berechne den in einem Jahr durch die Schwarzfahrer/innen entstandenen finanziellen Verlust für die Grazer Linien!

Das Bußgeld müsste wesentlich erhöht werden, um eine Kostendeckung zu erreichen. Ermittle den neuen Betrag für ein kostendeckendes Bußgeld!

(c) Die Anzahl der entdeckten Schwarzfahrer/innen nahm gegenüber 2009 um 300 ab und betrug 2010 nur mehr 36 449. Man geht davon aus, dass durch verstärkte Kontrollen eine weitere Abnahme der Anzahl an Schwarzfahrerinnen/Schwarzfahrern erreicht werden kann.

Beschreibe diese Abnahme beginnend mit dem Jahr 2009 sowohl als lineares als auch als exponentielles Modell!

Gib jeweils einen Funktionsterm an, der die Anzahl S der Schwarzfahrer/innen nach t Jahren, ausgehend von dem Jahr 2009, beschreibt!

Berechne die Anzahl der Schwarzfahrer/innen nach 10 Jahren, also im Jahr 2019, mit beiden Modellen! Welche Schlussfolgerungen über die beiden Modelle ziehst du aus dem Ergebnis?

Lösungserwartung:

(a) $p_1 = 0{,}95^{25} \cdot (1 - 0{,}95^{18}) \approx 0{,}1672$

Mögliche Argumentationen:

- Die Wahrscheinlichkeit p_1 ist höchstens die Wahrscheinlichkeit, unter 18 Personen mindestens 1 Schwarzfahrer/in zu finden. Die Wahrscheinlichkeit p_2, bereits im Wagen der Linie 5 auf mindestens 1 Schwarzfahrer/in zu treffen, ist größer als die Wahrscheinlichkeit p_1, da die Wahrscheinlichkeit, unter 25 Kontrollierten eher 1 Schwarzfahrer/in anzutreffen, größer ist als unter 18 Kontrollierten.
- Die Wahrscheinlichkeit p_1 ist höchstens die Wahrscheinlichkeit, unter 25 Personen keine Schwarzfahrerin/keinen Schwarzfahrer zu finden. Diese ist kleiner als 0,5. Die Wahrscheinlichkeit p_2 ist die Wahrscheinlichkeit, unter 25 Personen mindestens 1 Schwarzfahrer/in zu treffen. p_2 ist größer als 0,5, also $p_2 > p_1$.

(b) Der zu erwartende Verlust wird wie folgt berechnet:

10 % der Fahrgäste ohne Fahrschein besitzen eine Zeitkarte, daraus folgt, dass 90 % von den 99 % Schwarzfahrer/innen sind.

$V = (-0{,}99 \cdot 0{,}9 \cdot 2 + 0{,}01 \cdot 0{,}9 \cdot 65) \cdot 5\,000\,000 =$

$= (-0{,}891 \cdot 2 + 0{,}009 \cdot 65) \cdot 5\,000\,000 \approx -1{,}197 \cdot 5\,000\,000 \approx$ € -5.985-000

Soll der Verlust $V = 0$ sein, dann gilt: $0 = -0{,}891 \cdot 2 + 0{,}009 \cdot B$

$\rightarrow B =$ € 198.

Das Bußgeld B müsste auf € 198 erhöht werden.

(c) lineare Abnahme: $S(t) = 36\,749 - 300 \cdot t$

exponentielle Abnahme: $S(t) = 36\,749 \cdot (36\,449/36\,749)^t$

Bei linearer Abnahme sind es nach 10 Jahren noch 33 749, bei exponentieller Abnahme 33 857 Personen. Der Unterschied ist gering und beide Modelle sind für diesen Zeitraum gleich gut.

---

17 - MAT - AN 1.1, WS 1.1, AN 1.3, FA 1.9 - Emissionen - BIFIE Aufgabensammlung

7. Laut Immissionsschutzgesetz - Luft (IG-L) gilt auf manchen Autobahnabschnitten in Österreich für PKW eine Tempo-100-Beschränkung, wenn die Grenzwerte für bestimmte Luftschadstoffe überschritten werden. Für LKW gilt ein generelles Tempolimit von 80 km/h. ____/0

   Abbildung 1 zeigt vier Messwerte für die freigesetzte Menge von Stickoxiden (NO_x) bei unterschiedlichen Fahrgeschwindigkeiten (in km/h) für einen durchschnittlichen PKW. Die freigesetzte NO_x-Menge wird in Gramm pro gefahrenem Kilometer angegeben. Die Abhängigkeit von Fahrgeschwindigkeit und NO_x-Ausstoß wurde durch eine Funktion A modelliert, deren Graph ebenfalls in Abbildung 1 dargestellt ist.

   Abbildung 2 zeigt den Anteil der Verkehrsmittel (PKW, LKW, sonstige) am Verkehrsaufkommen und am Ausstoß (= Emission) von Stickoxiden und Feinstaub (PM 10) im Unterinntal in Tirol.

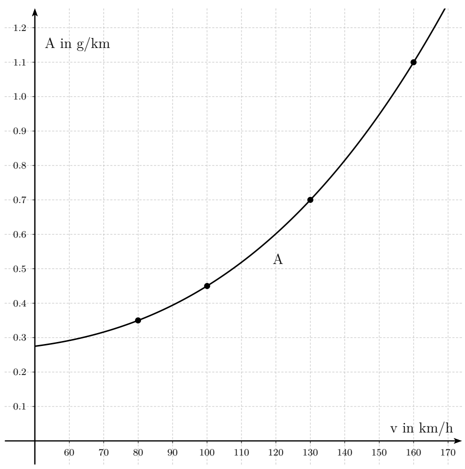


Abbildung 1

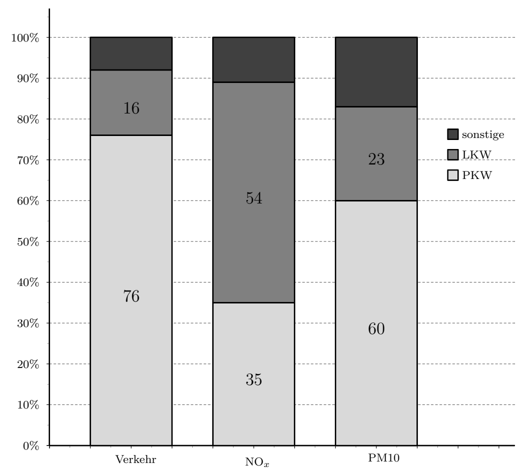


Abbildung 2

Quelle: http://www.tirol.gv.at/themen/verkehr/verkehrsplanung/verkehrsprojekte/tempo100

Aufgabenstellung:

(a) Ermittle anhand der Messwerte in Abbildung 1, um wie viele Prozent der Sickoxid-Ausstoß eines PWK abnimmt, wenn statt der sonst erlaubten 130 km/h nur mit einer Geschwindigkeit von 100 km/h gefahren werden darf!

Ist der Stickoxid-Ausstoß eines PKW direkt proportional zur Fahrgeschwindigkeit? Begründe deine Antwort anhand des Graphen der Modellfunktion A in Abbildung 1.

(b) Verursachen im Tiroler Unterinntal die Verkehrsmittel mit dem größten Anteil am Verkehrsaufkommen auch die meisten Stickoxid- bzw. Feinstaub-Emissionen? Begründe deine Antwort!

Geschwindigkeitsmessungen auf der Autobahn A12 im Tiroler Unterinntal haben gezeigt, dass die Geschwindigkeitslimits von mehr als 90 % der Verkehrsteilnehmer/innen eingehalten werden und weniger als 1 % der Verkehrsteilnehmer/innen die Geschwindigkeitslimits um mehr als 10 % überschreiten. Die Geschwindigkeitsüberschreitungen können daher für die folgende Fragestellung vernachlässigt werden.

Begründe, welche der beiden Maßnahmen (A oder B) wirkungsvoller ist, wenn entlang der A12 die Stickoxid-Emissionen weiter reduziert werden sollten! Durch Maßnahme A eventuell anfallende zusätzliche Emissionen durch die Bahn werden vernachlässigt.

A eine Verlagerung der Hälfte des Gütertransports durch LKW auf die Schiene (d. h. Transport der LKW mit der Bahn)

B ein Tempolimit von 80 km/h für PKW und LKW

Entnehme die für die Begründung benötigten Werte den Abbildungen 1 und 2 und führe diese an!

(c) Ermittle rechnerisch anhand von Abbildung 1 das Ergebnis des Ausdrucks $\frac{A(160)-A(100)}{60}$ auf vier Dezimalstellen genau!

Interpretiere das Ergebnis dieses Ausdrucks im Hinblick auf die NO_xEmissionen!

(d) Zur Modellierung der in Abbildung 1 dargestellten Abhängigkeit des NO_x-Ausstoßes A von der Fahrgeschwindigkeit v kommen unterschiedliche Funktionstypen in Frage.

Welche Funktionstypen können zur Modellierung der Funktion A verwendet worden sein? Kreuze die beiden geeigneten Funktionsgleichungen an!

$A(v) = a \cdot v + b$ mit $a > 0, b > 0$	
$A(v) = a \cdot v^2 + b$ mit $a < 0, b > 0$	
$A(v) = a \cdot v^2 + b \cdot v + c$ mit $a > 0, c > 0, b \in \mathbb{R}$	⊠
$A(v) = a \cdot b^v$ mit $a > 0, b > 1$	⊠
$A(v) = a \cdot b^v$ mit $a > 0, b < 1$	

Begründe, warum die drei restlichen Funktionsgleichungen für die Modellierung von A in Abbildung 1 nicht geeignet sind!

Lösungserwartung:

(a) Richtige Berechnung der Abnahme der NO_x-Emissionen: $\frac{0{,}5}{0{,}75} \approx 0{,}67$.

Der Stickoxid-Ausstoß nimmt um ungefähr 33 % ab.

Alle Ergebnisse im Intervall [30 %;35 %] sind als richtig zu werten.

Auch die Antwort, dass die Emissionen bei einer Reduktion der Geschwindigkeit auf 100 km/h nur mehr 67 % des Wertes bei 130 km/h betragen, ist als richtig zu werden (Lösungsintervall, falls die noch vorhandenen Emissionen angegeben werden: [65 %; 70 %]).

Zudem muss eine Begründung angegeben sein, dass A nicht direkt proportional zu v ist, z.B.: *Der Stickoxid-Ausstoß ist nicht direkt proportional zur Fahrgeschwindigkeit, weil der Graph von A nicht linear verläuft.*

Auch andere, aus der Abbildung ableitbare Formulierungen wie z.B. *Nicht direkt proportional, weil sich die Emissionen mehr als verdoppeln, wenn die*

Geschwindigkeit verdoppelt wird, aufgrund derer eine direkte Proportionalität ausgeschlossen werden kann, sind als richtig zu werten.

(b) Die Antwort ist als richtig zu werten, wenn sinngemäß begründet ist, dass PKW zwar den größten Anteil an den Feinstaub-Emissionen besitzen, bei den Stickoxid-Emissionen aber die LKW die Hauptverursacher sind, z. B.: Im Tiroler Unterinntal haben PKW mit 76 % den größten Anteil am Verkehrsaufkommen. Sie verursachen mit 60 % zwar den größten Anteil der Feinstaub-Emissionen, aber nur 35 % der Stickoxid-Emissionen. Anmerkung: Die Zahlenwerte müssen nicht angeführt sein.

Zudem muss eine schlüssige Begründung angegeben werden, dass Maßnahme A wirkungsvoller für eine Stickoxid.Reduktion ist, z. B.: LKW verursachen 54 % der NO_x-Emissionen im Straßenverkehr, obwohl ihr Anteil am Verkehrsaufkommen nur 16 % beträgt. Eine Reduktion des LKW-Verkehrs auf die Hälfte würde die NO_x-Emissionen um ca. 27 % reduzieren.

PKW haben zwar einen Anteil von 76 % am Verkehrsaufkommen, sind aber nur für 35 % der NO_x-Emissionen verantwortlich. Durch eine Reduktion des Tempolimits von 130 km/h auf 80 km/h könnten laut Abbildung 1 maximal die Hälfte dieser Emissionen, also etwa 17 %, vermieden werden. Eine Verlagerung der Hälfte des LKW-Verkehrs auf die Schiene wäre daher die wirkungsvollere Maßnahme zur Reduktion der NO_x-Emissionen.

Anmerkung: Auch eine Begründung mit gerundeten relativen Anteilen (drei Viertel etc.) ist als richtig zu werten.

(c) Richtige Berechnung des Differenzenquotienten: $\frac{A(160)-A(100)}{60} = \frac{1{,}05-0{,}5}{60} \approx 0{,}0092$, wobei Ergebnisse aus dem Intervall $[0{,}0088; 0{,}0095]$ als richtig zu werten sind. Die Angabe der Einheit ist nicht erforderlich.

Zudem muss der Differenzenquotient richtig interpretiert werden, z.B.: *Wenn die Geschwindigkeit von 100 km/h auf 160 km/h erhöht wird, beträgt die mittlere Zunahme der NO_x-Emissionen 0,0092 g/km pro km/h.*

Auch analoge Formulierungen wie z.B. *mittlere Änderungsrate des Stickoxid-Ausstoßes* sind als richtig zu werten. Das Geschwindigkeisintervall [100 km/h; 160 km/h] muss in der Interpretation in irgendeiner Form vorkommen.

(d) Lösung Multiple Choice: siehe oben.

Zudem müssen drei sinngemäß richtige Begründungen angegeben sein, warum die restlichen Funktionsgleichungen für die Modellierung nicht geeignet sind, z.B.:

Der Graph von $A(v) = a \cdot v + b$ ist linear und daher nicht geeignet.

Der Graph von $A(v) = a \cdot v^2 + b$ mit $a < 0, b > 0$ ist eine nach unten geöffnete Parabel und daher nicht geeignet.

Der Graph von $A(v) = a \cdot b^v$ mit $a > 0, b < 1$ ist fallend und daher nicht geeignet.

---

22 - MAT - AN 1.3, FA 1.5, FA 1.8, WS 2.3, WS 3.2 - Zehnkampf - BIFIE Aufgabensammlung

8. Die „Königsdisziplin“ der Leichtathletik ist bei den Männern der Zehnkampf. Dabei erhält jeder Athlet in jeder der 10 Disziplinen Punkte, die für jede Disziplin nach einer eigenen Formel errechnet werden. Für den Weitsprung gilt die Formel $P = 0{,}14354 \cdot (x - 220)^{1{,}4}$. Dabei ist x die Sprungweite in cm und P die Punktezahl (auf Ganze gerundet). ____/0

   Im Bewerb sind 3 Sprünge erlaubt. Gewertet wird der weiteste fehlerfreie Sprung. Als Fehlversuch gilt in erster Linie das Übertreten beim Absprungbalken. Dies passiert in ca. 1 von 20 Versuchen. Der Weltrekord im Weitsprung liegt bei 895 cm. Der Weltrekord im Zehnkampf wurde von Roman Sebrle 2001 beim Leichtathletikmeeting in Götzis aufgestellt und liegt bei 9 026 Punkten. Seine Weitsprungleistung betrug dabei 811 cm.

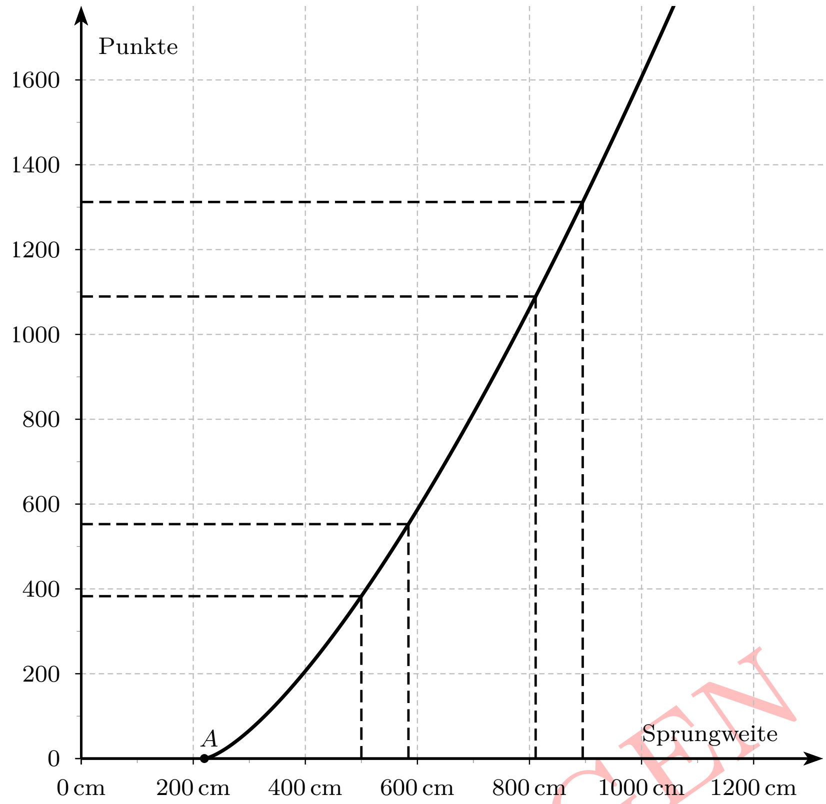
Aufgabenstellung:

(a) Berechne, wie viele Punkte Roman Sebrle mehr erhalten hätte, wenn er die Weltrekordweite gesprungen wäre!

Begründe mit der Formel, warum erst Sprünge ab 220 cm einen Punktwert ergeben.

(b) Eine Sprungleistungssteigerung um 84 cm bringt nicht von jedem Ausgangswert den gleichen durchschnittlichen Punktezuwachs (in Punkten/cm). Zeige das für die Intervalle [500 cm; 584 cm] und [811 cm; 895 cm] durch Rechnung!

Begründe mithilfe der untenstehenden Graphik, warum ein absolut gleicher Weitenzuwachs für größere Ausgangswerte mehr Punkte bringt als für kleinere Ausgangswerte!



(c) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ein Athlet die Weitsprungpunkte bei seinem Zehnkampf ohne Fehlversuch erhält!

Durch bessere Trainingsmethoden kann dieser Wahrscheinlichkeitswert erhöht werden, indem die Fehlerquote von 1 : 20 gesenkt wird, etwa auf $1 : n$. Wenn unter n Sprüngen nur ein Fehlversuch dabei ist, ergibt sich eine Erfolgsquote von $\frac{n-1}{n}$. Begründe damit, warum die oben genannte Wahrscheinlichkeit nie 1 sein kann!

Lösungserwartung:

(a) $f(895) \approx 1\,312$, $f(811) \approx 1\,089$. Er hätte um 223 Punkte mehr erzielt.

Die Basis (der Radikand) wird erst ab $220\,\text{cm} \geq 0$. (oder eine sinngemäßge Formulierung.

(b) $\frac{f(584)-f(500)}{584-500}$ bzw. $\frac{f(895)-f(811)}{895-811}$

im ersten Intervall: ca. 2,02 Punkte/cm

im zweiten Intervall: ca. 2,65 Punkte/cm

Begründung: f ist streng monoton wachsend und steig im zweiten Intervall schneller. (Jede sinngemäß formulierte Antwort ist richtig.)

(c) X ... Anzahl der Fehlversuche

$p = \frac{1}{20}$, $q = p - 1 = \frac{19}{20}$

$P(X = 0) = ... = \left(\frac{19}{20}\right)^3 = 0{,}857$, d.h. mit einer Wahrscheinlichkeit von 85,7 %.

Begründung: Da der Zähler immer kleiner als der Nenner ist, ist $\frac{n-1}{n} < 1$. Daher muss auch die 3. Potenz < 1 sein.

Oder:

Sobald die Wahrscheinlichkeit für einen Fehlversuch größer als 0 ist, muss die Wahrscheinlichkeit, dass 3 Sprünge ohne Fehlversuch gelingen, kleiner als 1 sein. (Sinngemäße Argumentation möglich!)

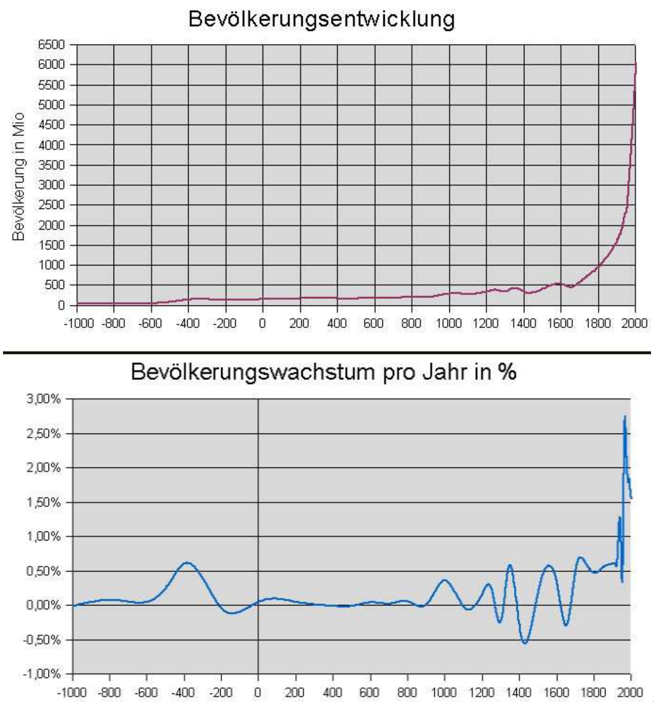
---

24 - MAT - AN 1.1, FA 2.2, FA 5.2, FA 5.3, FA 5.6, WS 1.1, WS 1.2 - Bevölkerungsentwicklung - BIFIE Aufgabensammlung

9. Die Weltbevölkerung ist in den vergangenen Jahrhunderten unterschiedlich stark gewachsen. Für die weitere Entwicklung bis zum Ende dieses Jahrhunderts gibt es unterschiedliche Prognosen. ____/0

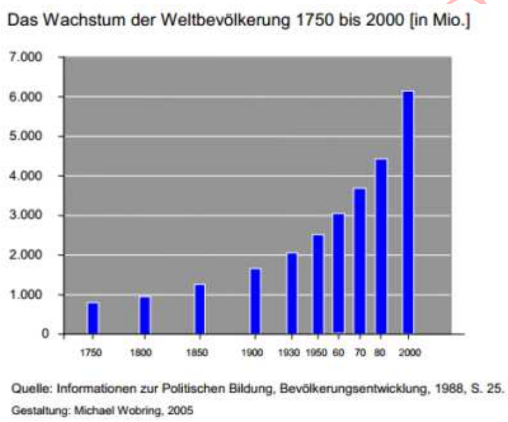
   Abbildung 1 zeigt die Bevölkerungsentwicklung in den vergangenen 3 000 Jahren.
   Abbildung 2 zeigt die Bevölkerungsentwicklung von 1750 bis 2010.
   Abbildung 3 zeigt die Bevölkerungsentwicklung von 1950 bis 2010.

   Die untenstehende Tabelle zeigt die Bevölkerungsentwicklung nach Kontinenten und Subkontinenten von 1900 bis 2000.



Quelle: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/8a/World-pop-hist-de-2.png

Abbildung 1



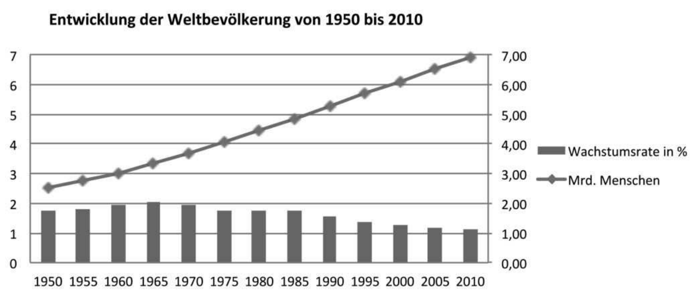


Abbildung 3

Abbildung 2

Jahr	Afrika	Asien	Europa	Lateinamerika	Nordamerika	Ozeanien
1900	133	925	430	74	82	6
1950	227	1 403	547	167	172	13
1975	419	2 379	676	323	242	21
2000	819	3 698	727	521	319	31

Aufgabenstellung:

(a) Ermittle anhand der Abbildungen, um wie viele Menschen die Weltbevölkerung von 1600 bis 18000 zugenommen hat!

Nenne zwei Zeiträume, in denen die Weltbevölkerung mindesten 100 Jahre lang abgenommen hat, und begründe ihre Antwort!

(b) Die Weltbevölkerung hat von 1930 bis 1980 annähernd exponentiell zugenommen. Berechne unter dieser Annahme für diesen Zeitraum die jährliche Wachstumsrate auf Zehntelprozent genau!

(c) Begründe anhand der jährlichen Wachstumsraten aus Abbildung 3, warum die Entwicklung der Weltbevölkerung von 1950 bis 2010 nicht durch eine Exponentialfunktion beschrieben werden kann!

Bei konstanter Zunahme der Bevölkerungszahl ab 2010 wird für das Jahr 2050 eine Bevölkerungszahl von 10,4 Milliarden prognostiziert.
Berechne, von welcher jährlichen Zunahme bei dieser Prognose ausgegangen wird! Gib die jährliche Zunahme in Millionen Menschen an!

(d) Angenommen, die absoluten Zahlen der Bevölkerungsentwicklung der Kontinente und Subkontinente im Zeitraum von 1900 bis 2000 werden in einem Säulendiagramm mit linearer Skalierung dargestellt.
Begründe, warum die starke Bevölkerungszunahme in Ozeanien von 1900 bis 2000 in einem solchen Diagramm nicht erkennbar ist!

Gegeben sind fünf Aussagen zur Bevölkerungsentwicklung nach Kontinenten und Subkontinenten von 1900 bis 2000.
Kreuze die zutreffende(n) Aussage(n) an!

Die Bevölkerung Asiens hat sich im 20. Jahrhundert annähernd vervierfacht.	☒
Seit Beginn des 20. Jahrhunderts lebten in Lateinamerika mehr Menschen als in Nordamerika.	
Im Zeitraum von 1975 bis 2000 war die relative Bevölkerungszunahme in Afrika am größten.	☒
In Europa war die Bevölkerungszunahme von 1975 bis 2000 ge- ringer als von 1950 bis 1975.	☒
1950 lebten in Europa und Amerika zusammen bereits mehr als eine Milliarde Menschen.	

Lösungserwartung:

(a) Zunahme von 1600 bis 1800: ca. 500 Millionen Menschen

Die Weltbevölkerung hat mindestens 100 Jahre lang abgenommen in [250 v. Chr.; 50 v. Chr.] (bzw. $[-250; -50]$) und $[1400; 1500]$, da in diesen Zeitintervallen das jährliche Bevölkerungswachstum in % negativ ist.

(b) $N(t) = N_0 \cdot a^t$

$4{,}5 = 2 \cdot a^5 0$

$a \approx 1{,}016$, d.h. Zunahme um 1,6 % pro Jahr

(c) Bei einer exponentiellen Zunahme ist die jährliche Wachstumsrate konstant. Abbildung 3 zeigt, dass diese Voraussetzung im Zeitraum von 1950 bis 2010 nicht erfüllt ist.

Konstante jährliche Zunahme von 2010 bis 2050:
$\frac{10{,}4-6{,}9}{40} = 0{,}0874$ Milliarden $= 87{,}5$ Millionen

(d) Da die Bevölkerungszahl Ozeaniens von 1900 bis 2000 jeweils weniger als 1 % der Bevölkerungszahl Asiens betrug, sind die entsprechenden Säulen für Ozeanien sehr niedrig (Höhe fast null).
Daher ist die Verfünffachung der Bevölkerungszahl Ozeaniens nicht erkennbar.

Lösung Multiple Choice siehe oben

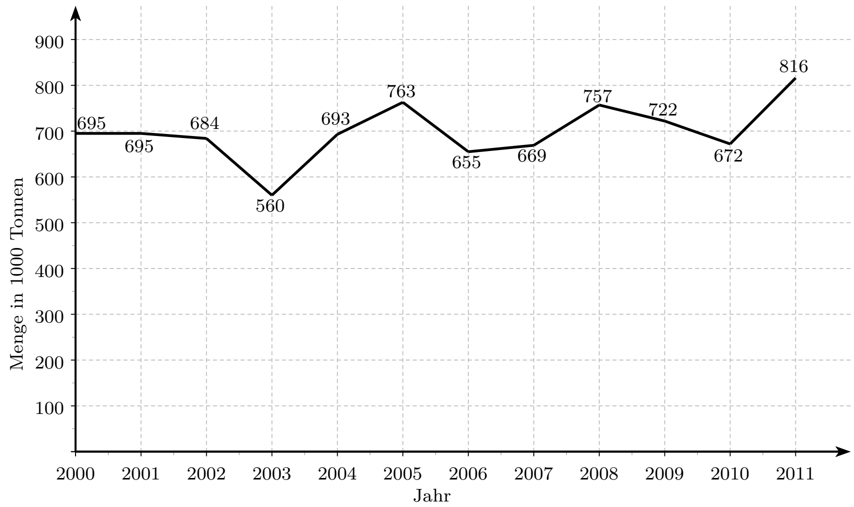
---

27 - MAT - AN 1.1, AN 1.3, FA 2.2, WS 1.2, WS 1.3, WS 1.1 - Kartoffeln in Österreich - BIFIE Aufgabensammlung

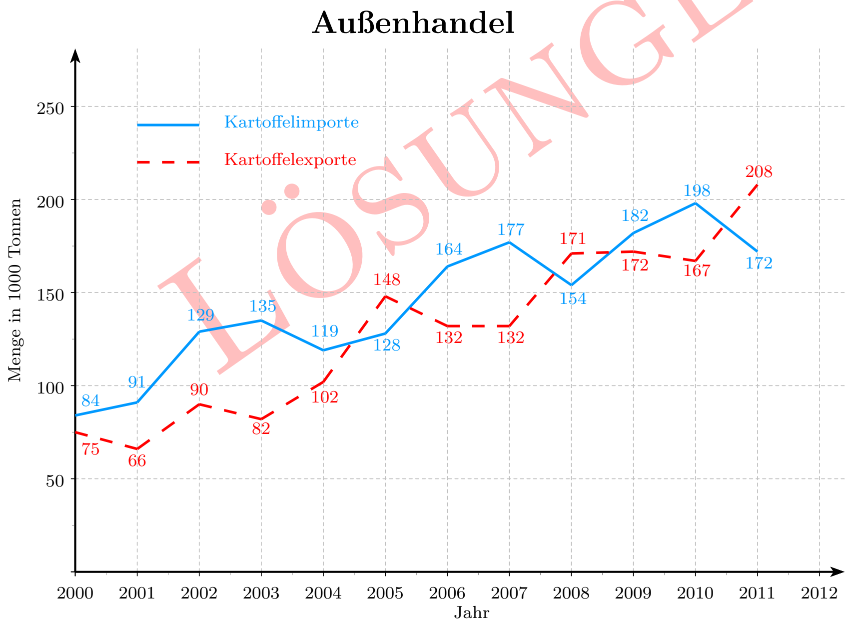
10. Die Kartoffel ist weltweit eines der wichtigsten Nahrungsmittel. ____/0

Die nachstehende Grafik zeigt die Entwicklung der Kartoffelerzeugung in Österreich vom Jahr 2000 bis zum Jahr 2011.

Kartoffelerzeugung



In der nachstehenden Abbildung werden Kartoffelexporte und -importe für den gleichen Zeitraum einander gegenübergestellt.



Aufgabenstellung:

(a) Entnehmen Sie der entsprechenden Graphik, zwischen welchen (aufeinanderfolgenden) Jahren die absolute Zunahme (in Tonnen) und die relative Zunahme (in Prozent) der Erzeugung im Vergleich zum Vorjahr jeweils am größten war! Gib die entsprechenden Werte an!

Im vorliegenden Fall fand die größte relative Zunahme der Erzeugung in einem anderen Zeitintervall statt als die größte absolute Zunahme.

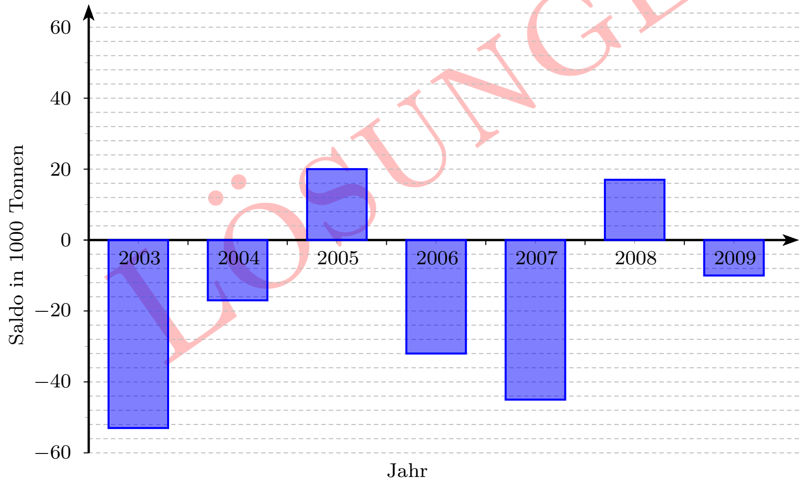
Gib eine mathematische Begründung an, warum die größte relative Zunahme und die größte absolute Zunahme einer Größe oder eines Prozesses nicht im gleichen Zeitintervall stattfinden müssen!

(b) Berechne und interpretiere den Ausdruck $\frac{E_{2011}-E_{2000}}{11}$, wobei E_{Jahr} die Exportmenge in einem Kalenderjahr angibt! Gib bei der Interpretation auch die entsprechende Einheit an.

Die Exportentwicklung von 2000 bis 2011 soll durch eine lineare Funktion f approximiert werden, wobei die Variable t die Anzahl der seit 2000 vergangenen Jahre sein soll. Die Funktionswerte für die Jahre 2000 und 2011 sollen dabei mit den in der Graphik angeführten Werten übereinstimmen. Gib eine Gleichung dieser Funktion f an!

(c) Stelle in der nachstehenden Abbildung die Differenz „Export minus Import" der Mengen an Kartoffeln für die Jahre 2003 bis 2009 in einem Säulendiagramm dar!

Saldo Export-Import

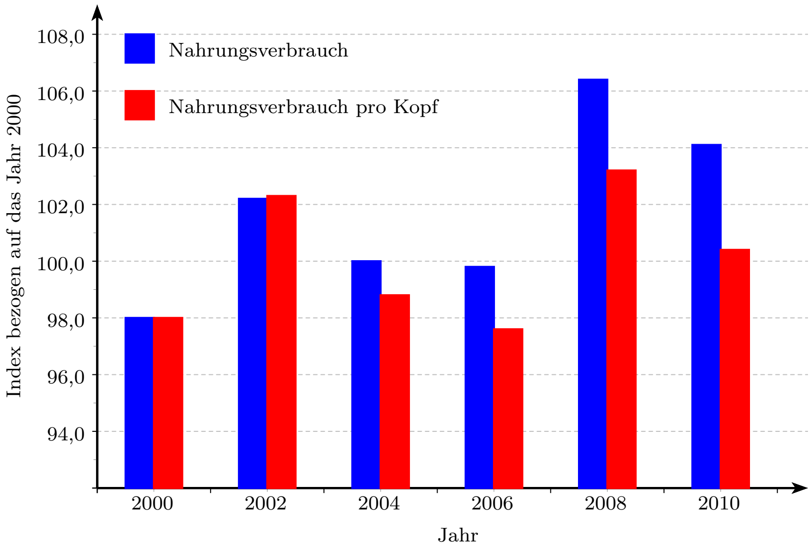


Berechne das arithmetische Mittel dieser Differenz für die genannten Jahre!

(d) Ein Index ist eine statistische Kennziffer, um die Entwicklung von Größen im Zeitverlauf darzustellen. Oft wird der Ausgangswert mit dem Basiswert 100 versehen. Ein Index von 120 bedeutet beispielsweise, dass eine Größe seit dem Basiszeitpunkt um 20 % gestiegen ist.

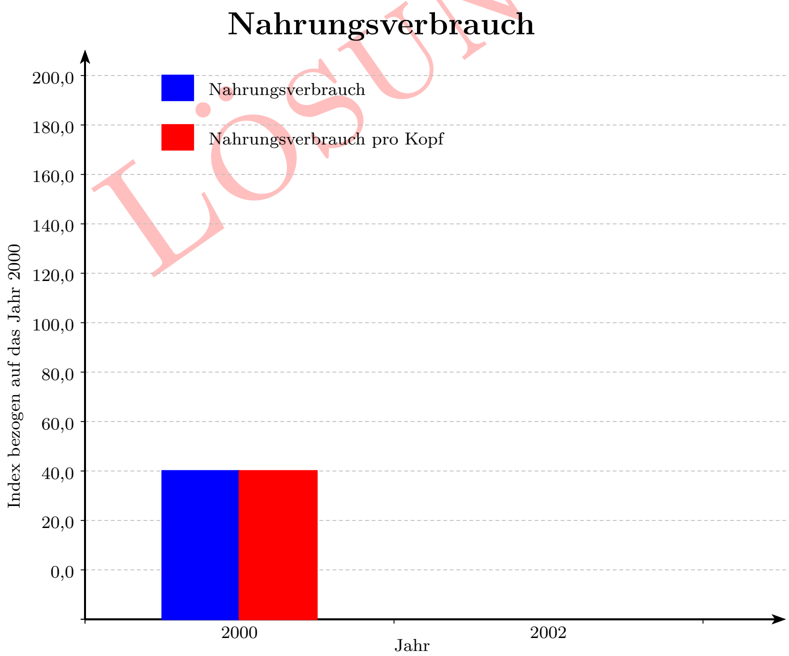
Die nachstehende Graphik zeigt die Entwicklung der in Österreich verzehrten Kartoffelmenge (Nahrungsverbrauch) bezogen auf das Jahr 2000.

Nahrungsverbrauch



Geben Sie jeweils ein Jahr an, in dem die Einwohnerzahl in Österreich höher bzw. niedriger war als im Jahr 2000! Begründe deine Antwort!

Zeichne in die nachstehende Graphik zwei mögliche Säulen für ein Jahr, in dem der absolute Nahrungsverbrauch niedriger und die Bevölkerungszahl höher war als im Jahr 2000!



Lösungserwartung:

(a) absolute Zunahme zwischen 2003 und 2004: 133 000 Tonnen
absolute Zunahme zwischen 2010 und 2011: 144 000 Tonnen

Die größte absolute Zunahme war im Zeitintervall von 2010 bis 2011.

relative Zunahme zwischen 2003 und 2004: 23,75 %

Lösungsintervall in Prozent: [23; 24]

relative Zunahme zwischen 2010 und 2011: ca. 21,43 %

Lösungsintervall in Prozent: [21; 22] Die größte relative Zunahme war zwischen 2003 und 2004.

Da für die Berechnung der relativen Zunahme einer Größe auch der Bezugswert entscheidend ist, müssen größte absolute Zunahme und größte relative Zunahme einer Größe oder eines Prozesses nicht im gleichen Zeitintervall stattfinden. Äquivalente Formulierungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

(b) $\frac{E_{2011}-E_{2000}}{11} \approx 12\,000$ Tonnen pro Jahr.

Die durchschnittliche Zunahme des österreichischen Kartoffelexports beträgt ca. 12 000 Tonnen pro Jahr.

Lösungsintervall: [12000; 12100] Die richtige Einheit muss in der Interpretation vorhanden sein.

f mit $f(t) = 75000 + 12000 \cdot t$ oder $f(t) = 75 + 12 \cdot t$ oder $f(t) = \frac{133}{11} \cdot t + 75$

Jede jährliche Zunahme aus dem oben angeführten Lösungsintervall muss akzeptiert werden.

(c) Lösung Grafik siehe oben

Genauigkeit der Säulenlängen: Toleranzbereich $\pm 5\,000$ Tonnen

arithmetisches Mittel: $\frac{-53-17+20-32-45+17-10}{7} \approx -17$

Lösungsintervall: bei Berechnung in 1 000 Tonnen: $[-18; -16]$; bei Berechnung in Tonnen: $[-18\,000; -16\,000]$

(d)
- niedrigere Einwohnerzahl (als im Jahr 2000) in den Jahren: 2002 (prozentuelle Veränderung des Nahrungsverbrauchs kleiner als jene des Nahrungsverbrauchs pro Kopf)
- höhere Einwohnerzahl (als im Jahr 2000) in den Jahren: 2004, 2006, 2008 und 2010 (prozentuelle Veränderung des Nahrungsverbrauchs größer als jene des Nahrungsverbrauchs pro Kopf)

Die Angabe eines Jahres ist hier ausreichend.

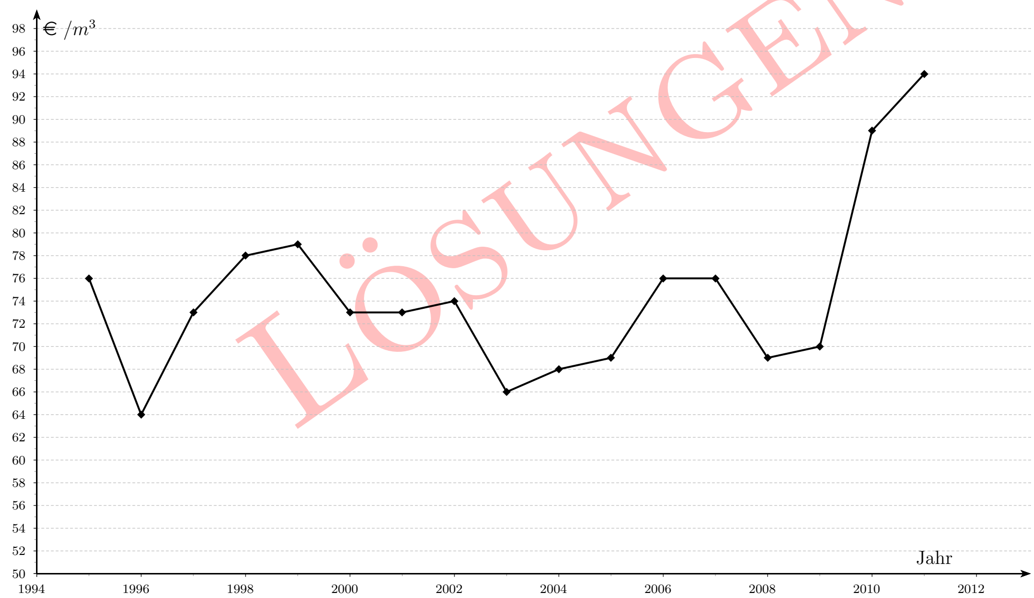
Die Säule für den gesamten Nahrungsverbrauch muss niedriger sein als die Säule für 100% im Jahr 2000. Die Säule für den Nahrungsverbrauch pro Kopf muss bei einer steigenden Bevölkerungszahl niedriger als die Säule für den gesamten Nahrungsverbrauch sein.

30 - MAT - AG 2.1, FA 4.1, FA 4.3, FA 5.1, FA 5.6, AN 1.1, AN 1.4, WS 1.3 - Waldbewirtschaftung - BIFIE Aufgabensammlung

11. Der Holzbestand eines durchschnittlichen Fichtenwaldes in Österreich beträgt $350\,m^3$ pro Hektar Waldfläche. Pro Jahr ist mit einem durchschnittlichen Zuwachs von 3,3 % zu rechnen. Bei einer nachhaltigen Bewirtschaftung, wie sie in Österreich vorgeschrieben ist, soll der Holzbestand des Waldes gleich bleiben oder leicht zunehmen. ____/0

    Der nachstehenden Grafik kann die Entwicklung des Holzpreises bei Fichtenholz im Zeitraum von 1995 bis 2011 entnommen werden.

Holzpreis bei Fichtenholz in € $/m^3$



Aufgabenstellung:

(a) Bestimme das maximale Holzvolumen (in m^3/ha), das bei einer nachhaltigen Bewirtschaftung pro Jahr geschlägert werden darf!

Berechne, um wie viel Prozent der Holzbestand eines durchschnittlichen Fichtenwaldes innerhalb von 10 Jahren zunimmt, unter der Annahme, dass keinerlei Schlägerungen vorgenommen werden, alle anderen genannten Rahmenbedingungen jedoch unverändert bleiben!

(b) Der Holzbestand eines 20 ha großen Fichtenwaldes wird in einem Zeitraum von 15 Jahren jährlich jeweils am Ende des Jahres (nachdem der jährliche Zuwachs abgeschlossen ist) um 10 m^3 pro Hektar (also um 200 m^3) verringert.

Ermitteln Sie den Holzbestand des Fichtenwaldes nach Ablauf von 15 Jahren!

Gib an, ob bei dieser Art der Bewirtschaftung der Holzbestand des Fichtenwaldes trotz Schlägerung exponentiell zunimmt, und begründe deine Entscheidung!

(c) Ermittel für den Zeitraum 2003 bis 2011 die empirische Standardabweichung des Holzpreises entsprechend der Formel

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}$$

Dabei werden mit x_i die Beobachtungswerte und mit $\overline{x}$ das arithmetische Mittel der Beobachtungswerte bezeichnet. Lies die dazu notwendigen Daten aus der Grafik ab!

Begründen Sie anhand der Grafik, warum die empirische Standardabweichung des Holzpreises für den Zeitraum 1998 bis 2004 kleiner ist als die empirische Standardabweichung für den Zeitraum 2005 bis 2011!

(d) Die Entwicklung des Holzpreises soll für den Zeitraum von 2009 bis 2011 durch eine Funktion P mit $P(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ modelliert werden. Der Holzpreis $P(t)$ wird in € $/m^3$ angegeben, die Zeitrechnung beginnt mit dem Jahr 2009 und erfolgt in der Einheit „Jahre“.

Führe die Modellierung auf Basis der Daten für die Jahre 2009, 2010 und 2011 durch und begründe, warum der Parameter a negativ sein muss!

Ermittle eine Prognose für den in der Grafik nicht angegebenen Holzpreis für das Jahr 2012 mithilfe dieser Modellfunktion!

(e) Bestimme für den Zeitraum von 1995 bis 2011 die absoluten Holzpreisänderungen aufeinanderfolgender Jahre!

Gib dasjenige Intervall [Jahr 1; Jahr 2] an, in dem sich der Holzpreis prozentuell am stärksten ändert!

Lösungserwartung:

(a) $350 \cdot 0{,}033 = 11{,}55$

Jährlich dürfen bei einer nachhaltigen Bewirtschaftung maximal 11,55 m^3/ha Holz geschlägert werden.

$1{,}033^{10} \approx 1{,}384$

Unter der Annahme, dass keine Schlägerungen erfolgen, nimmt der Holzbestand innerhalb von zehn Jahren um ca. 38,4 % zu.

(b) Tabelle:

Jahr	Holzbestand in m^3
0	7 000
1	7 031
2	7 063,023
3	7 096,102759
4	7 130,27415
5	7 165,573197
6	7 202,037112
7	7 239,704337
8	7 278,61458
9	7 318,808861
10	7 360,329554
11	7 403,220429
12	7 447,526703
13	7 493,295085
14	7 540,573822
15	7 589,412759

Wenn der Holzbestand eines 20 ha großen Fichtenwaldes jährlich jeweils am Ende des Jahres um 10 m^3 pro Hektar verringert wird, beträgt er nach Ablauf von 15 Jahren ca. 7 589,41 m^3.

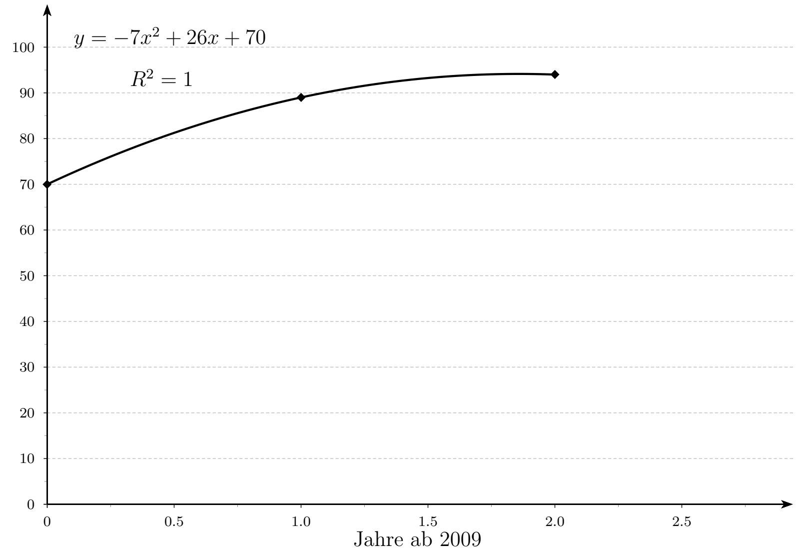
Bei dieser Art der Bewirtschaftung nimmt der Holzbestand nicht exponentiell zu, da das jährliche prozentuelle Wachstum nicht konstant ist.

(c) Die empirische Standardabweichung beträgt ca. 9,91 € $/m^3$.

Im Zeitraum von 1998 bis 2004 ist die empirische Standardabweichung des Holzpreises kleiner als im Zeitraum von 2005 bis 2011, da die Schwankungen der Werte des Holzpreises im Zeitraum von 1998 bis 2004 geringer sind.

(d) $P(t) = -7 \cdot t^2 + 26 \cdot t + 70$

Holzpreis in € $/m^3$



Der Wert des Parameters a muss negativ sein, weil der Graph der Modellfunktion eine nach unten geöffnete Parabel ist.

Prognosewert für das Jahr 2012:
$P(3) = 85\,€\ /m^3$

(e) Tabelle:

Jahr	Holzpreis in € $/m^3$	absolute Änderungen	prozentuelle Änderungen
1995	76		
1996	64	-12	-15,79
1997	73	9	14,06
1998	78	5	6,85
1999	79	1	1,28
2000	73	-6	-7,59
2001	73	0	0
2002	74	1	1,37
2003	66	-8	-10,81
2004	68	2	3,03
2005	69	1	1,47
2006	76	7	10,14
2007	76	0	0
2008	69	-7	-9,21
2009	70	1	1,45
2010	89	19	27,14
2011	94	5	5,62

Im Zeitraum [2009; 2010] ändert sich der Holzpreis prozentuell am stärksten.

---

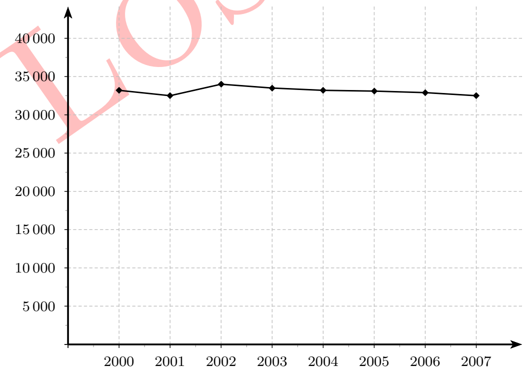
31 - MAT - WS 1.1, WS 1.3 - Hallenbad - Matura 2013/14 Haupttermin

12. Das örtliche Hallenbad einer kleinen Gemeinde veröffentlicht Anfang 2008 in der Gemeindezeitschrift eine Statistik über die jährlichen Besucherzahlen und die Anzahl der offenen Tage für die letzten acht Jahre: _____/0

Jahr	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Besucherzahlen	33 200	32 500	34 000	33 500	33 200	33 100	32 900	32 500
offene Tage	197	192	200	195	193	190	186	180

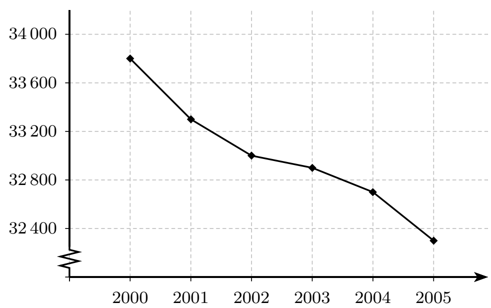
Das Hallenbad bedarf einer Renovierung. Im Gemeinderat steht nun die Entscheidung an, ob Geld in das Hallenbad investiert oder das Hallenbad geschlossen werden soll. Im Vorfeld der Entscheidung veröffentlichen zwei örtliche Gemeinderatsparteien - Partei A und Partei B - folgende Diagramme in ihren Parteizeitschriften:

Besucherzahlen 2000-2007



Partei A

Besucherzahlen 2000-2007



Partei B

Aufgabenstellung:

(a) Gib für jede Partei eine passende Botschaft an, wie mit dem jeweiligen Diagramm bezogen auf die Entwicklung der Besucherzahlen transportiert werden soll!

Partei A: ____________________

Partei B: ____________________

(b) Partei B hat bei der grafischen Darstellung verschiedene Manipulationen eingesetzt, um die Entwicklung der Besucherzahlen aus ihrer Sicht darzustellen.

Beschreibe zwei dieser angewandten Manipulationen!

(c) $\boxed{\text{A}}$ Ermittle die Besucherzahlen pro Öffnungstag (gerundet auf ein eine Nachkommastelle) für die entsprechenden Jahre!

Jahr	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
BesucherInnen pro Tag								

Formuliere eine dazu passende Aussage in Bezug auf die bevorstehende Entscheidung im Gemeinderat!

(a) **Lösungserwartung:**

Partei A: Das Hallenbad muss renoviert werden, da die Besucherzahlen über die letzten Jahre annähernd konstant geblieben sind.

Partei B: Das Hallenbad soll nicht renoviert werden, da die Besucherzahlen in den letzten Jahren stark abgenommen haben.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine richtige Aussage zu Partei A.

- Ein Punkt für eine richtige Aussage zu Partei B.
  Zulässig sind auch andere Formulierungen, die den Kern der Aussagen treffen.

(b) **Lösungserwartung:**

- Die senkrechte Achse beginnt bei null, allerdings ist der erste Abschnitt bis zum ersten Skalierungswert verkürzt dargestellt.
- Änderung/"Verfeinerung" der Skalierung
- Die x-Achsen-Skala beginnt mit 2002, daher fällt „der ansteigende Teil" in der Graphik weg (vgl. Anstieg der Besucherzahlen lt. Partei A).

Lösungsschlüssel:

Zwei Punkte: je ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekt angeführte Manipulation.

(c) **Lösungserwartung:**

Jahr	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
BesucherInnen pro Tag	168,5	169,3	170,0	171,8	172,0	174,2	176,9	180,6

Investitionen in das Hallenbad lohnen sich, denn in den letzten acht Jahren stieg die Zahl der täglichen Besucher/innen jedes Jahr an.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die richtigen Werte in der Tabelle. Die Angabe einer Null nach dem Komma (z. B.: 170,0) kann entfallen.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Antwort

---

40 - MAT - WS 2.1, WS2.2, WS 2.3, WS 3.2, WS 3.3 - Lottozahlen - Matura 2013/14 1. Nebentermin

13. Beim österreichischen Zahlenlotto sind 45 Kugeln mit den Zahlen von 1 bis 45 beschriftet. Bei einer Lottoziehung werden zufällig und ohne Zurücklegen 6 der 45 Kugeln aus der „Lottotrommel" entnommen. Die Wahrscheinlichkeit, dass ____/0

eine bestimmte Zahl im Rahmen einer Lottoziehung (6 aus 45) gezogen wird, beträgt $\frac{6}{45}$.

Ein Zufallsexperiment habe genau zwei Ausgänge: Ein Ereignis A tritt mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit ein oder es tritt nicht ein. Das empirische Gesetz der großen Zahlen besagt nun Folgendes: Bei einer hinreichend großen Anzahl von Durchführungen dieses Experiments stabilisieren sich die relativen Häufigkeiten $h_r(A)$ bei einem Wert, der der Wahrscheinlichkeit $P(A)$ für das Ereignis A entspricht.

Abbildung 1 zeigt die absoluten Ziehungshäufigkeiten der Zahlen 1 bis 45 bei den 104 Ziehungen im Kalenderjahr 2010.

Abbildung 2 zeigt die absoluten Ziehungshäufigkeiten der Zahlen 1 bis 45 bei 2 056 Ziehungen vom 1.1.1986 bis zum 27.11.2011.

Abbildung 1:

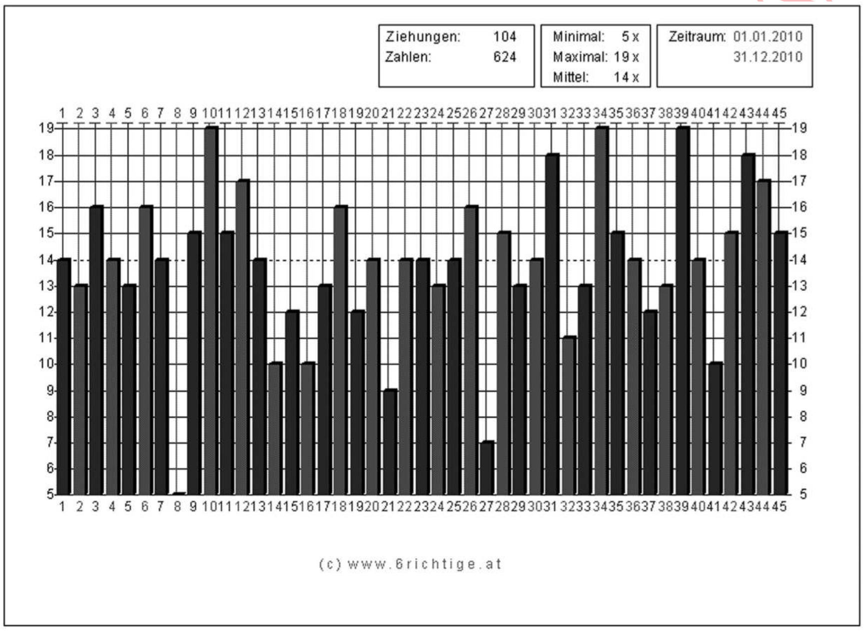
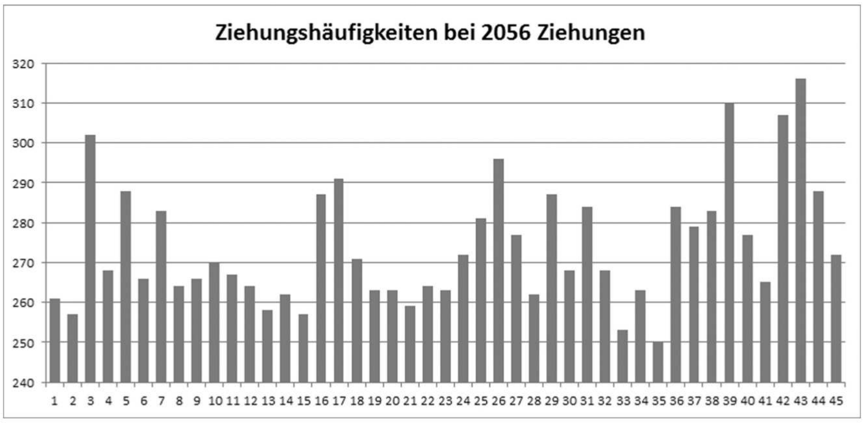


Abbildung 2:



Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an!

Stelle eine der falschen Aussagen zur Ziehungswahrscheinlichkeit richtig!

Die Ziehung der Gewinnzahlen $3, 12, 19, 25, 36, 41$ bei einer Lottoziehung ist gleich wahrscheinlich wie die Ziehung der Gewinnzahlen $1, 2, 3, 4, 5, 6$.	⊠
Eine Zahl, die bei einer Lottoziehung gezogen wurde, wird bei der darauffolgenden Lottoziehung mit einer Wahrscheinlichkeit kleiner als $\frac{6}{45}$ erneut gezogen.	
Im Kalenderjahr 2010 war die Wahrscheinlichkeit, die Zahl 8 zu ziehen, bei manchen Ziehungen kleiner als $\frac{6}{45}$.	
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl 17 als erste Zahl gezogen wird, beträgt bei jeder Ziehung $\frac{1}{45}$.	⊠
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl 32 bei einer Ziehung als zweite Zahl gezogen wird, beträgt $\frac{1}{44}$.	

(b) Ermittle die relative Ziehungshäufigkeit der Zahl 10 im Kalenderjahr 2010!

Zeige, dass die Ziehungshäufigkeiten der Zahl 10 in den Abbildungen 1 und 2 mit dem empirischen Gesetz der großen Zahlen im Einklang stehen!

(c) Überprüfe anhand von Abbildung 2, bei welchen Zahlen die absolute Ziehungshäufigkeit bei den 2 056 Ziehungen um mehr als das Doppelte der Standardabweichung vom Erwartungswert abweicht!

Gib an, welche Verteilung du für die Berechnungen verwendet hast, und begründe deine Entscheidung.

(a) **Lösungserwartung:**

Richtigstellung:

- Eine Zahl, die bei einer Lottoziehung gezogen wurde, wird bei der darauffolgenden Lottoziehung mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{6}{45}$ erneut gezogen.
- Im Kalenderjahr 2010 war die Wahrscheinlichkeit, die Zahl 8 zu ziehen, bei jeder Ziehung gleich $\frac{6}{45}$.

- Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl 32 bei einer Ziehung als zweite Zahl gezogen wird, beträgt $\frac{1}{45}$.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt ist nur dann zu geben, wenn genau zwei Aussagen angekreuzt sind und beide Kreuze richtig gesetzt sind.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Richtigstellung einer der drei falschen Aussagen.

(b) **Lösungserwartung:**

Die relative Ziehungshäufigkeit der Zahl 10 im Kalenderjahr 2010 beträgt $\frac{19}{104} \approx 0{,}183$.
Bei 2 056 Ziehungen hat sich die relative Häufigkeit $\left(\frac{270}{2\,056} \approx 0{,}131\right)$ der theoretischen Ziehungswahrscheinlichkeit von $\frac{6}{45} \approx 0{,}133$ im Vergleich zu den 104 Ziehungen des Kalenderjahres 2010 angenähert.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für das korrekte Bestimmen der relativen Ziehungshäufigkeit, wobei das Ergebnis in Bruch-, Dezimal- oder Prozentschreibweise angegeben werden kann.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Erklärung, warum die Häufigkeiten in den Abbildungen 1 und 2 mit dem empirischen Gesetz der großen Zahlen für die relative Ziehungshäufigkeit der Zahl 10 im Einklang stehen.

(c) **Lösungserwartung:**

$\mu = 2\,056 \cdot \frac{6}{45} \approx 274$ $\qquad \sigma = \sqrt{2\,056 \cdot \frac{6}{45} \cdot \frac{39}{45}} \approx 15$

$\mu - 2\sigma \approx 243$

$\mu + 2\sigma \approx 305$

Bei allen Zahlen, die höchstens 243-mal oder mindestens 305-mal gezogen wurden, weicht die Ziehungshäufigkeit um mehr als 2 σ vom Erwartungswert ab. Dies trifft auf die Zahlen 39, 42 und 43 zu.

Es wurde die Binomialverteilung verwendet, da es um Anzahlen geht („absolute Ziehungshäufigkeit"), es nur zwei mögliche Ausgänge bei einer Lottoziehung gibt (eine bestimmte Zahl wurde gezogen oder sie wurde nicht gezogen) und weil die Ziehungswahrscheinlichkeit von Ziehung zu Ziehung gleich bleibt.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für das Ermitteln der Zahlen 39,42 und 43.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Begründung, warum die Binomialverteilung verwendet werden darf.

---

43 - MAT - AN 1.1, FA 2.2, FA 2.5, AN 1.3, WS 2.2, WS 2.3 - Verkehrsunfälle - Matura 2013/14 2. Nebentermin

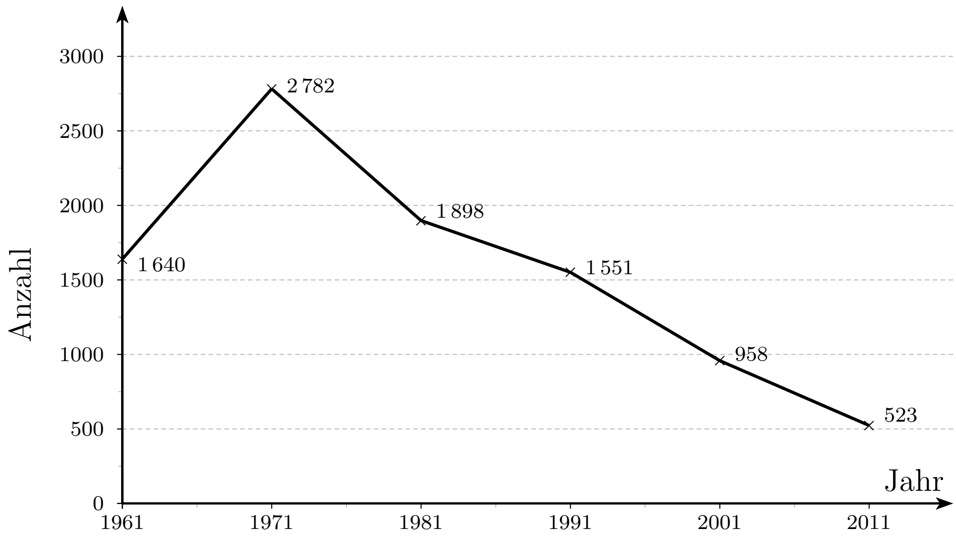
14. Die Verkehrsunfallstatistik in Österreich umfasst grundsätzlich alle Unfälle, die sich auf Österreichs Straßen mit öffentlichem Verkehr ereignen und bei denen Personen verletzt oder getötet werden. ____/0

    Die bei Straßenverkehrsunfällen Verletzten und Getöteten werden unter dem Begriff Verunglückte zusammengefasst.

    Einige der erhobenen Daten werden nachstehend in einer Tabelle und in zwei Grafiken angeführt.

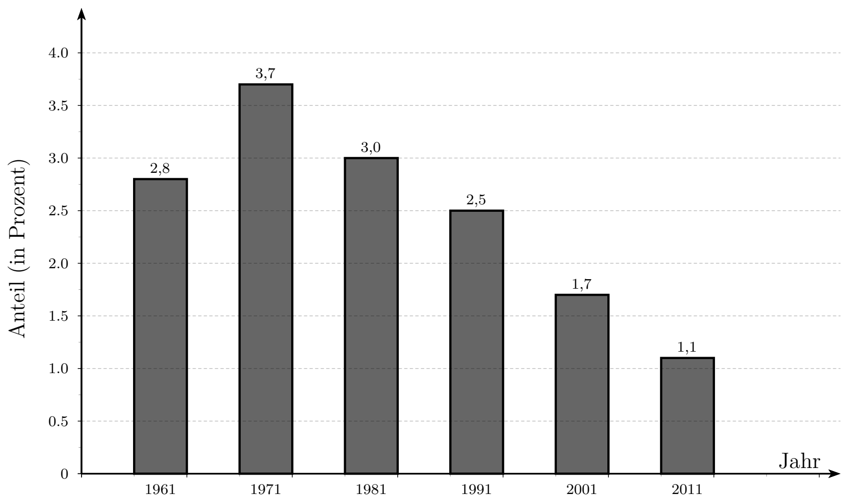
Jahr	Anzahl der Verkehrsunfälle mit Personenschaden	Kraftfahrzeugbestand zu Jahresende
1961	42 653	1 426 043
1971	52 763	2 336 520
1981	46 690	3 494 065
1991	46 013	4 341 042
2001	43 073	5 684 244
2011	35 129	6 195 207

Anzahl der bei Verkehrsunfällen Getöteten



3000
2500
2000
1500
1000
500
0
Anzahl
2 782
1 898
1 640
1 551
958
523
Jahr
1961
1971
1981
1991
2001
2011

Prozentueller Anteil der Getöteten an der Gesamtzahl der bei Verkehrsunfällen verunglückten Personen



Aufgabenstellung:

(a) Entnimm der entsprechenden Grafik, in welchem Zeitintervall die absolute und die relative Abnahme (in Prozent) der bei Verkehrsunfällen getöteten Personen jeweils am größten waren, und gib die entsprechenden Werte an!

Im vorliegenden Fall fand die größte relative Abnahme der Anzahl der bei Verkehrsunfällen Getöteten in einem anderen Zeitintervall statt als die größte absolute Abnahme. Gib eine mathematische Begründung an, warum die größte relative Abnahme und die größte absolute Abnahme einer Größe oder eines Prozesses nicht im gleichen Zeitintervall stattfinden müssen!

(b) Die Entwicklung des prozentuellen Anteils der Getöteten gemessen an der Gesamtzahl der bei Verkehrsunfällen verunglückten Personen kann für den Zeitraum von Beginn des Jahres 1971 bis Ende 2011 durch eine lineare Funktion f angenähert werden, wobei die Variable t die Anzahl der seit Ende 1970 vergangenen Jahre bezeichnet.

Ermittle eine Gleichung dieser Funktion f auf Basis der Daten aus der entsprechenden Grafik im Zeitraum von Beginn des Jahres 1971 bis Ende 2011!

Gib den theoretisch größtmöglichen Zeitraum an, für den diese Funktion f ein unter der Annahme eines gleichbleibenden Trends geeignetes Modell darstellt!

(c) Im Jahr 1976 wurde in Österreich die Gurtenpflicht eingeführt. Seit diesem Zeitpunkt ist man dazu verpflichtet, auf den vorderen Sitzen eines PKW oder Kombis den Sicherheitsgurt anzulegen. Durch die Einführung der Gurtenpflicht kam es zu einer deutlichen Abschwächung der Unfallfolgen.

Berechne auf Basis der Tabellenwerte für die Jahre 1971 und 1981 die durchschnittliche jährliche Abnahme der Anzahl der Unfälle mit Personenschaden!

Ein „Gurtenmuffel“ behauptet, dass es auch schon vor der Einführung der Gurtenpflicht im Zeitraum zwischen 1961 und 1971 zu einer relativen Abnahme der Verkehrsunfälle mit Personenschaden kam. Ermittle mithilfe des vorhandenen Datenmaterials Zahlen, die seine Aussage untermauern, und präzisieren Sie diese Aussage!

(d) Die nachstehende Tabelle enthält Daten über Verunglückte im Jahr 2001.

Verkehrsart	Anzahl der Verletzten	Anzahl der Getöteten
einspuriges KFZ	8 605	85
PKW	24 853	290
sonstige	11 567	148

Jemand ist im Jahr 2011 bei einem Verkehrsunfall verunglückt.

$\boxed{\text{A}}$ Gib die relative Häufigkeit als Schätzwert der Wahrscheinlichkeit, dass diese Person mit einem einspurigen KFZ oder einem PKW unterwegs war und den Unfall nicht überlebt hat, an!

Interpretiere die mit $\frac{24\,853}{25\,143} \approx 0{,}99$ angegebene Wahrscheinlichkeit im vorliegenden Zusammenhang!

(a) Lösungserwartung:

Die größte absolute Abnahme fand im Zeitintervall von 1971 bis 1981 statt (-884), die größte relative Abnahme war in den Jahren von 2001 bis 2011 (-0,454 bzw. -45,4 %).

Da für die Berechnung der relativen Abnahme einer Größe auch der Bezugswert entscheidend ist, müssen größte absolute Abnahme und größte relative Abnahme einer Größe oder eines Prozesses nicht im gleichen Zeitintervall stattfinden.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt wird für die korrekten Zeitintervalle und die richtigen Abnahmewerte vergeben. Toleranzintervall für relative Abnahme: $[-0{,}46; -0{,}45]$ bzw. $[-46\,\%; -45\,\%]$; die Vorzeichen müssen nicht angegeben sein

- Ein Punkt wird für eine (sinngemäß) richtige verbale Begründung vergeben. Dabei kann die Begründung auch anhand konkreter Zahlen erfolgen.

(b) **Lösungserwartung:**

$f(t) = -0{,}065t + 3{,}7$

Diese Funktion kann höchstens 57 Jahre, also bis zum Beginn des Jahres 2028, zur Modellbildung herangezogen werden.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt wird für die Angabe eines korrekten Funktionsterms vergeben. (Der Punkt kann auch vergeben werden, wenn eine andere Variable als t verwendet wird.) Toleranzintervall für die ersten Parameter: $[-0{,}08; -0{,}05]$.
- Ein Punkt wird für die Angabe der entsprechenden Zeitspanne und/oder des entsprechenden Jahres vergeben. Toleranzintervalle: [51 Jahre; 70 Jahre], [2022; 2042].

(c) **Lösungserwartung:**

Die Anzahl der Unfälle mit Personenschäden nahm durchschnittlich um 607,3 pro Jahr ab.

Anzahl der Unfälle mit Personenschaden pro tausend KFZ:

- 1961: 30 (berechneter Wert liegt bei $\approx 29{,}9$)
- 1971: 23 (berechneter Wert liegt bei $\approx 22{,}5$)

Bezogen auf die Anzahl der zugelassenen KFZ hat die Anzahl der Unfälle mit Personenschaden also tatsächlich abgenommen.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt wird für die korrekte Angabe der durchschnittlichen jährlichen Abnahme vergeben. Toleranzintervall: [600; 610].
- Ein Punkt wird für das Heranziehen des entsprechenden Datenmaterials und eine korrekte Berechnung vergeben. Die Aussage kann auch anhand der relativen Werte präzisiert werden.

(d) **Lösungserwartung:**

Verkehrsart	Anzahl der Verletzten	Anzahl der Getöteten	Summe
einspuriges KFZ	8 605	85	8 690
PKW	24 853	290	25 143
sonstiges	11 567	148	11 715
Summe	45 025	523	45 548

$\frac{(85+290)}{45\,548} \approx 0{,}008$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt ca. 0,8 %.

Die Wahrscheinlichkeit, den Unfall zu überleben, wenn man mit einem PKW verunglückt, beträgt 99 %.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt wird für die richtige Angabe der Wahrscheinlichkeit vergeben. Toleranzintervall: [0,008; 0,0083] bzw. [0,8 %; 0,83 %].
- Ein Punkt wird für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation vergeben.

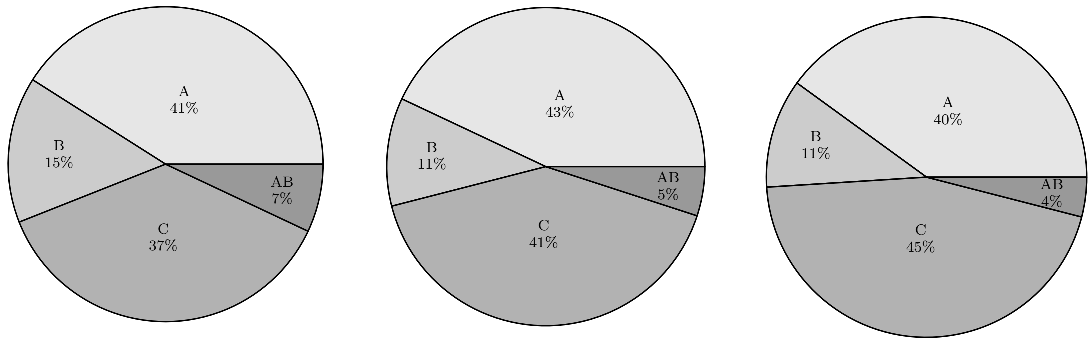
---

47 - MAT - WS 1.1, WS 1.3, WS 3.4, WS 4.1, WS 2.3, - Blutgruppen - Matura 2014/15 Haupttermin

15. Die wichtigsten Blutgruppensysteme beim Menschen sind das AB0-System und das Rhesussystem. Es werden dabei die vier Blutgruppen A, B, AB und 0 unterschieden. Je nach Vorliegen eines bestimmten Antikörpers, den man erstmals bei Rhesusaffen entdeckt hat, wird bei jeder Blutgruppe noch zwischen *Rhesus-positiv* (+) und *Rhesus-negativ* (-) unterschieden. A- bedeutet z. B. Blutgruppe A mit Rhesusfaktor negativ. ____/0

In den nachstehenden Diagrammen sind die relativen Häufigkeiten der vier Blutgruppen in Österreich und Deutschland und im weltweiten Durchschnitt ohne Berücksichtigung des Rhesusfaktors dargestellt.

Österreich Deutschland weltweit



Die nachstehende Tabelle enthält die relativen Häufigkeiten der Blutgruppen in Deutschland und Österreich zusätzlich aufgeschlüsselt nach den Rhesusfaktoren.

Land/Blutgruppe	A+	A-	B+	B-	0+	0-	AB+	AB-
Deutschland	37 %	6 %	9 %	2 %	35 %	6 %	4 %	1 %
Österreich	33 %	8 %	12 %	3 %	30 %	7 %	6 %	1 %

Aufgrund von Unverträglichkeiten kann für eine Bluttransfusion nicht Blut einer beliebigen Blutgruppe verwendet werden. Jedes Kreuz (X) in der nachstehenden Tabelle bedeutet, dass eine Transfusion vom Spender zum Empfänger möglich ist.

	Spender							
Empfänger	0-	0+	B-	B+	A-	A+	AB-	AB+
AB+	X	X	X	X	X	X	X	X
AB-	X		X		X		X	
A+	X	X			X	X		
A-	X				X			
B+	X	X	X	X				
B-	X		X					
0+	X	X						
0-	X							

Datenquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Blutgruppe [26.11.2014]

Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Gib diejenigen Blutgruppen an, die laut der abgebildeten Diagramme sowohl in Österreich als auch in Deutschland häufiger anzutreffen sind als im weltweiten Durchschnitt!

Jemand argumentiert anhand der gegebenen Diagramme, dass die Blutgruppe B in Deutschland und Österreich zusammen eine relative Häufigkeit von 13 % hat. Entscheide, ob diese Aussage richtig ist, und begründe deine Entscheidung!

(b) Eine in Österreich lebende Person X hat Blutgruppe A-.

Gib anhand der in der Einleitung angeführten Daten und Informationen die Wahrscheinlichkeit an, mit der diese Person X als Blutspender/in für eine zufällig ausgewählte, in Österreich lebende Person Y geeignet ist!

Wie viele von 100 zufällig ausgewählten Österreicherinnen/Österreichern kommen als Blutspender/in für die Person X in Frage? Gib für die Anzahl der potenziellen Blutspender/innen näherungsweise ein um den Erwartungswert symmetrisches Intervall mit 90 % Wahrscheinlichkeit an!

(c) In einer österreichischen Gemeinde, in der 1 800 Einwohner/innen Blut spenden könnten, nahmen 150 Personen an einer freiwilligen Blutspendeaktion teil. Es wird angenommen, dass die Blutspender/innen eine Zufallsstichprobe darstellen. 72 Blutspender/innen hatten Blutgruppe A.

Berechne aufgrund dieses Stichprobenergebnisses ein symmetrisches 95-%-Konfi denzintervall für den tatsächlichen (relativen) Anteil p der Einwohner/innen dieser Gemeinde mit Blutgruppe A, die Blut spenden könnten.

Die Breite des Konfidenzintervalls wird vom Konfidenzniveau (Sicherheitsniveau) und vom Umfang der Stichprobe bestimmt. Gib an, wie jeweils einer der beiden Parameter geändert werden müsste, um eine Verringerung der Breite des Konfidenzintervalls zu erreichen! Gehe dabei von einem unveränderten (gleichbleibenden) Stichprobenergebnis aus.

(d) Blutgruppenmerkmale werden von den Eltern an ihre Kinder weitervererbt. Dabei sind die Wahrscheinlichkeiten in der nachstehenden Tabelle angeführt.

Blutgruppe der Eltern	mögliche Blutgruppe des Kindes			
	A	B	AB	0
A und A	93,75 %	–	–	6,25 %
A und B	18,75 %	18,75 %	56,25 %	6,25 %
A und AB	50 %	12,5 %	37,5 %	–
A und 0	75 %	–	–	25 %
B und B	–	93,75 %	–	6,25 %
B und AB	12,5 %	50 %	37,5 %	–
B und 0	–	75 %	–	25 %
AB und AB	25 %	25 %	50 %	–
AB und 0	50 %	50 %	–	–
0 und 0	–	–	–	100 %

Datenquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/AB0-System [26.11.2014]

Eine Frau mit Blutgruppe A und ein Mann mit Blutgruppe 0 haben zwei (gemeinsame) leibliche Kinder. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kinder die gleiche Blutgruppe haben!

Ein Kind aus der Nachbarschaft dieser Familie hat Blutgruppe 0. Gibt es eine Blutgruppe bzw. Blutgruppen, die der leibliche Vater dieses Kindes sicher nicht haben kann? Begründe deine Antwort anhand der gegebenen Daten!

(a) **Lösungserwartung:**

Blutgruppen: A und AB

Die Aussage ist nicht richtig, weil die Anzahl der Einwohner/innen in den beiden genannten Ländern nicht gleich groß ist.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die ausschließliche Angabe der beiden Blutgruppen A und AB.
- Ein Punkt für die Angabe, dass die Aussage nicht richtig ist, und eine (sinngemäß) korrekte Begründung dafür.

(b) **Lösungserwartung:**

Die Wahrscheinlichkeit beträgt 48 %.

Mögliche Berechnung:

$n = 100, p = 0{,}15 \Rightarrow \mu = 15$

$2 \cdot \Phi(z) - 1 = 0{,}9 \Rightarrow z = 1{,}645$

$\mu \pm z \cdot \sigma = 15 \pm 1{,}645 \cdot \sqrt{100 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}85} \approx 15 \pm 6 \Rightarrow [9; 21]$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung. Äquivalente Schreibweisen des Ergebnisses (als Bruch oder Dezimalzahl) sind ebenfalls als richtig zu werten.
- Ein Punkt für ein korrektes Intervall.
  Toleranzintervall für den unteren Wert: $[9; 10]$

Toleranzintervall für den oberen Wert: $[20; 21]$
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

(c) **Lösungserwartung:**

Mögliche Berechnung:
$n = 150, h = 0{,}48$
$2 \cdot \Phi(z) - 1 = 0{,}95 \Rightarrow z = 1{,}96$
$h \pm z \cdot \sqrt{\frac{h\cdot(1-h)}{n}} = 0{,}48 \pm 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}48\cdot(1-0{,}48)}{150}} \approx 0{,}48 \pm 0{,}08 \Rightarrow [40\,\%; 56\,\%]$
Bei gleichem Stichprobenergebnis führen eine größere Stichprobe und/oder ein geringeres Konfidenzniveau zu einer Verringerung der Breite des Konfidenzintervalls.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für ein korrektes Intervall. Äquivalente Schreibweisen des Ergebnisses (als Bruch oder Dezimalzahl) sind ebenfalls als richtig zu werten.
  Toleranzintervall für den unteren Wert: $[39\,\%; 43\,\%]$
  Toleranzintervall für den oberen Wert: $[53\,\%; 57\,\%]$
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Angabe der entsprechenden Änderungen beider Parameter.

(d) **Lösungserwartung:**

$0{,}75^2 + 0{,}25^2 = 0{,}625$
Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kinder die gleiche Blutgruppe haben, beträgt 62,5 %.
Der Vater kann nicht Blutgruppe AB haben, denn sobald ein Elternteil Blutgruppe AB hat, hat das Kind laut Tabelle nie Blutgruppe 0.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung. Äquivalente Schreibweisen des Ergebnisses (als Bruch oder in Prozenten) sind ebenfalls als richtig zu werten. Toleranzintervall: [0,62; 0,63].

- Ein Punkt für die richtige Antwort und eine (sinngemäß) korrekte Begründung, warum (nur) Blutgruppe AB auszuschließen ist.

---

52 - MAT - WS 2.3, WS 4.1 - FSME-Impfung - Matura 2014/15 1. Nebentermin

16. Die Frühsommer-Meningoenzephalitis (FSME) ist eine durch das FSME-Virus ausgelöste Erkrankung, die mit grippeähnlichen Symptomen und bei einem Teil der Patientinnen und Patienten mit einer Entzündung von Gehirn und Hirnhäuten verläuft. Die FSME wird durch den Biss einer infizierten Zecke übertragen, wobei die Übertragungswahrscheinlichkeit bei einem Biss 30 % beträgt. Nur bei 10 % bis 30 % der mit dem FSME-Virus infizierten Personen treten Krankheitserscheinungen auf. Im Durchschnitt verläuft 1 % der Erkrankungen tödlich. In Risikogebieten liegt der Anteil der FSME-infizierten Zecken bei etwa 0,5 % bis 5 %, während man sonst davon ausgeht, dass nur jede 20000. Zecke das FSME-Virus in sich trägt. ____/0

Aufgabenstellung:

(a) Eine nicht geimpfte Person wird in einem Risikogebiet von einer Zecke gebissen.

Gib die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person Krankheitserscheinungen zeigt, in Prozent an; gehe dazu bei den angegebenen Wahrscheinlichkeiten immer von dem Fall aus, der für die gebissene Person am ungünstigsten ist!

Gib an, mit welchem Faktor sich die berechnete Wahrscheinlichkeit für eine FSME-Erkrankung verändert, wenn der Zeckenbiss nicht in einem Risikogebiet erfolgt ist!

(b) $\boxed{\text{A}}$ Im Jahr 2011 gab es in Österreich vier FSME-bedingte Todesfälle. Waren dies weniger oder mehr Todesfälle, als bei 113 Erkrankungen zu erwarten waren? Begründe deine Antwort auf Basis der gegebenen Daten.

In einem österreichischen Risikogebiet nahmen 400 Personen an einer Umfrage teil. Es wird angenommen, dass die Personen, die an dieser Umfrage teilnahmen, eine Zufallsstichprobe darstellen. Von den befragten Personen gaben 64 Personen an, schon einmal von einer Zecke gebissen worden zu sein.

Berechne auf Basis dieses Umfrageergebnisses ein symmetrisches 95-%-Konfidenzintervall für den tatsächlichen (relativen) Anteil p der Personen in diesem Gebiet, die schon einmal von einer Zecke gebissen worden sind!

(a) **Lösungserwartung:**

$0{,}05 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}0045$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt 0,45 %.

In einem Risikogebiet ist schlimmstenfalls jede zwanzigste Zecke mit FSME infiziert, d.h., der Anteil infizierter Zecken ist bis zu 1 000-mal höher als in einem Nichtrisikogebiet. Daher ändert sich die berechnete Wahrscheinlichkeit für eine FSME-Erkrankung um den Faktor $\frac{1}{1\,000}$.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung. Äquivalente Schreibweisen des Ergebnisses (als Bruch oder Dezimalzahl) sind ebenfalls als richtig zu werten.
  Toleranzintervalle: [0,4 %; 0,5 %] bzw. [0,004; 0,005]
- Ein Punkt für die richtige Lösung sowie eine (sinngemäß) korrekte Begründung. Bei einer entsprechenden (sinngemäß) korrekten Begründung ist der Faktor 1 000 ebenfalls als richtig zu werten.

(b) **Lösungserwartung:**

Da im Durchschnitt 1 % der Erkrankungen tödlich verlaufen, war nur ein Todesfall (1 % von 113) zu erwarten. Vier Todesfälle sind aher mehr, als zu erwarten war.

Mögliche Berechnung:

$n = 400, h = 0{,}16$

$2 \cdot \Phi(z) - 1 = 0{,}95 \Rightarrow z = 1{,}96$

$$h \pm z \cdot \sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}} = 0{,}16 \pm 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}16 \cdot (1-0{,}16)}{400}} \approx 0{,}16 \pm 0{,}036 \Rightarrow [0{,}124; 0{,}196]$$

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die richtige Antwort sowie eine (sinngemäß) korrekte Begründung.
- Ein Punkt für ein korrektes Intervall. Andere Schreibweisen des Ergebnisses (als Bruch oder Dezimalzahl) sind ebenfalls als richtig zu werten.
  Toleranzintervall für den unteren Wert: $[0{,}12; 0{,}13]$
  Toleranzintervall für den oberen Wert: $[0{,}19; 0{,}2]$
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist

---

56 - MAT - WS 1.3, WS 1.4, WS 1.1, WS 3.3, WS 3.2 - Reaktionstest - Matura 2014/15 2. Nebentermin

17. Bei einem Reaktionstest am Computer werden der getesteten Person am Bildschirm nacheinander 20 Muster gezeigt, die klassifiziert werden müssen. Protokolliert werden die für die 20 Reaktionen insgesamt benötigte Reaktionszeit t sowie die Anzahl f der dabei auftretenden fehlerhaften Klassifikationen. ____/0

    In der nachstehenden Tabelle sind die Ergebnisse eines Reaktionstests am Computer einer Testperson in einer Serie von zehn Testdurchgängen angegeben.

Nummer der Testdurchführung	t (in Sekunden)	f
1*	$t_1 = 22{,}3$	$f_1 = 3$
2	$t_2 = 24{,}6$	$f_2 = 2$
3	$t_3 = 21{,}8$	$f_3 = 3$
4	$t_4 = 23{,}5$	$f_4 = 1$
5	$t_5 = 32{,}8$	$f_5 = 5$
6	$t_6 = 21{,}7$	$f_6 = 4$
7	$t_7 = 22{,}6$	$f_7 = 3$
8	$t_8 = 22{,}8$	$f_8 = 2$
9	$t_9 = 35{,}4$	$f_9 = 3$
10	$t_{10} = 22{,}5$	$f_10 = 1$

* Erläuterung: Die Person benötigt bei der ersten Testdurchführung 22,3 Sekunden, drei ihrer Klassifikationen waren falsch.

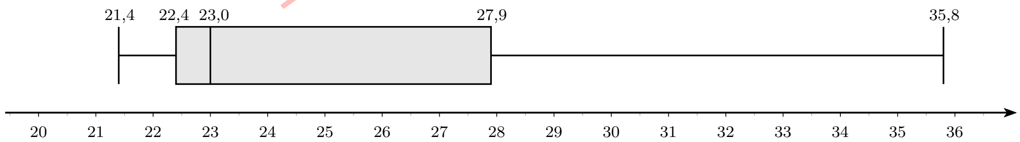
Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Berec hne das arithmetische Mittel $\bar{t}$ der zehn Reaktionszeiten $t_1, t_2, ..., t_{10}$ sowie die Standardabweichung s_t dieser zehn Werte!

Die getestete Person absolviert zwei weitere Testdurchgänge und erreicht dabei die Zeiten t_{11} und t_{12}. Das arithmetische Mittel der neuen Datenreihe $t_1, t_2, ..., t_{10}, t_{11}, t_{12}$ wird mit $\bar{t}_{\text{neu}}$ bezeichnet, die entsprechende Standardabweichung mit s_{neu}. Gib Werte für t_{11} und t_{12} so an, dass $t_{11} \neq t_{12}, \bar{t}_{\text{neu}} = \bar{t}$ und $s_{\text{neu}} < s_t$ gilt!

(b) Im Laufe einer Diskussion vertritt eine Person die Meinung, dass das arithmetische Mittel der 10 Reaktionszeiten die gegebene Datenliste nicht optimal beschreibt. Gib ein mögliches Argument an, das diese Meinung stützt, und nenne ein alternatives statistisches Zentralmaß!

Die Datenreihe der 500 Reaktionszeiten von insgesamt 50 Testpersonen wird durch das nachstehende Kastenschaubild dargestellt.



Entscheide, ob die folgende Aussage jedenfalls korrekt ist: „Höchstens 125 der 500 Reaktionszeiten betragen höchstens 22,4 s.“ Begründe deine Entscheidung!

(c) Die Zufallsvariable H ordnet jedem Testdurchgang, bei dem einer bestimmten Person 20 Bilder vorgelegt werden, die Anzahl der dabei auftretenden fehlerhaften Reaktionen zu.

Nenne unter Bezugnahme auf den dargelegten Sachverhalt die Voraussetzungen, die für den Reaktionstest als erfüllt angesehen werden müssen, damit die Zufallsvariable H durch eine Binomialverteilung beschrieben werden kann!

Berechne $P(H > 2)$, wenn die getestete Person mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0{,}15$ fehlerhaft reagiert!

(a) **Lösungserwartung:**

$\bar{t} = 25\,\mathrm{s}$

$s_1 \approx 4{,}9\,2$

Mögliche Angaben der Werte für t_{11} und t_{12}:

$t_{11} = 23\,\mathrm{s}$, $t_{12} = 27\,\mathrm{s}$

oder:

$t_{11} = 24\,\mathrm{s}$, $t_{12} = 26\,\mathrm{s}$

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die korrekten Werte von $\bar{t}$ und s_t, wobei die Einheit nicht angeführt sein muss.
  Toleranzintervall für s_t : $[4{,}6\,s; 5{,}0\,s]$
- Ein Punkt für eine geeignete Angabe von je einem Wert für t_{11} und t_{12}, wobei die Eineit „s" nicht angheführt sein muss und wobei allgemein gilt: Eine der beiden Zeiten muss den Wert $25+x$, die andere den Wert $25-x$ annehmen, wobei $x \in [0; s_t)$. Der Punkt ist auch dann zu geben, wenn die Werte für t_{11} und t_{12} aus der Basis falsch berechneter Werte von $\bar{t}$ bzw. s_t ermittelt werden, der Lösungsweg aber prinzipiell korrekt ist.

(b) **Lösungserwartung:**

Mögliches Argument:

Durch die beiden „Ausreißer" 32,8 und 35,4 wird das arithmetische Mittel stark nach oben verzerrt. Das alternative Zentralmaß *Median* ist gegenüber Ausreißern robust.

Die Aussage ist so nicht korrekt, da aus dem Kastenschaubild nicht hervorgeht, ob es mehrere Reaktionszeiten gibt, die genau 22,4 s betragen und die im zweiten Viertel der geordneten Datenreihe liege.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für ein richtiges Argument und die Angabe des Medians als alternatives Zentralmaß.
- Ein Punkt für eine korrekte Entscheidung und eine (sinngemäß) korrekte Begründung.

(c) **Lösungserwartung:**

Damit die Zufallsvariable H als binomialverteilt angesehen werden kann, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

(i) Die Wahrscheinlichkeit für eine fehlerhafte Reaktion muss für alle 20 Reaktionen gleich hoch sein (darf also bei bestimmten Bildern nicht höher oder niedriger sein als bei anderen Bildern).

(ii) Die Reaktionen müssen voneinander unabhängig sein. (Ob eine vorangegangene Reaktion richtig oder falsch war, darf keinen Einfluss auf die Richtigkeit einer nachfolgenden Reaktion haben.)

(iii) Die Reaktionen können nur entweder fehlerhaft oder korrekt sein.

oder:

Jeder einzelne Versuch wird unter denselben Bedingungen durchgeführt.

$P(H > 2) = 1 - [P(H = 0) + P(H = 1) + P(H = 2)] \approx 0{,}595$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die (sinngemäß) richtige Angabe erforderlicher kontextbezogener Voraussetzungen für die Verwendung der Binomialverteilung, wobei der 3. Punkt nicht angeführt sein muss.
- Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen des Ergebnisses (z.B. in Prozent) sind ebenfalls als richtig zu werten.
  Toleranzintervall: $[0{,}59; 0{,}61]$
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

57 - MAT - WS 4.1, AN 3.3 - Überraschungseier - Matura 2014/15 2. Nebentermin

18. Ein italienischer Süßwarenhersteller erzeugt das Produkt Kinder Überraschung (auch als „Überraschungsei" bekannt). Das Ei soll aus 20 g Schokolade bestehen. Im Inneren des Eies befindet sich in einer gelben Kapsel ein Spielzeug. Diese Kapsel hat näherungsweise die Form eines Drehzylinders, auf dessen Grund- und Deckfläche Halbkugeln aufgesetzt werden. Das Volumen der Kapsel beträgt ungefähr $36\,\text{cm}^3$ und deren Oberfläche $55\,\text{cm}^2$. ____/0

Bildquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Überraschungsei.jpg [01.06.2015] (Urheber: A. Kniesel, Lizenz: CC BY-SA 3.0)

Aufgabenstellung:

(a) Bei der Qualitätskontrolle gelten Schokoladeneier, deren Masse um mehr als 0,5 g vom Sollwert 20 g abweichen, als Ausschuss. Bei einer Kontrolle wurden nach dem Zufallsprinzip 500 Schokoladeneier einer Produktionsserie ausgewählt und überprüft. Dabei wurden 15 als Ausschuss aussortiert.

Gib ein symmetrisches 90-%-Konfidenzintervall für den relativen Anteil p an Ausschusseiern in der gesamten Produktionsserie an!

Gib an, durch welche Maßnahme man die Breite des Konfidenzintervalls bei vorgegebenem Konfidenzniveau (Sicherheit) verringern kann!

(b) Der Hersteller überlegt, die gelbe Kapsel in Zukunft nur in Form eines Drehzylinders ohne aufgesetzte Halbkugeln zu produzieren. Das Volumen V der Kapsel soll dabei unverändert bleiben, ebenso wie die Form des Schokoladeneies. Die Oberfläche $O(r)$ des angedachten Drehzylinders kann in Abhängigkeit vom Radius r durch die Funktion O mit der Gleichung $O(r) = 2r^2\pi + 2 \cdot V \cdot r^{-1}$ beschrieben werden. Der Radius r darf dabei nur Werte im Bereich $(0\,cm; 1{,}9\,cm]$ annehmen, damit der Zylinder in das Schokoladenei passt.

Berechne die minimal mögliche Oberfläche der geplanten zylindrischen Kapsel!

Weise durch Differenzialrechnung nach, dass an der berechneten Stelle tatsächlich ein Minimum vorliegt!

(a) **Lösungserwartung:**

$h = 0{,}03$

$0{,}03 \pm 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{0{,}03 \cdot (1-0{,}03)}{500}} \approx 0{,}03 \pm 0{,}013 \Rightarrow [0{,}017; 0{,}043]$

Mögliche Maßnahme:

Durch eine Erhöhung der Anzahl der kontrollierten Schokoladeneier auf mehr als 500 kann eine Verringerung der Breite des Konfidenzintervalls erreicht werden.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für ein korrektes Intervall. Andere Schreibweisen des Ergebnisses (als Bruch oder Dezimalzahl) sind ebenfalls als richtig zu werten.
  Toleranzintervall für den unteren Wert: $[0{,}017; 0{,}02]$
  Toleranzintervall für den oberen Wert: $[0{,}042; 0{,}05]$
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Angabe der entsprechenden Änderung. Andere angeführte korrekte Maßnahmen sind ebenfalls als richtig zu werten.

(b) **Lösungserwartung:**

$O'(r) = 4r\pi - 72 \cdot r^{-2} = 4r\pi - \frac{72}{r^2}$

$4r\pi - \frac{72}{r^2} = 0$

$r^3 = \frac{18}{\pi}$

$r = \sqrt[3]{\frac{18}{\pi}} \Rightarrow r \approx 1{,}79\,\text{cm}$

$O(1{,}79) \approx 60{,}4\,\text{cm}^2$

$O''(r) = 4\pi + 144 \cdot r^{-3} = 4\pi + \frac{144}{r^3}$

$O''(1{,}79) \approx 37{,}7 > 0$, daher liegt ein lokales Maximum vor.

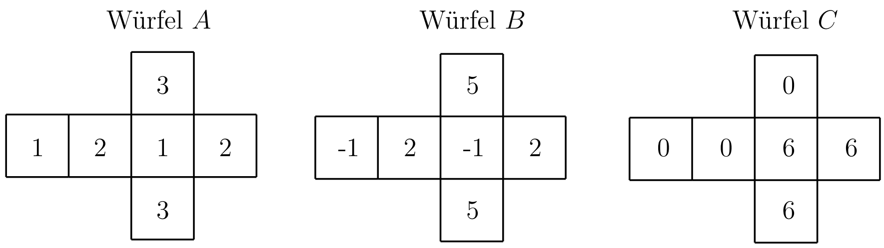
Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine korrekte Berechnung der minimalen Oberfläche, wobei die Einheit „cm^2" nicht angeführt sein muss.
  Toleranzintervall: $[60\,\text{cm}^2; 61\,\text{cm}^2]$
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für einen korrekten Nachweis. Andere angeführte korrekte Nachweise sind ebenfalls als richtig zu werten.

---

61 - MAT - WS 3.1, WS 3.2, WS 3.4, - Würfel mit unterschiedlichen Zahlen - Matura 2015/16 Haupttermin

19. Gegeben sind die Netze von drei fairen Würfeln, deren Seitenflächen auf unterschiedliche Weise mit verschiedenen Zahlen beschriftet sind. (Ein Würfel ist „fair", wenn die Wahrscheinlichkeit, nach einem Wurf nach oben zu zeigen, für alle Seitenflächen gleich groß ist.) ____/0



Aufgabenstellung:

(a) Herr Fischer wirft Würfel A zweimal. Die Zufallsvariable X gibt die Summe der beiden geworfenen Zahlen an. Die Zufallsvariable X kann die Werte 2,3,4,5 und 6 annehmen.

Frau Fischer wirft die Würfel A und B. Die Zufallsvariable Y gibt die Summe der beiden geworfenen Zahlen an.

$\boxed{\text{A}}$ Gib für die Zufallsvariable Y alle möglichen Werte an!

mögliche Wert für Y: ____________________

Es gibt Werte der Zufallsvariablen, die bei Herrn Fischer wahrscheinlicher auftreten als bei Frau Fischer. Gib denjenigen Wert an, bei dem der Unterschied der beiden Wahrscheinlichkeiten am größten ist, und berechne diesen Unterschied!

(b) Bei einem Spiel wird Würfel B dreimal geworfen. Der Einsatz des Spiels für eine Spielerin/einen Spieler beträgt € 2. Die jeweilige Auszahlung ist von der Summe der drei geworfenen Zahlen abhängig und wird in der nachstehenden Tabelle teilweise angegeben

Summe der drei geworfenen Zahlen	Auszahlung an die Spielerin/den Spieler
positiv	0
null	2
negativ	?

Eine Person spielt dieses Spiel fünfmal. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass dabei genau zweimal die Summe der drei geworfenen Zahlen genau null ist!

Berechne, welchen Betrag der Anbieter des Spiels für das Würfeln einer negativen Summe höchstens auszahlen darf, um langfristig mit keinem Verlust rechnen zu müssen!

(c) Peter wirft den Würfel C 100-mal. Die Zufallsvariable Z beschreibt die Anzahl der gewürfelten Sechser.

Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung von Z!

Ermittle die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der geworfenen Zahlen größer als 350 ist!

(a) Lösungserwartung:

mögliche Werte für Y: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

Bei Y hat jeder Wert die gleiche Wahrscheinlichkeit $\left(= \frac{1}{9}\right)$, bei X hat 4 die größte Wahrscheinlichkeit $\left(= 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\right)$. Der Unterschied ist bei 4 am größten, er beträgt $\frac{2}{9}$.

oder:

Die Wahrscheinlichkeit für 4 ist bei Herrn Fischer dreimal so groß wie bei Frau Fischer.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die vollständige Angabe der korrekten Werte für Y.
- Ein Punkt für die Angabe des gesuchten Wertes und einer korrekten Berechnung des Unterschieds.

(b) Lösungserwartung:

Mögliche Berechnung:

Zufallsvariable X = Anzahl der Spiele, bei denen die Summe der drei geworfenen Zahlen genau null ist.

$P(\text{„Summe der drei geworfenen Zahlen ist null“}) = p = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 = \frac{1}{9}$

Binomialverteilung mit den Parametern $n = 5, k = 2, p = \frac{1}{9}$

$P(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^3 \approx 0{,}087 \Rightarrow$ Die gesuchte Wahrscheinlichkeit liegt bei ca. 8,7 %.

Mögliche Berechnung:

x ... Auszahlung für das Würfeln einer negativen Summe

$2 \cdot \frac{1}{9} + x \cdot \frac{1}{27} < 2 \Rightarrow x < 48$

Die Auszahlung für das Würfeln einer negativen Summe darf höchstens € 48 betragen, damit der Anbieter des Spiels langfristig mit keinem Verlust rechnen muss.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.
  Toleranzintervall: [0,08; 0,09] bzw. [8 %; 9 %]
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „€ " nicht angegeben sein muss. Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

(c) **Lösungserwartung:**

$n = 100$ und $p = 0{,}5$

Erwartungswert: $E(Z) = 50$
Standardabweichung: $\sqrt{V(Z)} = 5$
Mögliche Berechnung (z.B. durch Approximation durch die Normalverteilung ohne Stetigkeitskorrektur):
Die Summe ist größer als 350, wenn die Anzahl der Sechser mindestens 59 ist. Es ist möglich, die (für die Anzahl der Sechser) zugrunde liegende Binomialverteilung mit $n = 100$ und $p = 0{,}5$ durch die Normalverteilung mit $\mu = 50$ und $\sigma = 5$ zu approximieren.
$P(Z \geq 59) \approx 0{,}036 = 36\,\%$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die Angabe der beiden korrekten Werte für den Erwartungswert und die Standardabweichung.
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei Ergebnisse durch Berechnung mit Stetigkeitskorrektur oder exakt mittels Binomialverteilung ebenfalls als richtig zu werten sind.
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
  Toleranzintervall: [0,035; 0,045] bzw. [3,5 %; 4,5 %]

64 - MAT - AG 4.1, AG 3.3, AG 3.4, WS 4.1 - Pong - Matura 2015/16 1. Nebentermin

20. Das 1972 vom Unternehmen Atari veröffentlichte *Pong* wurde zum ersten weltweit populären Videospiel. (Quelle: http://de.wikipedia.org/wiki/Pong) ____/0

Das Spielprinzip von *Pong* ist wie folgt: Ein Punkt („Ball") bewegt sich auf dem Bildschirm entlang geradliniger Bahnen hin und her. Jede/r der beiden Spieler/innen steuert einen senkrechten Strich („Schläger"), den sie/er mit einem Drehknopf („Joystick") nach oben und unten verschieben kann.

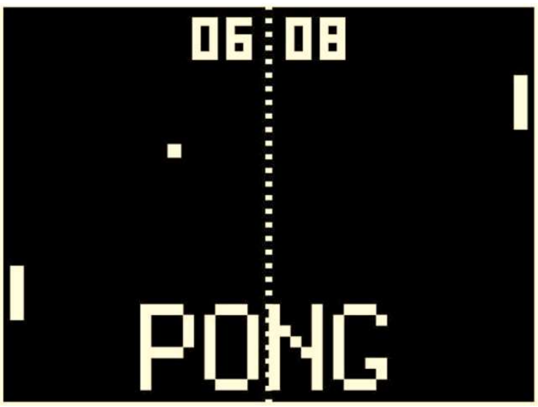
Lässt man den Ball am Schläger vorbei, erhält die Gegnerin / der Gegner einen Punkt.

Das Spielfeld, in dem sich der Ball und die Schläger bewegen, hat eine Breite von 800 Pixeln und eine Höhe von 600 Pixeln (ein Pixel ist ein quadratischer Bildpunkt). Vereinfachend wird angenommen, dass der Ball als Pixel dargestellt wird.

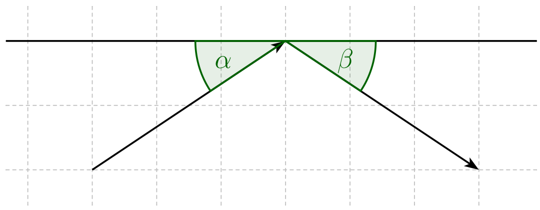
Wenn der Ball den oberen bzw. unteren Spielfeldrand oder einen Schläger berührt, dann wird er von dort reflektiert. Dabei gilt das Reflexionsgesetz; dieses besagt: $\alpha = \beta$ (vgl. die unten abgebildete Grafik).

Man kann sich das Spielfeld als Ebene mit Koordinatensystem vorstellen. Der Bildpunkt $(1|1)$ liegt dann in der linken unteren Ecke, der Bildpunkt $(800|600)$ in der rechten oberen Ecke.

Auf dem Schirm wird das Bild alle 0,02 Sekunden neu generiert. Der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v} = \binom{v_x}{v_y}$ das Balls gibt an, um wie viele Pixel sich der Ball von einem Bildaufbau zum nächsten in horizontaler Richtung (v_x) und in vertikaler Richtung (v_y) weiterbewegt hat.



Bildquelle: http://www.overclockers.at/games_forum/euer-erstes-computerspiel_237146/page_2 [15.10.2015].



Aufgabenstellung:

(a) In einer konkreten Spielsituation hat der Ball beim Aufprall auf den oberen Spielfeldrand einen Geschwindigkeitsvektor von $\vec{v} = \binom{4}{7}$ Pixeln pro Bildaufbau.

$\boxed{\text{A}}$ Gib denjenigen Winkel α an, unter dem der Ball auf den Spielfeldrand trifft!

$\alpha =$ ______________________

Die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors sind immer ganzzahlig. Nehmen Sie an, dass die Summe der Beträge der Komponenten nicht größer als 20 sein darf.

Der Ball wird am oberen Spielfeldrand unter dem Winkel β reflektiert. Welchen kleinstmöglichen Wert β_{min} kann unter diesen Voraussetzungen der Winkel β annehmen? Gib β_{min} an!

$\beta_{\text{min}} =$ ______________________

(b) In einem anderen Spielverlauf befindet sich der Ball im Punkt $(401|301)$ und sein Geschwindigkeitsvektor ist dabei $\vec{v} = \binom{2}{-3}$ Pixel pro Bildaufbau.

Gib an, wie viele *Sekunden* es dauert, bis der Ball am unteren Spielfeldrand reflektiert wird.

Nach dieser Reflexion bewegt sich der Ball entlang einer Geraden bis zum nächsten Auftreffen auf den Schläger oder den Spielfeldrand.

Gib eine Parameterdarstellung dieser Geraden an!

(c) Zwei Kinder, Nicola und Florian, spielen über einen längeren Zeitraum oft gegeneinander *Pong*. Von 45 Spielen gewinnt Nicola 31-mal, Florian gewinnt 14-mal.

Gib auf Basis dieser Information ein symmetrisches 95−%−Konfidenzintervall für Nicolas Gewinnwahrscheinlichkeit an!

Erkläre, wieso es nicht sinnvoll ist, ein 100-%-Konfidenzintervall zu bestimmen!

(a) **Lösungserwartung:**

$\tan(\alpha) = \frac{7}{4} = 1{,}74$

$\alpha \approx 60{,}26°$

Unter diesen Bedingungen lautet der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v} = \binom{\pm 19}{\pm 1}$ Pixel pro Bildaufbau. Für den Winkel $\beta_{\min}$ gibt das in jedem Fall:

$\tan(\beta_{\min}) = \frac{1}{19}$

$\beta_{\min} \approx 3{,}01°$

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „Grad“ nicht angegeben sein muss. Eine korrekte Angabe der Lösung in einer anderen Einheit ist ebenfalls als richtig zu werten.
  Toleranzintervall: $[6011°; 60{,}3°]$
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „Grad“ nicht angegeben sein muss. Eine korrekte Angabe der Lösung in einer anderen Einheit ist ebenfalls als richtig zu werten.
  Toleranzintervall: $[3°; 3{,}02°]$

(b) **Lösungserwartung:**

$301 - 3n = 1 \Rightarrow n = 100$

$100 \cdot 0{,}02 = 2$

Es dauert zwei Sekunden, bis der Ball am unteren Spielfeldrand reflektiert wird.

$g : X = \binom{601}{1} + s \cdot \binom{2}{3}$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall: $[2\,\text{s}; 2{,}02\,\text{s}]$
- Ein Punkt für eine korrekte Parameterdarstellung bzw. Gleichung der Geraden. Äquivalente Parameterdarstellungen bzw. Gleichungen sind als richtig zu werten.

(c) **Lösungserwartung:**

$n = 45, h = \frac{31}{45}$

$\frac{31}{45} \pm 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{\frac{31}{45} \cdot \frac{14}{45}}{45}} \approx 0{,}689 \pm 0{,}135 \Rightarrow [0{,}554; 0{,}824]$

Mögliche Erklärungen:

Es ist nicht sinnvoll, ein 100-%-Konfidenzintervall zu bilden, da die Intervallgrenzen dann 0 % bis 100% wären, man hätte also keinen Informationsgewinn.

oder:

Ein 100-%-Konfidenzintervall erstreckt sich über den gesamten Definitionsbereich.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für ein korrektes Intervall. Andere Schreibweisen des Ergebnisses (als Bruch oder in Prozent) sind ebenfalls als richtig zu werten.
  Toleranzintervall für den unteren Wert: [0,54; 0,56]
  Toleranzintervall für den oberen Wert: [0,81; 0,83]
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Erklärung.

---

65 - MAT - WS 2.1, WS 3.4, WS 2.3 - Roulette - Matura 2015/16 1. Nebentermin

21. Beim Glücksspiel *Roulette* versucht man, diejenige Zahl bzw. Gruppe von Zahlen zu erraten, die durch den Wurf einer Kugel in die Roulettemaschine bestimmt wird. ____/0

    Beim *französischen Roulette* besteht die Roulettemaschine aus einer in eine Schüssel eingelassenen, drehbaren Scheibe mit 36 abwechselnd roten und schwarzen Nummernfächern sowie einem 37., grün gekennzeichneten Fach für die Null (vgl. Abbildung 1). Die Roulettescheibe wird in Bewegung gesetzt und die Kugel wird gegen die Drehrichtung in die Roulettemaschine geworfen. Dabei wird kein Nummernfach bevorzugt und es gibt keine Möglichkeit, das Ergebnis (etwa durch „geschicktes" Werfen) zu beeinflussen.

    Ziel ist es, in jedem einzelnen Spiel im Vorhinein zu erraten, in welchem Nummernfach die Kugel zu liegen kommen wird.

Auf dem Spielfeld (vgl. Abbildung 2) werden die Spieleinsätze (Jetons) platziert. Beispielsweise sind die Felder mit der „1“ und der „7“ rot („rouge“), die Felder mit der „4“ und der „6“ schwarz („noir“).

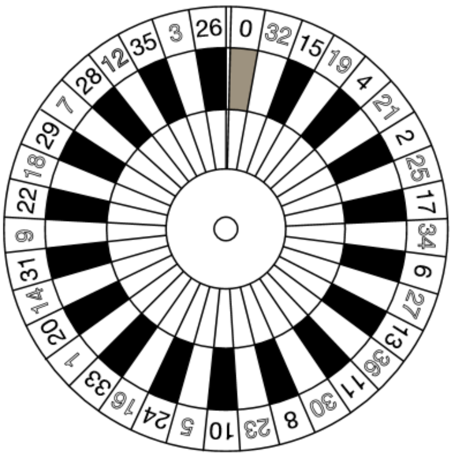


Abbildung 1
Quelle:http://www.rouletteplay.com/images/software_logos_small/european-roulette-wheel.gif [23.03.2016]

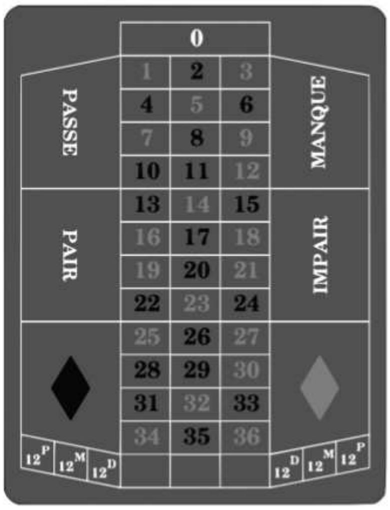


Abbildung 2
Quelle:http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Roulette_frz.png [23.03.2016]

Aufgabenstellung:

(a) Jemand argumentiert: „Wenn die Kugel bei fünf Spielen hintereinander jedes Mal auf ein rotes Feld gefallen ist, fällt die Kugel beim 6. Spiel mit höherer Wahrscheinlichkeit auf ein schwarzes Feld als auf ein rotes, da bei einer längeren Spielserie dieselben Häufigkeiten für ’Rouge’ und ’Noir’ zu erwarten sind.“ Gib an, ob diese Argumentation richtig oder falsch ist, und begründe deine Entscheidung!

An einem Roulettetisch werden an einem Abend 100 Spiele gespielt.

$\boxed{\text{A}}$ Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel dabei höchstens 40-mal in ein rotes Nummernfach fällt!

(b) In der folgenden Tabelle sind einige Wettmöglichkeiten sowie die jeweiligen Gewinnquoten angeführt:

Wettart	Gewinnquote
Rouge: Die Kugel fällt in ein rotes Nummernfach.	1:1
Noir: Die Kugel fällt in ein schwarzes Nummernfach.	1:1
12^{P}: erstes Dutzend (Zahlen 1 bis 12)	2:1
12^{M}: mittleres Dutzend (Zahlen 13 bis 24)	2:1
12^{D}: letztes Dutzend (Zahlen 25 bis 36)	2:1
Plein: Man setzt auf eine der 37 Zahlen	35:1
Cheval: Man setzt auf zwei auf dem Spielfeld horizontal oder vertikal benachbarte Zahlen, z.B. 2 und 5 oder 8 und 9.	17:1

Eine Gewinnquote von 2 : 1 bedeutet beispielsweise, dass im Falle eines Gewinns der Einsatz und zusätzlich das Doppelte des Einsatzes ausbezahlt wird. Im Falle eines Verlustes verliert man den Einsatz.

Als Bankvorteil bezeichnet man bei Glücksspielen den erwarteten Verlust der Spielerin/des Spielers bezogen auf ihren/seinen Einsatz.

Eine Spielerin setzt € 10 auf 12^{M}.

Berechne den Bankvorteil in Prozent des Einsatzes!

Gib an, ob der in Prozent angegebene Bankvorteil größer wird, kleiner wird oder gleich bleibt, wenn die Spielerin/der Spieler bei einem Einsatz von € a eine Cheval-Variante wählt!

Begründe deine Entscheidung!

(a) **Lösungserwartung:**

Die Argumentation ist falsch. Da die einzelnen Spiele unabhängig voneinander sind, gilt auch für das sechste Spiel (unabhängig von den vorherigen Spielausgängen):

$P(\text{„Rouge“}) = P(\text{„Noir“}) = \frac{18}{37}$

Mögliche Berechnung (z.B. durch Approximation durch die Normalverteilung ohne Stetigkeitskorrektur):

Die binomialverteilte Zufallsvariable X beschreibt, wie oft die Kugel in ein rotes Nummernfach fällt.

$n = 100, p = \frac{18}{37}$

$P(X \leq 40) \approx 0{,}0418$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die Angabe, dass die Argumentation nicht richtig ist, und für eine (sinngemäß) korrekte Begründung.
- Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung, wobei Ergebnisse durch Berechnung mit Stetigkeitskorrektur oder exakt mittels Binomialverteilung ebenfalls als richtig zu werten sind. Andere Schreibweisen des Ergebnisses (in Prozent) sind ebenfalls als richtig zu werten.
  Toleranzintervall: $[0{,}03; 0{,}06]$
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

(b) **Lösungserwartung:**

Mögliche Berechnung:

Bei 12^{M} erhält die Spielerin bei einem Einsatz von € 10 mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{12}{37}$ einen Gewinn von € 20.

$\frac{12}{37} \cdot 20 - \frac{25}{37} \cdot 10 \approx -0{,}27$

D.h., der erwartete Verlust beträgt ca. € 0,27.

Bankvorteil: € 0,27 bzw. 2,7 % des Einsatzes

Cheval bei einem Einsatz von € a:

erwarteter Gewinn: $\frac{2}{37} \cdot 17 \cdot a - \frac{35}{37} \cdot a = -\frac{1}{37} \cdot a \approx -0{,}027 \cdot a$

Der Bankvorteil bleibt mit ca. 2,7 % des Einsatzes gleich.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei diese sowohl in Prozentangabe als auch als Geldbetrag als richtig zu werten ist.
  Toleranzintervall: [€ 0,27; € 0,30] bzw. [2,7 %; 3 %]
- Ein Punkt für die Angabe, dass der Bankvorteil gleich bleibt, und für eine (sinngemäß) korrekte Begründung.

68 - MAT - WS 1.2, WS 1.3, WS 1.4 - Nettomonatseinkommen - Matura 2015/16 2. Nebentermin

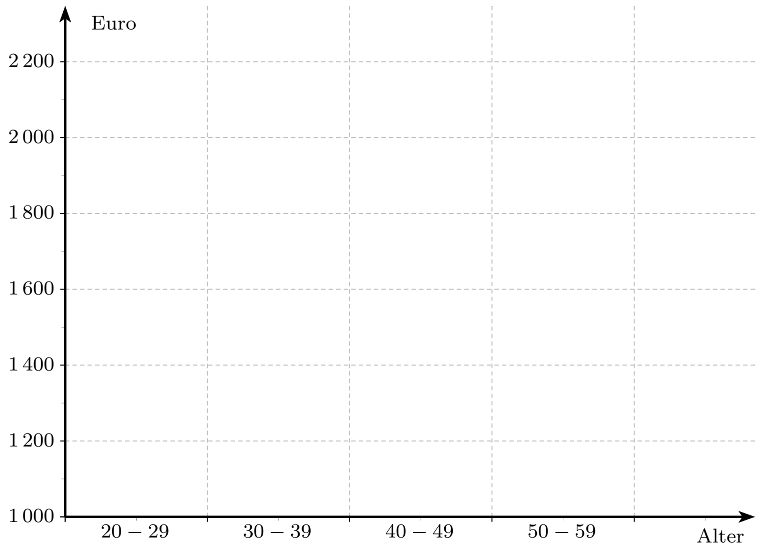
22. Das Nettomonatseinkommen erwerbstätiger Personen hängt von sozioökonomischen Faktoren wie Alter, Staatsangehörigkeit, Schulbildung, Beschäftigungsausmaß und beruflicher Stellung ab. Die nachstehende Tabelle zeigt Daten zu den Nettomonatseinkommen unselbständig Erwerbstätiger in Österreich im Jahresdurchschnitt 2010 in Abhängigkeit von sozioökonomischen Faktoren. Alle folgenden Aufgabenstellungen beziehen sich auf diese Daten des Jahres 2010. ____/0

Merkmale	unselbstständig Erwerbstätige	arithmetisches Mittel	10 %	Quartile			90 %
				25 %	50 % (Median)	75 %	
	in 1000 Personen	in Euro	verdienen weniger als oder gleich viel wie ... Euro				
Insgesamt	3 407,9	1 872,7	665,0	1 188,0	1 707	2 303,0	3 122,0
Alter							
15-19 Jahre	173,5	799,4	399,0	531,0	730,0	1 020,0	1 315,0
20-29 Jahre	705,1	1 487,0	598,0	1 114,0	1 506,0	1 843,0	2 175,0
30-39 Jahre	803,1	1 885,7	770,0	1 252,0	1 778,0	2 306,0	2 997,0
40-49 Jahre	1 020,4	2 086,1	863,0	1 338,0	1 892,0	2 556,0	3 442,0
50-59 Jahre	632,8	2 205,0	893,0	1 394,0	1 977,0	2 779,0	3 710,0
60+ Jahre	73,0	2 144,7	258,0	420,0	1 681,0	3 254,0	4 808,0
Höchste abgeschlossene Schulbildung							
Pflichtschule	523,4	1 183,0	439	677,0	1 104,0	1 564,0	1 985,0
Lehre	1 385,2	1 789,3	833,0	1 303,0	1 724,0	2 143,0	2 707,0
BMS	454,4	1 777,1	733,0	1 199,0	1 677,0	2 231,0	2 824,0
Höhere Schule	557,2	2 061,6	590,0	1 218,0	1 824,0	2 624,0	3 678,0
Universität	487,7	2 723,4	1 157,0	1 758,0	2 480,0	3 376,0	4 567,0
Berufliche Stellung							
Lehrlinge	134,2	775,3	466,0	551,0	705,0	930,0	1 167,0
Angestellte(r)	1 800,3	2 018,1	705,0	1 222,0	1 771,0	2 489,0	3 550,0
Arbeiter(in)	1 030,9	1 539,3	627,0	1 135,0	1 554,0	1 922,0	2 274,0
Beamte und Vertragsbedienstete	442,5	2 391,4	1 377,0	1 800,0	2 295,0	2 848,0	3 492,0

Datenquelle: Statistik Austria (Hrsg.) (2012). Arbeitsmarktstatistik. Jahresergebnisse 2011. Mikrozensus-Arbeitskräfteerhebung. Wien: Statistik Austria. S. 81 (adaptiert)

Aufgabenstellung:

(a) Zeichne in der nachstehenden Grafik ein Diagramm, das die Medianeinkommen der 20- bis 59-Jährigen darstellt! Verwende dafür die auf die Hunderterstelle gerundeten Medianeinkommen.



Ist es anhand der Daten in der gegebenen Tabelle möglich, die Nettomonatseinkommen der 20- bis 29-Jährigen und der 30- bis 39-Jährigen in Boxplots (Kastenschaubildern) gegenüberzustellen? Begründe deine Antwort!

(b) Jemand hat das arithmetische Mittel aller Nettomonatseinkommen anhand der arithmetischen Mittel der sechs Altersklassen folgendermaßen berechnet:

$\frac{799{,}4+1\,487{,}0+1\,885{,}7+2\,086{,}1+2\,205{,}0+2\,144{,}7}{6} \approx 1\,768{,}0$

In der gegebenen Tabelle ist allerdings für das arithmetische Mittel aller Einkommen der Wert 1 872,7 angegeben.

Begründe, warum die oben angeführte Rechnung nicht das richtige Ergebnis liefert, und gib den richtigen Ansatz für die Berechnung an!

Bei der Altersklasse 60+ ist das arithmetische Mittel der Nettomonatseinkommen deutlich (um fast € 500) größer als das Medianeinkommen dieser Altersklasse. Gib eine daraus ableitbare Schlussfolgerung im Hinblick auf sehr niedrige bzw. sehr hohe Nettomonatseinkommen in dieser Altersklasse an!

(c) $\boxed{\text{A}}$ Gib die Werte des 1. und des 3. Quartils der Nettomonatseinkommen der unselbstständig Erwerbstätigen mit Pflichtschulabschluss als höchste abgeschlossene Schulbildung an!

1. Quartil: ____________

3. Quartil: ____________

Der Interquartilsabstand ist die Differenz von 3. und 1. Quartil.

Ein Experte behauptet: „Mit zunehmender höchster abgeschlossener Schulbildung, die über einen Pflichtschulabschluss hinausgeht, nimmt auch der Interquartilsabstand der Nettomonatseinkommen zu.“

Verifiziere oder widerlege diese Behauptung und verwende dazu die Daten in der gegebenen Tabelle!

(d) Die Daten in der gegebenen Tabelle zeigen, dass ungefähr 53 % der unselbständig Erwerbstätigen Angestellte und ungefähr 30 % Arbeiter/innen sind.

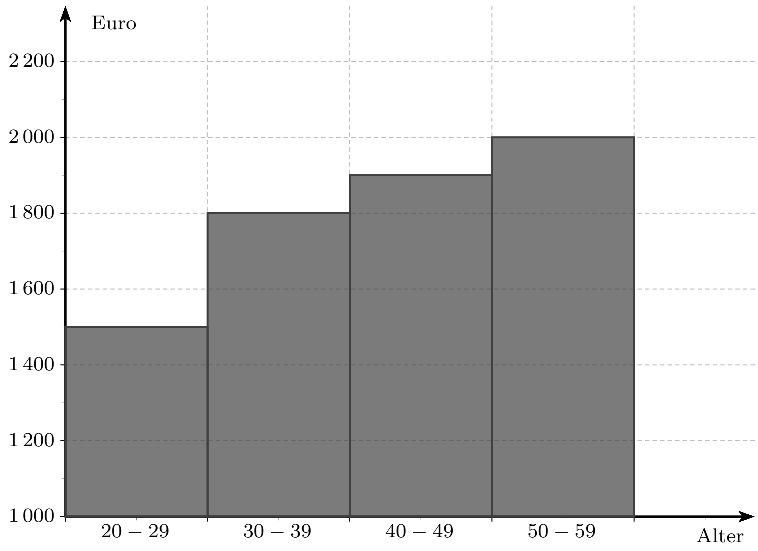
In einem Kommentar zum Arbeitsmarktbericht ist zu lesen: „Der relative Anteil der Angestellten ist um ungefähr 23 % höher als der relative Anteil der Arbeiter/innen.“ Ist diese Aussage richtig? Begründe deine Antwort!

Überprüfe folgende Aussagen über Nettomonatseinkommen anhand der Daten in der gegebenen Tabelle! Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an!

Angestellte verdienen im Durchschnitt um über € 500 mehr als Arbeiter/innen.	
Höchstens ein Viertel der Arbeiter/innen verdient mehr als € 1.922.	☒
Die Spannweite des Nettomonatseinkommens kann anhand der Daten in der Tabelle nicht exakt angegeben werden.	☒
Drei Viertel der Lehrlinge verdienen mindestens € 930.	
Genau die Hälfte der Beamten und Vertragsbediensteten verdient exakt € 1.800.	

(a) **Lösungserwartung:**

Mögliches Diagramm:



Die Gegenüberstellung der Nettomonatseinkommen in Boxplots (Kastenschaubildern) ist anhand der gegebenen Daten nicht möglich, da die niedrigsten und die höchsten Nettomonatseinkommen (Minimum und Maximum) in der Tabelle nicht angegeben sind.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für ein korrektes Diagramm.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) richtige Begründung.

(b) **Lösungserwartung:**

Mögliche Begründung:

Die angeführte Rechnung ist falsch, da die Anzahl der Erwerbstätigen in den einzelnen Altersklassen nicht berücksichtigt ist.

Ein richtiger Ansatz lautet:

$$\frac{799{,}4\cdot 173{,}5+1\,487\cdot 705{,}1+1\,885{,}7\cdot 803{,}1+2\,086{,}1\cdot 1\,020{,}4+2\,205\cdot 632{,}8+2\,144{,}7\cdot 73}{3\,407{,}9}$$

Mögliche Begründung:

In der Altersklasse 60+ weichen die sehr hohen Nettomonatseinkommen viel stärker vom Medianeinkommen ab als die sehr niedrigen Einkommen.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine (sinngemäß) richtige Begründung und einen korrekten Ansatz.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) richtige Begründung.

(c) **Lösungserwartung:**

1. Quartil: € 677,0

3. Quartil: € 1.564,0

Die Behauptung ist richtig, wie die folgenden Interquartilsabstände zeigen:

Lehrabschluss: € 840

BMS-Abschluss: € 1.032

Abschluss einer höheren Schule: € 1.406

Universitätsabschluss: € 1.618

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die Angabe beider korrekten Werte.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) richtige Begründung.

(d) **Lösungserwartung:**

Die Aussage ist nicht richtig.

Mögliche Begründungen:

Für diesen Vergleich muss der relative Anteil (in Prozent) der Arbeiter/innen als Grundwert verwendet werden.

oder:

In der Aussage wurde ein relativer Zuwachs (in Prozent) mit einem Zuwachs von Prozentpunkten verwechselt.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die Angabe, dass die Aussage nicht richtig ist, und eine (sinngemäß) richtige Begründung. Eine richtige Berechnung des relativen Anteils (ca. 75 % mehr Angestellte) ist auch als richtig zu werten.
- Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

73 - MAT - AG 2.1, FA 2.5, WS 2.2, WS 3.2, WS 4.1 - Buccolam - Matura 2016/17 Haupttermin

23. Buccolam ist ein flüssiges Arzneimittel zur Behandlung akuter, länger anhaltender Krampfanfälle bei Personen, die mindestens drei Monate alt und jünger als 18 Jahre sind (im Folgenden „Kinder"). Es enthält als Wirkstoff Midazolam, ein stark wirksames Beruhigungsmittel. Im Rahmen einer klinischen Studie wurde Buccolam 440 Kindern mit Krampfanfällen verabreicht. Bei 22 Kindern traten dabei als Nebenwirkung Übelkeit und Erbrechen auf. Bei 308 Kindern verschwanden sichtbare Zeichen der Krampfanfälle innerhalb von 10 Minuten nach Verabreichung des Medikaments. ____/0

Aufgabenstellung:

(a) Es gibt vier Arten von Buccolam-Spritzen mit der dem jeweiligen Altersbereich entsprechenden Midazolam-Dosis:

Altersbereich	Midazolam-Dosis	Farbe des Etiketts
bis < 1 Jahr	2,5 mg	Gelb
1 Jahr bis < 5 Jahre	5 mg	Blau
5 Jahre bis < 10 Jahre	7,5 mg	Violett
10 Jahre bis < 18 Jahre	10 mg	Orange

Datenquelle: http://www.ema.europa.eu/docs/de_DE/document_library/EPAR_-_Product_ Information/human/002267/WC500112310.pdf [02.12.2016].

Diese Spritzen beinhalten je nach Altersbereich eine Lösung mit der entsprechenden Midazolam-Dosis. Zum Beispiel beinhalten die Spritzen mit gelbem Etikett eine Lösung mit einem Volumen von 0,5 ml.

Allgemein besteht zwischen dem Volumen V (in ml) einer Lösung und der Midazolam-Dosis D (in mg) ein direkt proportionaler Zusammenhang.

Beschreiben den Zusammenhang zwischen dem Volumen V einer Lösung und der Midazolam-Dosis D mithilfe einer Gleichung!

Gib an, ob zwischen dem Alter (in Jahren) der Patientin/des Patienten und der zu verabreichenden Midazolam-Dosis ein linearer Zusammenhang besteht, und begründe deine Entscheidung anhand der in der obigen Tabelle angegebenen Daten!

(b) Die relative Häufigkeit H von Nebenwirkungen nach Verabreichung eines Medikaments wird folgendermaßen klassifiziert:

häufig	$0{,}01 \leq H < 0{,}1$
gelegentlich	$0{,}001 \leq H < 0{,}01$
selten	$0{,}0001 \leq H < 0{,}001$
sehr selten	$H < 0{,}0001$

Datenquelle: https://www.vfa.de/de/patienten/patientenratgeber/ratgeber031.html [02.12.2016] (adaptiert).

$\boxed{\text{A}}$ Gib an, wie die relative Häufigkeit von Nebenwirkungen der Art „Übelkeit und Erbrechen“ bei der Verabreichung von Buccolam gemäß der in der Einleitung erwähnten klinischen Studie klassifiziert werden müsste!

In der Packungsbeilage von Buccolam wird die Häufigkeit der Nebenwirkung „Hautausschlag“ mit „gelegentlich“ angegeben.

Die Zufallsvariable X beschreibt, bei wie vielen von den 440 im Rahmen der Studie mit Buccolam behandelten Kindern die Nebenwirkung „Hautausschlag“ auftritt, und kann als binomialverteilte Zufallsvariable mit dem Parameter $p = 0{,}01$ sowie dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ angenommen werden.

Gib an, bei wie vielen Kindern in der erwähnten Studie die Nebenwirkung „Hautausschlag“ auftreten darf, damit die Anzahl der davon betroffenen Kinder im Intervall $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$ liegt!

(c) Der tatsächliche Anteil derjenigen Patientinnen/Patienten, bei denen sichtbare Zeichen der Krampfanfälle innerhalb von 10 Minuten nach der Medikamentenverabreichung verschwinden, wird mit p bezeichnet.

Ermittle für p anhand der in der Einleitung angegebenen Daten der klinischen Studie ein symmetrisches Konfidenzintervall mit dem Konfidenzniveau $\gamma = 0{,}95$!

In einer anderen Studie zur Wirksamkeit von Buccolam wurden n_1 Kinder untersucht. Die Ergebnisse führten mit derselben Methodik zu dem symmetrischen Konfidenzintervall $[0{,}67; 0{,}73]$ mit dem Konfidenzniveau γ_1. Begründe, warum die Werte $n_1 < 400$ und $\gamma_1 = 0{,}99$ nicht die Grundlage zur Berechnung dieses Konfidenzintervalls gewesen sein können

(a) Lösungserwartung:

$V(D) = 0{,}2 \cdot D$

Zwischen dem Alter (in Jahren) der Patientin/des Patienten und der zu verabreichenden Midazolam-Dosis besteht kein linearer Zusammenhang.

Mögliche Begründung: Bei einem linearen Zusammenhang würden z. B. 3-jährige Kinder eine niedrigere Dosis als 4-jährige Kinder erhalten. Laut Tabelle ist dies nicht der Fall.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine korrekte Gleichung. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.
- Ein Punkt für eine richtige Entscheidung und eine korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen (z. B. mithilfe einer Skizze oder mit einem Hinweis auf das Vorliegen einer unstetigen Funktion) sind ebenfalls als richtig zu werten.

(b) Lösungserwartung:

Da bei 22 von 44 Kindern die Nebenwirkung „Übelkeit und Erbrechen" auftrat, beträgt die relative Häufigkeit $\frac{22}{440} = 0{,}05$.
Wegen $0{,}01 \leq 0{,}05 < 0{,}1$ würde sich für die Nebenwirkung „Übelkeit und Erbrechen" die Klassifizierung „häufig" ergeben.

Mögliche Vorgehensweise:
$\mu = 4{,}4 \; \sigma \approx 2{,}09 \Rightarrow [\mu - \sigma; \mu + \sigma] \approx [2{,}31; 6{,}49]$
Die Nebenwirkung „Hautausschlag" muss demnach bei mindestens drei und darf bei höchstens sechs Kindern der erwähnten Studie auftreten.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für eine korrekte Klassifizierung.
- Ein Punkt für die richtige Lösung.

(c) Lösungserwartung:

$n = 440, h = 0{,}7$
$0{,}7 \pm 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}7\cdot 0{,}3}{440}} \approx 0{,}7 \pm 0{,}04 \Rightarrow [0{,}66; 0{,}74]$

Die Werte $n_1 < 400$ und $\gamma_1 = 0{,}99$ würden zu einem wesentlich breiteren Konfidenzintervall führen und können daher nicht die Grundlage zur Berechnung gewesen sein.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für ein korrektes Intervall. Andere Schreibweisen des Ergebnisses (als Bruch oder in Prozent) sind ebenfalls als richtig zu werten.
  Toleranzintervall für den unteren Wert: $[0{,}65; 0{,}66]$
  Toleranzintervall für den oberen Wert: $[0{,}74; 0{,}75]$
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Begründung.

---

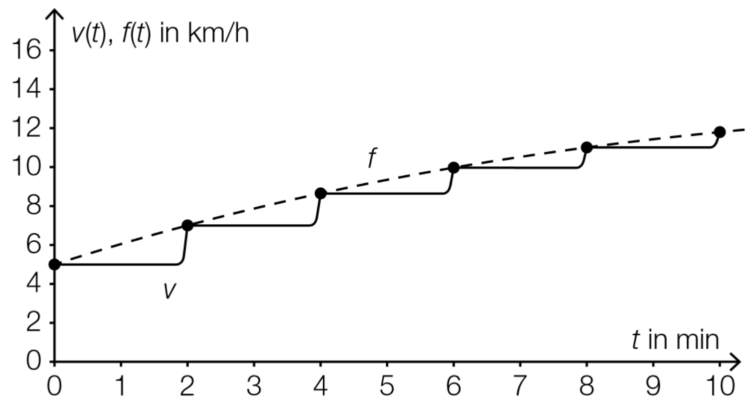
76 - MAT - AG 2.1, AN 1.3, AN 3.2, AN 3.3, AN 4.2, FA 1.4, FA 1.7, FA 2.6, WS 1.3 - Laufband - BIFIE Aufgabensammlung

24. Ein Laufband ist ein Sportgerät, auf dem verschiedene Lauftrainingsprogramme absolviert werden können. ____/0

Bei einem individuell erstellen, 30-minütigen Trainingsprogramm ändert sich die Laufbahngeschwindigkeit alle zwei Minuten. Die von der Zeit t (in min) abhängigen Laufbahngeschwindigkeiten (in km/h) sind Funktionswerte an bestimmten Stellen der Funktion f mit $f(t) = 0{,}0008 \cdot t^3 - 0{,}05 \cdot t^2 + 1{,}1 \cdot t + 5$.

Die Laufbahngeschwindigkeit während der ersten beiden Minuten entspricht dem Funktionswert $f(0)$, die Geschwindigkeit in den beiden darauffolgenden Minuten dem Wert $f(2)$ usw. Für die Berechnung wird vereinfacht angenommen, dass sich die Laufbandgeschwindigkeit innerhalb sehr kurzer Zeit ändert.

Die nachstehende Abbildung zeigt modellhaft die Entwicklung der Laufbahngeschwindigkeit in den ersten zehn Minuten des Trainings, wobei $v(t)$ die Geschwindigkeit des Laufbands zum Zeitpunkt t angibt. Das Training beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$.



Aufgabenstellung:

(a) Gib einen Ausdruck an, mit dem das arithmetische Mittel der Laufbandgeschwindigkeiten während des 30-minütigen Trainingsprogramms berechnet werden kann, und ermittle diesen Wert!

Begründe, warum das arithmetische Mittel der Laufbandgeschwindigkeiten der mittleren Geschwindigkeit $\bar{v}$ während des 30-minütigen Trainingsprogramms entspricht!

Berechne unter Verwendung der mittleren Geschwindigkeit $\bar{v}$ die während des 30-minütigen Trainingsprogramms bewältigte Strecke!

(b) Gib die minimale und die maximale Geschwindigkeit des Laufbands während des 30-minütigen Trainingsprogramms an!

$v_{\text{min}} =$ ______________________ km/h

$v_{\text{max}} =$ ______________________ km/h

Begründe, warum zu den Zeitpunkten t_{min} und t_{max}, zu denen die minimale bzw. die maximale Geschwindigkeit des Laufbands in dem 30-minptigen Trainingsprogramm erreicht wird, $f'(t_{\text{min}}) \neq 0$ und $f'(t_{\text{max}}) \neq 0$ gilt!

(c) Gib den Wert von $v'(1)$ an und interpretiere diesen Wert (mit Angabe der Einheit) im gegebenen Kontext!

$v'(1) =$ ______________________

Beschreibe anhand des Graphen in der Einleitung, wie der Graph der Ableitungsfunktion v' im Intervall $[0;30]$ verlaufen müsste!

(d) Die in den ersten zehn Trainingsminuten zurückgelegte Weglänge kann näherungsweise mit dem Integral $\frac{1}{60} \cdot \int_0^{10} f(t)\mathrm{d}t$ berechnet werden.

Berechne diesen Näherungswert und erläuter die Bedeutung des Faktors $\frac{1}{60}$!

Gib die absolute Abweichung des berechneten Näherungswertes von der tatsächlich zurückgelegten Weglänge während der ersten zehn Minuten in Metern an!

(e) Unter bestimmten Voraussetzungen ist der Energiebedarf einer Person bei einem Lauftraining direkt proportional zur Masse der Person (in kg) und zur zurückgelegten Weglänge (in km).

Die nachstehende Tabelle zeigt den Energiebedarf (in kcal) einer 80 kg schweren Person bei einem Lauftraining in Abhängigkeit von der Dauer t des Trainings. Die Person läuft mit einer konstanten Geschwindigkeit von 10 km/h.

	$t = 15$ min	$t = 30$ min	$t = 45$ min	$t = 60$ min
Energiebedarf in kcal	194	388	582	776

Zeige anhand der Tabellenwerte die direkte Proportionalität des Energiebedarfs zur zurückgelegten Wegstrecke und berechne den Proportionalitätsfaktor k!

Beim Lauftraining wird die Geschwindigkeit häufig als „Tempo“ in min/km umschrieben. Berechne für die unten angeführten Geschwindigkeiten unter Verwendung des Proportionalitätsfaktors k für eine 90 kg schwere Person jeweils das Tempo und den Energiebedarf (in kcal) für die angegebene Zeitdauer!

Geschwindigkeit in km/h	Tempo in min/km	Energiebedarf in 15 min	Energiebedarf in 30 min
7,5	8		
10			
12			

(a) **Lösungserwartung:**

$\bar{v} = \frac{1}{15} \cdot (f(0) + f(2) + f(4) + ... + f(28) \approx 11{,}57$

Das arithmetische Mittel der Laufbahngeschwindigkeiten beträgt 11,57 km/h

Das Arithmetische Mittel entspricht der mittleren Geschwindigkeit während des 30-minütigen Trainingsprogramms, weil die Geschwindigkeiten $v(0), ..., v(28)$ in gleich langen Zeitintervallen (2 min) jeweils konstant sind.

zurückgelegte Weglänge: $0{,}5\,\text{h} \cdot 11{,}57\,\text{km/h} = 5{,}785\,\text{km}$

(b) **Lösungserwartung:**

$v_{\text{min}} = 5\,\text{km/h}$

$v_{\text{max}} = 14{,}16\,\text{km/h}$

t_{min} und t_{max} sind keine lokalen Extremstellen der Funktion f, weshalb die 1. Ableitung von f an diesen Stellen nicht null ist.

(c) **Lösungserwartung:**

$v'(1) = 0$

Mögliche Interpretationen:

Die Beschleunigung (momentane Geschwindigkeitsänderung) des Laufbands nach 1 Minute beträgt $0\,\text{m/s}^2$.

oder:

Das Laufband (die Läuferin/der Läufer) bewegt sich während der ersten 2 Minuten mit konstanter Geschwindigkeit, d.h., seine Beschleunigung ist zum Zeitpunkt $t = 1\,\text{min}$ gleich null.

Der Graph von v' würde auf der 1. Achse verlaufen und nur zu den Zeitpunkten der Geschwindigkeitsänderungen ($t = 2, t = 4, t = 6, ...$) sehr hohe Werte annehmen.

(d) **Lösungserwartung:**

$\frac{1}{60} \cdot \int_0^{10} f(t)\mathrm{d}t \approx 1{,}506$

zurückgelegte Weglänge: ca. 1,51 km

Mögliche Begründungen:

Der Faktor $\frac{1}{60}$ ist erforderlich, um die Geschwindigkeiten von km/h in km/min umzurechnen, da die Zeiten (Intervallgrenzen) in Minuten gegeben sind (1 h=60 min).

oder:

Der Faktor $\frac{1}{60}$ ist erforderlich, um die pro Stunde zurückgelegten Wegstrecken auf die pro Minute zurückgelegten Wegstrecken umzurechnen.

Für die tatsächlich zurückgelegte Weglänge gilt:

$\frac{2}{60} \cdot (f(0) + f(2) + f(4) + f(6) + f(8)) \approx 1{,}388\,\text{km}$

$\Rightarrow$ Der Näherungswert für die Weglänge weicht um ca. 118 m vom exakten Wert ab.

(e) **Lösungserwartung:**

$194 = k \cdot 80 \cdot 2{,}5$

$k = 0{,}97$

Bei der doppelten/dreifachen/vierfachen Laufzeit wird die doppelte/dreifache/vierfache Strecke zurückgelegt und auch der Energiebedarf ist doppelt/dreimal/viermal so groß.

Geschwindigkeit in km/h	Tempo in min/km	Energiebedarf in 15 min	Energiebedarf in 30 min
7,5	8	163,7	327,4
10	6	218,25	436,5
12	5	261,9	523,8

78 - MAT - AG 2.4, AN 4.2, AN 4.3, FA 1.4, FA 1.7, FA 3.2, FA 4.1, FA 5.6, WS 1.1, WS 1.2 - Einkommensverteilung - BIFIE Aufgabensammlung

25. Der Statistiker Max Lorenz beschrieb bereits im Jahr 1905 statistische Verteilungen mithilfe der nach ihm benannten Lorenz-Kurve. Eine Lorenz-Kurve f kann z.B. zur Beschreibung er Einkommensverteilung in einem Staat herangezogen ____/0

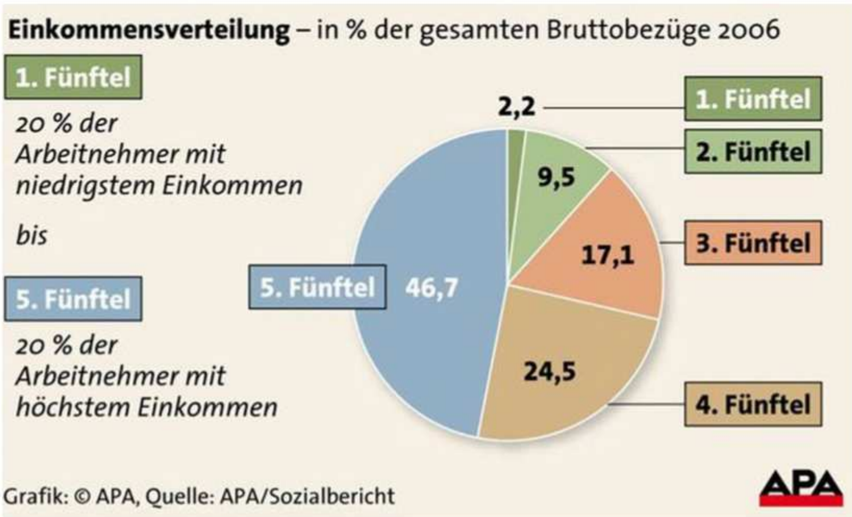
werden. Je ausgeprägter ihr „Bauch“ ist, desto größer ist der Einkommensunterschied zwischen niedrigem und hohem Einkommen.

Die Lorenz-Kurve der Einkommensverteilung eines Staates, in dem alle Personen bis auf eine Person nichts verdienen und diese eine Person alles bekommt, wird in der nachstehenden Grafik durch die punktrierten Linien (Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks) dargestellt. Das andere Extrem ist ein Staat, in dem alle Personen gleich viel verdienen. In diesem Fall die die Lorenz-Kurve zu einer Geraden h, welche durch die strichlierte Linie dargestellt ist. Zwischen den beiden Extremen verläuft die Lorenz-Kurve f eines Staates.

Jeder Punkt $P = (x|f(x))$ auf der Kurve f steht für folgende Aussage: Die einkommensschwächsten $x\,\%$ aller Haushalte beziehen $f(x)\,\%$ des Gesamteinkommens.“

Der Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks wird mit A bezeichnet. Der Graph der Lorenz-Kurve f schließt mit den beiden Katheten des rechtwinkeligen Dreiecks eine Fläche mit Inhalt B ein. Setzt man den Inhalt der Fläche zwischen der Lorenz-Kurve f und der Geraden h mit der Dreiecksfläche A in Bezug, erhält man den Gini-Ungleichheitskoeffizienten $GUK = \frac{A-B}{A}$, eine Zahl zwischen null und ein. Je kleiner der GUK ist, desto gleichmäßiger ist das Gesamteinkommen auf die Bevölkerung verteilt.

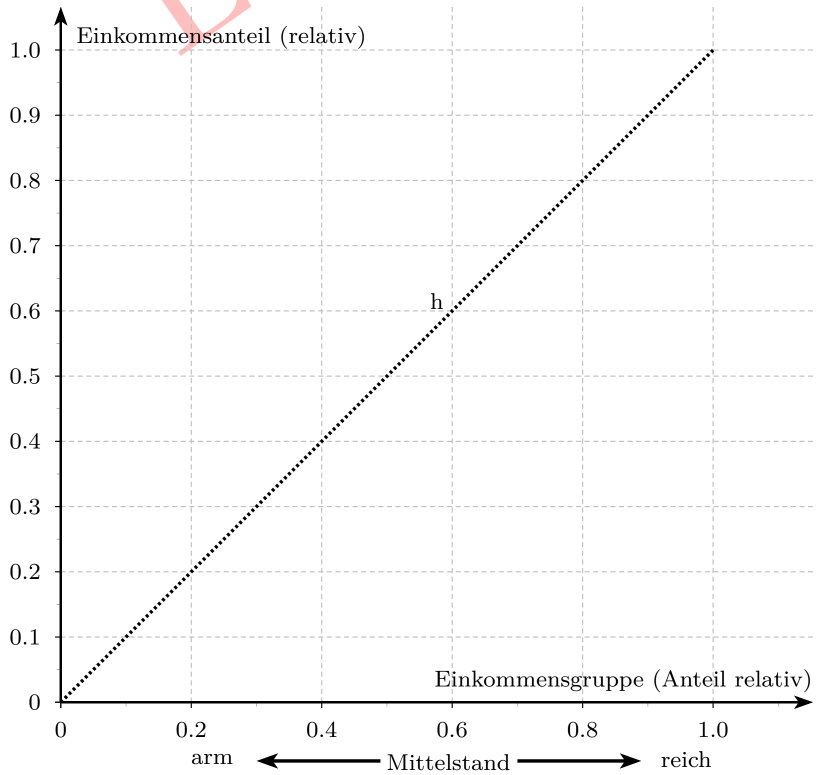
In der nachstehenden Grafik ist die Einkommensverteilung in Österreich in Prozent der gesamten Bruttobezüge im jahr 2006 dargestellt. Daraus ist z.B. abzulesen, dass jene 20 % der Bevölkerung mit den niedrigsten Bruttoeinkommen nur 2,2 % des Gesamtbruttoeinkommens erhalten haben.



Quelle: http://diepresse.com/home/wirtschaft/economist/446997/Sozialbericht_Einkommen-in-Oesterreich-ungleicher-verteilt [04.05.2017].

Aufgabenstellung:

(a) Zeichne die Lorenzkurve für die Einkommensverteilung der Bruttobezüge in Österreich im Jahr 2006 in den nachstehenden Grafik als Streckenzug ein!



Berechne mithilfe des eingezeichneten Streckenzuges den GUK für die Bruttobezüge in Österreich für das Jahr 2006!

(b) Die Verteilung der Bruttoeinkommen in Österreich im Jahr 2006 soll durch eine Polynomfunktion p so modelliert werden, dass alle Daten, die aus dem Kreisdiagramm aus der Einleitung abgelesen werden können mit Funktionswerten dieser Polynomfunktion übereinstimmen.

Begründe, welchen Grad die Polynomfunktion p bei konkreter Berechnung (maximal) hat!

Begründe, warum eine Exponentialfunktion e mit $e(x) = a \cdot b^x (a, b \in \mathbb{R}^+$ nicht für die Modellierung einer Lorenz-Kurve geeignet ist!

(c) Um politische Maßnahmen abschätzen zu können, werden verschiedene Szenarien entworfen. So soll beispielsweise für die Bruttoeinkommen langfristig eine Lorenz-Kurve angestrebt werden, die durch die Funktion g mit der Funktionsgleichung $g(x) = 0{,}245 \cdot x^3 + 0{,}6 \cdot x^2 + 0{,}155 \cdot x$ beschrieben werden kann.

Gib eine Gleichung an, mit der der GUK für die angestrebte Einkommensverteilung berechnet werden kann, und ermittle diesen GUK!

Gib mithilfe konkreter Zahlenwerte an, wie sich in diesem Fall die Einkommensverteilung der „20 % der Arbeitnehmer/innen mit den niedrigsten Bruttoeinkommen“ und die Einkommensverteilung der „20 % der Arbeitnehmer/innen mit den höchsten Bruttoeinkommen“ im Vergleich zu den Bruttobezügen im Jahr 2006 in Österreich ändern würde!

(d) Für das Jahr 2007 kann die Einkommensverteilung für Österreich mit einem GUK von 0,26 beschrieben werden.

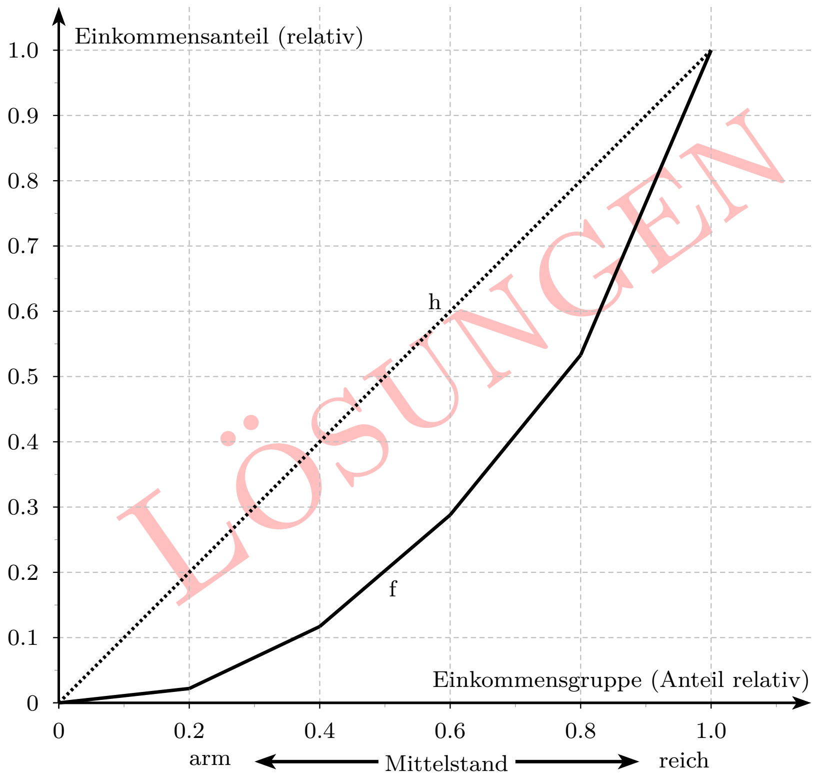
Datenquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Liste_der_L%C3%A4nder_nach_Einkommensverteilung [04.05.2017].

Angenommen, die Lorenz-Kurve für die Einkommenverteilung kann für ein bestimmtes Land, das eine ausgeglichenere Einkommensverteilung als Österreich aufweisen soll, durch eine Potenzfunktion h mit $h(x) = a \cdot x^z + b$ mit $a, b, z \in \mathbb{R}$ beschrieben werden.

Gib an, welche Werte die Parameter a und b haben müssen, und begründe deine Wahl!

Gib eine Ungleichung an, die für das Jahr 2007 einen Zusammenhang zwischen dem GUK von Österreich und dem GUK von demjenigen Land, das eine ausgeglichenere Einkommensverteilung als Österreich aufweisen soll, beschreibt! Ermittle für diesen Fall einen möglichen Wert für den Exponenten z mit $z > 1$!

(a) Lösungserwartung:



Der Inhalt der Fläche zwischen dem Polygonzug f und der Strecke h beträgt 0,208 Flächeneinheiten (die Ermittlung des Flächeninhalts zwischen der waagrechten Achse und dem Streckenzug kann z.B. aus zwei Dreiecksflächen und drei Trapezflächen erfolgen).

$\Rightarrow GUK = \frac{0{,}208}{0{,}5} = 0{,}416$

(b) Lösungserwartung:

Aus den Daten des Kreisdiagramms ergeben sich (für die Argumente $x = 0, x = 0{,}2, x = 0{,}4, x = 0{,}6, x = 0{,}8, x = 1$) sechs Funktionswerte von p und somit sechs „Bedingungen“ für die Koeffizienten der Funktionsgleichung. Eine Polynomfunktion fünften Grades hat sechs Koeffizienten und ist daher geeignet.

(Anmerkung: Bei „besonderer“ Lage der Punkte kann auch ein Grad kleiner als fünf ausreichend sein.

Jede Lorenz-Kurve verläuft durch den Punkt $(0|0)$. Da eine Exponentialfunktion e mit $e(x) = a \cdot b^x$ $(a, b \in \mathbb{R}^+)$ nicht durch den Koordinatenursprung verläuft, ist sie nicht für die Modellierung geeignet.

(c) **Lösungserwartung:**

$$GUK = \frac{0{,}5 - \int_0^1 (0{,}245x^3 + 0{,}6x^2 + 0{,}155x)dx}{0{,}5} = 0{,}3225$$

$g(0{,}2) \approx 0{,}057$

$g(0{,}8) \approx 0{,}633$

Der Einkommensanteil der „20 % mit den niedrigsten Bruttoeinkommen“ würde (um ca. 3,5 Prozentpunkte) von 2,2 % auf ca. 5,7 % steigen.

Der Einkommensanteil der „20 % mit den höchsten Bruttoeinkommen“ würde (um ca. 10 Prozentpunkte) von 46,7 % auf 36,7 % sinken.

(d) **Lösungserwartung:**

$b = 0$, da der Graph durch den Punkt $(0|0)$ verlaufen muss

$a = 1$, da der Graph durch den Punkt $(1|1)$ verlaufen muss

$$\frac{0{,}5 - \int_0^1 x^z dx}{0{,}5} < 0{,}26$$

$z \in \left(1; \frac{63}{37}\right)$

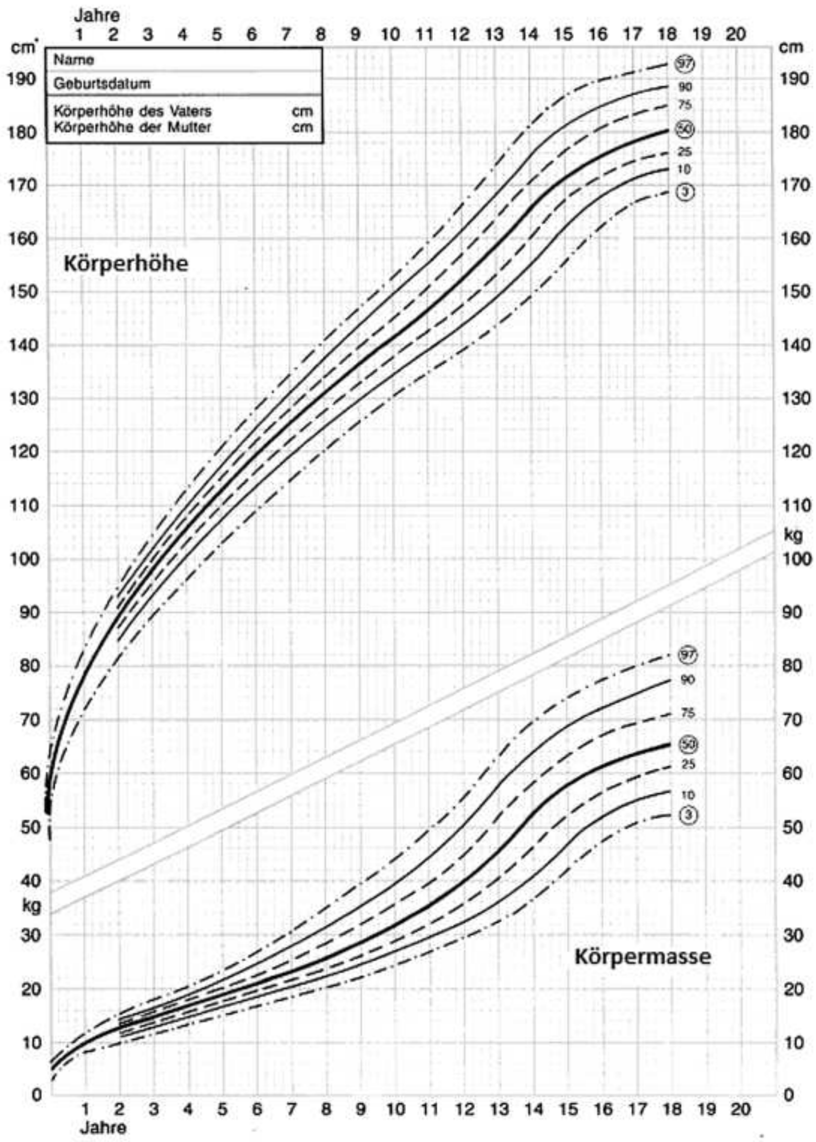
---

83 - MAT - WS 4.1, AN 1.2, AN 1.3, WS 1.3, WS 1.2 - Wachstumskurve von Kindern - Matura NT 1 16/17

26. Um die Entwicklung der Körperhöhe und der Masse eines Kinder kontrollieren zu können, sind im Mutter-Kind-Pass die Perzentielenkurven für Körperhöhen ____/6

(Größe) und Masse angegeben (Körperhöhe in cm, Masse in kg). Perzentile teilen die Körperhöhen und Massen der Kinder in Prozent-Bereiche auf. Liegt ein Wert auf dem 10. Wachstumsperzentil, so sind 10 % der Kinder des ausgewählten Alters kleiner oder gleich dem angegebenen Wert und 90 % größer oder gleich dem angegebenen Wert.

Es ist üblich, alle Werte zwischen dem 3. und dem 97. Perzentil als „normal“ zu bezeichnen. Das folgende Diagramm zeigt die Wachstums- und Körpermassekurven für Buben im Alter von 0 bis 18 Jahren:



Aufgabenstellung:

(a) Ein Schularzt untersucht eine zufällige Stichprobe von 8-jährigen Buben aus seinem Schulbezirk und erhebt unter anderem deren Körpermassen (in kg). Anhand der Ergebnisse dieser Messung erstellt er für den Anteil der 8-jährigen Buben aus einem Schulbezirk, deren Körpermasse im „Normalbereich“ $[20\,\text{kg}; 35\,\text{kg}]$ liegt, das symmetrische Konfidenzintervall $[0{,}8535; 0{,}9465]$ mit dem Konfidenzniveau $\gamma = 0{,}95$.

Gib den Unterschied des der Berechnung zugrundeliegenden Stichprobenanteils zum Anteil der 8-jährigen Buben mit einer Körpermasse im „Normalbereich“ laut Diagramm in Prozentpunkten an!

Berechne die Anzahl der bei dieser Stichprobe gemessenen 8-jährigen Buben!

(b) Angenommen, für ein bestimmtes Kind sind die Körperhöhen $g(1), g(2), g(3), \ldots$ zum ersten, zweiten, dritten usw. Geburtstag bekannt.
Gib verbal oder als Formel an, wie sich die durchschnittliche Wachstumsgeschwindigkeit dieses Kindes in dem dreijährigen Zeitraum zwischen dem 6. und dem 9. Geburtstag bestimmen lässt.

Betrache das Größenwachstum auf dem 50. Perzentil nach dem 8. Lebenjahr. Gib das ungefähre Alter von Buben an, bei dem deren momentane Wachstumsgeschwindigkeit am größten ist!

(c) Gib an, welcher statistischen Kennzahl derjenige Wert entspricht, den man auf dem 50. Perzentil ablesen kann.

Erläutere, welche Schwierigkeiten auftreten, wenn man aus dem angegebenen Diagramm ein Kastenschaubild (Boxplot) zur Darstellung der Körperhöhen von 8-jährigen Buben erstellen möchte!

(a) **Lösungserwartung:**

Stichprobenanteil: 0,9

Anteil laut Diagramm: 0,94

Unterschied: 4 Prozentpunkte

Mögliche Berechnung:

$$0{,}9465 = 0{,}9 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}9 \cdot (1 - 0{,}9)}{n}} \Rightarrow \approx 160 \text{ Buben}$$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung.
- Ein Punkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall: [155 Buben; 165 Buben]
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

(b) **Lösungserwartung:**

Die durchschnittliche Wachstumsgeschwindigkeit in diesem Zeitraum entspricht einem Drittel der Größenzunahme.

oder:

$\frac{g(9)-g(6)}{3}$

Das ungefähre Alter von Buben, bei dem deren momentane Wachstumsgeschwindigkeit am größten ist, liegt bei ca. 13 Jahren.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Antwort bzw. eine richtige Formel. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „Jahre“ nicht angeführt sein muss.
  Toleranzintervall: [12 Jahre; 14 Jahre]

(c) **Lösungserwartung:**

Die statistische Kennzahl, die demjenigen Wert entspricht, den man auf dem 50. Perzentil ablesen kann, ist der Median.

Die Schwierigkeiten bestehen darin, dass man zwar das 1. und das 3. Quartil sowie den Median, jedoch weder Minimum noch Maximum ablesen kann (und auch keine Informationen bezüglich Ausreißern hat).

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für das Anführen der korrekten statistischen Kennzahl.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Erläuterung.

86 - MAT - AG 2.1, FA 1.4, FA 2.2, FA 2.4, WS 1.1, WS 1.4 - Human Development Index - Matura 2016/17 2. NT

27. Der Human Development Index (HDI) der Vereinten Nationen ist ein Wohlstandsindikator für Länder, der eine Messung des Entwicklungsstandes des jeweiligen Landes ermöglichen sollte. Der HDI beinhaltet drei dimensionslose Größen (Lebenserwartungsindex (LEI), Bildungsindex (BI) und Einkommensindex (EI)) und wird mit der Formel $HDI = \sqrt[3]{LEI \cdot BI \cdot EI}$ berechnet. ____/0

 Dimensionslos bedeutet, dass diese Größen keine Einheiten haben.

 Für die Berechnung des Indizes LEI und EI gilt seit 2010:

 $LEI = \frac{LE-20}{85-20}$, wobei LE die Lebenserwartung zum Zeitpunkt der Geburt in Jahren beschreibt

 $EI = \frac{\ln(B)-\ln(100)}{\ln(75\,000)-\ln(100)}$, wobei B das Bruttonationaleinkommen pro Kopf in US-Dollar (immer zu Jahresbeginn) beschreibt.

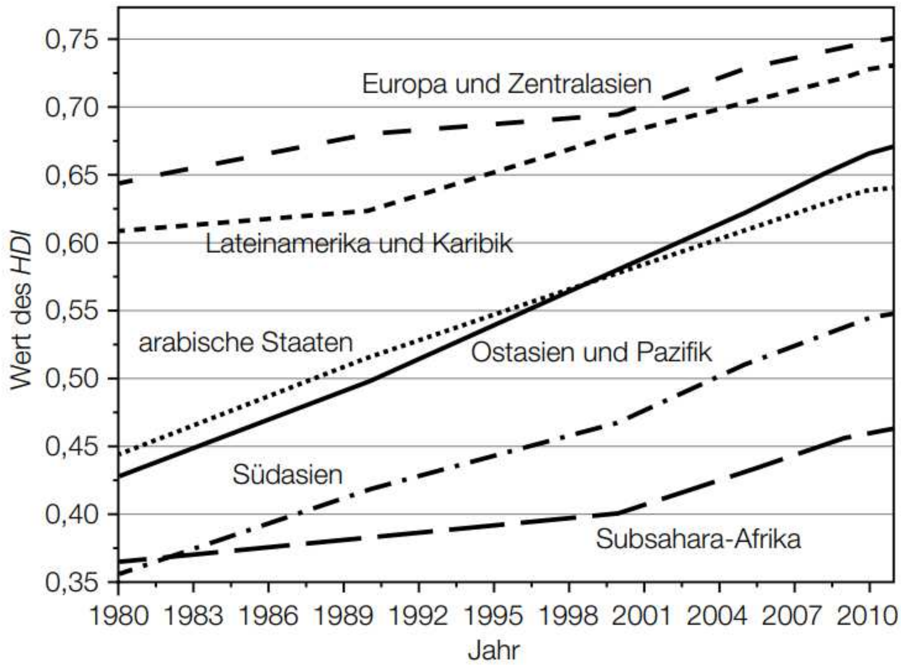
 Das Entwicklungsprogramm der Vereinten Nationen unterteilt die Länder nach dem Wert des HDI seit 2009 in vier Entwicklungskategorien:

Entwicklungskategorie eines Landes	Wert des HDI
E_1	$\leq 0{,}8$
E_2	$[0{,}7; 0{,}8)$
E_3	$[0{,}55; 0{,}7)$
E_4	$< 0{,}55$

 Datenquelle: Deutsche Gesellschaft für die Vereinten Nationen (Hrsg.): Bericht über die menschliche Entwicklung 2015. Arbeit und menschliche Entwicklung. Berlin: Berliner Wissenschafts-Verlag 2015, S. 240

 Der HDI einer Region in einem bestimmten Jahr ergibt sich aus dem arithmetischen Mittel der HDIs der zu dieser Region zählenden Länder.

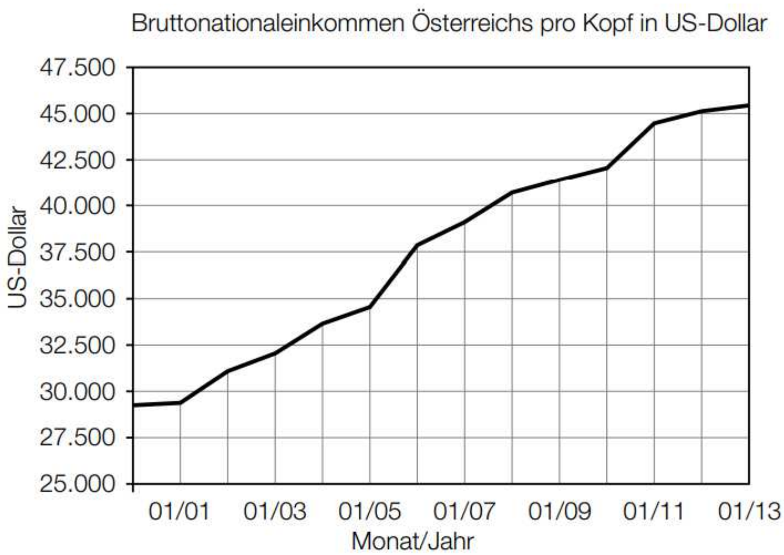
 Die Entwicklung des HDI verschiedener Regionen zwischen 1980 und 2011 ist nachstehend abgebildet.



Datenquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/ Index_der_menschlichen_Entwicklung#/ media/File:Human-Development-IndexTrends-2011.svg [08.06.2017].

Aufgabenstellung:

(a) Für Österreich wurde im Human Development Report für das Jahr 2013 die Lebenserwartung mit $LE = 81{,}1$ Jahren und der Bildungsindex mit $BI = 0{,}819$ angegeben. Die nachstehende Abbildung zeigt für die Jahre 2000 bis 2013 (jeweils zu Jahresbeginn) das Bruttonationaleinkommen Österreichs pro Kopf in US-Dollar.



Datenquelle: http://www.factfish.com/de/statistik/bruttonationaleinkommen [08.06.2017].

Ermittle für das Jahr 2013 den HDI von Österreich ($= HDI_{2013}$)!

Der HDI von Österreich für das Jahr 2013 (HDI_{2013}) war um ca. 2,5 % größer als der HDI von Österreich für das Jahr 2008 (HDI_{2008}). Gib eine Gleichung an, die diesen Zusammenhang beschreibt, und berechne den HDI_{2008}!

(b) Die jährliche Entwicklung des HDI der Region „arabische Staaten" kann im Zeitraum von 1980 bis 2010 näherungsweise durch eine lineare Funktion H mit der Gleichung $H(t) = k \cdot t + d$ mit $k, d \in \mathbb{R}$ und t in Jahren beschrieben werden, wobei $H(0)$ dem Wert des Jahres 1980 entspricht.

Bestimme die Werte der Parameter k und d!

Begründen Sie anhand der entsprechenden Abbildung, in welcher Region/in welchen Regionen die mittlere jährliche Zunahme des HDI im Zeitraum von 1980 bis 2010 am ehesten jener der Region „arabische Staaten" entsprach!

(c) $\boxed{\text{A}}$ Ermittle aus der entsprechenden Abbildung diejenige Jahreszahl, ab der die Region „Lateinamerika und Karibik" die Entwicklungskategorie E_2 aufweist!

Gilt ab diesem Zeitpunkt sicher, dass ungefähr die Hälfte der zu dieser Region zählenden Länder eine Entwicklungskategorie E_2 aufweist? Begründe deine Antwort!

(a) **Lösungserwartung:**

$LEI = \frac{81{,}1 - 20}{85 - 20} = 0{,}94$

$EI \approx \frac{\ln(45\,400) - \ln(100)}{\ln(75\,000) - \ln(100)} \approx 0{,}924$

$HDI_{2013} = \sqrt[3]{0{,}94 \cdot 0{,}819 \cdot 0{,}924} \approx 0{,}893$

$HDI_{2013} = HDI_{2008} \cdot 1{,}025$

$HDI_{2008} \approx 0{,}871$

Lösungsschlüssel

- Ein Punkt für die richtige Lösung. Toleranzintervall: $[0{,}88; 0{,}91]$ Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist. - Ein Punkt für eine korrekte Gleichung und die richtige Lösung. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten. Toleranzintervall: $[0{,}85; 0{,}89]$

(b) **Lösungserwartung:**

$k = \frac{0{,}64 - 0{,}44}{30} = 0{,}006\dot{6}$
$d = 0{,}44$

In der Region „Südasien" entsprach die mittlere jährliche Zunahme des HDI im Zeitraum 1980 bis 2010 am ehesten jener der Region „arabische Staaten".

Mögliche Begründung:
Die Sekanten durch die Punkte $(1980|0{,}44)$ und $(2010|0{,}64)$ sowie $(1980|0{,}36)$ und $(2010|0{,}54)$ verlaufen annähernd parallel zueinander.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die Angabe der beiden korrekten Werte. Toleranzintervall für k: $[0{,}005; 0{,}01]$ Toleranzintervall für d: $[0{,}43; 0{,}45]$ - Ein Punkt für die Angabe der Region „Südasien" und für eine (sinngemäß) korrekte Begründung.

(c) **Lösungserwartung:**

Ab dem Jahr 2004 weist die Region „Lateinamerika und Karibik" die Entwicklungskategorie E_2 auf.

Nein, es gilt nicht als sicher, dass ab diesem Zeitpunkt ungefähr die Hälfte der zu dieser Region zählenden Länder die Entwicklungskategorie E_2 aufweist.

Mögliche Begründung: Wenn eine sehr kleine Anzahl an Ländern mit sehr hohen HDI-Werten einer großen Anzahl an Ländern mit niedrigen HDI-Werten ($< 0{,}7$) gegenübersteht, kann dennoch das arithmetische Mittel der HDIs größer als 0,7 sein, ohne dass ungefähr die Hälfte der zu dieser Region zählenden Länder die Entwicklungskategorie E_2 aufweist.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung. Toleranzintervall: $[2003; 2005]$
- Ein Punkt für eine richtige Antwort und eine korrekte Begründung. An-

dere korrekte Begründungen (z.B. anhand sinnvoller Zahlenbeispiele oder mit der Feststellung, dass das arithmetische Mittel nicht notwendigerweise der Median sein muss) sind ebenfalls als richtig zu werten.

---

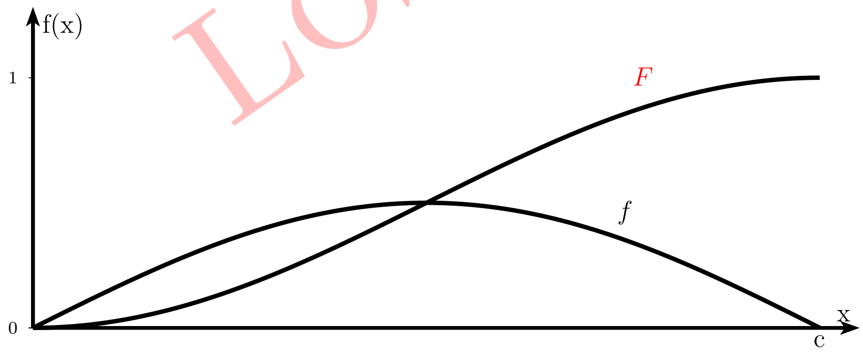
87 - MAT - AN 3.2, AN 3.2, AN 4.3, AN 4.2, WS 3.2 - Dichtefunktion und Verteilungsfunktion - Matura 2016/17 2. NT

28. Es sei X eine Zufallsvariable, für die sich die Wahrscheinlichkeit, dass X in einem Intervall I liegt, mithilfe einer sogenannten Dichtefunktion f folgendermaßen ermitteln lässt: ____/3

$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ für alle $a, b \in I$ mit $a \leq b$

In diesem Fall gilt für die Verteilungsfunktion $F: F(x) = P(X \leq x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, d.h. insbesondere $F(b) - F(a) = P(a \leq X \leq b)$ für $a, b \in I$ und $a \leq b$.

Die nachstehende Grafik zeigt den Graphen einer Dichtefunktion f mit $f(x) = k \cdot \sin(x)$ für $x \in [0; c]$, wobei $k \in \mathbb{R}, k > 0$ und $f(c) = 0$ gilt. Für $x \neq [0; c]$ gilt: $f(x) = 0$.



Aufgabenstellung:

(a) Gib für die gegebenen Dichtefunktion f den Funktionswert $F(0)$ der zugehörigen Verteilungsfunktion F an und begründe, warum $F(c) = 1$ ist!

$F(0) = 0$

Skizziere in der oben stehenden Grafik den Graphen der zugehörigen Verteilungsfunktion F und beschreibe das Krümmungsverhalten von F im Intervall $[0; c]$!

(b) Gib an, durch welche Eigenschaft von f der Wert des Parameters k festgelegt ist, und berechne den Wert von k!

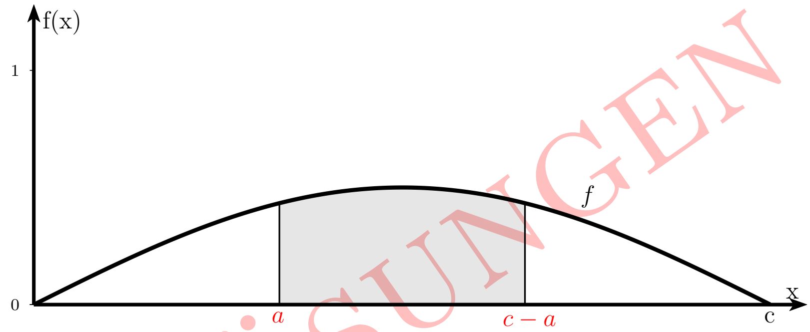
Gib einen Term der zugehörigen Verteilungsfunktion F im Intervall $[0; c]$ an!

$F(x) = -0{,}5 \cdot \cos(x) + 0{,}5$

(c) Für ein Ereignis E gilt: $P(E) = 1 - P(X \leq c - a)$ für ein beliebiges $a \in [0; c]$.

$\boxed{\text{A}}$ Beschreibe dieses Ereignis E verbal!

Stelle für $a \leq \frac{c}{2}$ die Wahrscheinlichkeit $P(a \leq X \leq c - a)$ in nachstehender Grafik als Fläche dar und begründe den Zusammenhang
$P(a \leq X \leq c - a) = 1 - 2 \cdot P(X \leq a)$ anhand dieser Darstellung!



(a) **Lösungserwartung:**

$F(c) = 1$ bzw. $P(X \leq c) = 1$, d.h., die Wahrscheinlichkeit, dass X einen Wert kleiner gleich c annimmt, beträgt 100 %, da $f(x) = 0$ für $x > c$.

Skizze: siehe oben.

Bis zum lokalen Maximum von f ist die Funktion F linksgekrümmt, danach ist die Funktion F rechtsgekrümmt.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung und eine (sinngemäß) korrekte Begründung.

- Ein Punkt für eine korrekte Skizze und eine (sinngemäß) korrekte Beschreibung des Krümmungsverhaltens der Funktion F. Die Skizze ist als korrekt zu betrachten, wenn das korrekte Krümmungsverhalten des Graphen von F in der Skizze klar erkennbar ist und die Wendestelle von F dabei bei

$x = \frac{c}{2}$ liegt. Für $x > c$ muss der Graph von F, sofern er in diesem Bereich skizziert ist, waagrecht verlaufen.

(b) **Lösungserwartung:**

Der Wert von k ist durch die Eigenschaft $F(c) = 1$ festgelegt, d.h., der Inhalt der vom Graphen von f und der x-Achse im Intervall $[0; c]$ eingeschlossenen Fläche muss 1 sein. Da die rechte Nullstelle bei $x = \pi$ liegt und somit $c = \pi$ ist, muss gelten:

$\int_0^\pi k \cdot \sin(x)\mathrm{d}x = 1 \Rightarrow k = 0{,}5$

Mögliche Vorgehensweise:

$F(x) = -0{,}5 \cdot \cos(x) + C$

$F(0) = 0 \Rightarrow C = 0{,}5$

$F(x) = -0{,}5 \cdot \cos(x) + 0{,}5$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Angabe, welche Eigenschaft von f den Wert von k festlegt, und für die richtige Lösung.
- Ein Punkt für einen korrekten Term. Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.

(c) **Lösungserwartung:**

Das Ereignis E beschreibt, dass die Zufallsvariable X einen Wert annimmt, der größer (oder gleich) $c - a$ ist.

Grafik siehe oben

Mögliche Begründung:

Wegen der Symmetrie der Dichtefunktion gilt: $P(X \leq a) = P(x \geq c - a)$.

Aus $F(c) = 1$ folgt: $P(a \leq X \leq c - a) = 1 - P(X \leq a) - P(X \geq c - a) = 1 - 2 \cdot P(X \leq a)$.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für eine (sinngemäß) korrekte Beschreibung.
- Ein Punkt für eine korrekte Darstellung der Wahrscheinlichkeit als Fläche, wobei die beiden Grenzen symmetrisch zur Stelle des Maximums der Funktion f liegen müssen, und eine korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.