1001 - K7 - DWV - WS 3.2, WS 3.3, WS 3.1 - Gut Flug - Thema Mathematik Schularbeiten 7. Klasse

1. Die Fluggesellschaft „Gut Flug“ hat sich auf Kurzstreckenflüge ($< 2000\,\text{km}$) spezialisiert. Erfahrungsgemäß wird bei Firma „Gut Flug“ ein gebuchter Platz nur mit der Wahrscheinlichkeit 92 % auch tatsächlich belegt. ____/0

Aufgabenstellung:

(a) Für einen Kurzstreckenflug von Wien nach Zürich werden 68 Flugtickets verkauft.

$\boxed{\text{A}}$ Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass genau 2 Personen, die ein Flugticket gekauft haben, nicht zu diesem Flug kommen.

Begründe warum für diese Berechnung die Binomialverteilung zugrunde gelegt werden kann.

(b) Berechne Erwartungswert und Standardabweichung der zum Flug kommenden Fluggäste bei diesem ausgebuchten Flug und interpretiere diese Werte im Kontext.

(c) Die Fluggesellschaft hat diesen Kurzstreckenflug wie üblich überbucht. Dies bedeutet, dass 68 Tickets verkauft wurden, obwohl aber nur 65 Plätze vorhanden sind.

Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Überbuchung gut geht.

(d) Wie viele Tickets könnte die Fluglinie maximal verkaufen, damit der zu erwartende Wert der auftauchenden Passagiere die Platzzahl von 65 nicht überschreitet? Was spricht gegen eine Erhöhung der verkauften Tickets auf die Höhe des Erwartungswert?

(a) Lösungserwartung:

$P(X = 66) \approx 5{,}94\,\%$

Jede Person, die ein Ticket gekauft hat, kommt mit einer Wahrscheinlichkeit von 92 % zum Flug und mit einer Wahrscheinlichkeit von 8 % nicht zum Flug.

(b) **Lösungserwartung:**

$\mu = E(X) = 62{,}56; \sigma \approx 2{,}24$

In etwa $\frac{2}{3}$ der Fälle werden zwischen $\mu - \sigma \approx 60{,}32$ und $\mu + \sigma \approx 64{,}80$ Personen zum Flug kommen.

(c) **Lösungserwartung:**

$P(X \leq 65) \approx 91{,}68\,\%$

(d) **Lösungserwartung:**

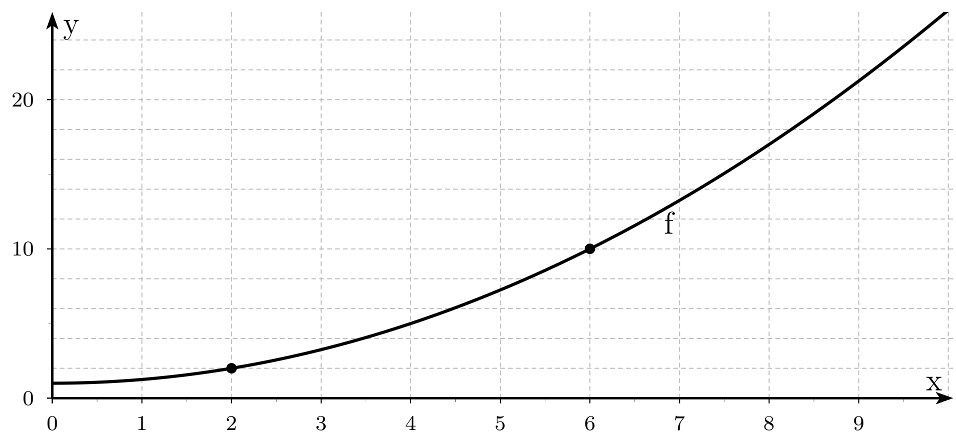
$n \cdot 0{,}92 = 65 \rightarrow n = 70{,}65$

Die Fluglinie könnte bis zu 70 Tickets verkaufen um den Erwartungswert von 65 nicht zu überschreiten.

Dagegen spricht, dass bei einem Erwartungswert von 65 die Wahrscheinlichkeit, dass 66 Leute erscheinen noch immer sehr groß ist und dadurch die Gefahr, dass es zu Überbuchungen kommt deutlich höher ist als wenn man einen niedrigeren Erwartungswert anpeilt.

1002 - K7 - DR - AN 1.2, FA 1.5, AN 2.1, AN 1.3 - Differenzen/Differentialquotient - Thema Mathematik Schularbeiten 7. Klasse

2. Der Graph der Funktion f ist gegeben: ____/0



Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Ermittle den Wert des Differenzenquotienten im Intervall $[2; 6]$ aus der Grafik.

(b) Vervollständige den folgenden Satz so, dass er mathematisch korrekt ist:
Ergänze die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine mathematisch korrekte Aussage entsteht!

Die Steigung der Funktion f ist an der Stelle $x = 2$ ____①____ als die Steigung an der Stelle $x = 6$, weil ____②____ .

①	
größer	☐
gleich	☐
kleiner	☒

②	
die Tangente in $(2\|f(2))$ die Sekante durch $(2\|f(2))$ und $(6\|f(6))$ schneidet	☐
der Differentialquotient an der Stelle $x = 2$ kleiner als der Differentialquotient an der Stelle $x = 6$ ist	☒
der Differenzenquotient in $[2; 6]$ positiv ist.	☐

(c) Ermittle für die Funktion $f_1 : y = 0{,}5x^2 + 1$ den Differentialquotienten an der Stelle $x = 2$ als Grenzwert von Differenzenquotienten und interpretiere ihn.

(a) Lösungserwartung:

Differenzenquotient $= 2$

(b) Lösungserwartung:

siehe oben

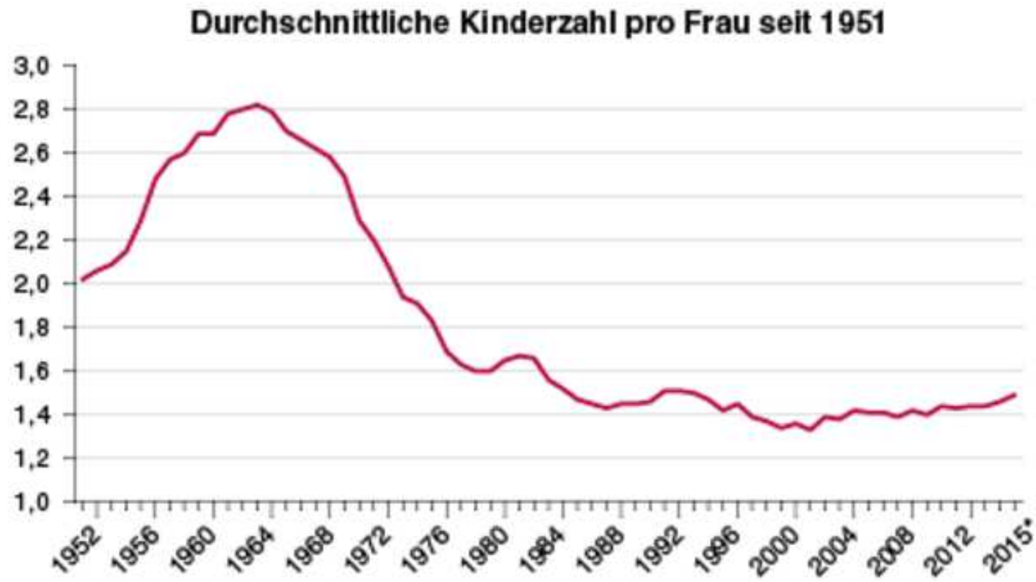
(c) Lösungserwartung:

$$f_1'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f_1(2+h) - f_1(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[0{,}5\cdot(4+4h+h^2)+1]-3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h+0{,}5h^2}{h} = 2$$

Die Steigung der Tangente an der Stelle $x = 2$ beträgt 2.

1003 - K7 - DR - AN 1.2, AN 1.3 - Durchschnittliche Kinderzahl - Thema Mathematik Schularbeiten 7. Klasse

3. Die folgende Abbildung zeigt die Veränderung der durchschnittlichen Kinderzahl pro Frau in Österreich seit 1951: ____/0



Q: STATISTIK AUSTRIA, Statistik der natürlichen Bevölkerungsbewegung. Erstellt am 14.07.2016. - *) Ab 2015 erstmals inklusive im Ausland Geborene von Müttern mit Wohnsitz in Österreich.

Aufgabenstellung:

(a) Ermittle mit Hilfe der Abbildung grafisch den Differenzenquotienten der durchschnittlichen Kinderzahl pro Frau im Zeitintervall $[1958, 1967]$ und den Differentialquotienten im Jahr 1971!

Erläutere deine Vorgehensweise.

(b) Der Differenzenquotient der durchschnittlichen Kinderzahl pro Frau hat für den Zeitraum von 1971 bis 1975 den Wert $\frac{1{,}8-2{,}2}{4} = -\frac{1}{10}$.

In einer beliebten Gratiszeitung wird dieses Ergebnis folgendermaßen interpretiert: „Die durchschnittliche Kinderzahl pro Frau sinkt im Zeitraum von 1971 bis 1975 jährlich um 10 %.“

Nimm dazu aus mathematischer Sicht Stellung!

(a) **Lösungserwartung:**

Der Differenzenquotient entspricht der Sekantensteigung im Intervall $[1958; 1967]$ und ist hier 0.

Der Differentialquotient entspricht der Tangentensteigung und ist hier ca. $-0{,}12$.

(b) **Lösungserwartung:**

Diese Aussage ist falsch, weil $-0{,}1$ als Einheit Kinder/Jahr hat (und nicht %).

Tatsächlich gilt: $2{,}2 \cdot q^4 = 1{,}8 \Rightarrow q \approx 0{,}951 \Rightarrow$ Abnahme um ca. 4,9 % jährlich

Alternative: Die Berechnung einer 10 %−igen Abnahme pro Jahr zeigt, dass dadurch ein anderer Wert für 1975 zustande kommt: $2{,}2 \cdot 0{,}9^4 \approx 1{,}4$

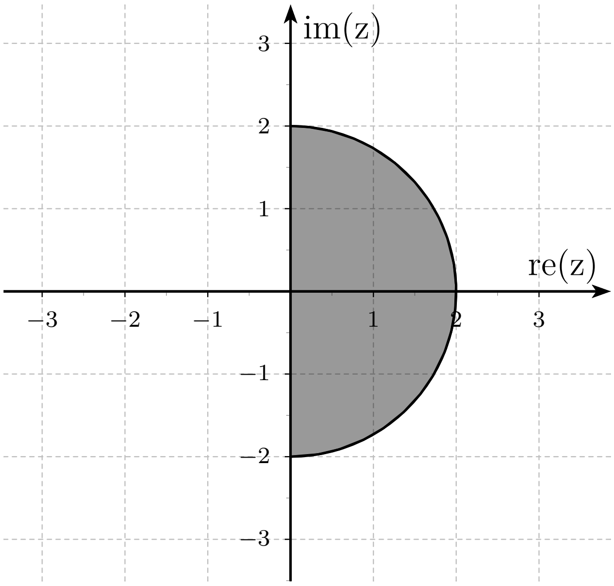
1004 - K7 - KZ - Komplexe Zahlen - Thema Mathematik Schularbeiten 7. Klasse

Aufgabenstellung:

4. (a) $\boxed{\text{A}}$ Zeige, dass $x_1 = 2$ eine Lösung der Gleichung $x^3 - 4x^2 + 9x - 10 = 0$ ist. ____/0

Berechne alle Lösungen dieser Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{C}$

(b) Zeichne in der Gauß'schen Zahlenebene alle komplexen Zahlen mit positiven Realteil ein, für die $|z| \leq 2$ gilt.



(c) Gegeben ist eine komplexe Zahl z.

$\bar{z}$ ist die zu z konjugiert komplexe Zahl. Zeige allgemein, dass gilt: $z \cdot \bar{z}$ ist reell und $z - \bar{z}$ ist imaginär.

(a) **Lösungserwartung:**

$2^3 - 4 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 - 10 = 0$

$x^2 - 2x + 5 = 0 \Rightarrow x_2 = 1 + 2i; x_3 = 1 - 2i$

(b) **Lösungserwartung:**

siehe Abbildung oben.

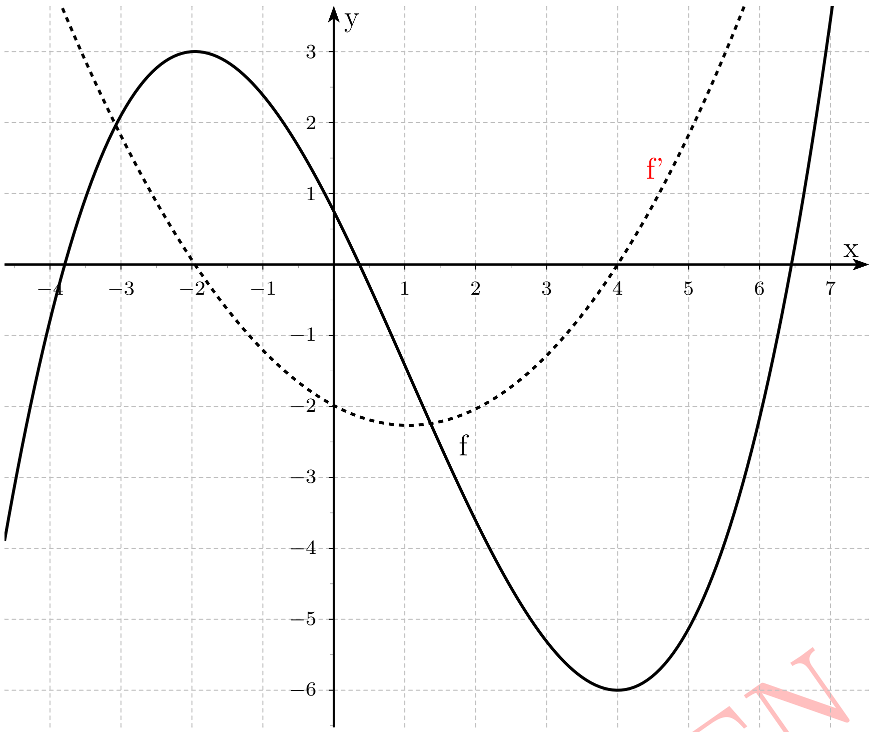
(c) **Lösungserwartung:**

$(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2$

$(a + bi) - (a - bi) = 2bi$

1005 - K7 - DR - AN 1.2, AN 3.2 - Komplexe Zahlen - Thema Mathematik Schularbeiten 7. Klasse

5. Die Abbildung zeigt den Graphen einer Polynomfunktion f: ____/0



Aufgabenstellung:

(a) Berechne unter Verwendung der Grafik im Intervall $[-2;4]$ den Wert des Differenzenquotienten von f.

Interpretiere das Ergebnis geometrisch.

(b) $\boxed{\text{A}}$ Ergänze die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine mathematisch korrekte Aussage entsteht!

Der Wert des Differentialquotienten von f bei $x = -2$ ist ____①____ , weil ____②____ ist.

①	
3	☐
0	☒
-2	☐

②	
$f(-2) = 3$	☐
$f''(-2) = 0$	☐
$f'(-2) = 0$	☒

(c) Skizziere im gegebenen Korrdinatensystem den Graphen der Ableitungsfunktion f'.

$\bar{z}$ ist die zu z konjugiert komplexe Zahl. Zeige allgemein, dass gilt: $z \cdot \bar{z}$ ist reell und $z - \bar{z}$ ist imaginär.

(a) **Lösungserwartung:**

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4)-f(-2)}{4-(-2)} = \frac{-6-3}{6} = -\frac{3}{2}$
Dieser Wert entspricht der Steigung der Sekante durch die Punkte $(-2|3)$ und $(4|-6)$.

(b) **Lösungserwartung:**

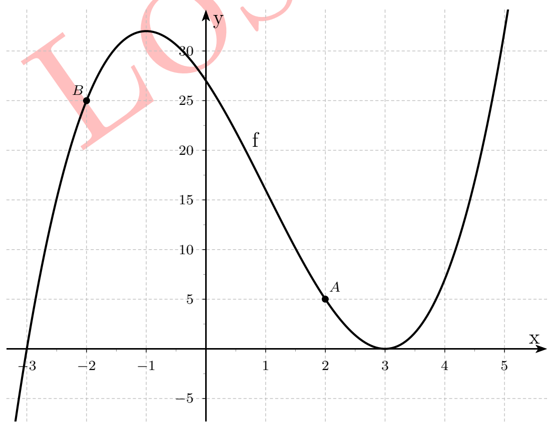
Lückentext siehe oben.

(c) **Lösungserwartung:**

Abbildung siehe oben.

1006 - K7 - DR - AN 1.2, AN 1.3, FA 2.4 - Funktion und Graph - Thema Mathematik Schularbeiten 7. Klasse

6. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)$: $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 27$ und ihr Graph im dargestellten Intervall: ____/0



Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Berechne die mittlere Änderungsrate der Funktion im Intervall $[-2; 2]$. Interpretiere diesen Zahlenwert mit Hilfe des Graphen.

(b) $\boxed{\text{A}}$ Berechne die Gleichung der Tangente im Punkt $A(2|f(2))$. Berechne den Steigungswinkel α dieser Tangente.

(c) Berechne jene Stellen, an denen der Wert des Differentialquotienten null ergibt.
Gib ein konkretes Intervall an, in dem der Wert des Differenzenquotienten null ergibt.

(d) Die Funktion g entsteht, indem man die Funktion f so verschiebt, dass der Wendepunkt im Ursprung liegt. Berechne die Funktionsgleichung von g.
Zeige rechnerisch, dass diese neue Funktion g eine ungerade Funktion ist.

(a) **Lösungserwartung:**

$\frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)} = \frac{5-25}{4} = -5$

Dieser Wert entspricht der Steigung der Sekante durch die Punkte A und B.

(b) **Lösungserwartung:**

Tangente: $k = f'(2) = -9$; $y = -9x + d$ mit $A(2|5) \in y \Rightarrow d = 23$
t: $y = -9x + 23$

Steigungswinkel: $\tan(\alpha) = f'(2) = -9 \Rightarrow \alpha \approx 96{,}23°$

(c) **Lösungserwartung:**

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$ und $x_2 = 3$

waagrechte Sekante in $[-3;3]$ oder in jedem anderen Intervall $[a;b]$ mit $f(a) = f(b)$

(d) **Lösungserwartung:**

Wendepunkt: $y''(x) = 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow W(1|16)$
Verschiebung in den Ursprung: $g(x) = f(x+1) - 16 \Rightarrow g(x) = x^3 - 12x$

$g(x)$ ist eine ungerade Funktion: $g(-x) = -g(x)$
$g(-x) = (-x)^3 - 12 \cdot (-x) = -x^3 + 12x = -(x^3 - 12x) = -g(x)$

1007 - KKK - Kreis und Gerade - Thema Mathematik Schularbeiten 7. Klasse

7. Gegeben sind der Kreis $k\colon x^2+y^2-10x+4y-71=0$ und die Gerade $g\colon -x+7y=31$. ____/0

Aufgabenstellung:

(a) Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte zwischen Kreis und Gerade.

Zur Berechnung der Schnittpunkte muss eine quadratische Gleichung gelöst werden. Erkläre allgemein den Zusammenhang zwischen Lösungsfällen dieser quadratischen Gleichung und der Anzahl der Schnittpunkte zwischen Kreis und Gerade.

(b) Gesucht sind die Gleichungen der Tangenten an k, die parallel zur Geraden $h\colon 3x+4y=12$ sind. Beschreibe einen möglichen Rechenweg.

Löse die Aufgabe konstruktiv mit einer geeigneten Geometriesoftware und gib die Tangentengleichungen an.

(a) **Lösungserwartung:**

$S_1(11|6)$; $S_2(-3|4)$

In Abhängigkeit von der Diskriminante der quadratischen Gleichung unterscheidet man folgende 3 Lösungsfälle:

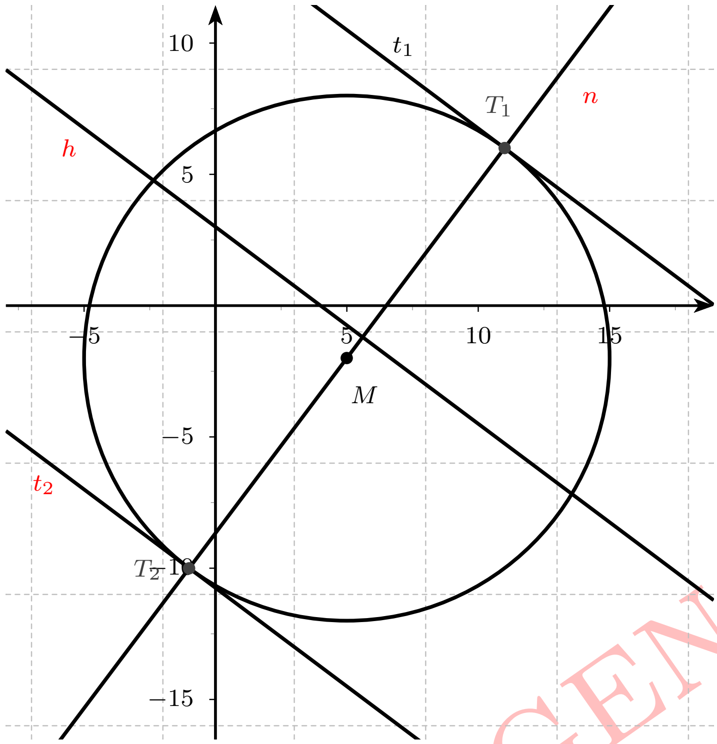
- falls $\mathrm{D}>0$ gibt es zwei reelle Lösungen: 2 Schnittpunkte
- falls $\mathrm{D}=0$ gibt es nur eine reelle Lösung: 1 Berührungspunkt
- falls $\mathrm{D}<0$ gibt es keine reelle Lösung: kein Schnittpunkt

(b) **Lösungserwartung:**

2 mögliche Lösungswege:

- $t\colon 3x+4y=c$; $t\cap k$ liefert quadratische Gleichung
  $\mathrm{D}=0$ liefert Lösungen c_1 und c_2
- Normale n auf h durch M legen; $n\cap k$ ergibt T_1 und T_2;
  Parallele zu h durch T_1 und T_2

Grafische Lösung:



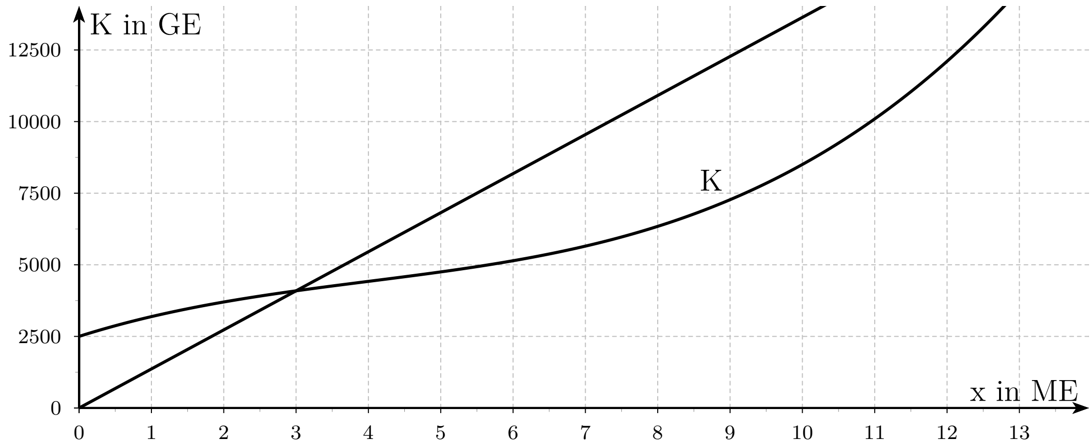
Tangentengleichungen: t_1: $3x + 4y = 57$ und t_2: $3x + 4y = -43$

1008 - K7 - DR - AN 1.2, AN 1.3, FA 1.5 - Wirtschaftsmathematik - Thema Mathematik Schularbeiten 7. Klasse

8. Ein Betrieb erzeugt monatlich x Mengeneinheiten (ME) eines bestimmten Produktes. Die Kostenfunktion K beschreibt die Gesamtkosten in Abhängigkeit von der produzierten Menge x. K wird in Geldeinheiten (GE) angegeben. Die erste Ableitung der Kostenfunktion bezeichnet man als Grenzfunktion. Diese beschreibt näherungsweise die Kostensteigerung, wenn die Produktionsmenge um 1 ME erhöht wird. ____/0

   Für K gilt: $K(x) = 10x^3 - 120x^2 + 800x + 2\,500$

   Der Graph zeigt den Verlauf von K:



Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Berechne, wie stark die Kosten pro ME steigen, wenn die Produktionsmenge von 7 ME auf 9 ME erhöht wird.

Liefert die Grenzkostenfunktion an der Stelle $x = 7$ im Vergleich zur vorher ausgeführten exakten Berechnung eine geringere oder eine höhere Kostensteigerung? Erläutere anhand der Grafik.

(b) Berechne jenen Produktionsbereich, in dem degressives Kostenwachstum vorliegt. Erkläre, wie sich eine Erhöhung der Produktionsmenge auf die Kostensteigerung auswirkt, wenn die Kosten degressiv und wenn sie progressiv steigen.

(c) Die Firma verkauft ihre Ware zu einem fixen Preis pro ME und möchte bereits bei Produktion und Verkauf von 3 ME in den Gewinnbereich kommen.

Gib die Gleichung der entsprechenden Erlösfunktion E an.

Zeichne den Graphen der Erlösfunktion E in die Abbildung ein.

(a) **Lösungserwartung:**

$\frac{K(9)-K(7)}{2} = 810\,\text{GE/ME}$

$K'(7)$ gibt die Steigung der Tangente an der Stelle 7 an. Diese ist im vorliegenden Bereich flacher als die Sekante durch die Punkte mit $x = 7$ und

$x = 9$. Daher gibt der Näherungswert ein geringeres Kostenwachstum an als der exakte Wert.

(b) **Lösungserwartung:**

Übergang von degressiv zu progressiv am Wendepunkt: $K''(x) = 60x - 240 = 0 \Rightarrow x = 4$

degressives Kostenwachstum im Bereich $0 < x < 4$

Erhöht die Firma im Bereich degressiven Kostenwachstums die Produktionsmenge x, so steigen bis zu $x = 4$ die Produktionskosten weniger stark, während ab $x = 4$ im Bereich progressiven Kostenwachstums die Steigerung der Kosten mit höheren Produktionszahl immer größer wird.

(c) **Lösungserwartung:**

$E(x) = p \cdot x$

$K(3) = E(3)$ damit $x = 3$ der Gewinnschwelle entspricht.

$K(3) = 4\,090 = 3p$

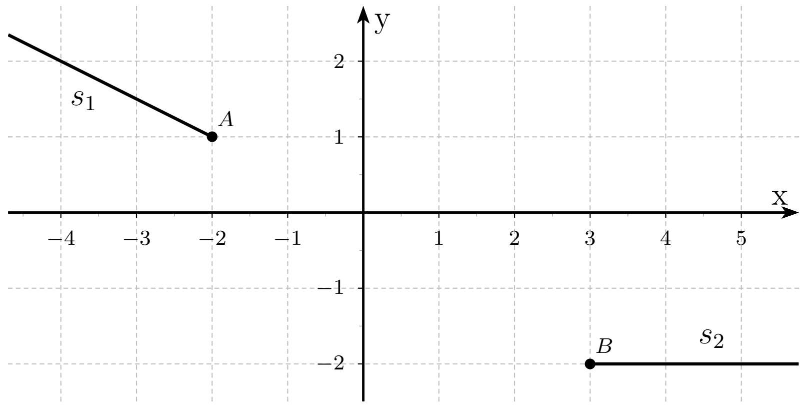
$E(x) = \frac{4\,090}{3} \cdot x$ (siehe Abbildung oben)

1009 - KKK - Glatte und ruckfreie Kurve - Thema Mathematik Schularbeiten 7. Klasse

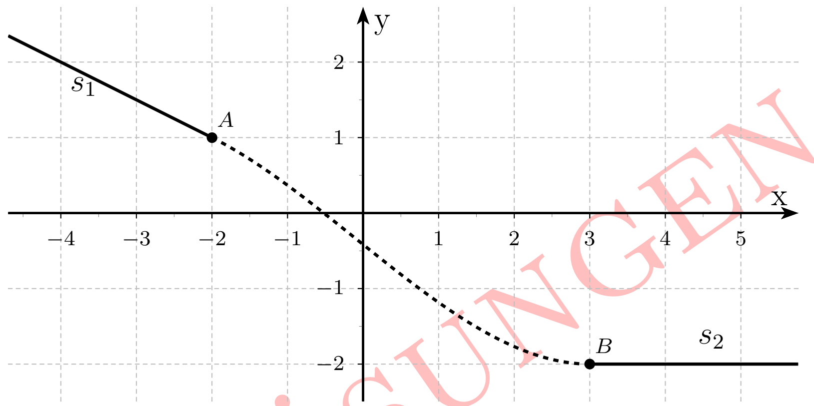
9. Zwei getrennte geradlinig verlaufende Fahrbahnstücke s_1 und s_2 sollen durch eine Verbindungsstraße p knickfrei verbunden werden. Dabei bedeutet knickfrei oder glatt, dass an den Übergängen A und B die Verbindungsstraße tangential in die Fahrbahnstücke einmündet. ____/0

   Die Straßenbauvorschriften verlangen aber auch, dass die Übergänge A und B keine abrupten Bewegungen des Lenkrades auf Grund von Krümmungsänderungen verursachen dürfen. Damit müssen für eine ruckfreie Verbindung die Krümmungen übereinstimmen.

   Die Abbildung zeigt zwei Fahrbahnstücke s_1 und s_2 für die eine Verbindungsstraße geplant ist:



Strichliert eingezeichnet ist eine Polynomfunktion p, die ein Planungsbüro als mögliche Verbindung vorschlägt: $p(x) = 0{,}028x^3 + 0{,}008x^2 - 0{,}804x - 0{,}416$



Aufgabenstellung:

(a) Welche Bedingungen musste das Planungsbüro für die Berechnung einer möglichen Polynomfunktion p für diese Verbindungsstraße ansetzen, damit diese knickfrei ist?

Gib diese mit Hilfe von Gleichungen an.

Begründe, warum eine Polynomfunktion vom Grad 3 für diese Modellierung geeignet ist.

Untersuche rechnerisch, ob die durch die oben angegebenen Polynomfunktion p modellierte Verbindungsstraße.

- $\boxed{\text{A}}$ an den Übergängen mit den angegebenen Fahrbahnstücken zusammenfällt.
- an den Übergängen tangential einmündet.

(b) Gib jene Bedingungen für die Polynomfunktion p an, damit die durch p modellierte Verbindungsstraße ruckfrei ist.

Untersuche rechnerisch, ob die angegebene Polynomfunktion p auch eine ruckfreie Verbindung der beiden Fahrbahnstücke darstellt.

(a) **Lösungserwartung:**

Bedingungen für glatte Übergänge:

- Funktionswerte müssen übereinstimmen: $p(-2) = s_1 = (-2); p(3) = s_2(3)$
- 1. Ableitungen müssen übereinstimmen: $p'(-2) = s_1'(-2), p'(3) = s_2'(3)$

Das sind 4 Bedingungen, daher kann man eine Polynomfunktion dritten Grades für p ansetzen: $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Aus der Grafik: $A(-2|1)$ und $B(3|-2)$

Werte in p einsetzen: $p(-2) = 1$ und $p(3) = -2 \Rightarrow$ Übergänge stimmen überein

$p'(x) = 0{,}084x^2 + 0{,}016x - 0{,}804$

Aus der Grafik: Steigung von s_1: $k_A = s_1' = -0{,}5$; Steigung von s_2: $k_B = s_2' = 0$

Werte in p' einsetzen: $p'(-2) = -0{,}5$ und $p'(3) = 0 \Rightarrow$ tangentiale Einmündung an den Übergängen ist vorhanden.

(b) **Lösungserwartung:**

Für Ruckfreiheit muss die Krümmung der Polynomfunktion p an den Übergängen A und B mit den Krümmungen der Fahrbahnstücke übereinstimmen. Beide Fahrbahnstücke haben die Krümmung null $\Rightarrow s_1''(-2) = 0$ und $s_2''(3) = 0$

$p''(x) = 0{,}168x + 0{,}016 \Rightarrow p''(-2) \neq 0$ und $p''(3) \neq 0$

Die durch p modellierte Verbindungsstraße ist zwar knickfrei, aber nicht ruckfrei.

1010 - K7 - DWV - Grüner Star - Thema Mathematik Schularbeiten 7. Klasse

10. Die Augenkrankheit Glaukom, im Volksmund „Grauer Star“ genannt, wird heute unter anderem auch mit Laserstrahlen behandelt. Bei 64 % der mit Laserstrahlen behandelten GlaukompatientInnen tritt eine deutliche Verbesserung des Sehvermögens ein. ____/0

Aufgabenstellung:

(a) 50 Glaukompatienten werden mit Laserstrahlen behandelt.

- Berechne, bei wie vielen dieser Patienten man eine deutliche Verbesserung des Sehvermögens erwarten kann.
- Berechne die Wahrscheinlichkeit, das von den 50 PatientInnen mindestens 30 eine deutliche Verbesserung ihres Sehvermögens feststellen.

(b) Berechne, unter wie vielen GlaukompatientInnen mit einer Wahrscheinlichkeit von 99 % mindestens eine Person mit deutlich verbessertem Sehvermögen zu finden ist.

Erläutere deine Vorgangsweise.

(c) An einer Universitätsklinik wird diese Behandlungsmethode jährlich bei ca. 250 Personen durchgeführt.

- Ermittle die Wahrscheinlichkeit, dass nicht mehr als 190 Patienten erfolgreich behandelt werden können.
- Begründe, warum diese Wahrscheinlichkeit beinahe gleich 1 ist.

(a) Lösungserwartung:

$\mu = n \cdot p = 32 \Rightarrow$ Bei 32 Patienten ist mit Verbesserung zu rechnen.

$n = 50$ und $p = 0{,}64 \Rightarrow P(X \geq 30) \approx 77{,}1\,\%$

(b) Lösungserwartung:

Mindestens 5 PatientInnen müssen betrachtet werden.

Man rechner hier mit der Gegenwahrscheinlichkeit, da gilt:

Wahrscheinlichkeit, mindestens eine Person unter n Personen mit verbessertem Sehvermögen zu finden = 1 - Wahrscheinlichkeit, dass alle n Personen keine Verbesserung zeigen

$\Rightarrow 1 - 0{,}36^n = 0{,}99 \Rightarrow n \approx 4{,}51$

(c) Lösungserwartung:

$P(X \leq 190) \approx 99{,}998\,\%$

Die Wahrscheinlichkeit ist beinahe 1, weil $190 \approx \mu + 4\sigma$.

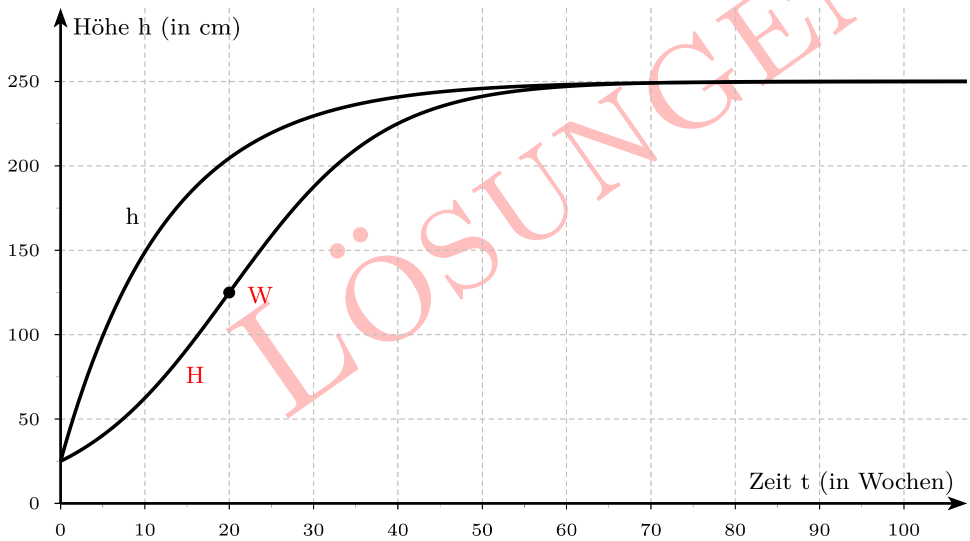
1011 - K7 - DR - AN 1.2, AN 1.3, FA 1.5 - Pflanzenwachstum - Thema Mathematik Schularbeiten 7. Klasse

11. Im Folgenden wird das Wachstum einer bestimmten Zierpflanze untersucht. Die endgültige Größe einer Pflanze hängt nicht nur von der speziellen Sorte, sondern auch von ihrem Standort, der Nährstoffversorgung etc. ab. Sie liegt bei der hier betrachteten Sorte in der Regel zwischen 1,5 m und 3,0 m. ____/0

Der Wachstumsverlauf dieser Pflanze wurde ab der Pflanzung 100 Wochen lang beobachtet. Ihre Höhe h (in cm) in Abhängigkeit der Zeit t (in Wochen seit der Pflanzung) kann mathematisch modelliert werden durch:

$$h(t) = 250 - 225 \cdot e^{-0{,}08t}$$

Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion h im Beobachtungszeitraum.



Aufgabenstellung:

(a) Berechne $h'(20)$ und den Wert des Quotienten $\frac{h(30)-h(10)}{20}$.
Interpretiere die beiden berechneten Ergebnisse im gegebenen Kontext.

(b) Weise rechnerisch nach, dass die Funktion h im gegebenen Intervall kein lokales Maximum hat. Gibt es ein globales Maximum im gegebenen Intervall? Wenn ja, gib es an! Wenn nein, begründe!

(c) Interpretiere das Krümmungsverhalten und das asymptotische Verhalten der Funktion h im gegebenen Kontext.

(d) Das Höhenwachstum einer anderen Pflanze der gleichen Sorte wird durch eine Funktion H modelliert. Die Höhe zu Beobachtungsbeginn und zu Beobachtungsende ist identisch mit der ersten Pflanze. Allerdings hat die Funktion H zum Zeitpunkt $t = 20$ einen Wendepunkt.

Skizziere einen möglichen Verlauf dieser Funktion H im obigen Diagramm. Interpretiere die Lage des Wendepunktes von H im gegebenen Kontext.

(a) **Lösungserwartung:**

$h'(20) \approx 3{,}63$; $\frac{h(30)-h(10)}{20} \approx 4{,}03$

Die momentane Wachstumsgeschwindigkeit 20 Wochen nach der Pflanzung beträgt ca. 3,53 cm pro Woche.

In den 20 Wochen von der 10. bis zur 30. Woche wächst die Pflanze durchschnittlich ca. 4,03 cm pro Woche.

(b) **Lösungserwartung:**

Es ist kein lokales Maximum vorhanden, da $h'(t) = 18 \cdot e^{-\frac{2}{25}t} > 0$ für alle t.

Das globale Maximum von ca. 250 cm wird nach $t = 100$ Wochen erreicht.

(c) **Lösungserwartung:**

Die Pflanze wächst im Laufe der Zeit immer langsamer.

Die waagrechte Asymptote bei $h = 250$ cm legt die Wachstumsgrenze fest.

(d) **Lösungserwartung:**

Abbildung siehe oben.

Diese Pflanze wächst bis zur Woche 20 immer schneller, ab Woche 20 wird das Wachstum dann immer langsamer.

1012 - K7 - KKK - Zwei Kreise und eine Gerade - Thema Mathematik Schularbeiten 7. Klasse

12. Gegeben sind die Gerade g: $x + y = 4$ und die Kreise k_1: $x^2 + y^2 = 8$ und k_2: $x^2 + y^2 - 4x - 4y = 8$. ____/0

Aufgabenstellung:

(a) Stelle die quadratische Gleichung auf, die man erhält, wenn man die Gerade g und den Kreis k_1 schneidet.

Verwende diese Gleichung, um zu zeigen, dass die Gerade g eine Tangente von k_1 ist.

(b) Weise rechnerisch nach, dass der Mittelpunkt des Kreises k_2 auf der Geraden g und auf dem Kreis k_1 liegt.

(c) Berechne die Schnittpunkte der beiden Kreise und beschreibe ein Verfahren zur Berechnung der Tangentengleichungen in einem Schnittpunkt.

(a) **Lösungserwartung:**

$x = 4 - y$ in k_1 einsetzen:

$16 - 6y + y^2 + y^2 = 8 \Rightarrow y^2 - 4y + 4 = 0 \Rightarrow (y-2)^2 = 0 \Rightarrow$

Doppellösung $y = 2 \Rightarrow g$ ist eine Tangente

(b) **Lösungserwartung:**

$M_2(2|2) \Rightarrow M_2$ liegt auf g, da $2+2=4$ und M_2 liegt auf k_1, da $2^2+2^2=8$

(c) **Lösungserwartung:**

k_1: $x^2 = 8 - y^2$ in k_2 einsetzen:

$8 - y^2 + y^2 \pm 4 \cdot \sqrt{8-y^2} - 4y = 8 \Rightarrow \pm\sqrt{8-y^2} = y \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow$

$S_1(-2|2); S_2(2|-2)$

Tangente in S_1: $\vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot S_1$ mit $\vec{n} = \overrightarrow{M_1S_1}$ oder $\vec{n} = \overrightarrow{M_2S_1}$

1013 - K7 - KKK - Gleichung einer Kugel - Thema Mathematik Schularbeiten 7. Klasse

13. Von einer Kugel kennt man den Mittelpunkt $M(-5|1|2)$ und einen Punkt der Kugelfläche $P(-4|0|-3)$. Eine Ebene ϵ ist durch die drei Punkte $A(-1|1|3)$, $B(1|0|1)$ und $C(4|-1|-3)$ gegeben. ____/0

Aufgabenstellung:

(a) Ermittle die Gleichung der Kugel und beschreibe ein Verfahren, um den Abstand des Kugelmittelpunkts von der Ebene ϵ zu bestimmen.

(b) Berechne die Koordinaten des Mittelpunktes M_1 und den Radius r_1 des Schnittkreises der Kugel mit der Ebene ϵ.

(a) **Lösungserwartung:**

$(x+5)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 27$

Der Abstand wird berechnet, indem eine Gerade senkrecht auf ϵ durch M aufgestellt und der Schnittpunkt S dieser Geraden mit ϵ bestimmt wird. Dann erhält man den Abstand durch Berechnung von $|\overrightarrow{MS}|$.

(b) **Lösungserwartung:**

$M_1(-3|3|3); r_1 = 3 \cdot \sqrt{2}$

1014 - K7 - DR - AN 1.2, AN 1.3, FA 1.4 - Steine werfen - Thema Mathematik Schularbeiten 7. Klasse

14. Bei Versuchen zum freien Fall werden Steine von einer h Meter hohen Brücke ins Wasser fallen gelassen beziehungsweise genau senkrecht nach unten geworfen. Unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes lautet die Bewegungsgleichung für den freien Fall: ____/0

$$s(t) = v_0 \cdot t + \frac{g}{2} \cdot t^2$$

$s(t)$ ... vom Stein zurückgelegter Weg = Abstand von der Brücke

v_0 ... Abschussgeschwindigkeit in m/s

g ... Gravitationsbeschleunigung (verwende als Näherung $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$)

Aufgabenstellung:

(a) Ein Stein wird von der Brücke fallen gelassen (daher gilt $v_0 = 0$) und trifft nach 3,5 Sekunden auf der Wasserobefläche auf.

Berechne für diesen Stein den Ausdruck $\frac{s(3)-s(1)}{2}$ und interpretiere das Ergebnis im Kontext.

Weise rechnerisch nach, dass die Höhe der Brücke 61,25 m beträgt. Berechne die Geschwindigkeit, mit der der Stein auf der Wasseroberfläche auftritt.

(b) Ein zweiter Stein wird eine Sekunde nach dem ersten Stein von derselben Stelle aus mit einer Geschwindigkeit v_0 dem ersten nachgeworfen. Beide Steine treffen gleichzeitig in 61,25 m Entfernung auf der Wasseroberfläche auf.

Berechne die Abschussgeschwindigkeit dieses zweiten Steines und mit welcher Geschwindigkeit er auf der Wasseroberfläche auftritt.

(a) **Lösungserwartung:**

$s(t) = 5t^2$

$\frac{s(3)-s(1)}{2} = 20\,\mathrm{m/s}$ ist die mittlere Fallgeschwindigkeit zwischen der 1. und der 3. Sekunde.

Die Strecke, die der Stein bis zum Aufprall nach 3,5 s zurückgelegt, entspricht der Höhe der Brücke, dies sind $s(3{,}5) = 5 \cdot 3{,}5^2 = 61{,}25\,\mathrm{m}$.

$v(t) = s'(t) = 10t \Rightarrow$ Die Aufprallgeschwindigkeit beträgt $v(3{,}5) = 35\,\mathrm{m/s}$.

(b) **Lösungserwartung:**

Der zweite Stein hat die Bewegungsgleichung $s(t) = v_0 \cdot t + 5t^2$ und trifft nach 2,5 s auf: $s(2{,}5) = 61{,}25 = v_0 \cdot 2{,}5 + 31{,}25 \Rightarrow v_0 = 12\,\mathrm{m/s}$.

$v(t) = s'(t) = 12 + 10t \Rightarrow$ Die Aufprallgeschwindigkeit beträgt $v(2{,}5) = 37\,\mathrm{m/s}$.

1015 - K7 - DR - FA 1.7, FA 1.6, FA 1.4, AN 1.2, AN 1.3, FA 2.2 - Kostenfunktion - Thema Mathematik Schularbeiten 7. Klasse

15. Für eine Produktion einer Firma gilt die Nachfragefunktion p mit $p(x) = 60 - 0{,}4x$. Die Nachfragefunktion gibt den Preis p in Euro in Abhängigkeit von der produzierten Menge x in Stück an. ____/0

Die zugehörige Kostenfunktion K mit $K(x) = 20x + 500$ gibt die Kosten in Euro für die Produktion von x Stück an.

Aufgabenstellung:

(a) Bestimme, für welche Produktionsmengen x (in Stück) die Firma Gewinn macht. Ermittle die zugehörigen Preisgrenzen.

(b) Bei welchem Preis ist der Gewinn der Firma maximal? Gib den maximalen Gewinn der Firma an!

(c) Wie groß sind die Fixkosten der Firma? Wie groß dürfen die Fixkosten der Firma höchstens sein, damit sie bei gleicher Nachfragefunktion gerade noch ohne Verlust arbeiten kann?

(a) **Lösungserwartung:**

$E(x) = x \cdot p(x)$ $\qquad$ $G(x) = E(x) - K(x) = -0{,}4x^2 + 40x - 500$

Gewinngrenzen bei $G(x) = 0 \Rightarrow$ Mindestens 15 und maximal 85 Stück müssen produziert (und verkauft) werden.

Preisgrenzen: $p(15) = 54$ und $p(85) = 26 \Rightarrow$ Der Preis liegt zwischen € 26 und € 54.

(b) **Lösungserwartung:**

Maximaler Gewinn bei $G'(x) = 0 \Rightarrow x = 50$ Stück $\Rightarrow$ Der Gewinn beträgt $G(50) = 500$ € .

(c) **Lösungserwartung:**

Fixkosten: € 500, maximale Fixkosten: 500 + maximaler Gewinn = 1000 € .

Alternative:

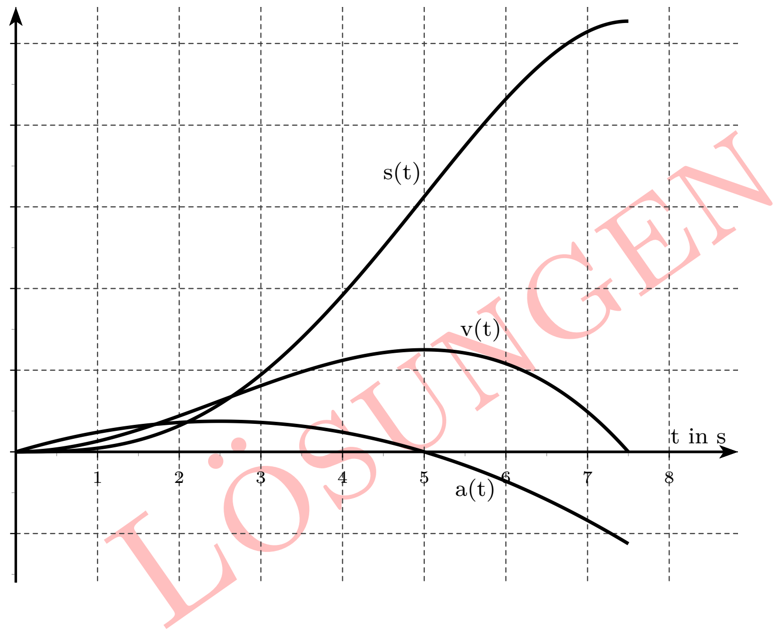
$K(x) = 20x + F \Rightarrow G(x) = x \cdot p(x) - K(x) = -0{,}4x^2 + 40x - F = 0$

Wenn die Firma gerade noch ohne Verlust arbeitet, ist ihr Gewinn null. Der Graph der Gewinnfunktion ist eine nach unten offene Parabel, die in diesem Fall die x-Achse berührt. Daher hat die Gleichung $G(x) = 0$ eine Doppellösung und ihre Diskriminante muss null sein: $1600 - 1{,}6F = 0 \Rightarrow F = 1000$ € .

1016 - K7 - DR - AN 1.2, AN 2.1, FA 1.5, AN 3.3, AN 3.2 - Bewegung eines Autos - Thema Mathematik Schularbeiten 7. Klasse

16. Die Funktion s mit $s(t) = -0{,}05t^4 + 0{,}5t^3$ beschreibt die Bewegung eines Autos in der Beschleunigungsphase. Dabei ist s der zurückgelegte Weg in Meter und t die Zeit in Sekunden. ____/0

Im Diagramm sind die Funktionen für den zurückgelegten Weg s, die Geschwindigkeit v und die Beschleunigung a dargestellt.



Aufgabenstellung:

(a) Berechne die Höchstgeschwindigkeit am Ende der Beschleunigungsphase in km/h.

Welche Wegstrecke hat das Auto in dieser Beschleunigungsphase zurückgelegt?

(b) Kreuze die zutreffende(n) Aussage(n) an!

Wenn die Beschleunigung negativ ist, sinkt die Geschwindigkeit.	⊠
Weil die Geschwindigkeit nie negativ ist, wird das Auto immer schneller.	
Die Beschleunigungsfunktion a ist die zweite Ableitung der Wegfunktion s.	⊠
Das Auto fährt zwischen der 5. und 7. Sekunde rückwärts.	
Die Geschwindigkeit ist genau dann maximal, wenn die Beschleunigung null ist.	

Die Wendestelle der Geschwindigkeitsfunktion liegt bei $t = 2{,}5\,\mathrm{s}$. Interpretiere diese Stelle im Kontext.

(c) Wann kommt das Auto wieder zum Stillstand? Wie weit fährt das Auto insgesamt?

(d) In welchem Zeitintervall ist die Wegfunktion s positiv gekrümmt? Was bedeutet das für die Bewegung des Autos?

(a) **Lösungserwartung:**

$v(t) = s'(t) = -0{,}2t^3 + 1{,}5t^2$

$a(t) = s''(t) = -0{,}6t^2 + 3t = 0 \Rightarrow t_1 = 0\,\mathrm{s};\ t_2 = 5\,\mathrm{s}$

Höchstgeschwindigkeit: $v(5) = 12{,}5\,\mathrm{m/s} = 45\,\mathrm{km/h}$

Dabei hat das Auto eine Wegstrecke von $s(5) = 31{,}25\,\mathrm{m}$ zurückgelegt.

(b) **Lösungserwartung:**

Multiple Choice - siehe oben

Bis $t = 2{,}5\,\mathrm{s}$ nimmt die Geschwindigkeit immer schneller zu, ab $t = 2{,}5\,\mathrm{s}$ steigt die Geschwindigkeit immer langsamer an.

(c) **Lösungserwartung:**

$v(t) = 0 \Rightarrow t_1 = 0\,\mathrm{s};\ t_2 = 7{,}5\,\mathrm{s}$

Nach 7,5 Sekunden kommt das Auto wieder zum Stillstand und hat bis dahin $s(7{,}5) \approx 52{,}73\,\mathrm{m}$ zurückgelegt.

(d) **Lösungserwartung:**

Die Wegfunktion ist im Intervall $(0;5)$ positiv gekrümmt. In dieser Zeit beschleunigt das Fahrzeug, die Geschwindigkeit steigt.

1017 - K6 - PWLU - AG 2.1, AG 2.2 - Begründen und Beweisen - Thema Mathematik Schularbeiten 6. Klasse

Aufgabenstellung:

17. (a) Beweise, dass für $a \neq 1, r, c \in \mathbb{R}^+$ gilt: ${}^a\log(r^c) = c \cdot {}^a\log r$ ____/0

(b) Löse nach den Variablen $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{R}^+ \backslash 1$ und begründe jeweils mit der Definition des Logarithmus!

${}^7\log\sqrt{7} = x$ ${}^3\log y = 4$ ${}^a\log 0{,}25 = -1$

(c) Nach dem Gesetz von Weber-Fechner verhält sich die „subjektive empfundene" Stärke von Sinneseindrücken proportional zum Logarithmus der „objektiven" Reizstärke. Für die Lautstärke L in Dezibel (dB) gilt das folgende Gesetz:

$$L(I) = 10 \cdot \lg\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

Dabei ist I die Intensität des Schalls in Watt pro Quadratmeter (W/m^2) und $l_0 = 10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}$ die Intensität eines Tons, den man gerade noch wahrnehmen kann.

Zeige durch Rechnung, dass ein Ton um 30 dB lauter wahrgenommen wird, wenn seine Schallintensität I auf das Tausendfache steigt!

(a) **Lösungserwartung:**

${}^a\log r = x \Leftrightarrow a^x = r \Rightarrow {}^a\log((a^x)^c) = {}^a\log(a^{x\cdot c}) = x \cdot c = c \cdot {}^a\log r$

(b) **Lösungserwartung:**

${}^7\log\sqrt{7} = x \Leftrightarrow 7^x = \sqrt{7} \Rightarrow x = 0{,}5$

${}^3\log y = 4 \Leftrightarrow 3^4 = y \Rightarrow y = 81$

${}^a\log 0{,}25 = -1 \Leftrightarrow a^{-1} = 0{,}25 \Rightarrow a = 4$

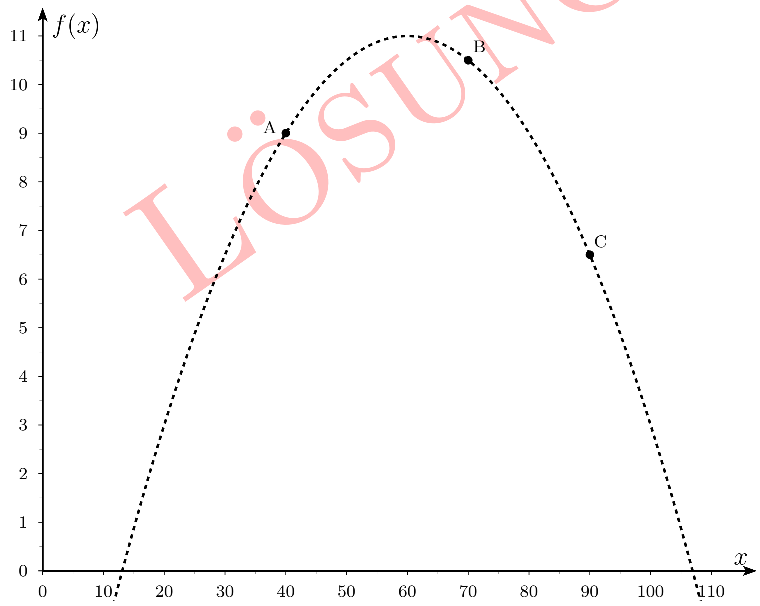
(c) **Lösungserwartung:**

$L(1\,000 \cdot I_0) = 10 \cdot \lg\left(\frac{1\,000 \cdot I_0}{I_0}\right) = 10 \cdot \lg 1\,000 = 10 \cdot 3 = 30$

1018 - K6 - RF - FA 1.4, FA 1.5 - Müsli-Riegel- Thema Mathematik Schularbeiten 6. Klasse

18. Eine Firma erzeugt Müsli-Riegel. Wenn sie den Verkaufspreis eines Riegels mit 40 Cent festlegt, ist nach Marktanalysen ein Jahresgewinn von 9 Millionen Euro zu erwarten. Bei einem Preis von 70 Cent beträgt der Jahresgewinn laut Analyse voraussichtlich 10,5 Millionen Euro und bei einem Preis von 90 Cent kann man einen jährlichen Gewinn von 6,5 Millionen Euro erwarten. ____/0

Der Zusammenhang zwischen dem Preis eines Müsli-Riegels und dem Jahresgewinn kann durch eine quadratische Funktion f mit $f(x) = ax^2+bx+c$ modelliert werden:



Aufgabenstellung:

(a) Berechne mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems die Werte der Parameter a, b und c!

(b) Berechne, für welche Verkaufspreise die Firma mit Gewinn arbeitet!

(c) Begründe mit Hilfe des Graphen, dass die Firma bei einem Verkaufspreis von 60 Cent den maximalen Jahresgewinn erwirtschaftet!

(a) **Lösungserwartung:**

$A \in f \Rightarrow I: 1600a + 40b + c = 9$
$B \in f \Rightarrow II: 4900a + 70b + c = 10{,}5$
$C \in f \Rightarrow III: 8100a + 90b + c = 6{,}5$

$a = -\frac{1}{200}, b = \frac{3}{5}, c = -7$

(b) **Lösungserwartung:**

14 bis 106 Cent

(c) **Lösungserwartung:**

$x_{\max} = 60$, weil $f(x)$ bis 60 streng monoton wachsend und ab 60 streng monoton fallend ist.

1019 - K6 - PWLU - - pH-Wert - Thema Mathematik Schularbeiten 6. Klasse

19. Der pH-Wert, der im Labor mittels Indikatorpapier gemessen wird, ist ein Maß dafür, wie stark basisch bzw. sauer eine wässrige Lösung ist. In den meisten wässrigen Lösungen liegen die pH-Werte zwischen 0 (stark sauer) und 14 (stark basisch). Im Laboralltag sind pH-Werte unter 0 (übersauer) und über 14 (überbasisch) nicht relevant. Destilliertes Wasser mit einem pH-Wert von 7 ist neutral. ____/0

In einer verdünnten Lösung hängt der pH-Wert von der Stoffmengenkonzentration c (H_3O^+) der Oxonium-Ionen H_3O^+ in Mol pro Liter ab. Für die Berechnung des pH-Wertes einer solchen Lösung wird ein dekadischer Logarithmus benötigt. Es gilt: $pH = -\lg(\mathrm{c}\ (H_3O^+))$.

Aufgabenstellung:

(a) Eine verdünnte Lösung enthält 0,1 Mol pro Liter H_3O^+.
Berechne den pH-Wert dieser Lösung!
Interpretiere diesen Wert im gegebenen Kontext!

(b) Leite mit Hilfe der Definition des Logarithmus aus der Formel für den pH-Wert eine Formel ab, mit deren Hilfe die Konzentration $c(H_3O^+)$ berechnet werden kann!
Berechne damit die Konzentration $c(H_3O^+)$ für eine neutrale wässrige Lösung!

(a) **Lösungserwartung:**

$pH = -\lg 0{,}1 = -\lg(10^{-1}) = 1 \Rightarrow$ Der pH-Wert ist 1.

Interpretation: Diese Lösung ist sehr sauer.

(b) **Lösungserwartung:**

$pH = -\lg(c(H_3O^+)) \Leftrightarrow -pH = \lg(c(H_3O^+)) \Leftrightarrow 10^{-pH} = c(H_3O^+)$

Neutrale wässrige Lösung: $pH = 7 \Leftrightarrow c(H_3O^+) = 10^{-7}$ Mol pro Liter

---

1020 - K6 - FO, RF - - Freier Fall - Thema Mathematik Schularbeiten 6. Klasse

20. Der freie Fall sit aufgrund der Gravitationskraft eine beschleunigte Bewegung. Die Größe der Gravitationsbeschleunigung g ist abhängig vom Ort, man kann aber näherungsweise für g den Wert $10\,\mathrm{m/s^2}$ verwenden. ____/0

Bereits um 1600 erkannte Glilei, dass alle Körper gleich schnell fallen (natürlich unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes). Er untersuchte auch die Gesetzte für den freien Fall, allerdings führte er keine Fallversuche durch, sondern er ließ Kugeln eine 6 m lange schiefe Ebene hinunterrollen (vgl. Das Labor nach Galilei. In http://www.deutsches-museum.de).

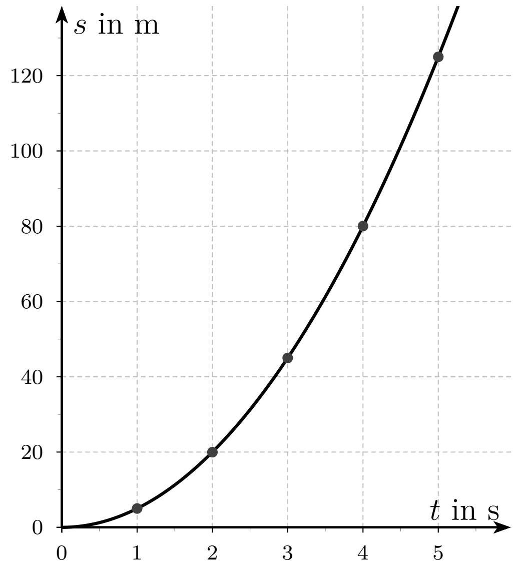
Galilei fand heraus, dass sich die Fallwege wie die Quadrate der Fallzeiten verhalten, d.h. in der 2-, 3-, 4-,..., n-fachen Zeit wird der 4-, 9-, 16-,...,n^2-fache Weg zurückgelegt. Heute wird in der Physik die Strecke s (in Meter), die ein Körper im freien Fall in der Zeit t (in Sekunden) zurücklegt, mit folgender Formel angegeben: $s(t) = \frac{g}{2} \cdot t^2 \approx 5t^2$

Zerlegt man den freien Fall in Einzelschritte, d.h. in jene Wegstücke $w_1, w_2, w_3, ..., w_n$ die der Körper in der 1.,2.,3., ..., n-ten Sekunde zurücklegt, so gilt für diese Wegstücke: Der Körper fällt in der ersten Sekunde einen Weg von 5 m und in jeder folgenden Sekunde um 10 m mehr als in der vorhergehenden Sekunde.

Aufgabenstellung:

(a) Begründe, dass es sich bei der Folge $\langle w_n \rangle$ der Wegstücke um eine arithmetische Folge handelt.

Die gesamte Fallstrecke s (in Meter) in Abhängigkeit von der Fallzeit t (in Sekunden) ist in folgendem Diagramm grafisch dargestellt:



Begründe, dass die Werte $s(1), s(2), s(3), \ldots$ keine arithmetische Folge bilden.

(b) Gib eine explizite Formel für das Wegstück w_n an, das der Körper in der n-ten Sekunde zurücklegt.

Weise mit Hilfe der Summenformel für die arithmetische Reihe rechnerisch nach, dass für die Gesamtstrecke $s_n = w_1 + w_2 + \ldots + w_n$, die der Körper in den ersten n Sekunden durchfällt, gilt: $s_n = 5n^2$

(a) **Lösungserwartung:**

Arithmetische Folge, da konstanter Zuwachs um 10 zwischen aufeinanderfolgenden Gliedern w_1 und w_{n+1} der Folge vorliegt.

$s(0), s(1), s(2), \ldots$ bilden keine arithmetische Folge, weil hier kein konstanter Zuwachs vorliegt. Die Grafik zeigt: $s(0) = 0, s(2) = 20, s(4) = 80$, für einen konstanten Zuwachs müsste aber $s(4) = 40$ gelten.

(b) **Lösungserwartung:**

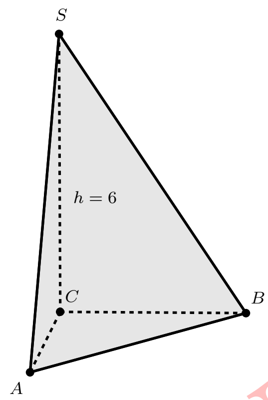
$w_1 = 5; w_2 = w_1 + 10 = 5 + 10; w_3 = w_2 + 10 = 5 + 2 \cdot 10; w_n = 5 + (n-1) \cdot 10$

Gesamtweg: $s_n = w_1 + w_2 + \ldots + w_n = (w_1 + w_n) \cdot \frac{n}{2} = (5 + 5 + 10n - 10) \cdot \frac{n}{2} = \frac{10n^2}{2} = 5n^2$

1021 - K6 - VAG3 - AG 3.4, AG 3.3 - Dreiseitige Pyramide - Thema Mathematik Schularbeiten 6. Klasse

21. Eine dreiseitige Pyramide (siehe Abbildung unten), deren Höhe h normal auf die beiden Grundkanten AC und BC steht, ist durch die Koordinaten der Punkte A, B, C und die Höhe $h = 6$ festgelegt. ____/0

$$A(-2|1|3), B(1|0|3), C(-1|2|3)$$



Aufgabenstellung:

(a) Eine Gerade g_1 verläuft durch den Punkt C und steht normal auf die beiden Grundkanten AC und BC. Beschreibe diese Gerade mit Hilfe einer geeigneten Geradengleichung.

Eine Gerade g_2 ist gegeben durch $g_2\colon X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$.

Weise rechnerisch nach, dass sich die beiden Geraden g_1 und g_2 in der Spitze S der Pyramide schneiden.

(b) Für das Volumen V einer Pyramide gilt allgemein $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$, wobei h die Höhe und G der Flächeninhalt der Grundfläche der Pyramide sind.

Berechne mit Hilfe dieser Formel das Volumen V der gegebenen Pyramide.

(a) **Lösungserwartung:**

Normalvektor der Grundfläche = Richtungsvektor der Geraden g_1

Berechnung mit Kreuzprodukt: $NV(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

oder ohne Kreuzprodukt: A, B, C haben die gleiche z-Koordinate, daher ist der Normalvektor parallel zur z-Achse und hat die Richtung $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow g_1 : X = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$ oder äquivalente Darstellung der Geraden g_1

Schneiden von g_1 und g_2 liefert den Schnittpunkt $S(-1|2|9)$, dann rechnerischer Nachweis, dass S die Spitze der Pyramide ist: $\left|\overrightarrow{CS}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}\right| = 6$

Oder verwenden, dass Richtung der Höhe parallel zur z-Achse ist, daher: Koordinaten von S berechnen durch $S = C + 6 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$, dann rechnerisch überprüfen, dass S auf g_2 liegt.

(b) **Lösungserwartung:**

$G = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = 2 \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 6 = 4$

$\Rightarrow$ Das Volumen der Pyramide beträgt 4 VE

1022 - K6 - VAG3, RE - AG 3.2 - Argumentieren, begründen, beweisen - Thema Mathematik Schularbeiten 6. Klasse

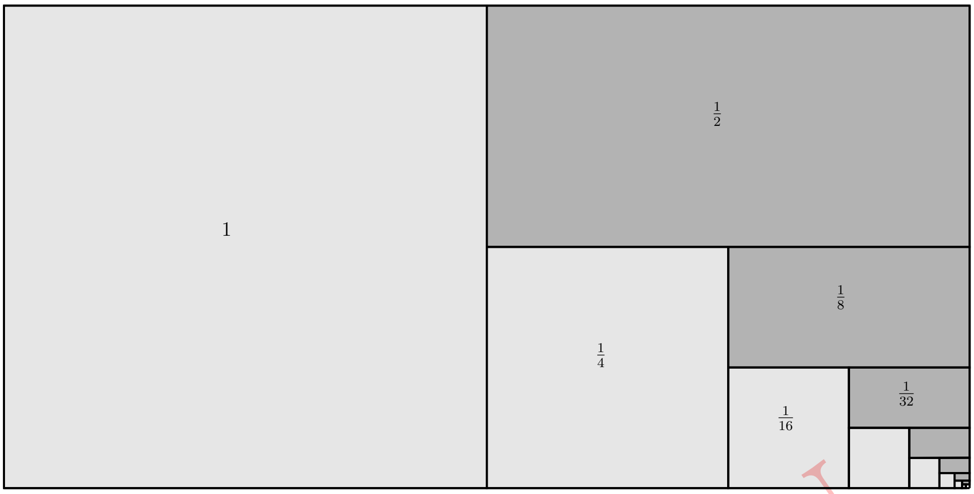
Aufgabenstellung:

22. (a) Argumentiere ohne Rechnung, dass für zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ im Raum stets gilt: $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$ ____/0

(b) Gib eine rekursive Darstellung einer streng monoton fallenden geometrischen Folge $\langle a_n \rangle$ mit Startwert $a_0 = 100$ an!

(c) Die unendliche geometrische Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ...$ konvergiert gegen 2. Begründe diese Konvergenz

- rechnerisch
- grafisch mit Hilfe der folgenden Abbildung:



(a) **Lösungserwartung:**

$\vec{a} \times \vec{b}$ steht normal auf $\vec{a} \Rightarrow$ Das skalare Produkt von $\vec{a}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ ist gleich 0.

(b) **Lösungserwartung:**

z.B.: $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$ mit $n \geq 0$

(c) **Lösungserwartung:**

Rechnerisch: Anwendung der Summenformel für die geometrische Reihe: $q = \frac{1}{2}$ hat Betrag < 1, daher $s = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$
Grafisch: Das Quadrat links hat Seitenlänge 1 und Flächeninhalt 1, die rechte Häfte ist ein gleich großes Quadrat, das immer weiter halbier wird, die Teilfächen haben Flächeninhalte $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ usw., Schritt für Schritt wird das rechte Quadrat immer mehr gefüllt. $\Rightarrow$ Insgesamt nähert sich der gesamte Flächeninhalt aller Teilflächen dem Wert 2 (Flächeninhalt des gesamten Rechtecks).

1023 - K6 - RF - FA 1.5, FA 5.1 - Exponentialfunktion - Thema Mathematik Schularbeiten 6. Klasse

23. Gegeben ist eine Exponentialfunktion f mit $f(x) = a \cdot b^x$. ____/0

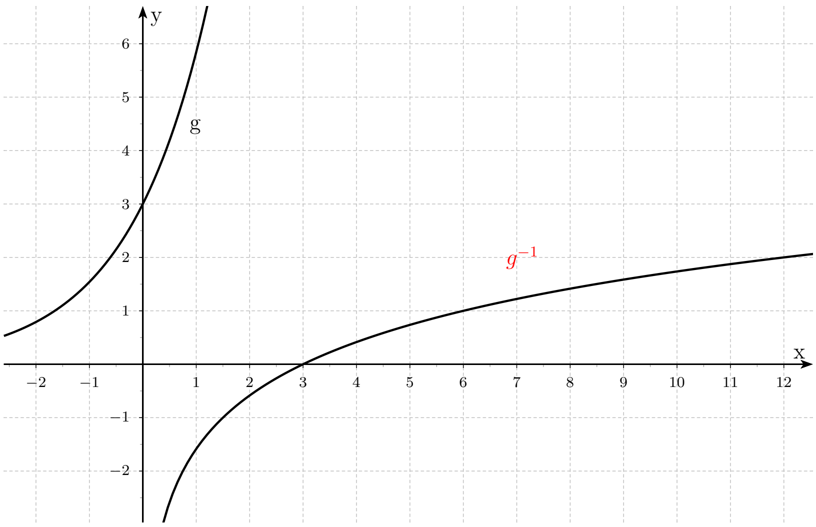
Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Welche der folgenden Eigenschaften sind typisch für eine Exponentialfunktion f mit $f(x) = a \cdot b^x$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$?

Kreuze die zutreffende(n) Eigenschaft(en) an!

f ist streng monoton wachsend.	
f hat keine Nullstelle.	☒
f hat kein Maximum und kein Minimum.	☒
Die Funktionswerte von f sind positiv.	☒
Der Funktionsgraph von f ist weder zur x-Achse, noch zur y-Achse symmetrisch.	☒

Gegeben ist der Graph der Exponentialfunktion g. Skizziere den Graphen der Umkehfunktion von g im folgenden Koordinatensystem!



(b) Bestimme den Funktionsterm von g!

Bestimme den Funktionsterm der Umkehrfunktion von g!

(a) **Lösungserwartung:**

Multiple Choice - siehe oben

Doe Skizze der Umkehrfunktion muss folgende Eigenschaften aufweisen:

- streng monoton wachsend
- Nullstelle bei $x = 3$
- Graph enthält den Punkt $(6|1)$
- ist nur für positive Werte definiert

Skizze - siehe oben

(b) **Lösungserwartung:**

$g(0) = 3 \Rightarrow a = 3$

$g(1) = 6 \Rightarrow 3 \cdot b^1 = 6 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow g(x) = 3 \cdot 2^x$

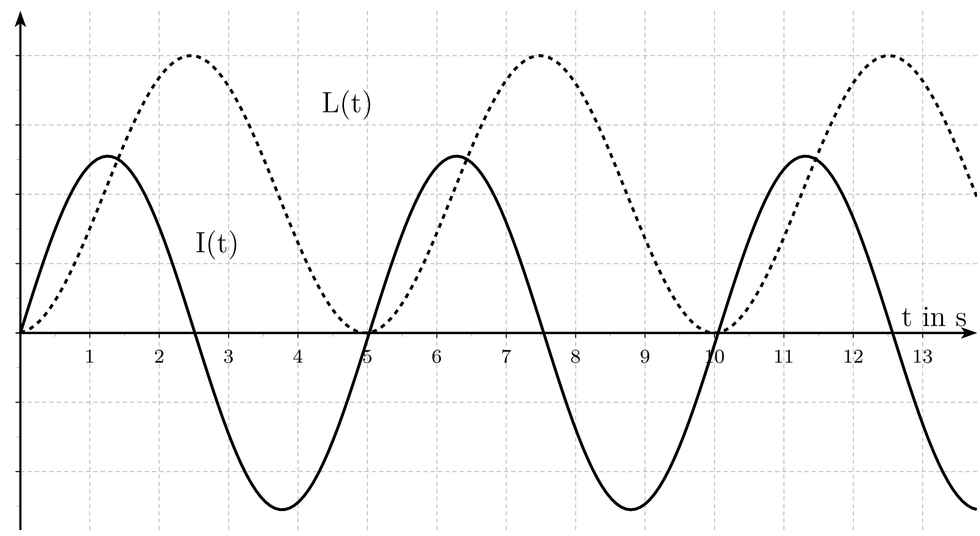
Umkehrfunktion: $x = 3 \cdot 2^y \Rightarrow \frac{x}{3} = 2^y \Rightarrow \ln\left(\frac{x}{3}\right) = y \cdot \ln 2 \Rightarrow y = \frac{\ln\left(\frac{x}{3}\right)}{\ln 2}$
(oder äquivalente Terme)

1024 - K6 - RF - FA 6.4, FA 6.3, FA 1.5 - Atmung - Thema Mathematik Schularbeiten 6. Klasse

24. Während der Atmung strömt Luft durch Mund und Nase in den Körper. Beim gesunden Menschen ist die Atmung rhytmisch und gleichmäßig tief, d.h. das Ein- und Ausatmen ist ein periodischer Vorgang. Im folgenden Diagramm sind die Vorgänge während der Atmung für einen ruhenden Erwachsenen grafisch dargestellt. ____/0

Der Graph I zeigt die Atmenstromstärke $I(t)$, das ist die pro Sekunde ein- oder ausgeatmete Luftmenge (in Liter) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Sekunden).

Der Graph L zeigt das in der Lunge vorhandene aktive Luftvolumen L (in Liter) in Abhängigkeit von der Zeit t in Sekunden. (Hinweis: Die Luftmenge, die nicht aktiv im Gasaustausch beteiligt ist, also im Atemsystem „stehenbleibt“ - das sogenannte Totraumvolumen - ist hier vernachlässigt.)



Daten nach: Werne Timischl: Biomathematik, Eine Einführung für Biologen und Mediziner. Wien: Springer-Verlag 1988 und 1995

Aufgabenstellung:

(a) Ein Atemzyklus besteht aus einer Ein- und Ausatmung. Die durchschnittliche Zahl der Atemzyklen pro Minute wird Atemfrequenz genannt. Bestimme aus der Grafik die Atemfrequenz eines ruhenden Erwachsenen!

Die dargestellte Funktion I ist von der Form $f(t) = a \cdot \sin(b \cdot t)$ mit $a, b > 0$ und gilt für einen ruhenden Erwachsenen. Angenommen, der Erwachsene übt eine anstrengende Tätigkeit aus. Welche Auswirkungen auf Graph und Funktionsgleichung kann dies haben? Gib alle Möglichkeiten mit Begründung an!

(b) $\boxed{\text{A}}$ Interpretiere die Periodizität der Funktion L im Kontext.

Nach 2,5 s hat L ein Maximum und I eine Nullstelle. Erläutere, was dies in diesem Zusammenhang bedeutet.

(a) Lösungserwartung:

Ein Atemzyklus dauert 5 s ⇒ Atemfrequenz: 12 Atemzüge pro Minute

Eine anstrengende Tätigkeit bewirkt, dass die Amplitude und/oder die Frequenz erhöht werden, d.h. die Werte der Parameter a und b größer werden.

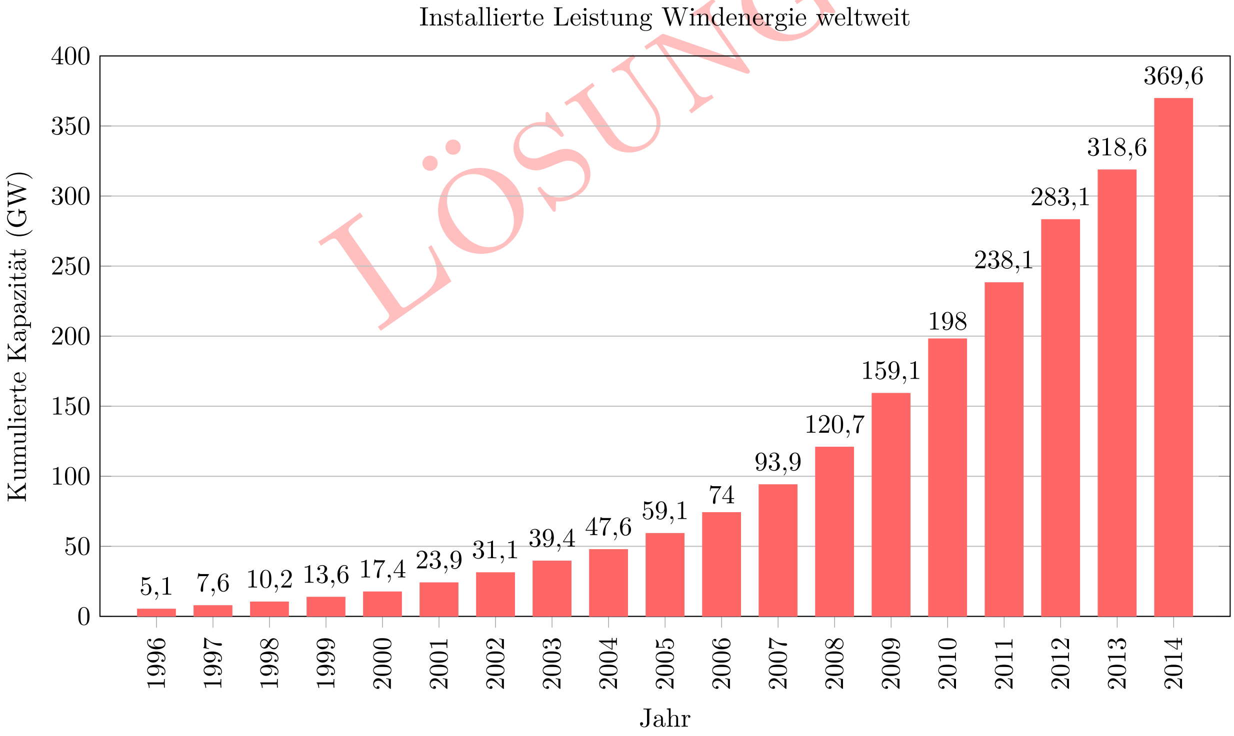
(b) Lösungserwartung:

L beschreibt das aktive Luftvolumen in der Lunge in Abhängigkeit von der Zeit. Es wird beim Einatmen größer bis zum Maximalwert und sinkt beim Ausatmen wieder bis zum Minimum. Da die Atmung ein periodische Vorgang ist. änder sich auch das aktive Luftvolumen periodisch.

Das aktive Luftvolumen hat nach 2,5 s ein Maximum, weil hier das Einatmen zu Ende ist und das Ausatmen beginnt. Dieser Übergang entspricht der Nullstelle der Atemstromstärke I.

1025 - K6 - RF - AN 1.1, AN 1.2, AN 1.3, FA 5.6, FA 5.1, FA 5.5, FA 2.5, FA 2.2 - Windenergie weltweit - Thema Mathematik Schularbeiten 6. Klasse

25. Die Windenergie zählt zu den umweltschonendsten Energieformen zur Erzeugung von Elektrizität. Das folgende Diagramm zeigt die Entwicklung der Leistung P in Gigawatt (GW) der weltweit installierten Windkraftwerke von 1996 bis zum Jahr 2014. ____/0



Daten nach: Global Wind Energy Council: Global Wind Statistics 2014

Aufgabenstellung:

(a) Sei $P(x)$ die im Jahr x weltweit installierte Leistung an Windenergie.

Berechne die Werte der folgenden Terme: $\frac{P(2014)-P(2010)}{P(2010)}$ und $\frac{P(2014)-P(2010)}{2014-2010}$

$\boxed{\text{A}}$ Interpretiere diese Werte im Kontext!

(b) Die weltweit installierte Leistung ist von 2000 bis 2005 und von 2005 bis 2010 jeweils auf etwa das 3,7-fache gestiegen.

Begründe, dass im Zeitraum von 2000 bis 2010 die weltweit installierte Leistung P (in GW) von der Zeit t (in Jahren) exponentiell abhängt und beschreibe diese Abhängigkeit durch eine Exponentialfunktion der Form $P(t) = P_0 \cdot a^t$.

(c) Für die weltweit installierte Leistung P (in GW) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Jahren) gilt für den Zeitraum von 2000 bis 2010:
$P(t) = 17{,}4 \cdot e^{0{,}24295 \cdot t}$.

Berechne die Verdopplungszeit der installierten Leistung!

Begründe rechnerisch, dass dieses Modell nicht bis 2014 gültig ist!

(d) Die installierte Leistung ist vom Jahr 2010 bis zum Jahr 2014 von 198 GW auf 369,6 GW gestiegen. Verwende auch die Daten der Jahre 2011, 2012 und 2013!

Wähle ein geeignetes Modell, das das Wachstum von 2010 bis 2014 beschreibt und begründe deine Wahl!

Berechne mit diesem Modell, welche weltweit installierte Leistung 2015 zu erwarten wäre!

(a) **Lösungserwartung:**

$\frac{P(2014)-P(2010)}{P(2010)} = \frac{369{,}6-198{,}0}{198{,}0} \approx 0{,}867$

$\frac{P(2014)-P(2010)}{2014-2010} = \frac{171{,}6}{4} \approx 42{,}9$

Von 2010 bis 2014 ist die installierte Leistung um 86,7 % gestiegen.

Im Zeitraum von 2010 bis 2014 ist die installierte Leistung im Mittel um 42,9 GW pro Jahr gestiegen.

(b) **Lösungserwartung:**

Steigerung um denselben Faktor von 3,37 in jeweils Fünfjahresschritten ist eine Eigenschaft exponentiellen Wachstums.

$P(t) = P_0 \cdot a^t$ mit $P_0 = 17{,}4; a \approx 3{,}37^{\frac{1}{5}} \approx 1{,}275 \Rightarrow P(t) \approx 17{,}4 \cdot 1{,}275^t$

(c) **Lösungserwartung:**

$P(t) = 17{,}4 \cdot e^{0{,}24295 \cdot t} \Rightarrow$ Verdopplungzeit $\approx 2{,}85$ Jahre

2014: $P(14) = 17{,}4 \cdot e^{0{,}24295 \cdot 14} \approx 522$, der Realwert nach der Tabelle ist aber nur 369,6 GW.

(d) **Lösungserwartung:**

Von 2010 bis 2014 jeweils konstante Steigerung um etwa 42,9 GW pro Jahr, daher lineares Modell.

Vorhersage für 2015: 412,5 GW

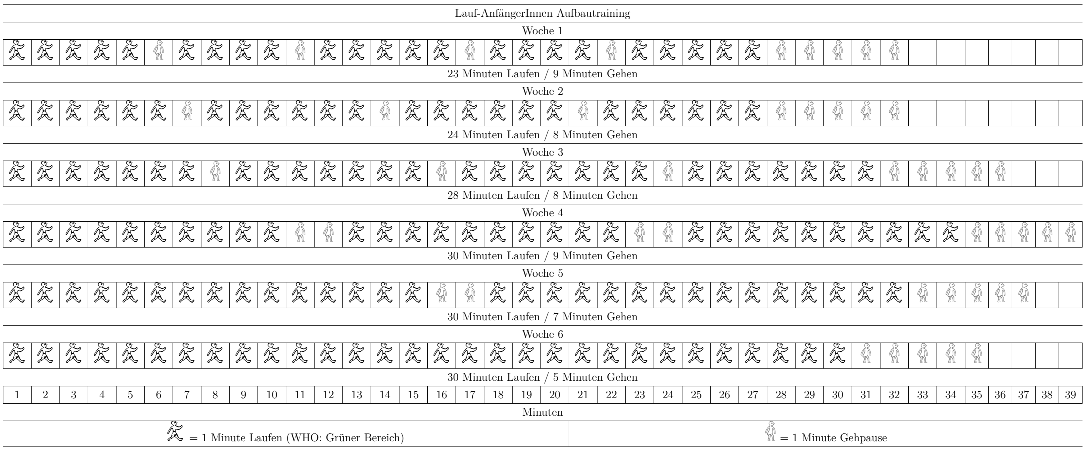
1026 - K6 - BSW - WS 1.1, WS 1.3, WS 1.4 - Triathlon-Training - Thema Mathematik Schularbeiten 6. Klasse

26. Unter http://www.radsporttraining.de wird ein Traininsplan für Triathlon-Einsteiger vorgestellt. In der Tabelle sind die Trainingszeiten für die ersten 8 Wochen jeder einzelnen Disziplin angeführt: ____/0

Triathlon für Einsteiger
Trainingsziel: Aufbau einer gesunden Grundlagenbasis in allen drei Disziplinen

Woche	Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag	Samstag	Sonntag
1	Ruhetag	**Laufen** s. Woche 1 (Laufen/Anfänger)	**Schwimmen** 10 × 50 m (1 Min. Pause)	**Radfahren** 30 Minuten Basic Training	Ruhetag	**Schwimmen** 10 × 50 m (1 Min. Pause)	**Radfahren** 30 Minuten Basic Training
2	Ruhetag	**Laufen** s. Woche 2 (Laufen/Anfänger)	**Schwimmen** 10 × 50 m (1 Min. Pause)	**Radfahren** 35 Minuten Basic Training	Ruhetag	**Laufen** s. Woche 2 (Laufen/Anfänger)	**Radfahren** 35 Minuten Basic Training
3	Ruhetag	**Laufen** s. Woche 3 (Laufen/Anfänger)	**Schwimmen** 4 × 100 m (1 Min. Pause)	**Radfahren** 40 Minuten Basic Training	Ruhetag	**Laufen** s. Woche 3 (Laufen/Anfänger)	**Schwimmen** 4 × 100 m (1 Min. Pause)
4	Ruhetag	**Laufen** s. Woche 4 (Laufen/Anfänger)	**Schwimmen** 5 × 100 m (1 Min. Pause)	**Radfahren** 45 Minuten Basic Training	Ruhetag	**Schwimmen** 5 × 100 m (1 Min. Pause)	**Radfahren** 45 Minuten Basic-Training
5	Ruhetag	**Laufen** s. Woche 5 (Laufen/Anfänger)	**Schwimmen** 3 × 10 Min (1 Min. Pause)	**Radfahren** 50 Minuten Basic Training	Ruhetag	**Laufen** s. Woche 5 (1 Min. Pause)	**Radfahren** 50 Minuten Basic-Training
6	Ruhetag	**Laufen** s. Woche 6 (Laufen/Anfänger)	**Schwimmen** 2 × 15 Min (1 Min. Pause)	**Radfahren** 60 Minuten Basic Training	Ruhetag	**Laufen** s. Woche 6 (Laufen/Anfänger)	**Schwimmen** 2 × 15 Min (1 Min. Pause)
7	Ruhetag	**Laufen** s. Woche 7 (Laufen/Anfänger)	**Schwimmen** 1 × 30 Min (1 Min. Pause)	**Radfahren** 65 Minuten Basic Training	Ruhetag	**Schwimmen** 1 × 30 Min (1 Min. Pause)	**Radfahren** 65 Minuten Basic Training
8	Ruhetag	30 Minuten Lockeres Train. Bike,Run o. Sw.	Ruhetag	30 Minuten Lockeres Train. Bike,Run o. Sw.	Ruhetag	Ruhetag	30 Minuten Lockeres Train. Bike,Run o. Sw.

Das Lauf-Training orientiert sich am folgenden Diagramm für Lauf-AnfängerInnen (http://www.radsporttraining.de):



Aufgabenstellung:

(a) Trage in der gegebenen Tabelle ein, wie oft in den ersten drei Wochen die Disziplinen Lauf, Radfahren bzw. Schwimmen am Plan stehen:

	Laufen	Radfahren	Schwimmen
Woche 1	1	2	2
Woche 2	2	2	1
Woche 3	2	1	2

Gib an, wie viele Minuten Training für einen Triathlon-Einsteiger in den ersten drei Wochen insgesamt für das Laufen bzw. Gehen vorgesehen sind!

127 min Laufen   41 min Gehen

(b) Jede Trainingseinheit in der Disziplin Radfahren dauert laut Plan in den ersten 7 Wochen mindestens 30 min und höchstens 65 min.

$\boxed{\text{A}}$ Gib den Median dieser Trainingsdauer pro Einheit Radfahren in Minuten an und interpretiere ihn im gegebenen Kontext!

Der Trainingsplan in der 8. Woche lässt offen, wie oft Radfahren trainiert werden soll. Ergänze diesen Plan so, dass sich der soeben berechnete Median nicht verändert!

(a) Lösungserwartung:

siehe oben

(b) Lösungserwartung:

Median 45 Minuten ⇒ Gleich viele Trainingseinheiten für die Disziplin Radfahren dauern mindestens bzw. höchstens 45 min.

2 Möglichkeiten: kein Radfahrtraining einplanen oder 1×30 Minuten

---

1027 - K5 - MZR - AG 1.2, AG 2.1 - Terme - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

27. (a) Führe die Division aus: $(36r^3 - 12r^2 - 41r + 7) : (6r - 7) =$ ____/0

(b) Bestimme die Definitionsmenge und berechne $\frac{2x+5}{x^2-9} - \frac{9x}{5x^2-15x} =$

(c) 80 % aller Angestellten eines Unternehmens sind Männer. 25 % der männlichen Mitarbeiter sind Raucher. Der Raucheranteil unter allen Angestellten beträgt nur 22 %. Gib an, wie viel Prozent der Angestellten männliche Raucher sind und schreibe mit Hilfe eines Terms:

- Anzahl der Raucher und Raucherinnen des Unternehmens
- Anzahl der Raucherinnen

Lösungserwartung:

(a)
$$
\begin{array}{l}
(36r^3 - 12r^2 - 41r + 7) : (6r - 7) = \underline{\underline{6r^2 + 5r - 1}} \\
\underline{-(36r^3 - 42r^2)} \\
\qquad 30r^2 - 41r \\
\qquad \underline{-(30r^2 - 41r)} \\
\qquad\qquad -6r + 7 \\
\qquad\qquad \underline{-(-6r + 7)} \\
\qquad\qquad\qquad 0R
\end{array}
$$

(b) $D = \mathbb{R}\backslash\{-3; 0; 0\}$, in diesen Fällen wäre ein Nenner gleich 0.

$$\frac{2x+5}{x^2-9} - \frac{9x}{5x^2-15x} = \frac{10x + 25 - (9x + 27)}{5 \cdot (x-3) \cdot (x+3)} = \frac{x-2}{5 \cdot (x^2 - 9)}$$

(c) $0{,}25 \cdot 0{,}8 = 0{,}2 \Rightarrow 20\,\%$ der Angestellten sind männliche Raucher

A ... Anzahl der Angestellten $\Rightarrow$ Anzahl der Raucher und Raucherinnen: $0{,}2 \cdot A$

$0{,}22 - 0{,}2 = 0{,}02 \Rightarrow$ Anzahl der Raucherinnen: $0{,}02 \cdot A$

1028 - K5 - MZR - - DNA-Fäden - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

28. (a) Die Dicke der DNA-Fäden einer Zelle beträgt ca. 2 Nanometer. Wandle diese Angaben in Meter um und verwende dabei die Gleitkommadarstellung! ____/0

Die DNA-Fäden einer Zelle sind ca. 1,7 m lang. Man vergleicht einen DNA-Faden mit einer Spaghettinudel von 1 mm Dicke. Wie lange müsste diese sein, wenn bei ihr die Dicke und Länge im selben Verhältnis stehen wie beim DNA-Faden?

(b) Stelle die Zahl $[974]_{10}$ im Hexadezimalsystem dar und die Zahl $[177]_{10}$ im Dualsystem.

(c) Stelle folgende Menge grafisch in einem Koordinatensystem dar:

$$A = \Big\{(x|y) \in \mathbb{R}\Big||x| < 4 \text{ und } -2 \leq y < 3\Big\}$$

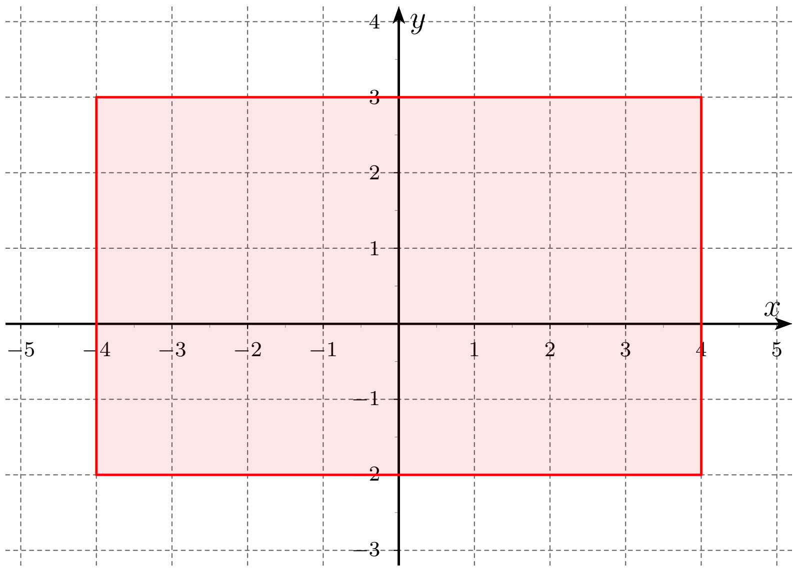
Lösungserwartung:

(a) $2\,\text{nm} = 2 \cdot 10^{-9}$, $\frac{1\,\text{mm}}{2\,\text{nm}} = 5 \cdot 10^5$

$\Rightarrow$ Länge $1{,}7 \cdot 5 \cdot 10^5 = 850\,000\,\text{m} = 850\,\text{km}$

(b) $974 = 3 \cdot 16^2 + 12 \cdot 16^1 + 14 \cdot 16^0 = [3CE]_{16}$

$177 = 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = [10\,110\,001]_2$

(c) 

1029 - K5 - MZR - AG 1.1, AG 1.2 - Zahlenmengen - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

29. (a) Beweise: Das Quadrat einer ungerade Zahl ist wieder ungerade. ____/0

(b) Gibt es im Dualsystem die Zahl $[2000]_2$? Begründe!

(c) Stellen den Zusammenhang zwischen den Zahlenmengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ in einem Diagramm grafisch dar. Erkläre anhand eines Beispiels die Notwendigkeit der Erweiterung der Menge der ganzen Zahlen zur Menge der rationalen Zahlen.

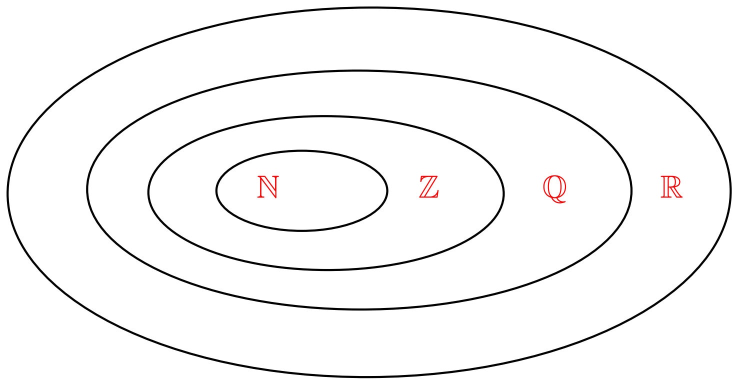
(a) **Lösungserwartung:**

Jede ungerade Zahl z können wir schreiben wir als $z = 2k + 1$ mit $k \in \mathbb{Z}$.
$\Rightarrow z^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \cdot (2k^2 + 2k) + 1$
$2k^2 + 2k$ ist eine ganze Zahl $m \Rightarrow z^2 = 2m + 1$ ist auch eine ungerade ganze Zahl

(b) **Lösungserwartung:**

Im Dualsystem gibt es nur Ziffern 0 und 1. Daher ist diese Darstellung nicht möglich.

(c) **Lösungserwartung:**



Die Gleichung $2x + 3 = 0$ hat keine ganze Zahl als Lösung, da $-3 : 2 \notin \mathbb{Z}$. Werden die ganzen Zahlen zu den rationalen Zahlen erweitert, so wird die Gleichung lösbar mit dem Quotienten $-\frac{3}{2}$ als Lösung.

1030 - K5 - GL - AG 2.2, AG 2.5 - Gleichungssysteme - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

30. (a) Eine Schule wird von x Schülerinnen und y Schülern besucht und es gilt: ____/0

$$\begin{aligned} I: \quad & x+y=750 \\ II: \quad & 2x=y \end{aligned}$$

(i) Interpretiere diese beiden Gleichungen.

(ii) Löse das Gleichungssystem und interpretiere die Lösung!

(b) Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} I: \quad & 5x+2y=-3 \\ II: \quad & x-6y=-23 \end{aligned}$$

(i) Löse das gegebene Gleichungssystem rechnerisch!

(ii) Verändere einen Zahlenwert im gegebenen Gleichungssystem so, dass das Gleichungssystem keine Lösung hat!

(a) **Lösungserwartung:**

(i) Gleichung I: Es besuchen insgesamt 750 Personen diese Schule.

Gleichung II: Es gehen doppelt so viele Schüler wie Schülerinnen in diese Schule.

(ii) $x+y=x+2x=3x=750 \Rightarrow x=750; \quad 2x=y \Rightarrow y=500$

Es gehen 250 Schülerinnen und 500 Schüler in diese Schule.

(b) **Lösungserwartung:**

(i) $3 \cdot I + II: 16x=-32 \Rightarrow x=-2; \quad -10+2y=-3 \Rightarrow y=3{,}5$

(ii) Veränderung z.B. Gleichung II: $-15x-6y=-23$

1031 - K5 - GL - AG 2.3 - Gleichungssysteme - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

31. (a) Gib eine quadratische Gleichung an, die die Lösungen 3 und -2 hat! Wie viele solche Gleichungen gibt es? Begründe! ____/0

(b) Gib alle Werte des Parameters a an, sodass die Gleichung $5x^2 - 2x + a = 0$ nur eine reelle Lösung hat!

(c) Im Folgenden wird die große Lösungsformel für die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ hergeleitet. Erkläre jeden einzelnen Schritt dieser Herleitung:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{Äquivalenzumformung } \cdot 4a \tag{1}$$

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0 \quad \text{Äquivalenzumformung } - 4ac \tag{2}$$

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac \quad \text{Ergänze auf ein vollständiges Quadrat} \tag{3}$$

$$\Rightarrow \text{Äqu.umf } + b^2 \text{, binomische Formel}$$

$$(2ax + b)^2 = -4ac + b^2 \quad \text{korrektes Wurzelziehen} \tag{4}$$

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \quad \text{Äquivalenzumformungen } - b \text{ und dann } 2a \tag{5}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Lösungserwartung:

(a) Es gibt unendlich viele solcher Gleichungen, und zwar $a \cdot (x-3) \cdot (x+2) = 0$ mit $a \in \mathbb{R}$. Z.B. $x^2 - x - 6 = 0$

(b) $a = \frac{1}{5}$ (Diskriminante der Lösungsformel gleich null: $2^2 - 4 \cdot 5 \cdot a = 0$)

(c) siehe oben

1032 - K5 - FU - FA 2.1, FA 2.2, FA 2.3 - Wertverlust von Maschinen - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

32. Maschinen verlieren ab dem Kaufzeitpunkt auf Grund von Abnutzung und Alterung an Wert. Dies wird in der Wirtschaft als (lineare) Abschreibung bezeichnet. Die Abhängigkeit des Maschinenwertes von der Zeit t (in Jahren) wird durch eine lineare Funktion f beschrieben. ____/0

Der Wert einer Baumaschine ist 2 Jahre nach dem Kaufpreis auf 45 000 € gesunken. Weitere 3 Jahre später beträgt der Wert nur mehr 27 000 € .

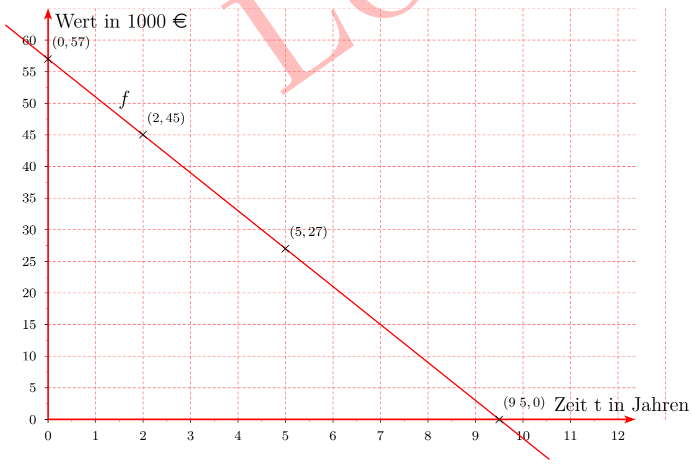
(a) Ermittle anhand des Graphen der Funktion f den Anschaffungswert der Baumaschine.

(b) Gib den zugehörigen Funktionsterm $f(t)$ an und interpretiere die Werte k und d im Kontext.

(c) Gib einen geeigneten Definitionsbereich für die Funktion f an und interpretiere diesen.

Lösungserwartung:

(a) Graph:



Anschaffungswert: 57 000 €

(b) $f(t) = 57\,000 - 6000t$

$k = -6000 \Rightarrow$ Die Maschine verliert jährlich 6 000 € an Wert (jährliche Abschreibung)

$d = 57\,000 \Rightarrow$ Die Maschine kostete bei ihrer Anschaffung 57 000 € (Anschaffungswert)

(c) Definitionsbereich: $0 \leq t \leq 9{,}5$

Bis 9,5 Jahre nach der Anschaffung ist der Wert der Maschine nicht negativ.

1033 - K5 - FU - FA 1.6, FA 1.7 - Steinwurf - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

33. (a) Vom Rand der Aussichtsterrasse des Donauturms wird ein Stein mit einer Geschwindigkeit von $v = 20\,\mathrm{m/s}$ senkrecht nach oben geworfen. Die zugehörige Bewegungsgleichung beschreibt, wie sich die Höhe h (in m) des Steines in Abhängigkeit von der Zeit t (in s) verändert: $h(t) = 160 + 20t - 5t^2$ ____/0

    (i) Berechne, aus welcher Höhe der Stein hochgeworfen wird und wann er diese Höhe wieder erreicht.

    (ii) Berechne, wann der Stein am Boden aufschlägt.

    (iii) Zeichne den Graphen der Funktion. Lies aus dem Graphen die maximale Höhe ab, die der Stein erreicht, und den zugehörigen Zeitpunkt.

    (b) Die Betragsfunktion f mit $f(x) = |x|$ ist definiert durch: $|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$

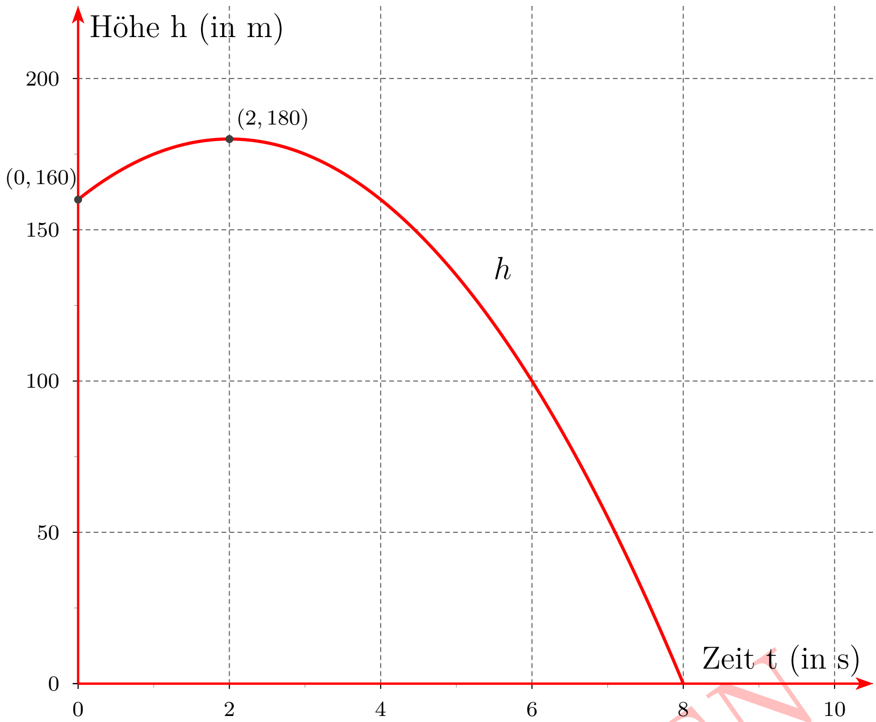
    Zeichne anhand dieser Definition den Graphen der Betragsfunktion f und löse damit grafisch die Gleichung $|x| = \frac{x}{2} + 3$.

Lösungserwartung:

(a) (i) $h(0) = 160 \Rightarrow \text{Abwurfhöhe} = 160\,\mathrm{m}$
$h(t) = 160 \Rightarrow t = 0 \text{ oder } t = 4$
Der Stein erreicht die gleiche Höhe wieder nach 4 s.

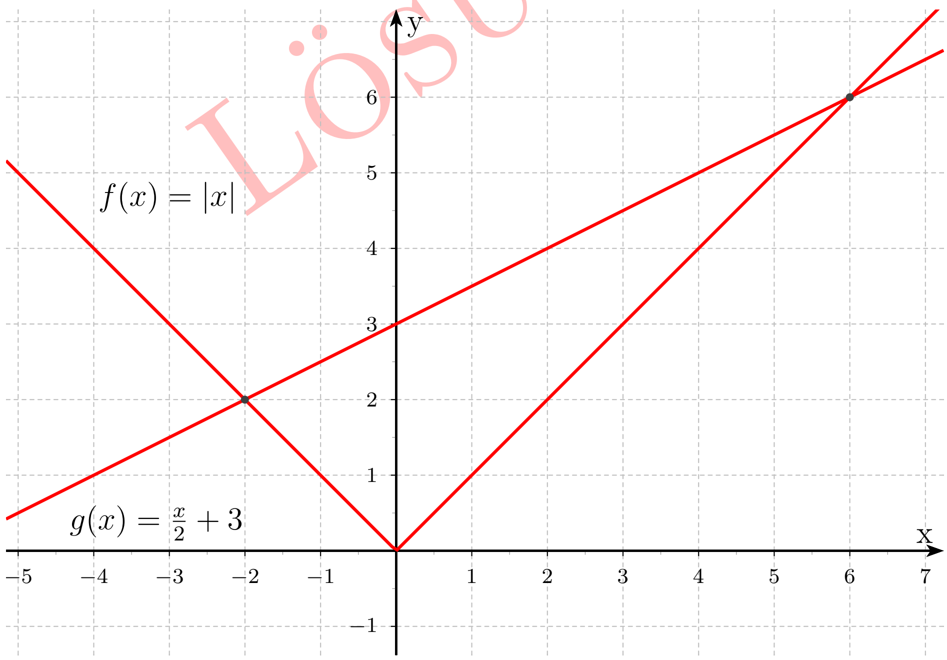
(ii) $h(t) = 0 \Rightarrow t = -4 \text{ oder } t = 8$
Der Stein schlägt nach 8 s am Boden auf.

(iii) Graph:



Die maximale Höhe von 180 m erreicht der Stein nach 2 s.

(b) Graph:

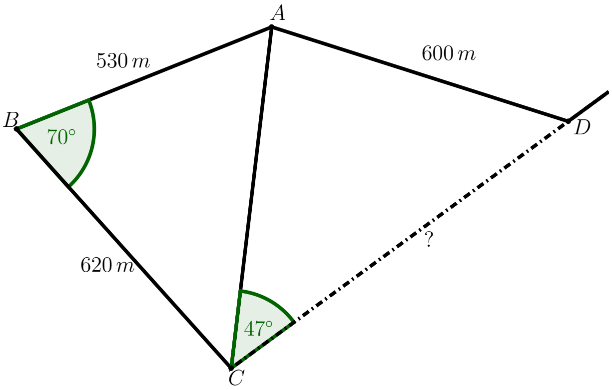


$x_1 = -2$; $x_2 = 6$

1034 - K5 - TR - AG 4.1 - Kabelverlegung - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

34. Zwischen den Orten C und D soll durch unwegsames Gelände ein Kabel geradlinig verlegt werden. ____/0

Berechne anhand der Vermessungsskizze die Länge dieses Kabels!



Lösungserwartung:

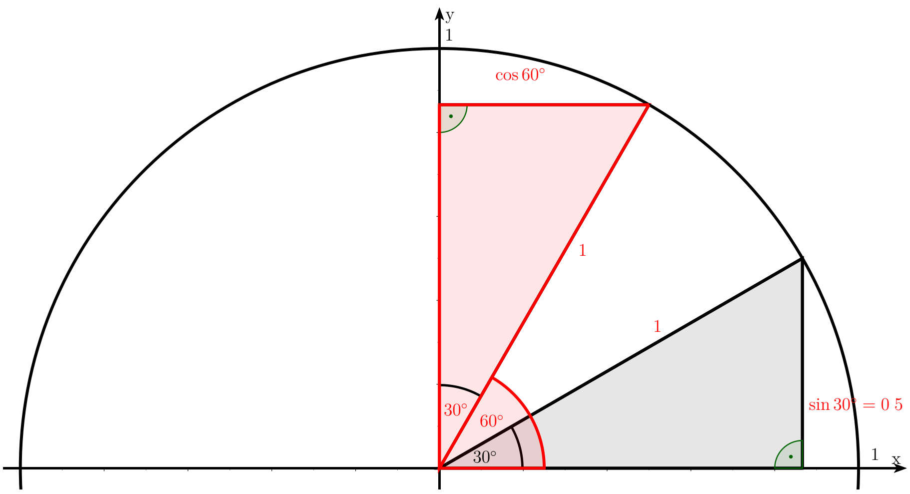
$\overline{AC} = \sqrt{530^2 + 620^2 - 2 \cdot 530 \cdot 620 \cdot \cos 70^\circ} \approx 663{,}72$; $\measuredangle ADC \approx \sin\left(663{,}72 \cdot \frac{\sin 47^\circ}{600}\right) \approx 54^\circ$

$\overline{CD} \approx \frac{600}{\sin 47^\circ} \cdot \sin 79^\circ \approx 805 \Rightarrow$ Das Kabel ist ca. 805 m lang.

1035 - K5 - TR - AG 4.1 - Winkelfunktionen - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

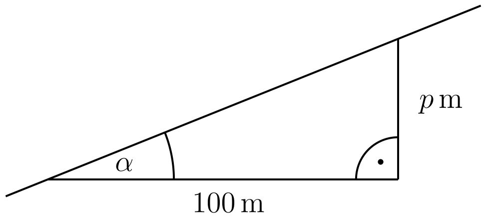
35. (a) Für den Sinus von 30° gilt: $\sin 30^\circ = 0{,}5$ ____/0

Zeige mithilfe des Einheitskreises, dass daraus folgt: $\cos 60^\circ = 0{,}5$



(b) Die Steigung von Straßen wird in Prozent angegeben.

Eine Steigung von $p\,\%$ bedeutet, dass pro 100 Meter in waagrechter Richtung die Höhe um p Meter zunimmt. Der zugehörige Winkel α heißt Steigungswinkel.



(i) Drücke den Zusammenhang zwischen α und p in einer Formel aus.

(ii) Untersuche, ob bei einer Verdopplung der Steigung von $100\,\%$ auf $200\,\%$ auch der Steigungswinkel verdoppelt wird.

(c) Für eine lineare Funktion f gilt: $f(x+1) = f(x) + k$

(i) Formuliere diese Aussage in eigenen Worten und stelle sie mit Hilfe einer geeigneten Skizze dar.

(ii) Weise die Gültigkeit dieser Aussage rechnerisch nach.

Lösungserwartung:

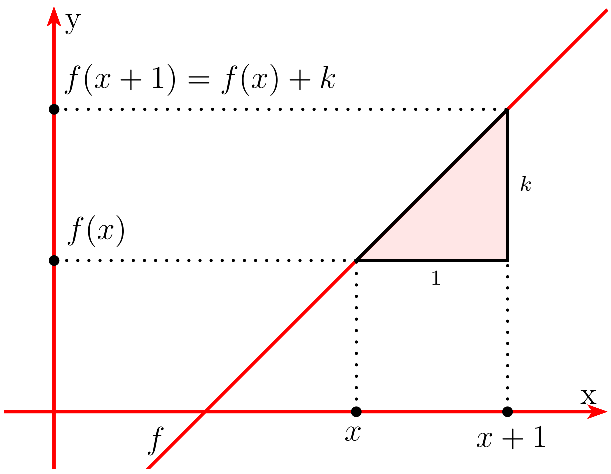
(a) siehe oben; Die eingezeichneten Dreiecke haben gleich große Winkel, ihre Hypotenusen sind gleich lang. Somit sind die Dreiecke kongruent und ihre kurzen Katheten sind ebenfalls gleich lang: $\sin 30° = 0{,}5 = \cos 60°$

(b) (i) z.B $\tan\alpha = \frac{p}{100}$

(ii) $p = 100\text{m} \Rightarrow \alpha = 45°; p = 200\,\text{m} \Rightarrow \alpha \approx 63{,}4° \Rightarrow$ Der Winkel verdoppelt sich hier nicht.

(c) (i) Wird das Argument x um 1 erhöht, so verändert sich der Funktionswert $f(x)$ um $+k$.

(ii) rechnerisch nachweisbar: $f(x+1) = k \cdot (x+1) + d = (k \cdot x + d) + k = f(x) + k$



1036 - K5 - VAG2 - AG 3.1, AG 3.2, AG 3.3 - Verkaufspreis - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

36. (a) Die Nettoverkaufspreise (in €) von fünf Waren werden durch den Verkaufspreisvektor $\vec{P} = (30|40|60|80|120)$ angegeben. Der Vektor $\vec{M} = (10|20|30|40|50)$ gibt die abgesetzten Mengen dieser fünf Waren an einem bestimmten Tag an. Bei Großabnahme erhält man 2 % Rabatt. ____/0

    (i) Gib eine Formel für den Verkaufspreisvektor $\vec{P_G}$ bei Großabnahme und berechne diesen.

    (ii) Berechne $\vec{P} \cdot \vec{M}$ und interpretiere das Ergebnis im Kontext.

(b) Von einem Rechteck $ABCD$ sind die Punkte $A(0|2)$, $B(6|-2)$ und $D(2|5)$ gegeben.

    (i) Ermittle rechnerisch den fehlenden Eckpunkt C.

    (ii) Berechne den Winkel α, den die Diagonalen einschließen.

    (iii) Berechne den Flächeninhalt des Rechtecks.

Lösungserwartung:

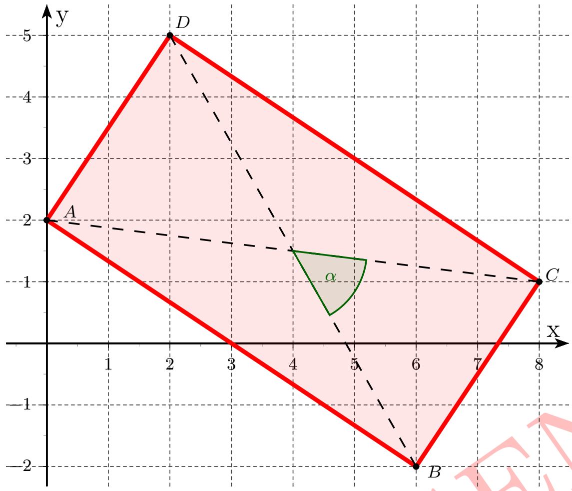
(a) (i) $\vec{P_G} = 0{,}98 \cdot \vec{P} = (29{,}4|39{,}2|58{,}8|78{,}4|117{,}6)$

(ii) $\vec{P} \cdot \vec{M} = 12\,100 \Rightarrow$ Die Gesamtkosten bei Abnahme der in Vektor $\vec{M}$ zusammengefassten Mengen zu den in Vektor $\vec{P}$ zusammengefassten Nettoverkaufspreisen beträgt 12 100 € .

(b) (i) $C = B + \vec{AD} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow C(8|1)$

(ii) $\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}}{\left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{DB}\right|} = \frac{\begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}}{\sqrt{65} \cdot \sqrt{65}} \Rightarrow \alpha \approx 53{,}1°$

(iii) $A = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AD}\right| = \left|\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{52} \cdot \sqrt{13} \Rightarrow A = 26E^2$



1037 - K5 - VAG2 - AG 3.2, AG 3.3, AG 3.4 - Begründungen mit Vektoren - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

37. (a) Erkläre, wie ein Einheitsvektor $\vec{a_0}$ zu einem Vektor $\vec{a}$ berechnet wird. Verwende dazu die charakteristische Eigenschaften des Vektors. ____/0

(b) Gegeben sind die Koordinaten der Eckpunkte A, B, C, D eines Vierecks. Es soll nachgewiesen werden, dass es sich um ein Rechteck handelt. Beschreibe eine geeignete Vorgangsweise. Beschränke dich auf die unbedingt notwendigen Schritte.

(c) Erkläre den Zusammenhang zwischen den Parameterdarstellung $X = P + t \cdot \vec{g}$ und der Normalvektorform $ax + by = c$ einer Geradengleichung.

Lösungserwartung:

(a) $\vec{a_0}$ ist parallel zu $\vec{a} \Rightarrow \vec{a_0}$ ist ein skalares Vielfaches von $\vec{a}$:

$a_0 = k \cdot \vec{a}$ mit geeignetem $k \in \mathbb{R}$

$\vec{a_0}$ hat die Länge 1 $\Rightarrow |\vec{a_0}| = k \cdot \vec{a} = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{|\vec{a}|}$

Insgesamt ergibt sich $\vec{a_0} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$

(b) Eine mögliche Vorgangsweise wäre: Nachweisen, dass gegenüberliegende Seiten parallel und gleich lang sind, also $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ und $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Anschließend einen rechten Winkel nachweisen. z.B $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.

(c) 1. mögliche Lösung:

$X = P + t \cdot \vec{g} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot P + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \vec{g}$

Da $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ normal auf $\vec{g}$ steht, ist $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \vec{g} = 0. \Rightarrow ax + by = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot P = c$

2. mögliche Lösung:

Der Punkt $P(x_P|y_P)$ liegt auf der Geraden, daher $a \cdot x_P + b \cdot y_P = c$.

Der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ist ein Normalvektor der Geraden und steht daher normal auf den Richtungsvektor $\vec{g} = \begin{pmatrix} x_g \\ y_g \end{pmatrix}$. Daher gilt $\begin{pmatrix} x_g \\ y_g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$ und $\begin{pmatrix} x_g \\ y_g \end{pmatrix}$ ist ein Vielfaches von $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, also $\begin{pmatrix} x_g \\ y_g \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ mit $k \in \mathbb{R}$

1038 - K5 - VAG2 - AG 3.2, AG 3.3, AG 3.4 - Grafisch und rechnerisch Koordinaten bestimmen - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

38. Die Spitze C eines gleichschenkligen Dreiecks mit Basis AB, mit $A(-1|-8)$ und $B(5|-4)$ liegt auf der Geraden $g: \; X = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. ____/0

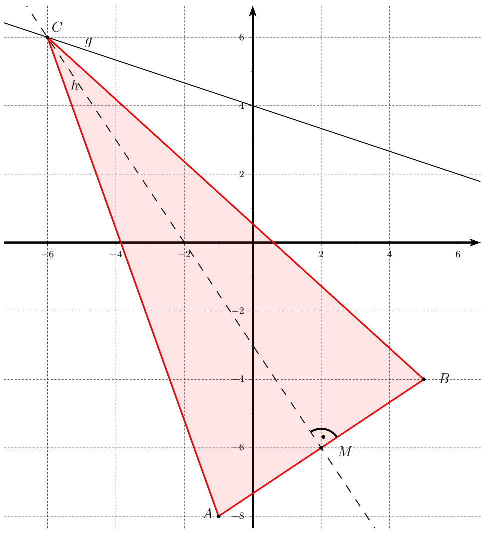
Ermittle die Koordinaten der Spitze C

(a) grafisch,

(b) rechnerisch.

LÃ¶sungserwartung:

(i) Grafisch:



(ii) Gerade h normal auf AB und durch den Mittelpunkt M der Basis

$M = \frac{A+B}{2} \Rightarrow M(2|-6)$

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ ist Normalvektor von h, daher auch $\overrightarrow{n_h} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Normalvektorform von h:

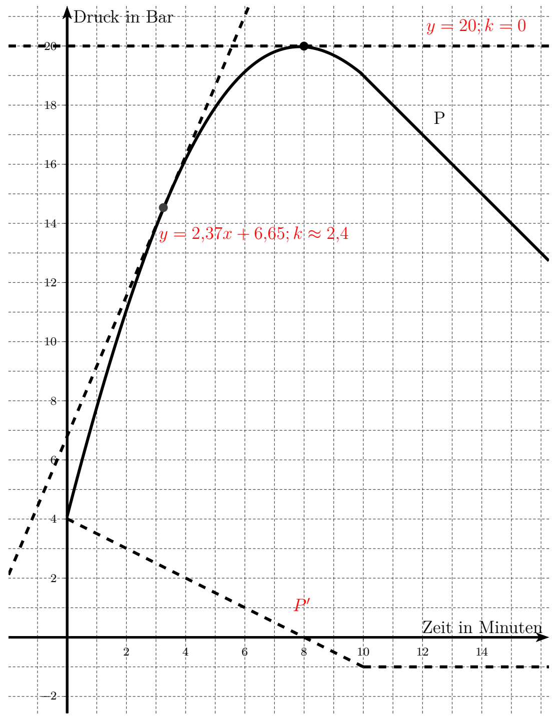
$h: \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + X = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow h: 3x + 2y = -6$

C ist Schnittpunkt der Geraden g und h:

$3 \cdot (-3 + 3t) + 2 \cdot (5 - t) = -6 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow C(6|-6)$

1039 - K7 - DR - AN 3.2, AN 1.1, AN 1.3, FA 1.4, FA 2.2 - Druck in einem Behälter - Dimensionen Mathematik, Schularbeiten-Trainer 7. Klasse

39. Im Zuge eines 15 Minuten dauernden Experiments wird der Druck P in einem Behälter gezielt verändert. Die nebenstehende Abbildung zeigt die Entwicklung des Drucks während der Versuchszeit. Die für die Lösung der anschließenden Aufgabenstellungen abzulesenden Werte sind ganzzahlig. Der Druck wird im Weiteren in Bar angegeben, die Zeit t in Minuten. Die Zeitmessung startet am Beginn des Experiments. ____/6



Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Skizziere in der obenstehenden Abbildung die momentane Druckänderungsrate während des Versuchszeitraums.

Welche der folgenden Informationen über die Entwicklung des Drucks während des Experiments sind korrekt? Kreuze die zutreffende(n) Aussage(n) an!

Am Beginn beträgt der Druck 4 bar.	⊠
Innerhalb der ersten 10 Minuten beschreibt eine Funktion f zweiten Grades mit $P = f(t)$ die Höhe des Drucks P zur Zeit t.	⊠
Ab dem Zeitpunkt $t = 8$ verändert sich der Druck nicht mehr.	
Die mittlere Änderungsrate des Drucks innerhalb der ersten vier Minuten beträgt 3 bar.	⊠
Die absolute Änderung des Drucks im Zeitintervall $[4; 6]$ beträgt 3 bar.	⊠

(b) Ab dem Zeitpunkt $t = 10$ verändert sich der Druck mit der zu diesem Zeitpunkt gerade gegebenen momentanen Änderungsrate gleichmäßig, linear weiter und es gilt: $P = g(t)$.

Ermittle $g(t)$ und berechne, nach wie vielen Minuten der Druck auf 0 bar gesunken wäre, wenn sich der Druck ab dem Zeitpunkt $t = 10$ gemäß der Funktion g weiter entwickeln würde.

(c) Nach Beendigung des Experiments stellt eine Person fest, dass innerhalb der ersten 10 Minuten die Zunahmegeschwindigkeit des Drucks zu einem bestimmten Zeitpunkt gleich der Abnahmegeschwindigkeit des Drucks zu einem anderen Zeitpunkt war. Erläutere, um welche Zeitpunkte es sich handeln kann, und begründe deine Antwort mittels Rechnung, wenn für das Zeitintervall $[0; 10]$ gilt: $P = f(t) = -\frac{1}{4}t^2 + 4t + 4$.

(a) **Lösungserwartung:**

Lösung Grafik: siehe oben

Lösung MC: siehe oben

(b) **Lösungserwartung:**

$P'(10)$ aus der Grafik ermitteln: $P'(10) = -1$ und damit die Gleichung für g mit $g(t) = -t + 29$ aufstellen.

Nullstelle von g berechnen und interpretieren: $0 = -t + 29 \Rightarrow t = 29$. Nach 29 Minuten ist der Druck auf 0 bar gesunken.

(c) **Lösungserwartung:**

Aufgrund der Symmetrieeigenschaften der quadratischen Funktion f kommen für die gleiche Abnahme- und Zunahmegeschwindigkeit nur die Intervalle $[6; 8]$ und $[8; 10]$ für die Lösung in Betracht. Z.B. $f'(7) = 0{,}5$; $f'(9) = -0{,}5$.

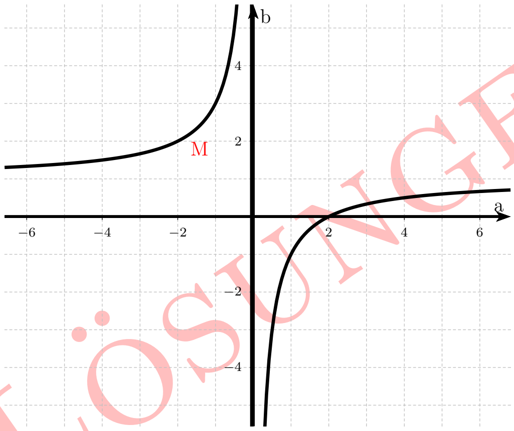
D.h. die Zunahmegeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 7$ ist gleich der Abnahmegeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 9$.

1040 - K7 - KZ, DR - - Teilmenge von $\mathbb{C}$ - Dimensionen Mathematik, Schularbeiten-Trainer 7. Klasse

40. Betrachte im Folgenden jene Menge M aller komplexer Zahlen, bei denen das Produkt aus dem Realteil und dem um 1 verminderten Imaginärteil gleich -2 ist. ____/6

Aufgabenstellung:

(a) Damit eine komplexe Zahl $z = a + b \cdot i$ zu M gehört, muss zwischen a und b ein bestimmter Zusammenhang bestehen. Beschreibe die Abhängigkeit $b(a)$ mithilfe einer Gleichung und stelle die Menge M in der nachfolgenden Gauß'schen Zahlenebene grafisch dar.



(b) Begründe, die Richtigkeit nachfolgender Aussagen:

- Es gibt in M genau eine reelle Zahl z_1.
- Es gibt in M genau eine Zahl z_2, für deren Argument $\varphi_{z_2} = 135°$ gilt.
- Es gibt in M keine Zahl, für deren Betrag $|z| = 1$ gilt.

(c) $\boxed{\text{A}}$ Gib die in (b) angesprochenen Zahlen z_1 und z_2 sowohl in Binomialform $a + b \cdot i$ als auch in Polardarstellung $[r, \varphi]$ an.

Die Zahlen z_1 und z_2 sind (komplexe) Nullstellen einer Polynomfunktion f dritten Grades, deren Graph durch den Punkt $P = (0|-8)$ verläuft. Gib die Gleichung von f an, ermittle aller Extrem- und Wendestellen von f und zeichne den Graphen von f. Erläutere, wie viele (komplexe) Nullstellen eine Polynomfunktion dritten Grades aufweisen kann, veranschauliche die möglichen Fälle mithilfe von Skizzen.

(a) **Lösungserwartung:**

Für alle $z = a + b \cdot i$ mit $z \in M$ gilt:

$a \cdot (b-1) = -2 \qquad | : a \, (a \neq 0)$

$b - 1 = -\frac{2}{a} \qquad | + 1$

$b(a) = -\frac{2}{a} + 1 = \frac{a-2}{a}$

Grafisch Darstellung: siehe oben

(b) **Lösungserwartung:**

- Aus dem Graphen von (a) kannst du ablesen: Nur der Realteil $a = 2$ ergibt den Imaginärteil $b = 0$, d.h.: $z_1 = 2$
- Aufgrund der grafischen Darstellung komplexer Zahlen gilt:
  Wenn für eine komplexe Zahl $z_2 = a + b \cdot i$ mit den Polarkoordinaten r und φ die Gleichung $\varphi = 135°$ gilt, dann befindet sich z_2 im zweiten Quadranten und Real- und Imaginärteil von z_2 müssen die nachfolgende Gleichung erfüllen: $\mathrm{Re}(z_2) = -\mathrm{Im}(z_2)$ bzw. $a = -b$.
  In der Menge M gibt es nur eine Zahl, für die dies zutrifft: $z_2 = -2 + 2i$.
- Wenn für eine komplexe Zahl $z_3 = a + b \cdot i$ die Gleichung $|z_3| = 1$ selten soll, müssten der Realteil a und der Imaginärteil b nachfolgende Gleichung erfüllen: $\sqrt{a^2 + b^2} = 1$
  Berücksichtigung von $b = \frac{a-2}{a}$ liefert:
  $\sqrt{a^2 + \left(\frac{a-2}{a}\right)^2} = 1 \Rightarrow a^2 + \frac{a^2-4a+4}{a^2} = 1 \Rightarrow a^4 + a^2 - 4a + 4 = a^2 \Rightarrow a^4 - 4a + 4 = 0$
  Diese Gleichung hat nun aber keine reelle Lösung.

  Alternative Lösung (grafisch):
  Wenn $|z| = 1$ gilt, dann liegt z in der Gauß'schen Zahlenebene auf einem Kreis mit Radius 1 und Mittelpunkt $(0|0)$. Dies trifft auf keine Zahl $z \in M$ zu.

(c) **Lösungserwartung:**

Um Binomialform $a + b\,i$ und die Polardarstellung $[r|\varphi]$ einer komplexen Zahl z anzugeben, musst du gemäß den entsprechenden Formeln einen Darstellungswechsel von einer symbolischen Darstellung in eine andere symbolische Darstellung vornehmen.

$z_1 = 2 = (2|0°) \qquad\qquad z_2 = -2 + 2\,i = \left(\sqrt{8}|135°\right)$

Da die beiden ersten Nullstellen $z_1 = 2$ und $z_2 = -2 + 2\,i$ lauten und die Polynomfunktion vom Grad 3 ist, gibt es eine dritte Nullstelle: $z_3 = -2-2\,i$. z_3 ist die konjugiert-komplexe Zahl von z_2 (und umgekehrt).

z_2 und z_3 sind nach den Sätzen von Vieta ($z_2 + z_3 = -p$ und $z_2 \cdot z_3 = q$) Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + 4x + 8 = 0$.

Multiplizierst du den Linearfaktor $(x-2)$ mit (x^2+4x+8), so entsteht ein Term/eine Gleichung dritten Grades mit den Lösungen z_1, z_2 und z_3:

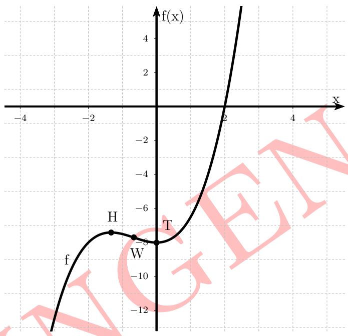
$(x-2)\cdot(x^2+4x+8) = x^3+4x^2+8x-2x^2-8x-16 = x^3+2x^2-16$

Da der Graph der Funktion durch den Punkt $P(0|-8)$ verläuft, muss noch ein entsprechender Faktor a ermittelt werden: $f(x) = a\cdot(x^3+2x^2-16)$

Da $f(0) = -8$ gelten muss, ergibt sich durch Einsetzen:

$-8 = a\cdot(-16) \Rightarrow a = \frac{1}{2}$ und $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + x^2 - 8$

Extremstelle: $T = (0|-8), H = (-\frac{4}{3}|-7{,}41)$ Wendestelle: $W = (-\frac{2}{3}|-7{,}7)$

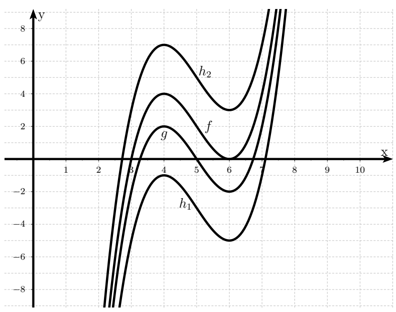


Da komplexe Nullstellen einer Polynomfunktion dritten Grades immer paarweise auftreten, kann eine solche Funkion maximal zwei komplexe Nullstellen haben. Eine Polynomfunktion dritten Grades hat mindestens eine reelle Nullstelle.

h_1 und h_2 haben eine reelle und zwei komplexe Nullstellen.

g hat drei reelle Nullstellen

f hat zwei reelle Nullstellen, wobei $x = 6$ doppelt zu werten ist.



1041 - K7 - VAG2, GL, DR - AG 3.4, AG 3.5, AG 4.2, AG 3.3, AN 3.3, FA 1.4 - Bewegung von zwei Objekten - Dimensionen Mathematik, Schularbeiten-Trainer 7. Klasse

41. Ein Objekt A bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit geradlinig. In einem Plan (Koordinaten in m) befindet es sich um 08:15 Uhr an der Position $P = (-4|-5)$, um 08:20 Uhr in $Q = (6|5)$. ____/8

Ein zweites Objekt B befindet sich anfangs in $R = (2|-3)$ und verlässt diese Position um 08:17 Uhr.

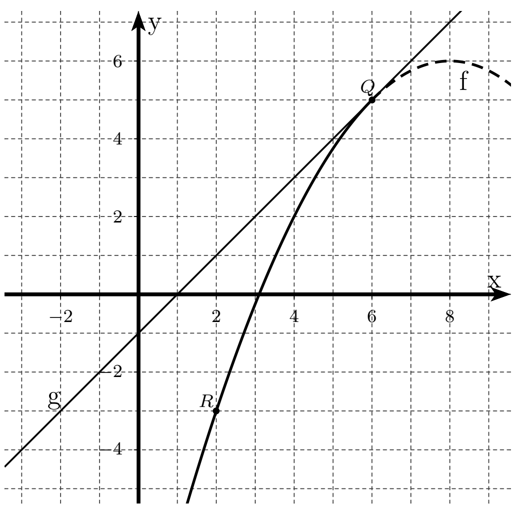
Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Beschreibe die Gerade g, längs der sich das Objekt A im Plan bewegt, sowohl mit einer Parametergleichung als auch durch eine parameterfreie Form.

(b) Für die Lösung einer Aufgabenstellung berechnet eine Person zuerst den Winkel α zwischen den Vektoren $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{PR}$ und anschließend als Lösung der Fragestellung den Wert $a = |\overrightarrow{PR}| \cdot \sin(\alpha)$. Berechne a und gib eine den Lösungsschritten angemessene Fragestellung im Kontext des Beispiels an.

(c) Angenommen, das Objekt B bewegt sich ab 08:17 Uhr ebenfalls geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit. Beschreibe den Weg, den das Objekt B pro Minute zurücklegen muss, damit es nach genau 2 Minuten auf das Objekt A trifft, mit Hilfe eines Vektors.

(d) Angenommen, das Objekt B soll sich längs des Graphen einer Funktion f zweiten Grades bewegen, sodass seine Bewegungsbahn wie unten dargestellt „knickfrei“ im Punkt Q in die Bewegungsbahn des Objekts A übergeht. Ermittle die Gleichung der Funktion f.



(a) **Lösungserwartung:**

Der Vektor $\overrightarrow{PQ}$ beschreibt die geradlinige Bewegung des Objekts A und kann vereinfacht werden. $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Parameterform von $g: X = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Parameterfreie Form von $g: x - y = 1$ bzw. $y = x - 1$

(b) **Lösungserwartung:**

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PQ}| \cdot |\overrightarrow{PR}|} = \frac{\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{200} \cdot \sqrt{40}} = \frac{4}{\sqrt{20}} \Rightarrow \alpha = 26{,}57°$$
$$a = |\overrightarrow{PR}| \cdot \sin(\alpha) = 2{,}828 = 2 \cdot \sqrt{2} \Rightarrow a = 2 \cdot \sqrt{2}$$

Die Formel $a = |\overrightarrow{PR}| \cdot \sin(\alpha)$ kann zur Abstandberechnung herangezogen werden und die entsprechende Fragestellung lautet: Wie groß ist der Abstand a des Punktes R von der Geraden g?

(c) **Lösungserwartung:**

Das Objekt A startet um 8:15 in P und ist um 8:20 in Q. Es legt die Strecke $\bar{PQ} = \sqrt{200} = 10 \cdot \sqrt{2}$ in 5 Minuten zurück- Es bewegt sich also mit einer Geschwindigkeit von $2 \cdot \sqrt{2}$/min. D.h. um 8:19 Uhr befindet sich Objekt A vier Minuten nach dem Start an der Position Z. Dabei legt es in diesen vier Minuten 4-mal eine Strecke mit Länge $2 \cdot \sqrt{2}$ in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zurück:

$$Z = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix} + 4 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Der Vektor $\overrightarrow{RZ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ beschreibt den Weg des Objekts B in 2 Minuten, der Vektor $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ für eine Minute.

(d) **Lösungserwartung:**

Für eine Funktion f vom Grad 2 gilt: $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ und $f'(x) = 2a \cdot x + b$.

$$\begin{array}{llll} I: & f(2) = -3 & -3 = 4a + 2b + c, & \text{da der Graph von f durch R=(2|-3) verläuft.} \\ II: & f(6) = 5 & 5 = 36a + 6b + c, & \text{da der Graph von f durch Q=(6|5) verläuft.} \\ III: & f'(6) = 1 & 1 = 12a + b + c, & \text{da f die Gerade g mit k=1 im Punkt Q berührt.} \end{array}$$

$4 = -16a \Rightarrow a = -\frac{1}{4}, b = 4, c = -10 \quad f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4x - 10$

1042 - K6 - BSW - WS 1.1, WS 1.2, WS 1.4, WS 1.3 - Notendurchschnitt bei Mathematikschularbeit - Dimensionen Mathematik, Schularbeiten-Trainer 7. Klasse

42. Sechs Schüler/-innen der Klasse A und fünf Schüler/-innen der Parallelklasse B schreiben gleichzeitig dieselbe Mathematikschularbeit nach. In Tabelle 1 sind die von den Schülern und Schülerinnen dabei erreichten Punktwerte aufgelistet. Die maximale erreichbare Punktezahl beträgt 100. ____/8

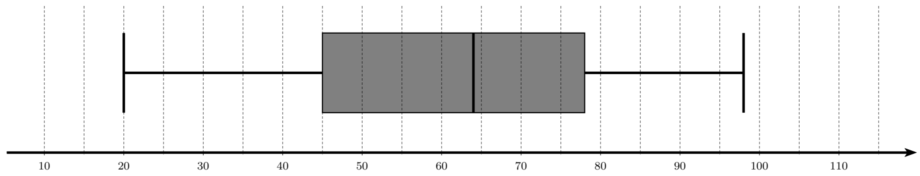
Die jeweilige Note ergibt sich aus dem angegebenen Notenschlüssel (siehe Tabelle 2).

Tabelle 1	
Klasse A	45,42,59,98,75,76
Klasse B	20,95,78,64,51

Tabelle 2					
Punkte	0 – 47	48 – 61	62 – 77	78 – 91	92 – 100
Note	5	4	3	2	1

Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Veranschauliche die von den insgesamt 11 Schülern und Schülerinnen erreichten Punktewerte mit Hilfe eines Kastenschaubildes.



(b) Das arithmetische Mittel der von den Schülern und Schülerinnen der Klasse A erreichten Punktewerte wird mit $\bar{x}_A$ bezeichnet, jenes bezüglich der Klasse B mit $\bar{x}_B$, das arithmetische Mittel aller 11 Punktewerte hingegen mit $\bar{x}_{\text{ges}}$.

Offensichtlich gilt nicht: $\bar{x}_{\text{ges}} = \frac{\bar{x}_A+\bar{x}_B}{2}$. Erläutere, unter welchen Bedingungen die gegebene Gleichung gelten würde, und gib eine Formel an, die den Zusammenhang zwischen den drei arithmetischen Mitteln im gegebenen Fall korrekt beschreibt.

(c) Eine Person argumentiert, dass die Schüler/-innen der Klasse B in der Nachschularbeit einen besseren Notendurchschnitt erreicht haben und somit besser abgeschnitten haben als jene der Klasse A. Eine andere Person widerspricht dieser Aussage. Erläutere, mit welchen Argumenten die zweite Person ihren Standpunkt untermauern könnte.

Kläre auf: Wie ist es möglich, für zwei einander widersprechende Aussagen jeweils anscheinend stichhaltige Argumente anführen zu können? Welcher Denkfehler liegt diesem scheinbaren Widerspruch zu Grunde?

(d) Begründe die Richtigkeit nachfolgender Aussage anhand der vorliegenden Daten durch konkrete Berechnungen:

„Es ist möglich, bei anderen Festlegungen des Zusammenhangs zwischen erreichten Punkten und zugeordneter Note zu voneinander abweichenden Aussagen über das ‘mittlere Abschneiden‘ der beiden Klassen zu gelangen, wenn man auf der Basis der beiden arithmetischen Mittel der Noten argumentiert.“

(a) **Lösungserwartung:**

geordnete Punkteliste: $20, 42, 45, 51, 59, 64, 75, 76, 78, 95, 98$

$q_1 = 45$, Median $= q_2 = 64, q_3 = 78$

Grafische Lösung: siehe oben

(b) **Lösungserwartung:**

$\bar{x}_A = 65{,}83 \quad \bar{x}_B = 61{,}6 \quad \bar{x}_{\text{ges}} = 63{,}91$

Die Gleichung $\bar{x}_{\text{ges}} = \frac{\bar{x}_A + \bar{x}_B}{2}$ würde nur dann gelten, wenn die Anzahl der Schüler/-innen der beiden Klassen gleich groß wäre.

Im gegebenen Fall gilt 63,91 > 63,72 also $\bar{x}_{\text{ges}} > \frac{\bar{x}_A + \bar{x}_B}{2}$, da der Klasse B, trotz geringerer Anzahl von Schülern und Schülerinnen, dieselbe Gewichtung wie der Klasse A zukommt.

Die korrekte Zusammenhang der drei Mittelwerte lautet in diesem Beispiel: $\bar{x}_{\text{ges}} = \frac{6}{11} \cdot \bar{x}_A + \frac{5}{11} \cdot \bar{x}_B$

(c) **Lösungserwartung:**

	erreichte Note	Notendurchschnitt
Klasse A	$5, 5, 4, 1, 3, 3$	3,5
Klasse B	$5, 1, 2, 3, 4$	3,0

Während die erste Person nur auf den Notendurchschnitt achtet, betrachtet die zweite den Mittelwert der erreichten Punkte.

Klasse B besitzt, was die Punkte betrifft, einen Ausreißer nach unten, der den Punktedurchschnitt stark nach unten korrigiert. So ist es möglich, auch wenn die durchschnittliche Punkteanzahl der Klasse B unter der der Klasse A liegt, einen besseren Notendurchschnitt zu erreichen.

(d) **Lösungserwartung:**

Der gegebene Punkteschlüssel liefert also für die Klasse A einen Notendurchschnitt von 3,5 und für die Klasse B einen Notendurchschnitt von 3,0.

Ändert man die Zuordnung Punkte - Note z.B. folgendermaßen,

Tabelle 2					
Punkte	0 – 40	41 – 55	56 – 70	71 – 85	86 – 100
Note	5	4	3	2	1

	erreichte Note	Notendurchschnitt
Klasse A	$4, 4, 3, 1, 2, 2$	2,67
Klasse B	$5, 1, 2, 3, 4$	3,0

so erreicht Klasse A diesmal mit 2,67 einen besseren Notendurchschnitt als Klasse B mit 3.

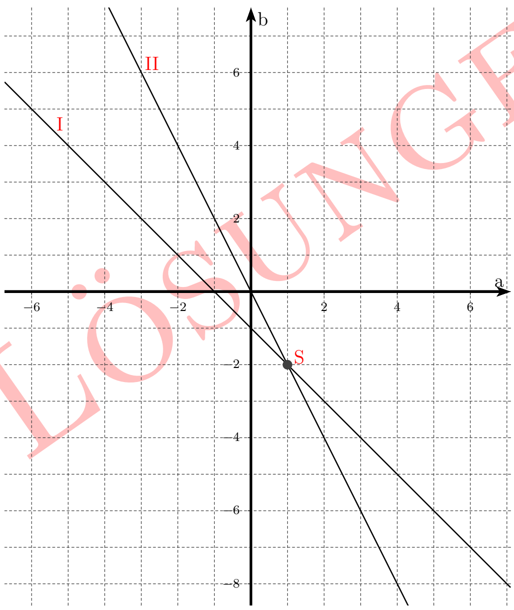
1043 - K7 - GL, DR - AG 2.5, FA 4.2, FA 4.3, AN 3.3, FA 1.1 - Gleichungssysteme interpretieren - Dimensionen Mathematik, Schularbeiten-Trainer 7. Klasse

43. Gegeben ist das nachfolgende Gleichungssystem: ____/8

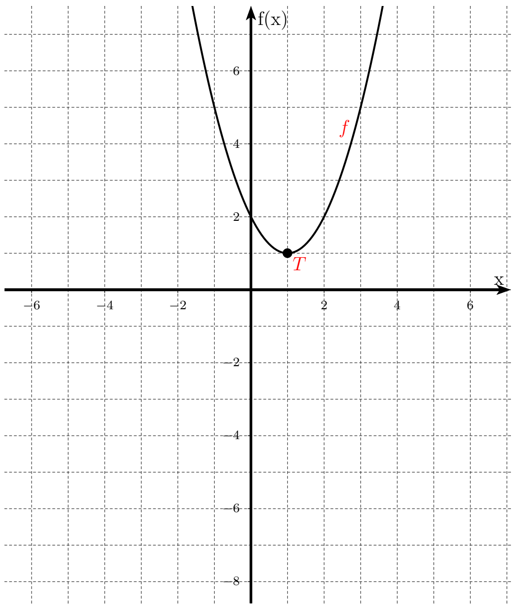
$$I: a + b = -1$$
$$II: 2a + b = 0$$

Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Löse das Gleichungssystem rechnerisch und grafisch.



(b) Die gegebenen Gleichungen I und II können mit Eigenschaften einer Polynomfunktion f in Verbindung gebracht werden, wobei die Gleichung der Funktion f von der Form $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + 2$ ist. Die erste Gleichung beschreibt den Funktionswert von f an einer bestimmten Stelle, die zweite beschreibt den Wert von f' an derselben Stelle. Erläutere, um welche Stellen und Funktionswerte es sich handelt, und zeichne den Graphen der Funktion. Erläutere den Zusammenhang zwischen dem Funktionsgraphen und den gegebenen Gleichungen I und II.



(c) Angenommen, die erste Gleichzung I wird durch die Gleichung $4a+2b=1$ ersetzt.

Gib an, welche Auswirkung diese Änderung auf die Lösungsmenge des Gleichungssystems hat. Interpretiere den Sachverhalt einerseits geometrisch, anderseits anhand der durch die Gleichungen beschriebenen Eigenschaften der Funktion f. Nimm dabei an, dass die Gleichung $4a + 2b = 1$ den Funktionswert von f an einer bestimmten Stelle beschreibt. Argumentiere ausführlich.

(a) **Lösungserwartung:**

Lösung des Gleichungssystems: $b = -2, a = 1$

Beide Gleichungen können als lineare Funktionen der Form $y = kx + d$ dargestellt werden.

$$I : y = -a - 1$$
$$II : y = -2a$$

Der Schnittpunkt S der beiden Geraden hat die Koordinaten $S = (1|-2)$.

Grafische Lösung: siehe oben.

(b) **Lösungserwartung:**

$a + b = -1$ entspricht der Gleichung $f(1) = 1$

$2a + b = 0$ entspricht der Gleichung $f'(1) = 0$

Die Gleichung von f lautet: $f(x) = x^2 - 2x + 2$

Grafische Lösung: siehe oben.

(c) **Lösungserwartung:**

Lösungsmenge: $L = \{\}$

Interpretiert man beide Gleichung als Gleichungen linearer Funktionen, so erkennt man, dass die zugehörigen Geraden disjunkt parallel sind.

$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + 2$

Ersetzt man in dieser Gleichung x durch 2 und $f(x)$ durch 3, was der Bedingung $f(2) = 3$ entspricht, erhält man die Gleichung: $3 = 4a + 2b = 1$

$f'(x) = 2a \cdot x + b$

Ersetzt man in dieser Gleichung x durch 1 und $f'(x)$ durch 0, was der Bedingung $f'(1) = 0$ entspricht, erhält man die Gleichung $0 = 2a + b$

- Da der Graph einer möglichen Funktion f durch die Punkte $P = (0|2)$ und $Q = (2|3)$ verlaufen soll, zwei Punkte mit unterschiedlichen y-Koordinaten, so kann der Parabelscheitel, in dem die Tangentensteigung 0 beträgt, nicht $S = (1|y_s)$ lauten.
- Formt man die Gleichung $II: 2a + b = 0$ um in $2a + b + 1 = 1$ und multipliziert diese mit 2, so erhält man $4a + 2b + 2 = 2$. Das entspricht der Bedingung $f(2) = 2$, was im Widerspruch zur Definition einer Funktion steht, die jedem x-Wert genau einen y-Wert zuordnet.

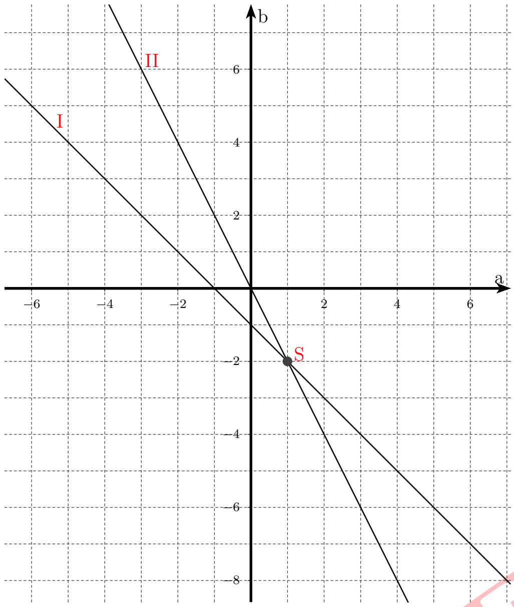
1044 - K7 - GL, DR - AG 2.5, FA 4.2, FA 4.3, AN 3.3, FA 1.1 - Gleichungssysteme interpretieren - Dimensionen Mathematik, Schularbeiten-Trainer 7. Klasse

44. Gegeben ist das nachfolgende Gleichungssystem: ____/8

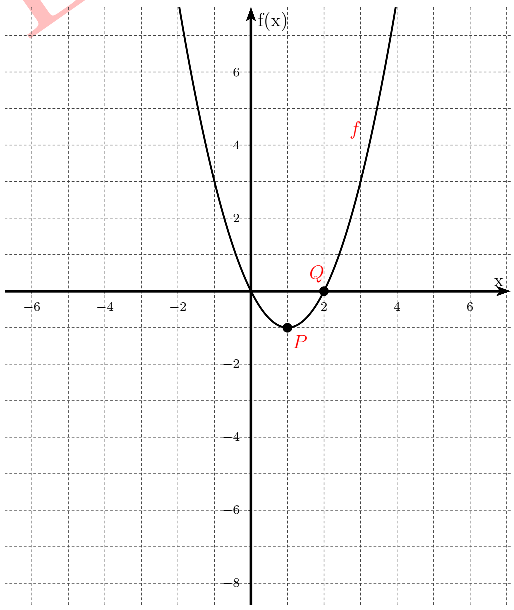
$$I: a + b = -1$$
$$II: 4a + 2b = 0$$

Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Löse das Gleichungssystem rechnerisch und grafisch.



(b) Die gegebenen Gleichungen I und II können mit Eigenschaften einer Polynomfunktion f in Verbindung gebracht werden, wobei die Gleichung der Funktion f von der Form $f(x) = a\cdot x^2 + b\cdot x$ ist. Die Gleichungen beschreiben die Funktionswerte von f an zwei bestimmten Stellen. Erläutere, um welche Stellen und Funktionswerte es sich handelt, und zeichne den Graphen der Funktion. Erläutere den Zusammenhang zwischen dem Funktionsgraphen und den gegebenen Gleichungen I und II.



(c) Angenommen, die Gleichung I wird durch die Gleichung $2a + b = 1$ ersetzt. Gib an, welche Auswirkung diese Änderung auf die Lösungsmenge des Gleichungssystems hat. Interpretiere den Sachverhalt einerseits geometrisch, anderseits anhand der durch die Gleichungen beschriebenen Eigenschaften der Funktion f. Nimm dabei an, dass die Gleichung $2a + b = 1$ den Wer der ersten Ableitungsfunktion von f an einer bestimmten Stelle beschreibt. Argumentiere ausführlich.

(a) **Lösungserwartung:**

Lösung des Gleichungssystems: $b = -2, a = 1$

Beide Gleichungen können als lineare Funktionen der Form $y = kx + d$ dargestellt werden.

$$I : b = -a - 1$$
$$II : b = -2a$$

Der Schnittpunkt S der beiden Geraden hat die Koordinaten $S = (1|-2)$.

Grafische Lösung: siehe oben.

(b) **Lösungserwartung:**

$a + b = -1$ entspricht der Gleichung $f(1) = -1$

$4a + 2b = 0$ entspricht der Gleichung $f(2) = 0$

Die Gleichung von f lautet: $f(x) = x^2 - 2x$

Grafische Lösung: siehe oben.

(c) **Lösungserwartung:**

Lösungsmenge: $L = \{\}$

Interpretiert man beide Gleichung als Gleichungen linearer Funktionen, so erkennt man, dass die zugehörigen Geraden disjunkt parallel sind.

$f'(x) = 2a \cdot x^2 + b$

Ersetzt man in dieser Gleichung x durch 1 und $f'(x)$ durch 1, was der Bedingung $f'(1) = 1$ entspricht, erhält man die Gleichung: $2a + b = 1$

$f'(x) = 2a \cdot x + b$

Ersetzt man in dieser Gleichung x durch 1 und $f'(x)$ durch 1, was der Bedingung $f'(1) = 1$ entspricht, erhält man die Gleichung $1 = 2a + b$

Formt man Gleichung $II : 4a + 2b = 0$ durch eine Division durch 2 um in $2a + b = 0$, was der Bedingung $f'(1) = 0$ entspricht, so würde die

Ableitungsfunktion f' einem x-Wert mehrere Tangensteigungen zuordnen, was der Definition einer Funktion widerspricht.

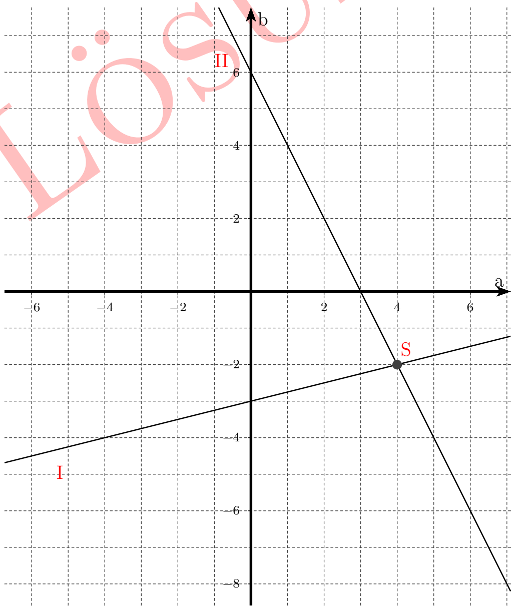
1045 - K6 - GL, VAG2 - AG 2.5, AG 3.2, AG 3.3 - Gleichungssysteme interpretieren - Dimensionen Mathematik, Schularbeiten-Trainer 7. Klasse

45. Gegeben ist das nachfolgende Gleichungssystem: ____/8

$$I: -t + 4\,s = -12$$
$$II: 2\,t + s = 6$$

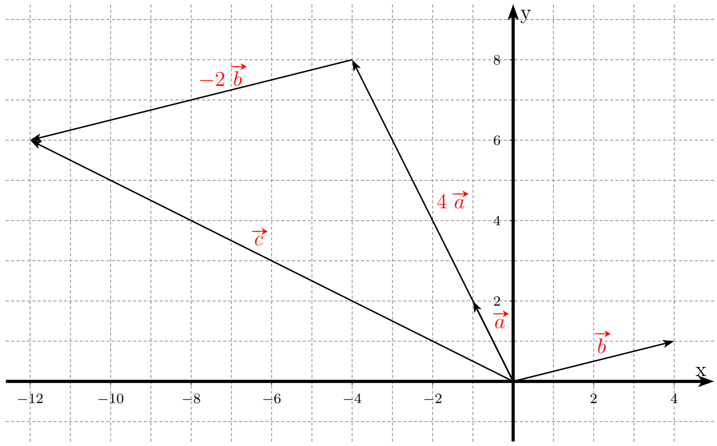
Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Löse das Gleichungssystem rechnerisch und grafisch.



(b) Interpretiere das gegebene Gleichungssystem vor dem Hintergrund der Gleichung $t\cdot\vec{a}+s\cdot\vec{b}=\vec{c}$, sodass die Unbekannten t und s als Skalare auftreten, mit denen zweidimensionale Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ multipliziert werden.
Gib die Koordinaten der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ so an, dass die Gleichungen I und II (in der gegebenen Reihenfolge) durch komponentenweises Aufspalten der Vektorengleichung $t\cdot\vec{a}+s\cdot\vec{b}=\vec{c}$ entstehen, und erläutere

den durch die Gleichung $t_1 \cdot \vec{a} + s_1 \cdot \vec{b} = \vec{c}$ beschriebenen Sachverhalt grafisch.

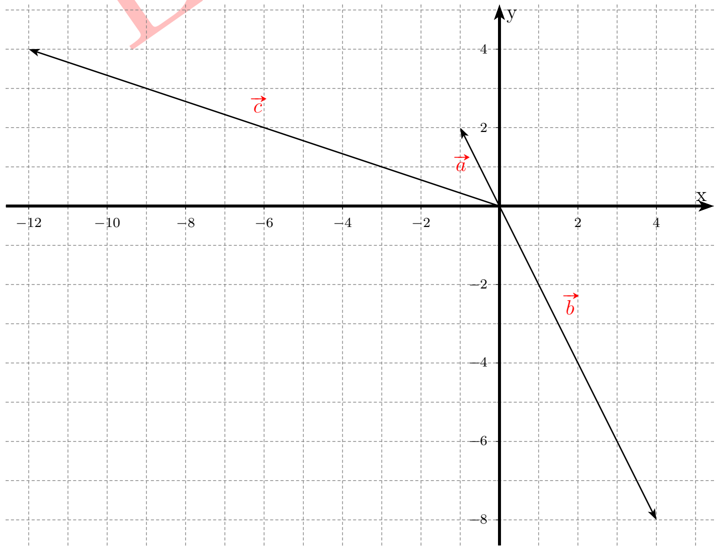


(c) Angenommen, die Gleichung II wird durch die Gleichung $2 \cdot t + u \cdot s = v$ ersetzt.

Bestimme, welche Bedingungen die Werte von u und v erfüllen müssen, damit das Gleichungssystem

- nicht lösbar
- mehrdeutig lösbar

ist, und interpretiere den jeweiligen Sachverhalt anhand der gegebenen Vektorgleichung mit den darin vorkommenden Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$. Fertige dazu entsprechende Zeichnungen an.



(a) **Lösungserwartung:**

Lösung des Gleichungssystems: $s = -2, t = 4$

Interpretiert man beide Gleichungen als Gleichungen linearer Funktionen, so erhält man als Schnittpunkt den Punkt $S = (4|-2)$.

Grafische Lösung: siehe oben.

(b) **Lösungserwartung:**

$t \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} = \vec{c}$ $\qquad t \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix}$

Koordinatenweise betrachtet ergeben sich die Gleichungen:

$$I : t \cdot a_x + s \cdot b_x = c_x$$
$$II : t \cdot a_y + s \cdot b_y = c_y$$

Vergleicht man diese beiden GLeichungen mit den gegebenen Gleichungen, so erhält man für die drei Vektoren folgende Ergebnisse:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Somit gilt folgende Gleichung: $4 \cdot \vec{a} - 2 \cdot \vec{b} = \vec{c}$. Der Vektor $\vec{c}$ wird als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dargestellt.

Grafische Lösung: siehe oben.

(c) **Lösungserwartung:**

Dieses Gleichungssystem ist nicht eindeutig lösbar, wenn die zugehörigen Geraden parallel zueinander verlaufen. Dies ist dann der Fall, wenn die beiden linken Seiten der Gleichungen, deren Koeffizienten die Koordinaten der Normalvektoren festlegen, Vielfache voneinander sind und die Normalvektoren der Geraden damit parallel zueinander liegen. Somit ergibt sich: $u = -8$.

Ersetzt man v durch den Wert 24, womit die zweite Gleichung das -2-Fache der ersten Gleichung ist, liegen die beiden Geraden identisch parallel zueinander, sonst disjunkt parallel. Daraus folgt:

Das Gleichungssystem ist:

- nicht lösbar, wenn $u = -8$ und $v \neq 24$.
- mehrdeutig lösbar, wenn $u = -8$ und $v = 24$.

* $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -12 \\ 4 \end{pmatrix}$
  Der Vektor $\vec{c}$ kann nicht als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dargestellt werden. Haben die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die gleiche Richtung, so kann eine Linearkombination ebenfalls nur diese Richtung haben.
* $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -12 \\ 24 \end{pmatrix}$
  Der Vektor $\vec{c}$ kann auf beliebig viele Arten als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dargestellt werden.
  Zum Beispiel: $4 \cdot \vec{a} - 2 \cdot \vec{b} = \vec{c}$ oder $-8 \cdot \vec{a} - 5 \cdot \vec{b} = \vec{c}$

Grafische Lösung: siehe oben.

1046 - K7 - GL, VAG2, DR - AN 3.3, AG 2.3, AG 2.5 - Polynomfunktion zweiten Grades - Dimensionen Mathematik, Schularbeiten-Trainer 7. Klasse

46. Gegeben ist eine Polynomfunktion f zweiten Grades mit $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$, $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$. ____/8

Aufgabenstellung:

(a) „Unabhängig von der Wahl der Parameter a und b weist f eine bestimmte Nullstelle auf.“

Weise die Richtigkeit dieser Aussage nach.

(b) Begründe sowohl durch Rechnung als auch verbal anhand des Graphen der Funktion f, dass nachfolgender Schluss korrekt ist:

Aus $a > 0$ und $f'(0) > 0$ folgt, dass der Extrempunkt von f sowohl eine negative x-Koordinate als auch eine negative y-Koordinate hat.

(c) Bestimmte Eigenschaften der Funktion f können mit Gleichungen und den Parametern a, b in Verbindung gebracht werden.

Die Gleichung G1	bringt zum Ausdruck, dass der Graph von f durch den Punkt $P = (2\|0)$ verläuft.
Die Gleichung G2	bringt zum Ausdruck, dass die Tangente an den Graphen von f im Punkt $Q = (-1\|y_Q)$ den Anstieg 4 aufweist.
Die Gleichung G3	bringt zum Ausdruck, dass die Tangente an den Graphen von f im Punkt $R = (1\|y_R)$ den Anstieg 4 aufweist.
Die Gleichung G4	bringt zum Ausdruck, dass die Tangente an den Graphen von f im Punkt $R = (1\|y_R)$ den Anstieg 0 aufweist.

Gib die Gleichungen G1, G2, G3 und G4 an.

(d) Betrachte im Weiteren nachfolgende Gleichungssystem A,B und C:

A besteht aus den Gleichungen G1 und G2, B besteht aus den Gleichungen G1 und G3 und C besteht aus den Gleichungen G1 und G4.

Löse die drei Gleichungssysteme rechnerisch und veranschauliche den jeweiligen Lösungsfall grafisch. Interpretiere den jeweiligen Lösungsfall auch anhand der durch die Gleichungen beschriebenen Eigenschaften hinsichtlich der Funktion f. Argumentiere ausführlich.

(a) **Lösungserwartung:**

$0 = a \cdot x^2 + b \cdot x$

$0 = x \cdot (ax + b) \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -\frac{b}{a}$ Falls $b = 0$, dann gilt: $x_1 = x_2 = 0$.

Unabhängig von a und b hat diese Funktion immer die Nullstelle 0.

(b) **Lösungserwartung:**

$f'(x) = 2ax + b$ Aus $f'(0) = b$ folgt: $b > 0$.

$0 = 2ax + b \Rightarrow x = -\frac{b}{2a}$, wobei $-\frac{b}{2a} < 0$, da $a > 0$ und $b > 0$.

$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a \cdot \frac{b^2}{4a^2} + b\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} = -\frac{b^2}{4a} < 0$, da $a > 0$.

Somit hat der Extrempunkt $E = \left(-\frac{b}{2a} \middle| -\frac{b^2}{4a}\right)$ von f sowohl eine negative x-, als auch eine negative y-Koordinate.

(c) **Lösungserwartung:**

$G_1 : f(2) = 0 :$ $0 = 4a + 2b$

$G_2 : f'(1) = 4 :$ $4 = -2a + b$

$G_3 : f'(1) = 4 :$ $4 = 2a + b$

$G_4 : f'(1) = 0 :$ $0 = 2a + b$

(d) **Lösungserwartung:**

In diesem Teil der Aufgabe ist 1 Punkt gemeinsam für die rechnerische Lösung und grafische Veranschaulichung zu vergeben.

A G_1 und G_2

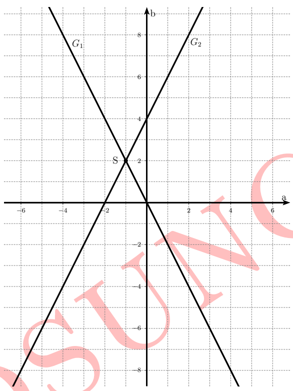
Addiert man das 2-Fache der zweiten Gleichung zur ersten, erhält man $8 = 4b$ bzw. $b = 2$.

Ersetzt man in einer der beiden Gleichungen b durch 2, so ergibt sich: $a = -1$.

Die zugehörigen Geraden haben also den Schnittpunkt $S = (-1|2)$.

Somit kann mit den Bedingungen $f(2) = 0$ und $f'(-1) = 4$ die Funktion f eindeutig festgelegt werden.

$f(x) = -x^2 + 2x$



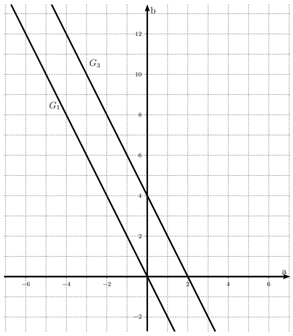
B G_1 und G_3

Subtrahiert man das 2-Fache der zweiten Gleichung von der ersten, erhält man mit $-8 = 0$ eine falsche Aussage.

Das Gleichungssystem hat also keine Lösung. Die zugehörigen Geraden sind disjunkt parallel.

Multipliziert man die zweite Gleichung mit 2, so erhält man: $8 = 4a+2b$, was der Bedingung $f(2) = 8$ entspricht. Somit würde die Funktion f dem x-Wert 2 mehrere y-Werte zuordnen, was der Definition einer Funktion widerspricht.

Außerdem hat f die Nullstelle $x_1 = 0$ und wegen G_2 die Nullstelle $x_2 = 2$. Somit kann die Extremstelle nur bei $x = 1$ liegen, was im Widerspruch zu G_3 steht.



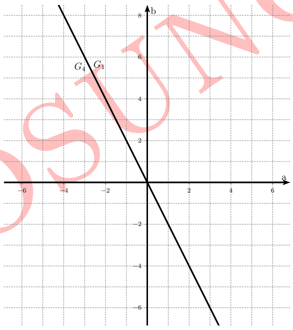
C G_1 und G_4

Subtrahiert man das 2-Fache der zweiten Gleichung von der ersten, erhält man mit $0 = 0$ eine wahre Aussage. Das Gleichungssystem sit also nicht eindeutig lösbar.

Die zugehörigen Geraden sind identisch parallel.

Multipliziert man die zweite Gleichung mit 2, so erhält man die erste Gleichung. Mit einer einzigen Bedingung kann diese Funktion nicht eindeutig festgelegt werden.

Da die beiden Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ lauten, liefert G_4 keine „neue“ Bedingung mehr.



1047 - K5 - MZR - Gleitkommadarstellung - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

47. Die Entfernung Erde - Mond beträgt zirka 400 00 km. Eine Seite deines Mathematikbuchs ist ungefähr 40 μm dick. ____/0

    Schreibe beide Angaben in Gleitkommadarstellung in der Einheit Meter und gib an, wie viele Milliarden Seiten des Mathe-Buchs zwischen Erde und Mond passen!

    Lösungserwartung:

    400 000 km$= 4 \cdot 10^8$ m; 40 μm$= 4 \cdot 10^{-5}$; Verhältnis: $10^{13} \Rightarrow$ 10 000 Milliarden Seiten

---

1048 - K5 - MZR - Gleitkommadarstellung - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

48. Rechne in Gleitkommadarstellung: der Durchmesser eines H-Atoms beträgt 0,000 000 05 mm. Wie viele H-Atome muss man für eine Länge von 1 m aneinanderreihen? ____/0

    0,000 000 05 mm$= 5 \cdot 10^{-11}$ m; $1 : 5 \cdot 10^{-11} = 2 \cdot 10^{10}$ Atome

---

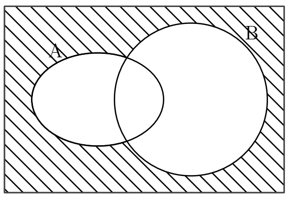
1049 - K5 - MZR - Gleitkommadarstellung - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

49. Zeige mithilfe von VENN-Diagrammen die deMorgan'sche Regel: ____/0

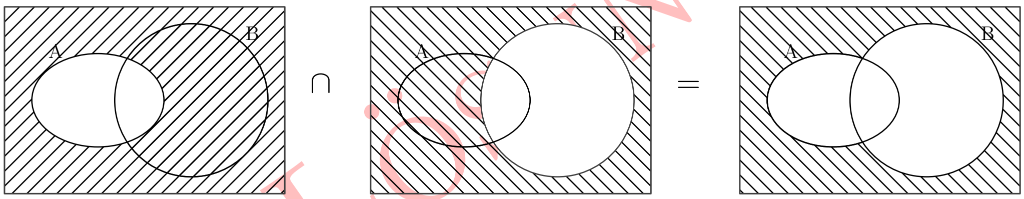
$$\neg(A \cup B) = \neg A \cap \neg B$$

LÃ¶sungserwartung:

$\neg(A \cup B) =$



$\neg A \cap \neg B$



1050 - K5 - MZR - Wahrheitstafel - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

50. Zeige mithilfe einer Wahrheitstafel: $a \Rightarrow b$ ist äquivalent zu $\neg a \vee b$ ____/0

Lösungserwartung:

a	b	$a \Rightarrow b$	$\neg a$	$\neg a \vee b$
w	w	w	f	w
w	f	f	f	f
f	w	w	w	w
f	f	w	w	w

1051 - K5 - MZR - Wahrheitstafel - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

51. Gegeben ist die Aussage: $\forall a \in \mathbb{R}: \ -a \leq 0$ ____/0

(a) Formuliere die Aussage in Worten.

(b) Gib die Negation der Aussage formal und in Worten an. Sind beide Aussagen wahr oder falsch? Begründe!

Lösungserwartung:

(a) Für alle reellen Zahlen a gilt: $-a$ ist kleiner oder gleich null.

(b) $\exists a \in \mathbb{R}: \ -a > 0 \Rightarrow$ Es gibt reelle Zahlen a für die $-a$ positiv ist.

Die gegebene Aussage ist falsch, weil z.B. $-(-3) = 3 > 0$. Die Negation ist richtig.

1052 - K5 - MZR - Fermat-Zahlen - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

52. Zahlen der Form $F_n = 2^{2^n}+1$ nennt man Fermat-Zahlen. Zeige, dass F_3 Primzahl ist und dass F_5 durch 641 teilbar ist. ____/0

Lösungserwartung:

$F_3 = 2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257$, da $\sqrt{257} \approx 16$ müssen alle Primzahlen < 16 als Teiler ausgeschlossen werden: 257 ist nicht durch 2, 3, 5, 7, 11 und 13 teilbar und daher Primzahl.

$F_5 = 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297$ ist durch 641 teilbar, weil $4\,294\,967\,297 : 641 = 6\,700\,417$

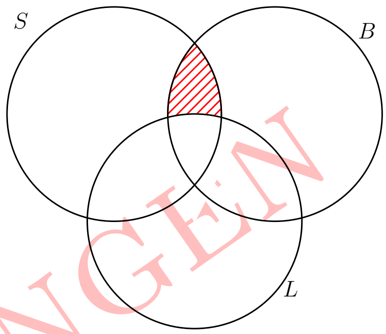
1053 - K5 - MZR - VENN-Diagramm - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

53. Im gegebenen Diagramm ist S die Menge der SchifahrerInnen, B die Menge der SnowboarderInnen und L die Menge der LangläuferInnen. ____/1 K5 - MZR

Kennzeichne (schraffiere) in diesem Diagramm die Menge $(S \cap B)\backslash L$ und interpretiere diese Menge.

Lösungserwartung:

Die gesucht Menge $(S \cap B)\backslash L$ beschreibt jene SportlerInnen, die sowohl schifahren als auch snowboarden, aber nicht langlaufen.



1054 - K5 - MZR - Terme vereinfachen - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

54. Vereinfache soweit wie möglich: ____/0 K5 - MZR

$(3x-5)(3x+5)+(4x-1)^2-(5x+2)^2 =$

Lösungserwartung:

$= 9x^2 - 25 + 16x^2 - 8x + 1 - (25x^2 + 20x + 4) = -28x - 28$

1055 - K5 - MZR - Polynomdivision - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

55. Führe die Division aus: ____/0

$(4x^3 - 4x^2 - 3x + 3) : (x - 1) =$

Lösungserwartung:

$= 4x^2 - 3$

1056 - K5 - MZR - Terme - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

56. Berechne und gib die Definitionsmenge an: ____/0

$$\frac{3}{3x^2 - x^3} - \frac{1}{9 - 3x} - \frac{1}{x^2} =$$

Lösungserwartung:

Die Definitionsmenge: einer der Nenner gleich null bei $x = 0$ und $x = 3 \Rightarrow$

$D = \mathbb{R} \backslash \{0; 3\}$

gemeinsamer Nenner: $3 \cdot x^2 \cdot (3 - x) \Rightarrow$ Lösung: $\frac{1}{3x}$

1057 - K5 - MZR - Term vereinfachen - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

57. Vereinfache den Term so weit wie möglich: ____/0

$$\frac{5x^2}{3x2y} : \frac{10x}{3xy + 2y^2} =$$

Lösungserwartung:

$$= \frac{5x^2 \cdot y \cdot (3x + 2y)}{(3x + 2y) \cdot 10x} = \frac{xy}{2} \text{ für } x \neq 0, y \neq 0 \text{ und } 3x \neq -2y$$

1058 - K5 - MZR - Harmonisches Mittel - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

58. Der Term $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ gibt das harmonische Mittel der Zahlen a und b an. ____/0

(a) Berechne das harmonische Mittel für $a = 3$ und $b = 4$.

(b) Schreibe den gegebenen Term als einfachen Bruch.

Lösungserwartung:

(a) $\frac{24}{7}$

(b) $\frac{2ab}{a+b}$

1059 - K5 - MZR - Ausflugskosten - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

59. Die Kosten K für den Ausflug (Bus und Picknick) sollen auf alle y Teilnehmer der Gruppe gleichmäßig aufgeteilt werden. Leider sind 2 Teilnehmer krank geworden und können nicht am Ausflug teilnehmen. ____/0

Gib eine Formel für den Kostenbeitrag B an, den jede am Ausflug teilnehmende Person zahlen muss. Gib eine sinnvolle Grundmenge für den Term an und bestimme die Definitionsmenge.

Lösungserwartung:

$B(y) = \frac{K}{y-2}$

B hängt von der Anzahl y der TeilnehmerInnen ab, daher: Grundmenge $\mathbb{N}$, Definitionsmenge: $\mathbb{N}\backslash\{2\}$. Sinnvoll wäre auch nur die Menge $\mathbb{N} > 2$ zu betrachten, da sonst gar kein Ausflug zustande kommt.

1060 - K5 - GL - Lösung von Gleichung - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

60. Gib die Lösung der Gleichung $(x-2)\cdot(x+3)\cdot(x-5) = 0$ an und begründe, warum du die Lösungen ohne weitere Umformungen sofort angeben kannst. ____/0

Lösungserwartung:

Lösung über den Produkt-Null-Satz: Mindestens ein Faktor (eine Klammer) muss null sein. Daher können die Klammerausdrücke einzeln null gesetzt werden: $x_1 = 2, x_2 = -3, x_3 = 5$

1061 - K5 - GL - Wurzelziehen - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

61. Löse die Gleichung $(3x-7)^2 = (1+x)^2$ durch korrektes Wurzelziehen (d.h. ohne Verwendung einer Lösungsformel). ____/0

Lösungserwartung:

$3x - 7 = \pm(1 + x)$

1. Fall: $3x - 7 = 1 + x \Rightarrow x_1 = 4$

2. Fall: $3x - 7 = -(1 + x) \Rightarrow x_2 = \frac{3}{2}$

1062 - K5 - GL - Museumseintritt - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

62. Der Eintritt ins Museum kostet 2,50 € für Erwachsene und 1,50 € für Jugendliche. Die Führung kostet extra 1,50 € pro Erwachsene und 0,75 € pro Jugendlichem. Eine Reisegruppe zahlt 42 € für Eintritt und 24 € für die Führung. ____/0

Berechne aus wie viele Erwachsenen und wie vielen Jugendlichen die Gruppe besteht.

Lösungserwartung:

$e\dots$ Anzahl der Erwachsenen, $j\dots$ Anzahl der Jugendlichen

$$\begin{aligned} I:&\ 2{,}50 \cdot e + 1{,}50 \cdot j = 42 \\ II:&\ 1{,}50 \cdot e + 0{,}75 \cdot j = 24 \end{aligned}$$

Das Lösen des Gleichungssystems führt auf $e = 12$ und $j = 8$, die Gruppe besteht daher aus 12 Erwachsenen und 8 Jugendlichen

---

1063 - K5 - GL - Kehrwert - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

63. Addiert man 1 zum Kehrwert einer positiven Zahl, so erhält man wieder diese Zahl. Wie lautet diese Zahl? ____/0

Lösungserwartung:

$x \ldots$ positive Zahl

$1 + \frac{1}{x} = x \Leftrightarrow x + 1 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

1064 - K5 - GL - Beweis - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

64. Beweise, dass für eine normierte quadratische Gleichung mit den Lösungen $x_{1,2}$ gilt: ____/0

$$x_1 + x_2 = -p$$

Lösungserwartung:

$x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} + \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{p}{2}\right) = -p$

1065 - K5 - GL - Gleichung aufstellen - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

65. Von zwei unbekannten c und d sind ihre Summe $s = 32$ und ihr Quotient $q = 3$ bekannt. Berechne die Werte c und d! ____/0

Lösungserwartung:

$\frac{c}{d} = 3 \Leftrightarrow c = 3d;\ c + d = 3d + d = 4d = 32 \Rightarrow d = 8 \Rightarrow c = 3d = 24$

1066 - K5 - GL - Gleichung aufstellen - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

66. Für welche reellen Zahlen a hat die quadratische Gleichung $x^2 - (a+6) \cdot x + (2a+12) = 0$ eine Doppellösung? Wie lautet diese Lösung? Erkläre deine Vorgangsweise! ____/0

Lösungserwartung:

Die Diskriminante D in der Lösungsformel entscheidet über die Anzahl der Lösungen. Hier ist
$D = \frac{(a+6)^2}{4} - (2a+12) = \frac{a^2 + 12a + 36}{4} - 2a - 12 = \frac{a^2 + 4a - 12}{4}$.
Eine Doppellösung liegt vor, wenn $D = 0$ ist. Dies ist der Fall wenn a die Werte 2 oder -6 annimmt. Im Fall $a = 2$ ergibt die Gleichung $x = 4$, im Fall $a = -6$ ergibt die Gleichung $x = 0$.

1067 - K5 - GL - Lösungsformel herleiten - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

67. Leite die Lösungsformel für die normierte quadratische Gleichung durch Ergänzen auf ein vollständiges Quadrat her. ____/0

Lösungserwartung:

$$\begin{aligned}
x^2 + px + q &= 0 && \Big| + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \\
x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q && \\
\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 &= \frac{p^2}{4} - q && \Big| \pm\sqrt{\ } \left(\text{nur möglich, wenn } \frac{p^2}{4} - q \geq 0\right) \\
x + \frac{p}{2} &= \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} && \Big| - \frac{p}{2} \\
x &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} &&
\end{aligned}$$

1068 - K5 - FU - Luftdruck - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

68. Der Luftdruck p hängt von der Seehöhe h ab. Die untenstehende Tabelle gibt zugehörige Werte von p (in hPa) und h (in m) an. ____/0

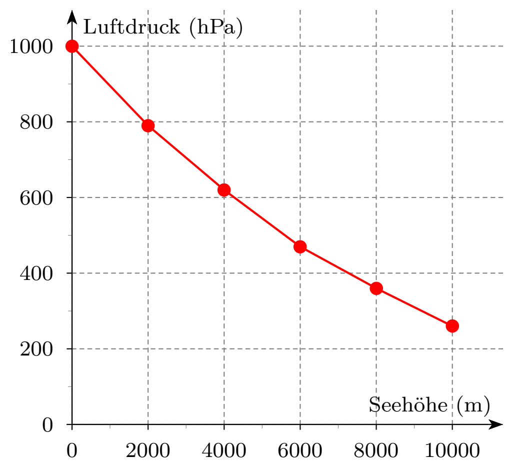
Seehöhe (m)	Luftdruck (hPa)
0	1000
2000	790
4000	620
6000	470
8000	360
10 000	260

Lege die unabhängige und die abhängige Variable fest und zeichne den Funktionsgraphen.

Ist es sinnvoll die Punkte zu verbinden? Begründe!

Lösungserwartung:

Unabhängige Variable ist die Seehöhe, abhängige Variable der Luftdruck. Die Punkte zu verbinden ist sinnvoll, weil die Seehöhe und der Luftdruck Größen sind, die sich kontinuierlich verändern. Sie können alle Werte in einem vorgegebenen Intervall annehmen.



1069 - K7 - RF, DR - FA 1.5, AG 2.3, FA 1.7, FA 1.4, FA 4.3 - Vulkaninsel - Handlungsorientierte Aufgabenbeispiele für den Mathematikunterricht SB

69. Durch vulkanische Aktivitäten haben sich im Laufe der Jahrtausende in der Karibik zwei neue Inseln gebildet. Das Relief der Inseln wird unter und über dem Meeresspiegel annähernd beschrieben durch folgende Funktion: ____/5

$$f(x) = -\frac{2}{55}x^4 + \frac{25}{88}x^2 - \frac{11}{160}$$

Hierbei ist x die Entfernung in 100 m und f die Höhe über dem Meeresspiegel in 100 m. Daraus folgt, dass der Ausdruck $f(1) \approx 0{,}1789..$ bedeutet, dass nach 100 Metern rechts von der Mitte der beiden Inseln die rechte Insel bereits eine Höhe von 17,89 m über dem Meeresspiegel hat.

Ein Überlebender einer Flugzeugkatastrophe ist auf einer der beiden Inseln gestrandet, auf der es kein Süßwasser gibt.

Beurteile die Überlebenschance des Gestrandeten für den Fall, dass es auf der anderen Insel Süßwasser gibt. Beantworte dafür folgende Fragestellungen:

Aufgabenstellung:

(a) Wie weit sind die beiden Inseln voneinander entfernt? Berechne ohne technische Hilfsmittel! (Tipp: Nullstellen)

(b) Wie lange würde man brauchen, um von einer zu anderen Insel zu schwimmen?

(c) $\boxed{\text{A}}$ Wie tief ist das Wasser zwischen den beiden Inseln? Könnte ein Nichtschwimmer „zu Fuß“ die Entfernung zwischen beiden Inseln überwinden?

(d) Wie hoch sind die Inseln?

Lösungserwartung:

(a) Nullstellen: $x_1 = -\frac{11}{4}, x_2 = -\frac{1}{2}, x_3 = \frac{1}{2}, x_4 = \frac{11}{4}$
Abstand zwischen den beiden Inseln: $(0{,}5 - (-0{,}5)) * 100 = 100\,\text{m}$

(b) Annahme einer Schwimmgeschwindigkeit eines normalen Menschen (z.B. 2 km/h) $\Rightarrow$ 100 m in 3 min.

(c) $f(0) = -0{,}07 \Rightarrow$ tiefster Punkt zwischen den beiden Inseln liegt bei $0{,}07 * 100 = 7\,\text{m}$. Ein Nichtschwimmer kann also NICHT auf die andere Insel gelangen.

(d) Da der Graph der Funktion symmetrisch zur y-Achse ist, sind beide Inseln gleich hoch. Der höchste Punkt liegt jeweils bei 49 m.

1070 - K5 - TR - AG 2.1, AG 4.1 - Zahnradbahn - Mathematik verstehen 5 modifiziert

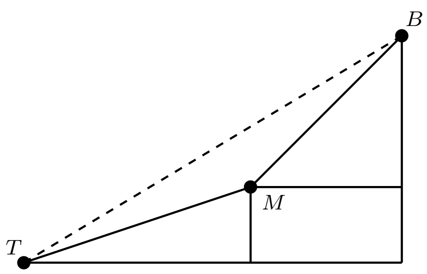
70. Eine Zahnradbahn hat zwei Streckenabschnitte, die annähernd geradlinig verlaufen. Wichtige Daten dieser Zahnradbahn sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt: ____/8

		Länge (m)	**Höhendifferenz (m)**
Abschnitt I	Talstation - Mittelstation	2772	406
Abschnitt II	Mittelstation - Bergstation	1630	525

(a) Berechne für jeden Abschnitt der Bahn die zurückgelegte Horizontaldifferenz.

(b) Berechne die kürzeste Entfernung von der Talstation zur Bergstation.

(c) An der Talstation findet man untenstehende Informationstafel. Überprüfe, ob die Angaben auf dieser Tafel korrekt sind.



Steigung des ersten Streckenabschnitts = 14,8%
Steigung des zweiten Streckenabschnitts = 34,0%

(d) Berechne die Steigungswinkel der beiden Abschnitte $\overline{TM}$ sowie $\overline{MB}$.

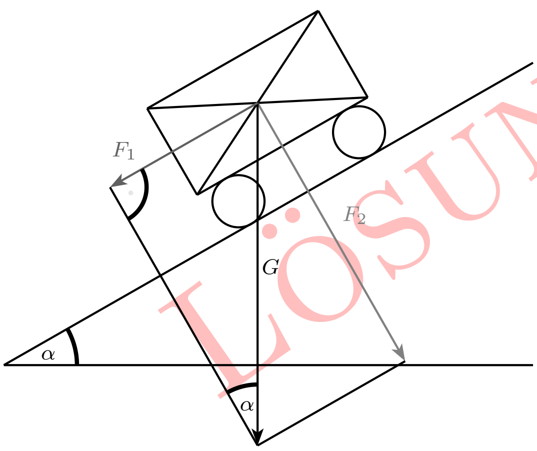
(e) Die Zahnradbahn ist im Jänner jeden Tag von 9 Uhr bis 17 Uhr in Betrieb. Pro Stunde können höchstens 300 Personen befördert werden. Für eine Fahrt von der Talstation zur Mittelstation zahlt man u Euro und von der

Mittelstation zur Bergstation v Euro. Nach 16 Uhr gibt es jeweils eine 10%-ige Ermäßigung. Stelle eine Formel für die maximalen Einnahmen E der Betreibergesellschaft an einem Jännertag auf.

(f) Die Fahrt erfolgt bergwärts mit 9 bis 12 km/h und talwärts mit 9 km/h. Wie lange dauert eine Bergfahrt bzw. Talfahrt (ohne Zwischenstopp) ungefähr?

(g) Wir vergleichen die beschriebene Zahnradbahn mit der derzeit steilsten Zahnradbahn, der *Pilatusbahn* in der Schweiz. Die *Pilatusbahn* hat eine Länge von 4618 m und überwindet eine Höhendifferenz von 1635 m sowie eine Horizontaldifferenz von 4319 m. Die maximale Steigung beträgt 48%. Berechne die mittlere Steigung der *Pilatusbahn* und gib an, um wie viele Prozentpunkte die maximale Steigung über der mittleren Steigung liegt.

(h) Ein Wagen der *Pilatusbahn* hat in etwa ein Gewicht von G=100.000 N (siehe Skizze). Wie viel Newton wirken auf einen Wagen talwärts (F_1) bei der maximalen Steigung von $\alpha = 25{,}6°$?



(a) Abschnitt I: $\approx 2742m$, Abschnitt II: $\approx 1543m$

(b) Luftlinie: $\overline{TB} \approx 4385m$

(c) Die Angaben auf der Tafel sind korrekt.

(d) Steigungswinkel $\overline{TM} = 8{,}4°$; $\overline{MB} = 18{,}8°$

(e) $E = 300 \cdot 7 \cdot (u + v) + 300 \cdot 0{,}9 \cdot (u + v) = 2370 \cdot (u + v)$

(f) Bergfahrt $\approx 25min = 0{,}41h$; Talfahrt $\approx 29min = 0{,}49h$

(g) mittlere Steigung der Pilatusbahn $\approx 37{,}9\%$, die maximale Steigung liegt also ca. um 10 Prozentpunkte über der mittleren Steigung.

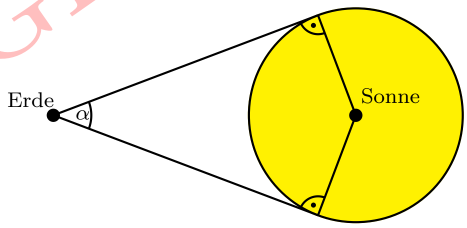
(h) 43.273,1 N

1071 - K5 - TR - AG 2.1, AG 4.1 - Astronomische Entfernungen - Mathematik verstehen 5 modifiziert

71. Mit Hilfe der Trigonometrie und technischen Messgeräten, wie wir sie heute kennen, können Entfernungen wie Erde–Sonne, Erde–Mond, Mond–Sonne, Erde–Fixstern usw. sowie Winkelmaße in diesem Zusammenhang (z.B. Sehwinkel) relativ einfach berechnet werden. Ermittlungen von Distanz- bzw. Größenverhältnissen gab es schon vor ca. 2000 Jahren. So stellte der Astronom Aristarch von Samon (3. Jh. v. Chr.) bereits Überlegungen an, wie man die vorhin erwähnten Distanzen miteinander vergleichen könnte. Wir wissen also nicht erst seit Beginn der Raumfahrt um diese Größen Bescheid. ____/4

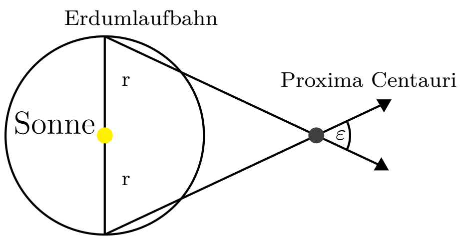
(a) An einem bestimmten Tag des Jahres ist ein Beobachter auf der Erde $149{,}5 \cdot 10^6$ km vom Sonnenmittelpunkt entfernt und sieht die Sonne unter dem Sehwinkel $\alpha°$.

Stelle mit Hilfe dieser Größen eine Formel zur Berechnung des Sonnendurchmessers d_s auf!



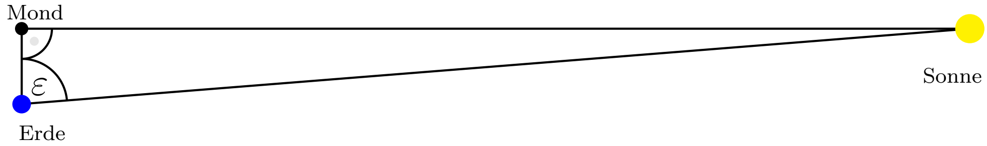
$d_s =$ ______________________

(b) Die Erde bewegt sich annähernd auf einer Kreisbahn mit dem mittleren Radius $r \approx 1{,}496 \cdot 10^{11}$m um die Sonne. Astronomische Messungen ergeben, dass sich im Lauf eines halben Jahres die Blickrichtung zu dem uns nächstgelegenen Fixstern *Proxima Centauri* um den Winkel $\varepsilon \approx 0{,}0004289°$ ändert. Berechne die ungefähre Entfernung des Fixsterns *Proxima Centauri* von der Sonne und gib diese in Lichtjahren an! (Anm.: Ein Lichtjahr ist die Entfernung, die das Licht in Lichtgeschwindigkeit ($\approx 3 \cdot 10^8$m/s) in einem Jahr zurücklegt.)



(c) Aristarch von Samos stellte folgende Überlegung an, um die Entfernung

Erde–Sonne mit der Entfernung Erde–Mond vergleichen zu können. Bei Halbmond bilden Erde, Sonne und Mond ein rechtwinkliges Dreieck. Aristarch schätzte den Winkel ε auf mindestens 87°.



Gib aufgrund von Aristarchs Schätzung für ε an, wieviel mal weiter die Erde von der Sonne als vom Mond entfernt ist!

(d) Tatsächlich ist die Erde etwa 400-mal weiter von der Sonne als vom Mond entfernt. Gib den korrekteren Wert für ε an!

(e) *Voyager 1* ist derzeit das einzige von Menschenhand erschaffene Fluggerät, das sich im interstellaren Raum befindet. Das Raumschiff ist $2{,}09 \cdot 10^{10}$ Kilometer von der Erde entfernt und muss seine Antenne immer wieder so ausrichten, dass es mit der Erde kommunizieren kann. Auf ein Signal müssen Wissenschaftler aber immer lange warten. 19 Stunden und 30 Minuten dauerte es, bis Testresultate von *Voyager 1* zurück an die Erde gesendet und von einer Antenne aufgeschnappt werden können.
Mit welcher Geschwindigkeit wird ein Signal von *Voyager 1* zur Erde übertragen?

Lösungserwartung:

(a) $2 \cdot 149{,}5 \cdot 10^6 \cdot sin(\frac{\alpha}{2}) = 2{,}99 \cdot 10^8 \cdot sin(\frac{\alpha}{2})$ (in km)

(b) 4,2 Lichtjahre

(c) ca. 19-mal

(d) ca. 89,86°

(e) 1.071.794.872 km/h

1072 - K7 - RF - FA 1.5, FA 1.7 - Hammerwurf - Handlungsorientierte Aufgabenbeispiele für den Mathematikunterricht SB

72. Das Kugelstoßen ist eine olympische Disziplin der Leichtathletik. Ziel ist es, die 4 kg (bzw. 7,25 kg bei den Männern) schwere Kugel möglichst weit zu stoßen. ____/5

Der Ringe mit einem Durchmesser von 2,135 m dient hierbei als Anlauffläche.

Sportwissenschaftler stellten kürzlich folgende These auf: „Je höher der höchste Punkt der Flugkurve der Kugel beim Kugelstoßen ist, desto weiter fliegt die Kugel.“

Überprüfe diese These anhand der folgenden Funktionen, die drei unterschiedliche Versuche einer amerikanischen Kugelstoßerin beschreiben:

$f_1(x) = -0{,}05x^2 + 0{,}8x + 1{,}78$

$f_2(x) = -0{,}08x^2 + 1{,}2x + 1{,}78$

$f_3(x) = -0{,}12x^2 + 1{,}7x + 1{,}78$

Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Wie weit waren die einzelnen Stöße?

(b) Wo hoch wurden die Kugeln jeweils geworfen?

(c) Die Kugeln werden ungefähr auf Schulterhöhe abgeworfen. Wie hoch wird die Schulterhöhe der besagten Kugelstoßerin sein?

Lösungserwartung:

(a) 1. Stoß: 17,98 m; 2. Stoß: 16,36 m; 3. Stoß: 16,36 m

(b) 1. Stoß: 4,98 m; 2. Stoß: 6,28 m; 3. Stoß: 7,80 m

(c) Ungefähr 1,78 m

1073 - K7 - RF - FA 1.5, FA 1.7 - Freistoß - Handlungsorientierte Aufgabenbeispiele für den Mathematikunterricht SB

73. Freistoß! Der 1. FC Albertgasse liegt im 1:2 hinter den Sportfreunden Feldgasse zurück. Schafft der FC den Ausgleich? ____/3

Die Flugkurve des Balles wird von der ganzrationalen Funktion f beschrieben:

$$f(x) = -0{,}0015x^3 + 0{,}045x^2$$

Die Mauer steht 12 m vor dem Tor.

Laut den Spielregeln des Weltfußballverbands (FIFA) beträgt der Abstand zwischen den Innenkanten der Pfosten 7,32 m, die Unterkante der Querlatte ist 2,44 m vom Boden entfernt.

Bei Freistößen müssen alle Spieler der verteidigenden Mannschaft (insbesondere die Mauer) in einem Abstand von (mindestens) 9,15 m zum Ball oder auf der eigenen Torlinie zwischen den Pfosten befinden.

Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Wie weit vom Tor entfernt liegt der Ball bevor der Schütze den Freistoß schießt?

(b) Wie hoch müsste ein 2,05 m großer Spieler in der Mauer springen um den Ball aufhalten zu können?

(c) Angenommen der Ball wird genau in Richtung Tor geschossen - könnte es ein Tor werden oder schießt der Spieler übers Tor drüber? Begründe deine Antwort!

Lösungserwartung:

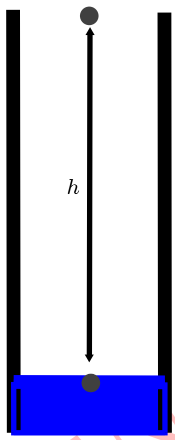
(a) $9{,}15 + 12 = 21{,}15\,\text{m}$

(b) $P = (9{,}15/2{,}62)$ Das heißt ein 2,05 m hoher Spieler müsste 0,57 cm hoch springen.

(c) $P(21{,}15/5{,}92)$ Nein, da das Tor lediglich 2,44 m hoch ist, der Ball aber auf einer Höhe von 5,92 m wäre.

1074 - K5 - TR, GL - AG 1.1, AG 2.1, AG 2.3, AG 4.1 - Entfernungsbestimmung durch Schall und Licht - Mathematik verstehen 5

74. Adam steht am Rand eines Brunnenschachtes und schaut nach unten. Den Wasserspiegel kann er nicht erkennen. Er fragt sich, wie tief der Wasserspiegel unter dem oberen Brunnenrand liegt. Adam wirft einen Stein in den Brunnen und hört nach gemessenen 2,5 Sekunden den Aufprall des Steins auf dem Wasserspiegel. ____/6



Adam überlegt:
Wenn der Stein t Sekunden bis zum Aufprall auf dem Wasser benötigt, dann legt dieser nach dem Fallgesetz eine Strecke von ca. $5 \cdot t^2$ Meter zurück. Diese Strecke entspricht genau der Tiefe des Wasserspiegels.
Anschließend pflanzen sich die vom Aufprall erzeugten Schallwellen mit einer Geschwindigkeit von ca. 333 m/s im Brunnenschaft nach oben fort und gelangen 2,5 Sekunden nach dem Abwurf des Steins an Adams Ohr.

(a) Stelle eine Gleichung auf, mit deren Hilfe man die Fallzeit t des Steins berechnen kann!

(b) Berechne die Fallzeit!

(c) Berechne die Tiefe des Wasserspiegel unter dem oberen Brunnenrand.

(d) Adam hat die Zeitdauer T vom Abwurf des Steins bis zum Hören des Aufpralls mit einer Handstoppuhr gemessen. Wegen Adams Reaktionszeit muss man annehmen, dass der maximale Zeitmessfehler $\pm 0{,}2$ s beträgt, also die tatsächliche Zeitdauer T im Bereich von 2,3 s bis 2,7 s liegt.
Berechne den maximalen relativen Fehler bei Adams Zeitmessung in Prozent.

(e) (2 P.) Bei Blitzen und Explosionen entsteht Schall und Licht gleichzeitig. Diese Tatsache kann man zur Bestimmung von Entfernungen nützen. Das

zeigen die folgenden Beispiele. Dabei vernachlässigen wir immer die Laufzeit des Lichts, weil die Lichtgeschwindigkeit gegenüber der Schallgeschwindigkeit sehr groß ist.
Man beobachtet das Aufleuchten eines Gewitterblitzes unter einem Höhenwinkel von 35°. Den gleichzeitig entstehenden Donner hört man 15 s später. Berechne, in welcher Höhe und in welcher Horizontalentfernung zum Beobachter der Blitz entstanden ist.

Lösungserwartung:

(a) $\underbrace{5 \cdot t^2}_{\text{Streckenlänge nach unten}} = \underbrace{333 \cdot (2{,}5 - t)}_{\text{Streckenlänge nach oben}}$

(b) Die Fallzeit beträgt ca. 2,41 Sekunden

(c) Tiefe ca. 29,1 m

(d) max. Messfehler 8%

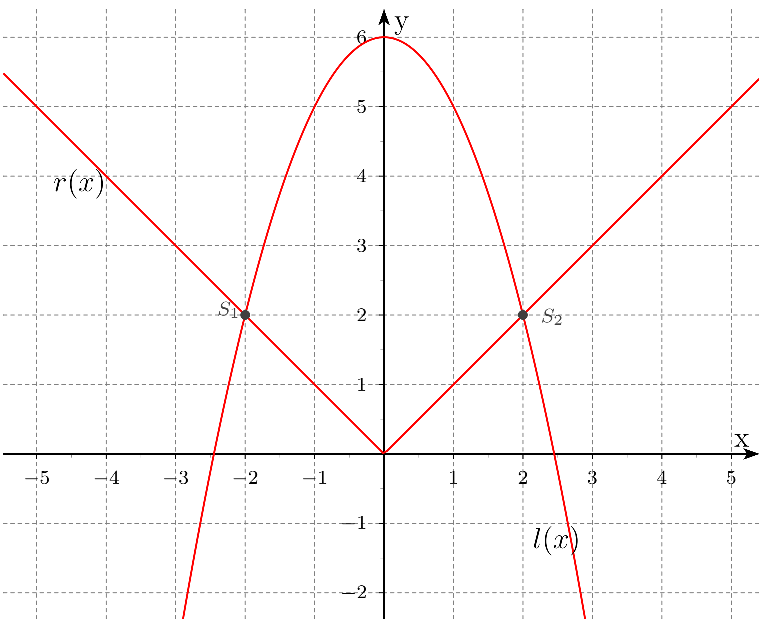
(e) Höhe des Blitzes ca. 2865 m, Horizontalentfernung zum Blitz ca. 4092 m

---

1075 - K5 - FU - FA 1.4, FA 1.6 - Gleichung grafisch lösen - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

75. Löse die gegebene Gleichung grafisch: $x^2 + 6 = |x|$ ____/0

Lösungserwartung:



Die beiden Seiten der Gleichung werden als Funktionen $l(x) - x^2 + 6$ und $r(x) = |x|$ grafisch dargestellt. Die Lösungen sind die x-Koordinaten der Schnittpunkte der beiden Funktionen, $x_{1,2} = \pm 2$.

1076 - K5 - FU - FA 2.4 - Eigenschaft zeigen - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

76. Gegeben ist eine lineare Funktion f mit $f(x) = k \cdot x + d$ und $k, d \in \mathbb{R}$. ____/0

Zeige, dass gilt: $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = k$ für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 \neq x_2$

Lösungserwartung:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{k \cdot x_2 - k \cdot x_1}{x_2 - x_1} = \frac{k \cdot (x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = k$$

1077 - K5 - FU - FA 1.7, FA 2.1, FA 2.3 - Temperatur im Erdinneren - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

77. Die Temperatur im Erdinneren steigt ungefähr um 30 °C pro 1000 m an. Die Ausgangstemperatur an der Erdoberfläche beträgt 10 °C. ____/0

Stelle den Temperaturverlauf in einem linearen Modell in einem geeigneten Ausschnitt dar. Gib dazu eine Funktionsgleichung an und zeichne den Graphen der Funktion.

Beantworte mithilfe deines Modells die folgenden Fragen:

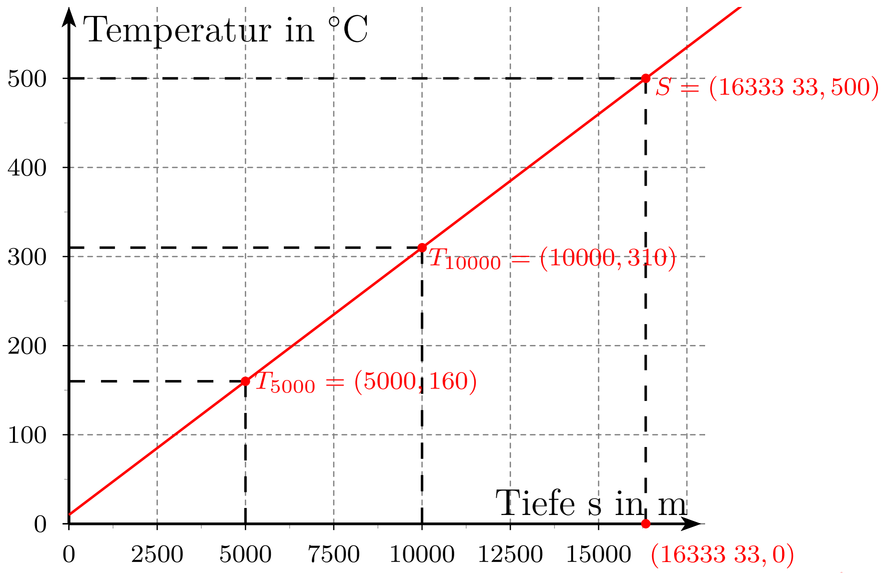
(a) Was bedeuten die Werte der Parameter k und d in diesem Kontext?

(b) Wie hoch ist die Temperatur in 5 km und in 10 km Tiefe?

(c) In welcher Tiefe steigt die Temperatur erstmals über 500 °C?

Hinweis: Die Gefragten Werte sind zu berechnen und im Diagramm einzuzeichnen.

Lösungserwartung:



(a) $T(s) = 10 + 0{,}03 \cdot s$ ($T \dots$ Temperatur in °C; $s \dots$ Tiefe in m)

Der Parameter k gibt an, dass pro Tiefenzunahme um 1 m die Temperatur um 0,03 °C steigt.

Der Parameter d gibt den Startwert von 10 °C in Tiefe null (=Erdoberfläche) an.

(b) $T(5000) = 10 + 0{,}03 \cdot 5000 = 160\,°C$; $T(10\,000) = 310°C$

(c) $500 = 10 + 0{,}003 \cdot s \Rightarrow s = 490 : 0{,}03 \approx 16\,333{,}33 \Rightarrow$ In mehr als 16,3 km Tiefe steigt die Temperatur nach diesem (sehr einfachen) Modell auf über 500 °C.

1078 - K5 - FU - FA 1.7, FA 2.1, FA 2.2, FA 2.3 - Bevölkerung Indien - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

78. Im Jahr 1994 gab es in Indien 820 Millionen Menschen, fünf Jahre später waren es 880 Millionen Menschen. ____/0

(a) Diese Bevölkerungsentwicklung kann näherungsweise durch ein lineares Modell beschrieben werden. Gib die Gleichung einer entsprechenden linearen Funktion an.

(b) Was bedeuten die Werte der beiden Parameter k und d in diesem Kontext?

(c) Wann leben gemäß dem linearen Modell 1,5 Milliarden Menschen in Indien? Nenne ein Argument, warum dieses Modell nur eine sehr grobe Schätzung ermöglicht.

Lösungserwartung:

(a) $y = 12x + 820$ ($x \ldots$ Zeitspanne in Jahren ab 1994, $y \ldots$ Bevölkerung in Millionen)

(b) $k \ldots$ Die Bevölkerung wächst jährlich um 12 Millionen Menschen.

$d \ldots$ Im Jahr 1994 lebten 820 Millionen Menschen in Indien

(c) $1500 = 12x + 820 \Rightarrow x \approx 56{,}67 \Rightarrow$ Im Jahr 2051 sind 1,5 Milliarden Menschen erreicht. Das lineare Modell beruht auf zwei Werten in einer Zeitspanne von 5 Jahren. Es wird aber über eine Zeitspanne von mehr als 50 Jahren extrapoliert.

1079 - K5 - FU - FA 1.7, FA 2.1, FA 2.2, FA 2.3 - Taschenproduktion - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

79. Ein Betrieb erzeugt Taschen. Für die Erzeugung von x Taschen in einem Monat betragen die Gesamtkosten K €. Für diese Kostenfunktion gilt: ____/0

$K(x) = 55x + 8600$

Eine Tasche wird um 75 € verkauft.

(a) Interpretiere die Werte k und d der linearen Kostenfunktion K im Kontext. Stelle die Erlösfunktion $E(x)$ und die Gewinnfunktion $G(x)$ auf. Berechne die Gewinnschwelle und interpretiere diesen Wert im Kontext.

(b) Berechne, wie viele Taschen mindestens verkauft werden müssen, damit der Betrieb mit einem Gewinn von 10 000 € rechnen kann.

(c) Die Firma überlegt die Produktion zu verdoppeln. Muss sie mit doppelt so hohen Gesamtkosten rechnen? Darf sie – vorausgesetzt es können alle Taschen verkauft werden – mit einem doppelt so hohen Erlös rechnen?

(d) Die Firma hätte gerne, dass die Gewinnschwelle schon bei 300 verkauften Taschen erreicht ist. Was würdest du der Firma raten? Gib einen konkreten Vorschlag.

Lösungserwartung:

(a) Der Wert $k = 55$ stellt die Kosten für die Erzeugung einer Tasche dar, der Wert $d = 8600$ bedeutet die Größe der Fixkosten.

$E(x) = 75x$; $G(x) = E(x) - K(x) = 20x - 8600$

Gewinnschwelle $G(x) = 0 \Rightarrow x = 430 \Rightarrow$ Die Firma muss mehr als 430 Taschen verkaufen um Gewinn zu machen.

(b) $G(x) = 10\,000 \Rightarrow x = 930 \Rightarrow$ Mindestens 930 Taschen müssen verkauft werden.

(c) Doppelte Produktion hat nicht doppelte Gesamtkosten zur Folge, da die Fixkosten nicht von der Produktionsmenge abhängen. Der Erlös würde auf das Doppelte steigen.

(d) Möglich sind Verkaufspreiserhöhung, Fixkostensenkung und/oder Senkung der Herstellungskosten pro Tasche. Konkret: Verkaufspreis auf ca. 83,50 € erhöhen, Fixkosten auf 6000 € senken oder Herstellungskosten pro Tasche auf ca. 46,50 € senken.

1080 - K5 - FU - FA 1.6, FA 1.7, FA 2.1, FA 2.2, FA 2.3 - Eintritt im Hamari-Kraxl-Park - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

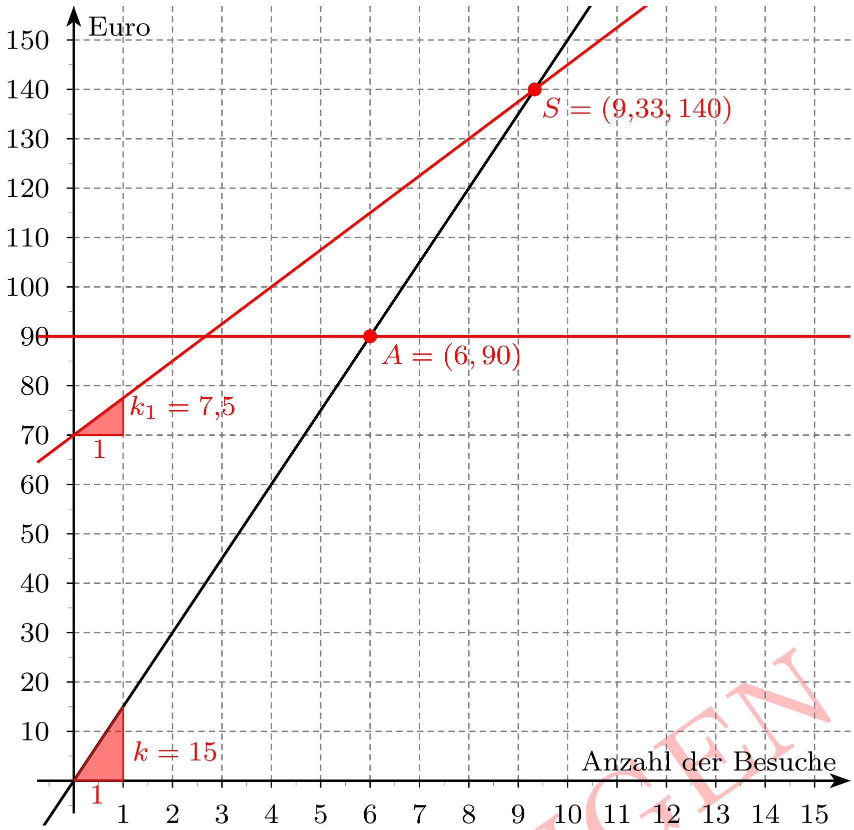
80. Der Zusammenhang zwischen der Anzahl der Besuche des Hamari-Kraxl-Parks in Mönichkirchen am Wechsel und dem dafür zu bezahlenden Eintritt für Kinder von 12 bis 15 Jahren wird durch eine lineare Funktion modelliert (siehe Grafik). ____/0

Eine Saisonkarte für diese Altersstufe kostet 90 €. Wenn ein Kind dieser Altersstufe Mitglied eines alpinen Vereins ist, zahlt es dort zwar einen Jahresmitgliedsbeitrag von 70 €, aber jeder Besuch des Hamari-Kraxl-Parks kostet dann nur die Hälfte.

(a) Veranschauliche in der gegebenen Grafik den Zusammenhang zwischen der Anzahl der Besuche des Hamari-Kraxl-Parks und dem insgesamt zu bezahlenden Betrag für ein Mitglied eines alpinen Vereins.

(b) Lies aus der Grafik ab, ab wie vielen Besuchen des Hamari-Kraxl-Parks es für Mitglieder von alpinen Vereinen günstiger ist, als für Nicht-Mitglieder.

(c) Ab wie vielen Besuchen des Hamari-Kraxl-Parks lohnt sich eine Saisonkarte?



Lösungserwartung:

(a) siehe Abbildung

(b) Für Mitglieder eines alpinen Vereins ist es ab 10 Besuchen günstiger.

(c) Eine Saisonkarte lohnt sich ab 7 Besuchen.

1081 - K5 - FU - FA 1.7, FA 1.8 - Luftwiderstand - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

81. Der Luftwiderstand F_L ist eine Kraft, die bewegte Körper bremst und in Newton (N) gemessen wird. Er ist durch die Formel $F_L = 0{,}5 c_W \cdot \rho_L \cdot v^2 \cdot A$ gegeben. ____/0

c_W ist der Widerstandsbeiwert. Er hängt von der Form des Gegenstands ab: Ist der Gegenstand stromlinienförmig, ist c_W klein. Die zweite Größe in der Formel ist die Dichte ρ_L der Luft. Für sie gilt etwa $\rho_L \approx 1{,}2\,\mathrm{kg/m^3}$. Mit v wird die relative Geschwindigkeit des Gegenstands in Bezug auf die umgebende Luft bezeichnet: Bei Rückenwind subtrahiert sich die Eigen- und die Windgeschwindigkeit, bei Gegenwind werden die Werte addiert. Schließlich bezeichnet A die Querschnittsfläche des Gegenstands.

(a) Für einen PKW gilt: $c_W = 0{,}26$ und $A = 2{,}3\,\text{m}^2$. Der PKW bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von $30\,\text{m/s}$. Es herrscht Gegenwind von $10\,\text{m/s}$. Berechne den Luftwiderstand des Autos.

(b) Die Dichte der Luft nimmt mit zunehmender Seehöhe ab. Ist der Luftwiderstand auf Meeresniveau oder auf ein Seehöhe von $2000\,\text{m}$ größer? Begründe mithilfe der oben angegebenen Formel!

(c) Wenn man die Geschwindigkeit des PKWs um ein Viertel erhöht, um wie viel Prozent steigt der Luftwiderstand?

(d) Gib an um welchen Funktionstyp es sich jeweils handelt:
- Luftwiderstand in Abhängigkeit von der Querschnittsfläche
- Luftwiderstand in Abhängigkeit von der Relativgeschwindigkeit

(e) Gib an, ob die Größen direkt proportional, indirekt proportional oder keines von beiden sind:
- der Luftwiderstand und der Widerstandsbeiwert
- der Luftwiderstand und die Relativgeschwindigkeit
- der Widerstandsbeiwert und die Querschnittsfläche

Lösungserwartung:

(a) $F_L = 0{,}5 \cdot 0{,}26 \cdot 1{,}2 \cdot 40^2 \cdot 2{,}3 \approx 574\,\text{N}$

(b) In größerer Höhe nimmt die Dichte ab, deshalb sinkt der Luftwiderstand.

(c) $(1{,}25)^2 = 1{,}5625$; Der Luftwiderstand steigt um $56{,}25\,\%$.

(d) $F_L(A) \ldots$ lineare Funktion
$F_L(v) \ldots$ quadratische Funktion

(e) Der Luftwiderstand ist direkt proportional zum Widerstandsbeiwert.
Luftwiderstand und Relativgeschwindigkeit sind weder direkt noch indirekt proportional.
Der Widerstandsbeiwert ist indirekt proportional zur Querschnittsfläche.

1082 - K7 - DR - FA 1.6, AN 1.3, FA 4.3 - Polynomfunktionen zweiten Grades - Dimensionen Mathematik Schularbeiten Trainer 7

82. Gegeben sind die beiden Funktion f und g mit den Funktionsgleichungen $f(x) = -x^2 + 4x$ und $g(x) = a \cdot x^2 + c$ mit $a, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. ____/3

Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Nimm für die Parameter die Werte $a = 1$ und $c = 2$ an. Berechne die Koordinaten jener Punkte, die die Graphen der Funktion f und g gemeinsam haben.

Erläutere anhand der rechnerischen Lösung, wie sich eine Vergrößerung bzw. Verkleinerung des Parameters c auf die Lösung auswirken würde.

(b) Eine Person behauptet, dass bei beliebiger Wahl der Parameterwerte a und c jeweils genau eine Stelle x_1 existiert, für die $f'(x_1) = g'(x_1)$ gilt.

Überprüfe den Wahrheitsgehalt dieser Aussage zuerst für den Fall $a = -0{,}5$ und $c = 0$.

Argumentiere anschließend, inwieweit dieser Fall auf beliebige Parameterwahl verallgemeinert werden kann. Argumentiere mithilfe einer Rechnung.

Lösungserwartung:

(a) $S = (1|3)$

Berechnung der möglichen Schnittpunkte von f und g für beliebiges c:

$-x^2 + 4x = x^2 + c \Rightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 8c}}{4}$

Die Anzahl der Schnittpunkte hängt von der Diskriminante $D = 16 - 8c$ ab.

- Es liegen zwei Schnittpunkte vor, wenn $D > 0$ bzw. $c < 2$.
- Für $c = 2$ nimmt D den Wert 0 an und die beiden Funktionsgraphen schneiden einander in einem Punkt.
- Eine negative Diskriminante liegt für $c > 2$ vor. In diesem Fall haben die beiden Funktionsgraphen keinen Punkt gemeinsam.

(b) $f'(x) = -2x + 4$ und $g'(x) = -x \Rightarrow f'(x) = g'(x) \Rightarrow x = 4$

An der Stelle $x = 4$ haben beide Funktionen die gleiche Tangentensteigung, d.h. $f'(4) = g'(4) = -4$.

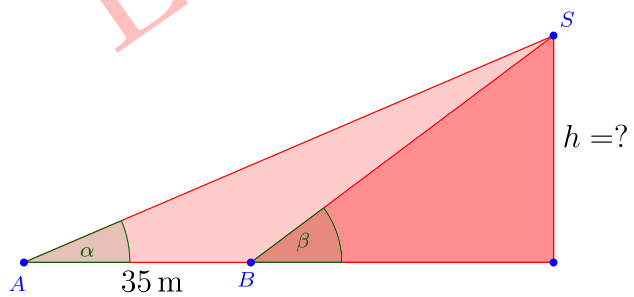
Allgemein: $f'(x) = -2x + 4$ und $g'(x) = 2ax \Rightarrow x = \frac{2}{a+1}$

Diese Aussage kann auf beinahe alle Werte von a und c verallgemeinert werden. Nimmt jedoch a den Wert -1 an, so kann kein Wert x_1 bestimmt werden für den $f'(x_1) = g'(x_1)$ gilt. In diesem Fall weisen die Funktionsgraphen die gleiche Form auf, verlaufen aber in x-Richtung versetzt zueinander, sodass es keine Stelle geben kann, an der beide Tangentensteigungen gleich groß sind.

1083 - K5 - TR - Kirchturm - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

83. Von einem Punkt A in ebenem Gelände misst man zur Spitze eines Kirchturms einen Winkel von 34°. Wenn man 35 m näher kommt, erscheint die Spitze unter einem Winkel von 51°. Mache eine Skizze und berechne, wie hoch der Kirchturm ist. ____/0

Lösungserwartung:



$\alpha = \measuredangle SAB = 34°,\ \measuredangle ABS = 180° - 51° = 129°, \measuredangle ASB = 17°$

$\frac{35}{\sin 17°} = \frac{\overline{BS}}{\sin 34°} \Rightarrow \overline{BS} \approx 66{,}9 \Rightarrow h = \overline{BS} \cdot \sin 51° \approx 52$

Der Kirchturm ist ca. 52 m hoch

1084 - K5 - TR - Strandcafé - AG 4.1 - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

84. Die Terrasse eines Strandcafes liegt 28 m über dem Meeresspiegel. Von dieser Terrasse aus sieht man die Spitze eines Leuchtturms unter einem Höhenwinkel von 12°. Den Fußpunkt des Turms, der auf Meeresniveau liegt, sieht man unter einem Tiefenwinkel von 9°. ____/0

Wie hoch ist der Leuchtturm?

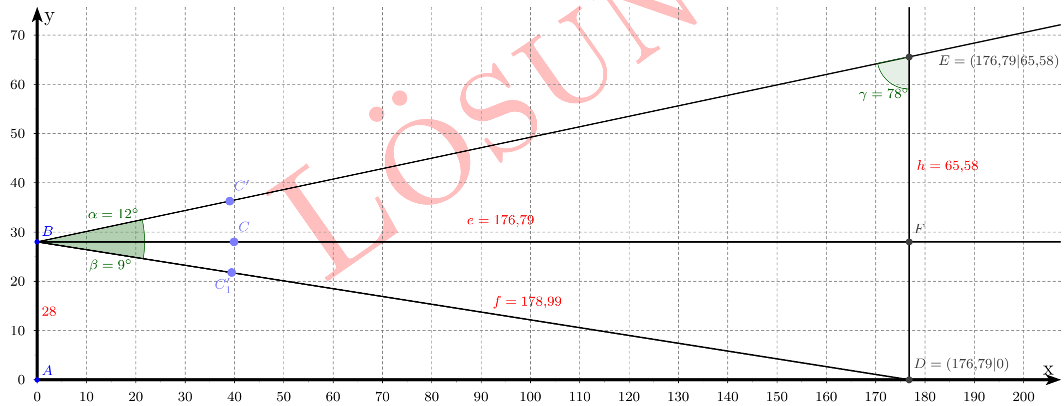
(a) Löse die Aufgabe rechnerisch.

(b) Löse die Aufgabe konstruktiv.

Lösungserwartung:

(a) $\Delta BDF: \ \tan\beta = \frac{28}{e} \Rightarrow 176{,}8; \ \Delta FEB: \ \tan\alpha = \frac{h_1}{e} \Rightarrow h_1 \approx 37{,}6$
$\Rightarrow h = 28 + h_1 \approx 65{,}6$

(b) Grafisch:



1085 - K5 - TR - Gondelbahn - AG 4.1 - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

85. Die Fahrt mit einer Gondelbahn von Tal- zur Bergstation dauert 7,5 min bei einer mittleren Geschwindigkeit von 5 m/s. Dabei bewegen sich die Gondeln annähernd längs einer Geraden, die um 22,5°gegen die Horizontale geneigt ist. ____/0

(a) Erstelle eine zu diesem Text passende Skizze.

(b) Berechne den Höhenunterschied, den man bei einer Fahrt von der Tal- zur Bergstation überwindet.

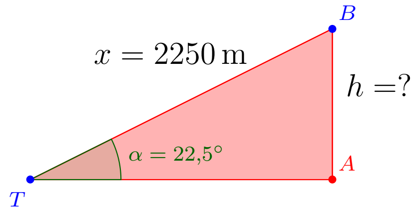
Lösungserwartung:

(a) Skizze rechts

(b) $v = 5\,\text{m/s},\ t = 450\,\text{s}$

$\Rightarrow x = 450 \cdot 5 = 2250$

$h = x \cdot \sin\alpha = 2250 \cdot \sin 22{,}5 \approx 861\,\text{m}$



1086 - K7 - DR - AN 3.3 - Druck in einem Behälter - Dimensionen Mathematik Schularbeiten Trainer 7

86. Die Funktion P beschreibt die Höhe des Drucks in einem Behälter in Abhängigkeit von der Zeit t während eines Experiments. ____/3

Es gilt: $P(t) = -\frac{1}{16}t^4 + 2t^2 + 9$, P in bar, t in Minuten (gemessen ab dem Zeitpunkt t_0).

Aufgabenstellung:

(a) Bei der Lösung einer vorgegebenen Fragestellung geht einer Person vom Ansatz $P'(t) = 0$ aus und erhält nach den folgenden dargestellten Lösungsschritten die Lösungen t_1 und t_2.

$-\frac{1}{4}t^3 + 4t = 0 \qquad | \cdot (-\frac{4}{t})$

$t^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 16 \Rightarrow t_1 = 4; t_2 = -4$

Gib die dem Ansatz zugrunde liegende Fragestellung an und erläutere, inwieweit der weitere Lösungsweg fehlerhaft ist. Schildere den korrekten Lösungsweg.

(b) Das Experiment endet zu dem Zeitpunkt t_E, in dem der Druck auf den Wert 0 bar gesunken ist. Berechne t_E und veranschauliche die Entwicklung des Drucks im Zeitintervall $[0; t_E]$ grafisch.

Ermittle, in welchem Zeitpunkt der Druck während des Experiments mit der größten Geschwindigkeit zunimmt.

(c) Einer Person behauptet, die Gleichung $P(t) = 26$ besitze zwar von einem „rein mathematischen Standpunkt aus gesehen" Lösungen, was doch aber im Kontext des Beispiels unmöglich erscheint. Nimm zu dieser Aussage Stellung.

Lösungserwartung:

(a) Mögliche Fragestellung: Wann nimmt der Druck im Behälter einen extremen Wert an? (Wo liegen die Extrempunkte dieser Funktion?)

Infolge der Division der Gleichung durch die Variable t geht die Lösung t_1 verloren.

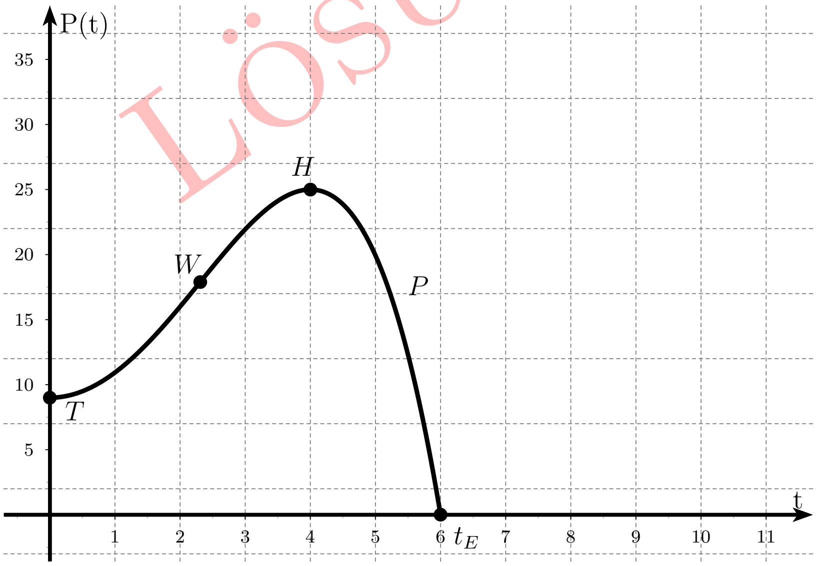
$-\frac{1}{4}t^3 + 4t = 0 \Rightarrow t^3 - 16t = 0 \Rightarrow t \cdot (t^2 - 16) = 0 \Rightarrow t_1 = 0, t_{2,3} = \pm 4$

(b) Berechnung des Zeitpunkts t_E mittels Substitution $\Rightarrow$ reelle Lösungen: $t_E = 6$ und $t_2 = -6$, wobei t_2 nicht in Frage kommt.

Ermittlung der Zeitpunkts mit der größten Geschwindigkeit der Druckzunahme:

$P'(t)$ liefert die Änderungsgeschwindigkeit des Drucks zum Zeitpunkt t. Diese erreicht ihren Maximalwert, wenn $P''(t) = 0$ beträgt. Anders ausgedrückt, verändert sich der Druck mit der größten Geschwindigkeit an der Wendestelle der Funktion.

$P''(t) = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \pm 2{,}31 \Rightarrow$ Nach 2,31 Minuten nimmt der Druck im Behälter mit der größten Geschwindigkeit zu.



(c) Da der Druck nach 4 Minuten mit $P(4) = 25$ einen Maximalwert erreicht, kann die Gleichung $P(t) = 26$ keine sinnvolle/realistische Lösung liefern.

$-\frac{1}{16}t^4 + 2t^2 + 9 = 26$

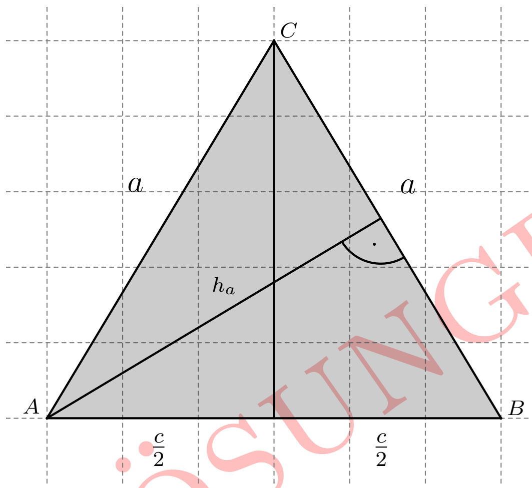
Als Lösung erhält man die leere Menge, die Gleichng weist nur in $\mathbb{C}$ liegende „imaginäre“ Lösungen auf.

1087 - K5 - TR - AG 4.1 - Gleichschenkliges Dreieck - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

87. Von einem gleichschenkligen Dreieck kennt man die Höhe $h_a = 286$ und die Länge eines Schenkels $a = 314$. ____/0

(a) Untersuche rechnerisch, ob es sich um ein spitz-, recht- oder stumpfwinkliges Dreieck handelt.

(b) Berechne die Länge der Basis c und die Höhe h_c ohne Verwendung des Sinus- und Cosinussatzes.



Lösungserwartung:

(a) $\sin\gamma = \frac{h_a}{a} = \frac{286}{314} \Rightarrow \gamma \approx 65{,}6° \Rightarrow \alpha = \beta = 57{,}2° \Rightarrow$ Das Dreieck ist spitzwinklig.

(b) $\cos\alpha = \frac{0{,}5c}{a} \Rightarrow c = 2a \cdot \cos\alpha \approx 340{,}3 \Rightarrow h_c = \frac{a \cdot h_a}{c} \approx 263{,}9$

1088 - K5 - TR - Beweis - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

88. Beweise, dass $\cos 45° = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$ ist ____/0

Lösungserwartung:

Ein rechtwinkliges, gleichschenkliges Dreieck hat den Scheitelwinkel 45°. Es wird durch die Höhe in zwei rechtwinklige, gleichschenklige Dreiecke geteilt. Es gilt: $h = \frac{c}{2}$.

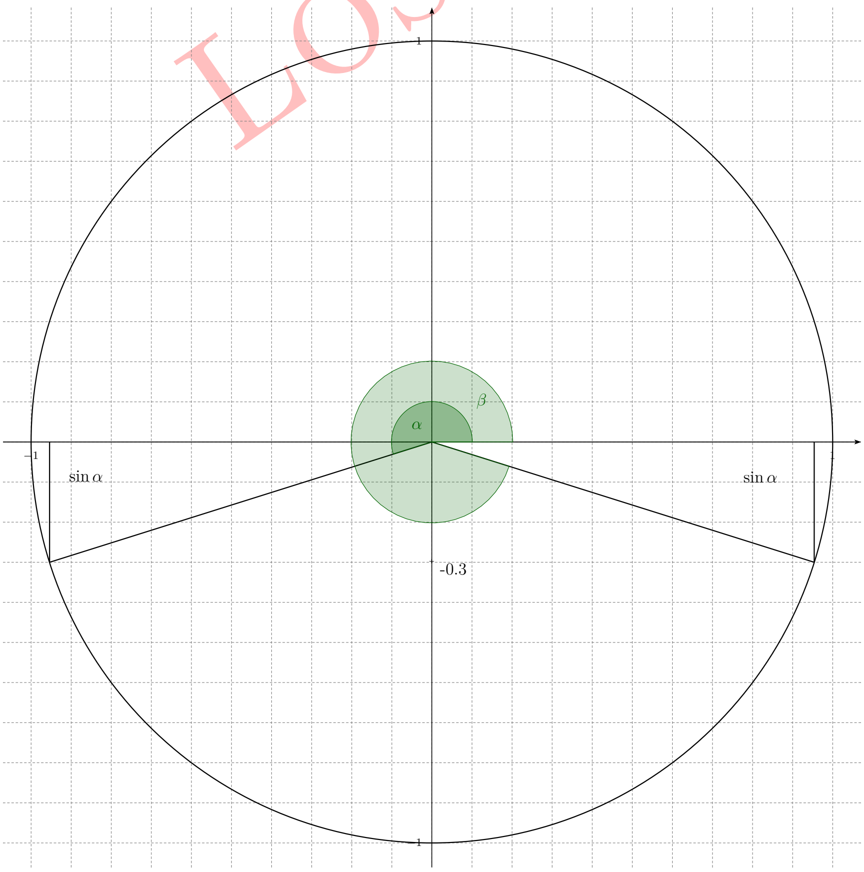
Daher: $a^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + h^2 = 2\cdot\left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{c^2}{2}$ und $\cos 45° = \frac{\frac{c}{2}}{a} = \frac{\frac{c}{2}}{\frac{c}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}\cdot c}{2\cdot c} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$

1089 - K5 - TR - Sinuswerte - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

89. Wie viele Winkel haben den Sinuswert −0,3? Begründe mit einer Skizze! ____/0

Lösungserwartung:

Der Sinus ist die y-Koordinate eines Punktes am Einheitskreis. Es gibt 2 Punkte mit y-Koordinate gleich −0,3. Daher gibt es 2 Winkel mit Sinuswert −0,3. (siehe Abbildung)



1090 - K7 - DR, KZ - AG 2.3, AG-L 2.6, AG-L 2.8, AG-L 4.4, AN 3.3 - Quadratische Gleichungen, komplexe Zahlen und Funktionen - Dimensionen Mathematik Schularbeiten Trainer 7

90. Gegeben ist eine quadratische Gleichung der Form $x^2 + p \cdot x + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{R}$. ____/3

Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Gib an, wie viele reelle Lösungen eine Gleichung des angegebenen Typs haben kann, und erläutere, inwieweit die mögliche Anzahl reeller Lösungen von den Parametern p und q abhängt.

(b) Bestimme die Werte der beiden Parameter p und q so, dass die komplexe Zahl $x_1 = 2 + i$ eine Lösung der Gleichung ist.

Gib die weitere Lösung x_2 der Gleichung bei der entsprechenden Wahl von p und q an.

Führe für x_2 die Probe aus und gib x_2 in Polardarstellung an.

Begründe, dass es unmöglich ist, zu sagen, welche der beiden Lösungen x_1 bzw. x_2 kleiner als die andere ist.

(c) Die beiden Zahlen x_1 und x_2 sind (komplexe) Nullstellen einer Polynomfunktion f zweiten Grades mit $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ und $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Durch die Angabe einer weiteren Bedingung kann f eindeutig festgelegt werden. Begründe ausführlich, warum sich dazu nur genau eine der anschließend angeführten sechs Bedingungen eignet. Gib an, um welche Bedingung es sich handelt, bestimme $f(x)$ und zeichne den Graphen von f.

(1)	$f'(1) = 0$	(2)	$f'(2) = 1$	(3)	$f'(2) = 0$	(4)	$f(2) = 1$	(5)	$f(2) = 0$	(6)	$f''(2) = 0$

Lösungserwartung:

(a) $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \Rightarrow D = \frac{p^2}{4} - q$

- $D > 0 \Rightarrow$ Es liegen zwei reelle Lösungen vor.

- $D = 0 \Rightarrow$ Die Gleichung hat genau eine reelle Lösung: $x_{1,2} = -\frac{p}{2}$
- $D < 0 \Rightarrow$ Es kann keine reelle Lösung ermittelt werden.

(b) Wenn $x_1 = 2 + i$ die erste Lösung der quadratischen Gleichung ist, muss die zweite Lösung $x_2 = 2 - i$ sein. Nach den Sätzen von Vieta ergibt dies: $x^2 - 4x + 5 = 0$

Probe für x_2: $(2 - i)^2 - 4 \cdot (2 - i) + 5 = 0$

Polardarstellung von $x_2 = 2 - i = (\sqrt{5}|333{,}43°)$

Größenvergleich $x_1 - x_2$

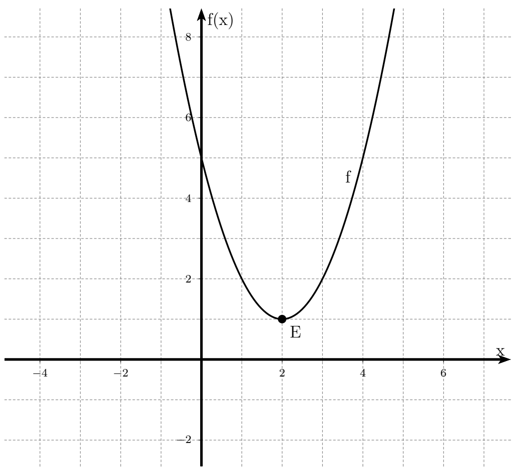
angenommen:
$2 + i > 2 - i \mid -2 + i$
$i > 0 \mid : 2$
$i^2 > 0 \mid \cdot i (i > 0)$
$-1 > 0$ falsche Aussage

angenommen:
$2 + i < 2 - i \mid -2 + i$
$i < 0 \mid : 2$
$i^2 > 0 \mid \cdot i (i < 0)$
$-1 > 0$ falsche Aussage

(c) Da die beiden (komplexen) Nullstellen $x_{1,2} = 2 \pm i$ lauten, muss der Extrempunkt an der Stelle $x = 2$ liegen. Es muss also gelten: $f'(2) = 0$. Somit scheiden die Bedingungen (1) und (2) aus. Bedingung (3) liefert keine zusätzliche Information. Bedingung (5) kann nicht zutreffen, da $x = 2$ keine weitere Nullstelle sein kann. Bedingung (6) kommt nicht in Frage, da bei einer Polynomfunktion 2. Grades für alle x gilt: $f''(x) \neq 0$.

Bedingung (4) trifft zu.

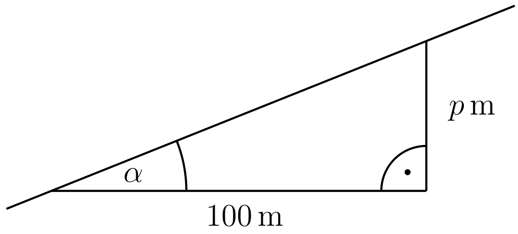
$f(x) = x^2 - 4x + 5$



1091 - K5 - TR - AG 4.1 - Steigung von Straßen - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

91. Die Steigung von Straßen wird in Prozent angegeben. ____/0

Eine Steigung von $p\,\%$ bedeutet, dass pro 100 Meter in waagrechter Richtung die Höhe um p Meter zunimmt. Der zugehörige Winkel α heißt Steigungswinkel.



(a) Die Katschbergstraße über den Radstädter-Tauern-Pass weist teilweise Steigungswinkel von 8,5° auf. Berechne die Steigung der Straße in Prozent und welcher Höhenunterschied auf einem 400 m langen Straßenstück überwunden wird.

(b) Die steilste Straße der Welt ist laut *Guiness-Buch der Rekorde* die Baldwin Street in Neuseeland (`http://de.wikipedia.org/wiki/Baldwin_Street`). Die maximale Steigung der 200 m langen Straße beträgt 35 %. Berechne den Steigungswinkel.

Lösungserwartung:

(a) $\tan\alpha = \frac{p}{100} \Rightarrow \tan 8{,}5° \approx 0{,}15 \Rightarrow$ ca. 15 % Steigung
Höhenunterschied $h = 400 \cdot \sin 8{,}5° \approx 59{,}12\,\text{m}$

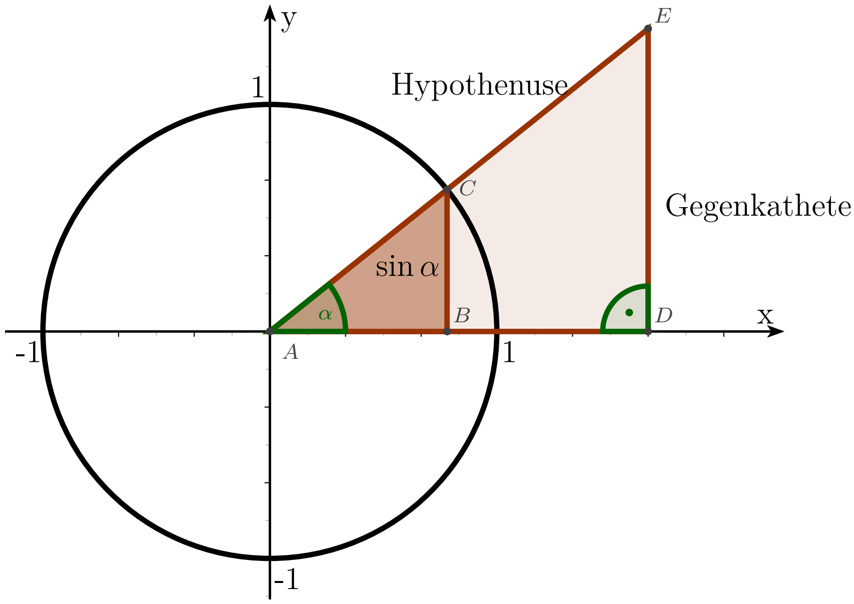
(b) $\tan^{-1} 0{,}35 \approx 19{,}29°$ Steigungswinkel

1092 - K5 - TR - AG 4.1 - Beweis Sinus - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

92. Weise ausgehend von der Definition des Sinus am Einheitskreis nach, dass in jedem rechtwinkligen Dreieck gilt: ____/0

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}}$$

Lösungserwartung:



Die Dreiecke ABC und ADE sind ähnlich, daher gilt:

$\sin\alpha : 1 =$ Gegenkathete : Hypothenuse

1093 - K7 - DR, VAG3, RF - AG 3.4, AG-L 2.7, AG-L 3.9, FA 1.4, FA 4.3, AN 3.3 - Gleichungssysteme im Zsh. mit Funktionen und Ebenen - Dimensionen Mathematik Schularbeiten Trainer 7

93. Die nachfolgenden Gleichungen beschreiben drei Ebenen E_1, E_2 und E_3 im abgebildeten Koordinatensystem: ____/3

$$\begin{aligned} E_1: \quad 4a - 2b + c &= 8 \\ E_2: \quad c &= 4 \\ E_3: \quad a - b + c &= 5 \end{aligned}$$

Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Gib eine Parameterdarstellung der Schnittmenge von E_1 und E_2 an. Beschreibe die Schnittmenge.

(b) $\boxed{\text{A}}$ Bestimme rechnerisch die gemeinsame Schnittmenge aller drei Ebenen.

Die gegebenen drei Gleichungen können mit Eigenschaften einer Polynomfunktion f in Verbindung gebracht werden, wobei die Gleichung der Funktion f von der Form $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, $a, b \in \mathbb{R}$ ist. Die Gleichungen beschreiben die Funktionswerte von f an bestimmten Stellen. Erläutere, um welche Stellen und Funktionswerte es sich handelt, und zeichne den Graphen der Funktion.

Erläutere den Zusammenhang zwischen dem Funktionsgraphen und den gegebenen drei Gleichungen.

(c) $\boxed{\text{A}}$ Angenommen, die dritte Ebene $E_3 : a - b + c = 5$ wird durch die Ebene $E_4 : -2a + b = 0$ ersetzt. Gib die Schnittmenge $E_1 \cap E_2 \cap E_4$ an.

Interpretiere den Sachverhalt einerseits anhand der Lagebeziehung der drei Ebenen geometrisch, anderseits anhand der durch die Gleichungen $4a - 2b + c = 8$, $c = 4$ und $-2a + b = 0$ beschriebenen Eigenschaften der Funktion f. Gehe dabei davon aus, dass die Gleichung $-2a + b = 0$ eine Bedingung hinsichtlich des Wertes der Ableitungsfunktion der Funktion f an einer bestimmten Stelle ausdrückt.

Lösungserwartung:

(a) $g : X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

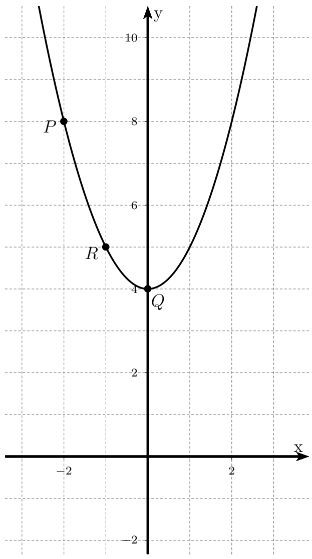
Die beiden Ebenen schneiden einander in einer Schnittgeraden, die durch zwei Punkte, die auf beiden Ebenen liegen, festgelegt werden kann.

(b) Die drei Ebenen schneiden einander im Punkt $S = (1|0|4)$.

Polynomfunktion: $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

$$\begin{array}{lrcll} f(-2) = 8 : & 4a - 2b + c & = & 8 & (\text{vgl. } E_1) \\ f(0) = 4 : & c & = & 4 & (\text{vgl. } E_2) \\ f(-1) = 5 : & a - b + c & = & 5 & (\text{vgl. } E_3) \end{array}$$

Der Graph der Funktion $f(x) = x^2 + 4$ enthält die Punkte $P = (-2|8)$, $Q = (0|4)$ und $R = (-1|5)$.



(c) Das Gleichungssystem hat eine leere Lösungsmenge $E_1 \cap E_2 \cap E_3 = \{\}$. Geometrische betrachtet liegen drei Ebenen vor, die nicht parallel zueinander sind und dennoch keinen gemeinsamen Punkt besitzen. Die Schnittgerade von E_1 und E_2 verläuft parallel zu E_4.

Polynomfunktion: $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, $f'(x) = 2a \cdot x + b$

$$\begin{array}{llcll} f(-2) = 8: & 4a - 2b + c & = & 8 & (\text{vgl. } E_1) \\ f(0) = 4: & c & = & 4 & (\text{vgl. } E_2) \\ f'(-1) = 0: & 2a + b & = & 0 & (\text{vgl. } E_4) \end{array}$$

Da der Graph einer möglichen Funktion f durch die Punkte $P = (-2|8)$ und $Q = (0|4)$ verlaufen soll, zwei Punkte mit unterschiedlichen y-Koordinaten, kann der Parabelscheitel nicht die x-Koordinate $x = -1$ haben.

1094 - K6 - VAG3 - AG-L 3.7, AG-L 3.6, AG 3.5, AG 3.3 - Die Kraft - Dimensionen Mathematik Schularbeiten Trainer 7

94. Zwei in einer Ebene wirkende Kräfte F_1 und F_2 ergeben zusammen die resultierende Kraft F_R. ____/3

Die Größe der Kraft F_R beträgt 40 N. Alle Kräfte setzen im Punkt $A = (2|0)$ an und F_R wirkt vom Punkt A aus in die Richtung des Punktes $B = (6|3)$. F_1 wirkt in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Beschreibe die resultierende Kraft F_R durch einen Vektor und berechne den Winkel zwischen F_1 und F_R.

Erläutere, inwieweit es möglich ist, durch Änderung einer Koordinate des Vektors $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ die Kraft F_R alleine mithilfe des Vektors F_1 darzustellen.

(b) Angenommen, die Wirkrichtung von F_2 ist zu jener von F_1 normal. Bestimme mittels Rechnung die unter dieser Bedingung erforderlichen Größen der Kräfte von F_1 und F_2 in N.

(c) Angenommen, die Kraft F_2 wirkt in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Begründe rechnerisch, ausgehend vom Ansatz $t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = F_R$, dass es bei dieser Wirkrichtung von F_2 keine Möglichkeit gibt, die Größen der Kräfte F_1 und F_2 so festzulegen, dass F_R resultiert.

Lösungserwartung:

(a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB_0} = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}}{5}$ (Vektor in Richtung F_R mit Länge 1)

Der Vektor F_R hat die Länge 40. $F_R = 40 \cdot \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}}{5} = 8 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 24 \end{pmatrix}$

Berechnung des Winkels α zwischen F_1 und F_R: $\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}}{5 \cdot \sqrt{5}} \Rightarrow$ $\alpha = 63{,}43°$

Kraft F_R allein mit F_1 darstellen:

Soll der Vektor $\begin{pmatrix} 32 \\ 24 \end{pmatrix}$ nur mithilfe des Vektors $\begin{pmatrix} 2 \\ y \end{pmatrix}$ dargestellt werden, so muss gelten:

$\begin{pmatrix} 32 \\ 24 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow k = 16; y = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$.

Ändert man also die y-Koordinate des Vektors auf $\frac{3}{2}$, so gilt:

$\begin{pmatrix} 32 \\ 24 \end{pmatrix} = 16 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

(b) Der Normalvektor zu $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit der nötigen Orientierung lautet $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Der Vektor $F_R = \begin{pmatrix} 32 \\ 24 \end{pmatrix}$ wird als Linearkombination dieser beiden Vektoren dargestellt.

$\begin{pmatrix} 32 \\ 24 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow b = 16, a = 8$

$F_R = F_1 + F_2$ bzw. $\begin{pmatrix} 32 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 \\ 32 \end{pmatrix}$

$|F_1| \approx 17{,}89$ und $|F_2| \approx 35{,}78$

Die Größe der Kraft F_1 beträgt 17,89 N, die der Kraft F_2 35,78 N.

(c) $\begin{pmatrix} 32 \\ 24 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow s = 16, t = -8$:

Die Kraft F müsste also mit entgegengesetzter Orientierung eingesetzt werden, um zusammen mit F_2 die resultierende Kraft F_R zu ergeben.

1095 - K7 - VAG2 - AG 3.2, AG 3.3, AG 3.4, AG-L 3.6, FA 4.2, FA 4.3 - Elektroboot - Dimensionen Mathematik Schularbeiten Trainer 7

95. Ein Plan wird in einem zweidimensionalen Koordinatensystem (Längeneinheit = 1 m) dargestellt. Die Geraden $g_1 : x = -30$ und $g_2 : x = 10$ kennzeichnen die beiden Ufer eines Flusses, dessen Strömungsgeschwindigkeit 3 m/s beträgt. Der vom Wasser pro Sekunde zurückgelegte Weg wird im Koordinatensystem durch den Vektor $\vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ beschrieben. Ein als Punkt modelliertes Elektroboot startet im Punkt $A = (-30|12)$ und erreicht im Punkt B das andere Ufer. Der „Boot-Geschwindigkeitsvektor" $\vec{b}$ beschreibt im Weiteren jenen Weg, den das Boot bei stehendem Gewässer im Plan pro Sekunde zurücklegen würde. ____/3

Aufgabenstellung:

(a) Bestimme für $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ den unter Berücksichtigung der Strömung des Flusses tatsächlich pro Sekunde zurückgelegten Weg sowie die tatsächlich erreichte Geschwindigkeit des Bootes.

Ermittle, nach welcher Zeit und in welchem Punkt das Boot unter diesen Umständen das andere Ufer erreicht.

(b) Damit das Boot das andere Ufer unmittelbar gegenüber des Punktes A erreicht, also im Punkt $B = (10|12)$, ist ein Kurs im Sinne eines „Vorhaltewinkels“ gegen die Strömung zu steuern. Bestimme den zugehörigen Vektor $\vec{b}$ so, dass die Überquerung des Flusses genau 10 Sekunden dauert, und gib den erforderlichen „Vorhaltewinkel“ an.

(c) Innerhalb der ersten 15 Sekunden der Flussüberquerung gilt: $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Anschließend lässt die Motorleistung des Elektroboots sukzessive nach. Sie ist aber bis zum Erreichen des anderen Ufers so groß, dass beim Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ der in „waagrechte Richtung“ zurückgelegte Weg konstant $2\,\mathrm{m/s}$ beträgt. Die „gegen die Strömung aufgewendete Komponente“ lässt aber um $0{,}5\,\mathrm{m}$ pro Sekunde nach.

Ergänze in der abgebildeten Tabelle die Positionen $P_t = (x_t|y_t)$ des Bootes zu den angeführten Zeitpunkten im Koordinatensystem.

Zeitpunkt t in s	Position $P_t = (x_t\|y_t)$ des Boots zum jeweiligen Zeitpunkt
15	
16	
17	
18	
19	
20	

Für $t > 15$ bis zum Erreichen des Ufers kann der Zusammenhang zwischen den Koordinaten x_t und y_t durch eine Polynomfunktion f beschrieben werden: $y_t = f(x_t)$. Ermittle die Gleichung dieser Funktion f (welcher Grad ist angemessen?) sowie an welcher Position B und unter welchem Winkel das Boot am rechten Flussufer anlegt.

Angenommen, der Fluss weist eine Breite von $50\,\mathrm{m}$ auf und das rechte Flussufer wird durch die Gerade $x = 20$ gekennzeichnet. Begründe, warum in diesem Fall die Bewegungsbahn des Boots unter den beschriebenen Bedingungen nicht bis zum Anlegen am rechten Flussufer durch den Graphen der Funktion f beschrieben wird.

Lösungserwartung:

(a) Das Boot bewegt sich in Richtung des Vektors $\vec{b} + \vec{f} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, dessen Länge $\sqrt{5}$ beträgt. Somit bewegt es sich mit einer Geschwindigkeit $v = \sqrt{5}\,\text{m/s}$ längs der Geraden $g: X = \begin{pmatrix} -30 \\ 12 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Berechnung der Koordinaten des Landepunkts $B = (10|y_B)$:

$$\begin{pmatrix} 10 \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ 12 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow s = 20 \text{ und } y_B = -8$$

Das Boot erreicht nach 20 Sekunden das andere Ufer im Punkt $B = (10|-8)$.

(b) Damit das Boot in 10 Sekunden die Strecke $\overline{AB}$ schafft, muss der resultierende Vektor aus Strömungsgeschwindigkeitsvektor $\vec{f}$ und „Boot-Geschwindigkeitsvektor" $\vec{b}$ ein Zehntel ($\frac{1}{10}$) des Vektors $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \end{pmatrix}$, also $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, betragen.

$$\vec{b} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Berechnung des Vorhaltewinkels α : $\tan(\alpha) = \frac{3}{4} \Rightarrow \alpha = 36{,}87°$

(c) Bestimmung der Position des Boots:

$$\vec{v} = \vec{b} + \vec{f} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X = A + 15 \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} -30 \\ 12 \end{pmatrix} + 15 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Nach 15 Sekunden erreicht das Boot den Punkt $X = (0|12)$. Für die restlichen Werte siehe Tabelle:

Zeitpunkt t in s	Position $P_t = (x_t\|y_t)$ des Boots zum jeweiligen Zeitpunkt
15	(0|12)
16	(2|11,5)
17	(4|10,5)
18	(6|9)
19	(8|7)
20	(10|4,5)

Ermittlung der Polynomfunktion:

Ansatz: $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

$$\begin{aligned} f(0) = 12: \quad & 12 &=& \quad \text{c} \\ f(2) = 11{,}5: \quad & 11{,}5 &=& \quad \text{4a+2b+c} \\ f(4) = 10{,}5: \quad & 10{,}5 &=& \quad \text{16a+4b+c} \end{aligned}$$

$f(x) = -\frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{8}x + 12$

Bewegungsbahn des Boots bei Flussbreite 50 m:

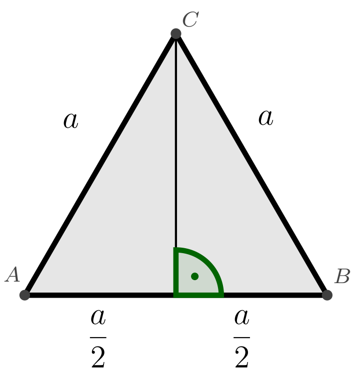
Nach 32 Sekunden wenn sich das Boot an der Stelle $C = (12|1{,}5)$ befindet, ist keine gegen die Strömung aufgewendete Komponente mehr vorhanden und das Boot wird gleichmäßig durch die Strömung des Flusses in Richtung $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ abgetragen. Es erreicht das Ufer im Punkt $B = (20|-10{,}5)$. Der Weg von C nach B wird durch eine Gerade mit der Gleichung

$g: X = \begin{pmatrix} 12 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ beschrieben.

1096 - K5 - TR - AG 4.1 - Beweis Sinus 30 Grad - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

96. In der Abbildung ist ein Gleichseitiges Dreieck dargestellt. ____/0

Begründe mithilfe der Abbildung: $\sin 30° = 0{,}5$



Lösungserwartung:

In einem gleichseitigen Dreieck sind alle Winkel gleich 60° und die Höhe ist auch die Winkelsymmetrale.

Daher folgt: $\sin 30° = \frac{0{,}5a}{a} = 0{,}5$

1094 - K7 - KZ - AG 2.3, AG-L 1.5, FA 2.4, FA 2.2, FA 2.1, AG-L 4.4 - Quadratische Gleichungen im Zsh. mit komplexen Zahlen - Dimensionen Mathematik Schularbeiten Trainer 7

97. Gegeben ist die quadratische Gleichung $x^2 + u \cdot x = w$ mit $u, w \in \mathbb{R}$. ____/3

Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Wenn die Parameter die Werte $u = 6$ und $w = -13$ annehmen, besitzt die Gleichung in der Grundmenge $\mathbb{C}$ die beiden Lösungen x_1 und x_2. Gib diese beiden Lösungen an.

(b) Bei der nachfolgenden Aufgabenstellung gilt $u = 4$. Bestimme, welchen Wert der Parameter w annehmen muss, damit die in der Einleitung angeführte quadratische Gleichung genau eine Lösung besitzt. Diese eine Lösung wird mit x_3 bezeichnet. Gib x_3 an.

(c) Für eine Zahlenmenge $M \in \mathbb{C}$, mit $x_3 \in M$, gilt: Zwischen Realteil a und Imaginärteil b der zu M gehörenden Zahlen besteht ein funktionaler Zusammenhang, der sich folgenderweise äußert: Ist $a+b\cdot i$ eine in M liegende Zahl, dann muss auch $(a+1)+(b+2)\cdot i$ eine in M liegende Zahl sein.

Zeichne M in der Gauß'schen Zahlenebene ein und beschreiben den oben angesprochenen Zusammenhang zwischen Real- und Imaginärteil mithilfe einer Gleichung.

(d) Weise nach, dass genau eine der beiden Zahlen x_1 oder x_2 zu M gehört, und gib diese Zahl in Polardarstellung an.

Lösungserwartung:

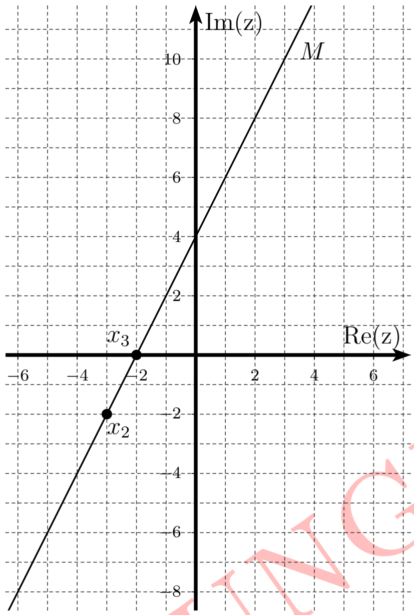
(a) $x^2 + 6x + 13 = 0 \Rightarrow x_1 = -3 + 2i$ und $x_2 = -3 - 2i$

(b) $x^2 + 4x - w = 0 \Rightarrow x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4+w}$

Damit nur eine Lösung herauskommt, muss $w = -4$ gelten $\Rightarrow x_3 = -2$

(c) Zahlenmenge M in der Gauß'schen Zahlenebene:

$a + b \cdot i \in M \Rightarrow (a+1) + (b+2) \cdot i \in M$: Vergrößert man den Realteil um 1, so vergrößert sich der Imgaginärteil um 2. Somit liegen alle $z \in M$ auf einer Geraden mit der Steigung 2 bzw. dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ in der Gauß'schen Zahlenebene durch x_3.



Zusammenhang zwischen Real- und Imaginärteil:

Der Zusammenhang zwischen a und b kann aus der obenstehenden Zeichnung abgelesen werden: $b = 2a + 4$

(d) Nachweis der Zugehörigkeit zu M:

$x_1 = -3 + 2i$ und $x_2 = -3 - 2i$

Setzt man für x_1 den Realteil $a = -3$ und den Imaginärteil $b = 2$ in die Gleichung $b = 2a + 4$ ein, so erhält man mit $2 = 2 \cdot (-3) + 4$ eine falsche Aussage. Somit ist x_1 kein Element von M.

Für x_2 erhält man: $-2 = 2 \cdot (-3) + 4$ bzw. $-2 = -2 \Rightarrow x_2 \in M$.

Polardarstellung von x_2 :

Da sich x_2 im 3. Quadranten befindet, muss gelten: $180° < \varphi < 270°$

$x_2 = (\sqrt{13}|213{,}69°)$

1098 - K7 - KZ - FA 1.6, AG-L 1.5, AG-L 4.4 - Quadratische Gleichungen im Zsh. mit komplexen Zahlen - Dimensionen Mathematik Schularbeiten Trainer 7

98. Gegeben ist die quadratische Gleichung $x^2 + 5 = 4x$. ____/3

Aufgabenstellung:

(a) Erläutere anhand der Graphen der beiden Funktionen f und f mit $f(x) = x^2 + 5$ und $g(x) = 4x$, warum die Gleichung keine reelle Lösungen besitzt.

(b) $\boxed{\text{A}}$ In der Grundmenge $\mathbb{C}$ besitzt die obige Gleichung die beiden Lösungen x_1 und x_2. Gib x_1 und x_2 an; x_1 ist dabei jene Lösung, die einen positiven Imaginärteil aufweist.

Berechne $x_3 = \frac{x_1+x_2}{x_1-x_2}$ und gib die Polardarstellung von x_3 an.

(c) Für eine Zahlenmenge $M \in \mathbb{C}$ gilt: Zu M gehören genau jene Zahlen, bei denen das Quadrat des Realteils um 2 größer als der Imaginärteil ist.

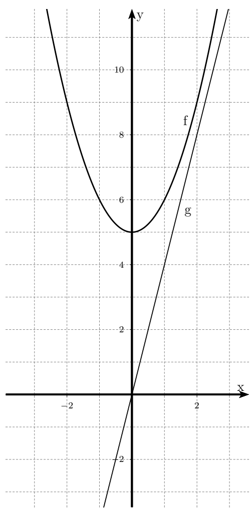
Zeichne M in der Gauß'schen Zahlenebene ein und beschreibe den oben angesprochenen Zusammenhang zwischen Real- und Imaginärteil mithilfe eine Gleichung.

Zeige, dass x_3 zu M gehört und dass M zwar auch reelle, aber keine rationalen Zahlen beeinhaltet.

Lösungserwartung:

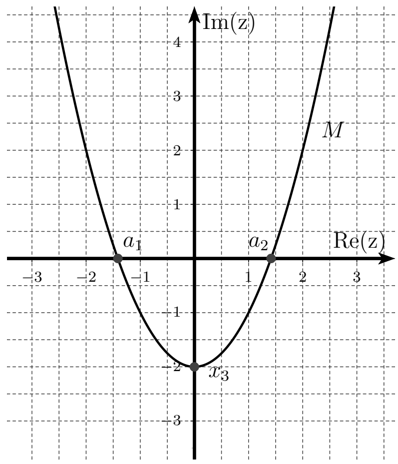
(a) $f(x) = x^2 + 5$, $g(x) = 4x$

Der Graph der Funktion f ist eine um 5 nach oben verschobene Parabel, die vom Graphen der homogenen linearen Funktion g, einer Geraden durch den Koordinatenursprung mit Steigung 4, nicht geschnitten wird.



(b) $x_1 = 2 + i$, $x_2 = 2 - i \Rightarrow x_3 = -2i = (2|270°)$

(c) Für alle $z = a + b \cdot i$ muss folgende Bedingung gelten, um Elemente von M zu sein: $b = a^2 - 2$.
In der Gauß'schen Zahlenebene stellt die Menge M eine nach oben offene Parabel durch x_3 dar.
Die Schnittpunkte mit der reellen Achse stellen die einzigen reellen Elemente der Menge M dar. $0 = a^2 - 2$ bzw. $a^2 = 2$ und $a_{1,2} = \pm\sqrt{2}$
$\sqrt{2}$ ist eine irrationale Zahl.

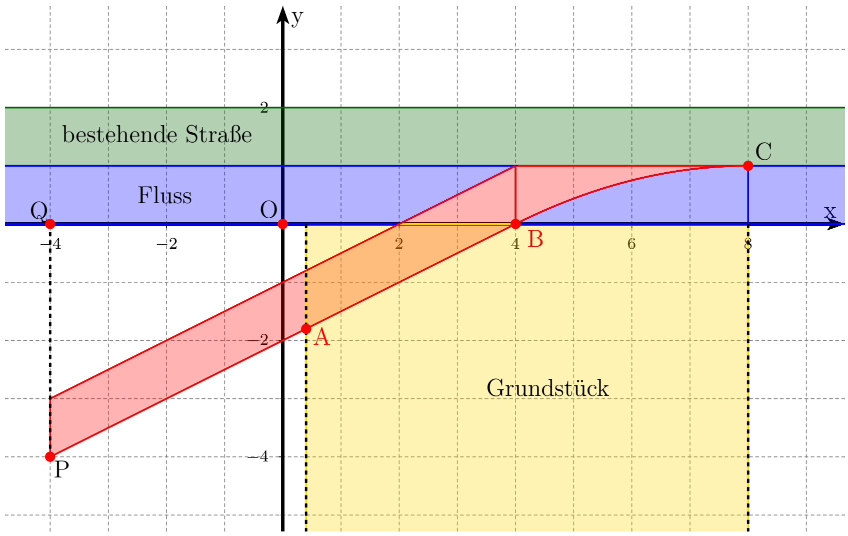


1099 - K7 - VAG2, DR, RF - FA 2.2, AG 4.1, AG-L 4.3, AG 4.2, AN 3.3 - Ein neues Verkehrskonzept - Dimensionen Mathematik Schularbeiten Trainer 7

99. Ein Plan wird in einem Koordinatensystem dargestellt, die Längeneinheit entspricht auf beiden Achsen in Wirklichkeit 5 m, die positive y-Achse zeigt genau nach Norden. Der Koordinatenursprung O wurde in einen bekannten, direkt an einem Flussufer gelegenen Vermesseungspunkt gelegt. ____/3

Wie in der provisorischen Skizze unten dargestellt, schließt südlich des Flusses ein rechteckiges Grundstück an, dessen westliche Grenzlinie durch den Punkt A verläuft. Es ist bekannt, dass der Abstand zwischen O und A in Wirklichkeit 10 m, im Plan also 2 LE beträgt, die exakten Koordinaten von A im Plan sind aber unbekannt.

Im Zuge eines neuen Verkehrskonzepts ist eine durch $P = (-4|-4)$ verlaufende, geradlinige Straße geplant, die zwischen A und $B = (4|0)$ durch das Grundstück führt. Den nördlichen der Strecke AB gelegenen Teil des Grundstücks muss der Eigentümer gegen eine Ablöse abtreten. Im Anschluss an den Punkt B geht die Straße knickfrei in einen Kurvenbogen über, bis sie im Punkt $C = (8|1)$ wiederum knickfrei in eine bereits bestehende, direkt längs des nördlichen Flussufers verlaufende Straße einmündet.



Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Beschreibe jene Gerade im Plan, längs der die Straße durch die Punkte P, A und B verläuft, durch eine Gleichung.

Der zwischen Flussufer und Straße gelegene Winkel wird mit α bezeichnet. Berechne α, gib das Ergebnis im Gradmaß an, runde dabei auf zwei Dezimalen.

(b) Eine Person argumentiert: „Die beiden Dreiecke PBQ und ABO weisen einen gleichen Winkel (nämlich α) auf und das Verhältnis der beiden 'Katheten' ist gleich (nämlich $4 : 8 = 2 : 4$). Somit muss das Dreieck ABO ähnlich dem Dreieck PBQ sein. Folglich ist auch das Dreieck ABO rechtwinklig, woraus wiederum geschlossen werden kann, dass A genau südlich von O liegt und sich für die abzulösende Fläche $(4 \cdot 5\,\text{m} \cdot 2 \cdot \text{m}) \cdot 0{,}5 = 100\,\text{m}^2$ ergibt.“

Dies widerspricht aber den Tatsachen, denn in der Realität ist die abzulösende Fläche deutlich geringer und der Punkt A liegt eindeutig - wie im Plan angedeutet - in südöstlicher Richtung von O!

Kläre diesen Irrtum auf und ermittle die tatsächliche Position von A im Plan sowie die Größe der tatsächlich abzulösenden Fläche.

(c) $\boxed{\text{A}}$ Der Kurvgenbogen zwischen B und C kann durch eine Polynomfunktion f modelliert werden. Erläutere, welche Annahme über den Grad von f aufgrund der vorliegenden Information zweckmäßig erscheint.

Tatsächlich stellt sich heraus, dass bereits eine Funktion zweiten Grades alle zu berücksichtigenden Bedingungen erfüllt. Begründe die Richtigkeit dieses Sachverhalts und gib die Gleichung der Funktion f an.

Lösungserwartung:

(a) $\overrightarrow{PB} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow g: X = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow g: x - 2y = 4$

Für den Winkel α zwischen Straße und Fluss gilt: $\tan(\alpha) = \frac{4}{8} \Rightarrow \alpha = 26{,}57°$

(b) Gemäß der Angabe gilt im Dreieck ABO im Sinne des Sinussatzes:

$\frac{2}{\sin(26{,}57°)} = \frac{4}{\sin(\beta)} \Rightarrow \sin(\beta) = 0{,}895$

Unter Berücksichtigung der Definition des Sinus im Einheitskreis gibt es für β zwei Lösungen: $\beta_1 = 63{,}43°$ und $\beta_2 = 116{,}57°$.

Da der Punkt A von O aus in südöstlicher Richtung liegt, muss der Winkel $\beta_1 = 180° - \beta$ berechnet werden: $\beta = 90° - \alpha = 63{,}43° \Rightarrow \beta_1 = 116{,}57°$, $\gamma = \measuredangle A_1OB = 180° - \alpha - \beta_1 = 36{,}87°$

Die Fläche des Dreiecks A_1BO kann mithilfe der trigonometrischen Flächenformel für ein Dreieck ermittelt werden: $A = \frac{a \cdot b}{2} \cdot \sin(\gamma) = 60\,\mathrm{m}^2$

Für die Koordinaten des Punktes A gilt: $x = 2 \cdot \cos(36{,}87°) = 1{,}6$ und $y = -2\sin(36{,}87°) = -1{,}2 \Rightarrow A = (1{,}6|-1{,}2)$

(c) Der Graph der gesuchten Polynomfunktion f verläuft durch den Punkt $B = (4|0)$ und hat an der Stelle $x = 4$ die Tangentensteigung $\frac{1}{2}$. Weiters verläuft er durch den Punkt $C = (8|1)$ und hat hier eine waagrechte Tangente. Für diese vier Bedingungen scheint ein Ansatz der Form $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ zweckmäßig.

Sollte sich herausstellen, dass bereits eine Funktion zweiten Grades alle Bedingungen erfüllt, so muss der Koeffizient a den Wert 0 annehmen, also $f(x) = b \cdot x^2 + c \cdot x + d$.

$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d,\ f'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x^2 + c$

$$\begin{array}{lrcl} f(4) = 0: & 64a + 16b + 4c + d & = & 0 \\ f(8) = 1: & 512a + 64b + 8c + d & = & 1 \\ f'(4) = \frac{1}{2}: & 48a + 8b + c & = & \frac{1}{2} \\ f'(8) = 0: & 192a + 16b + c & = & 0 \end{array}$$

$a = 0, b = -\frac{1}{16}, c = 1, d = -3 \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{16}x^2 + x - 3$

1100 - K7 - RF, DR - AN 3.3 - Funktionenschar - Dimensionen Mathematik Schularbeiten Trainer 7

100. Gegeben sind Funktionen, deren Gleichungen folgende Form aufweisen: $f(x) = x + \frac{a}{x-1}$ mit $a \neq 0$. ____/3

Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Gib den maximalen Definitionsbereich von Funktionen dieser Art an und untersuche das asymptotische Verhalten dieser Funktionen.

(b) $\boxed{\text{A}}$ Berechne die Nullstellen der Funktion f für $a = -2$ und begründe durch Rechnung, dass bei dieser Parameterwahl die Funktion weder Extrem noch Wendestellen besitzt.

Skizziere den zugehörigen Funktionsgraphen.

(c) Erläutere den Zusammenhang zwischen dem Parameter a und der Anzahl der Extremstellen von f. Begründe deine Aussagen durch angemessene Berechnungen.

Skizziere typische Verläufe des Funktionsgraphen in Abhängigkeit von der Anzahl der vorhandenen Extremstellen.

(d) Weise unter Bezugnahme auf die Gleichungen der beiden Ableitungsfunktionen f' und f'' nach, dass nachfolgende Aussage zutrifft:

„Gibt es kein Intervall, in dem f streng monoton fallend ist, dann ist f im Intervall $(-\infty; 1)$ linksgekrümmt und im Intervall $(1; \infty)$ rechtsgekrümmt.“

Lösungserwartung:

(a) $f(x) = \frac{x^2-x+a}{x-1}$

Da der Nenner den Wert 0 nicht annehmen darf, lauter der maximale Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

Die Funktionswerte der Funktion $f(x) = x + \frac{a}{x-1}$ unterschieden sich von den Werten der Funktion $a(x) = x$ durch $\frac{a}{x-1}$, wobei dieser Unterschied für $x \mapsto \pm\infty$ immer kleiner wird. Somit ist die Funktion $a(x) = x$ eine (schräge) Asymptote von f. An der Definitionslücke (Polstelle) $x = 1$ liegt eine vertikale Asymptote vor.

(b) $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x-1}$

Nullstellen: $x_1 = 2, x_2 = -1$

$f'(x) = \frac{x^2-2x+3}{(x-1)^2}$

$f''(x) = \frac{-4}{(x-1)^3}$

Extremstellen:

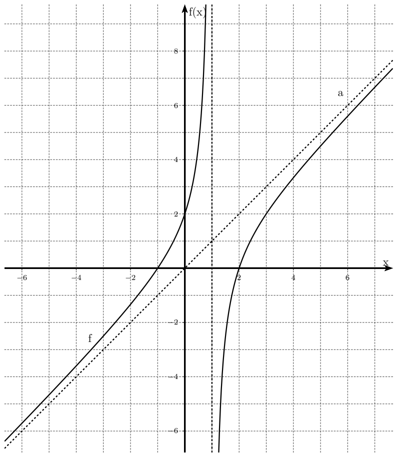
$f'(x) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-2}$

Keine Extremstellen.

Wendestellen:

$f''(x) = 0 \Rightarrow -4 = 0$

keine Wendestellen.



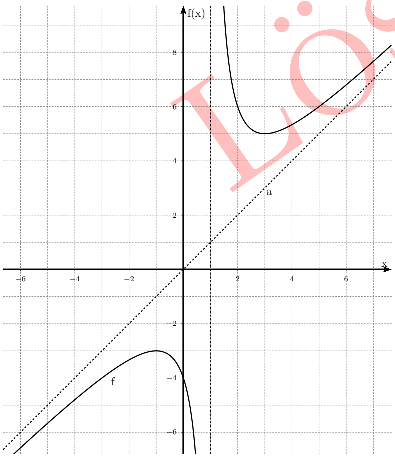
(c) $f(x) = \frac{x^2-x+a}{x-1}$ und $f'(x) = \frac{x^2-2x+1-a}{(x-1)^2}$

Berechnung möglicher Extremstellen: $f'(x) = 0$

$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{a} \Rightarrow$ für $a > 0$ liegen 2 Extremstellen vor, für $a < 0$ gibt es keine Extremstelle.

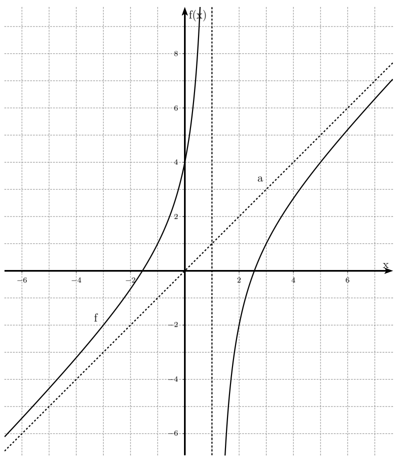
Für $a = 4 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2-x+4}{x-1}$

Extremstellen: $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$



Für $a = -4 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2-x-4}{x-1}$

Keine Extremst.: $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-4}$



(d) $f'(x) = 1 - \frac{a}{(x-1)^2}$ und $f''(x) = \frac{2a}{(x-1)^3}$

Wenn $f'(x) > 0$, für alle $x \in D$, muss gelten: $1 - \frac{a}{(x-1)^2} > 0 \Rightarrow 1 > \frac{a}{(x-1)^2}$

$(x-1)^2 > a \Rightarrow a < 0$

Für $a < 0$ nimmt die 2. Ableitung im Intervall $(-\infty; 1)$ nur positive Werte an, da sowohl Zähler als auch Nenner negativ sind. Der Graph der Funktion ist in diesem Intervall also linksgekrümmt.

Im Intervall $(1; \infty)$ ist der Zähler der 2. Ableitung negativ und der Nenner positiv.

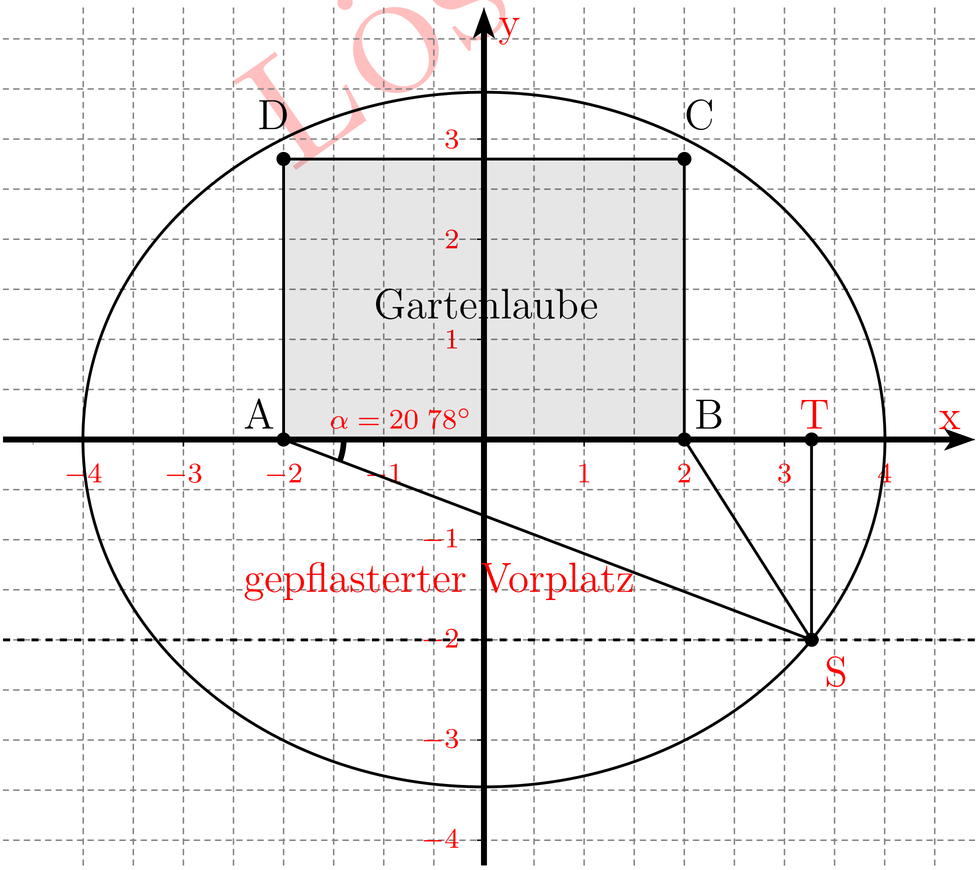
Somit nimmt die 2. Ableitung im Intervall $(1;\infty)$ nur negative Werte an.

Der Graph der Funktion ist in diesem Intervall also rechtsgekrümmt.

1101 - K7 - KKK - AG-L 5.1, AG 4.1 - Gartenlaube - Dimensionen Mathematik Schularbeiten Trainer 7

101. Der abgebildete Plan stellt den rechteckigen Grundriss $ABCD$ einer Gartenlaube dar, $AB = 4\,\text{m}$. ____/3

Modellhaft wird angenommen, dass das auf das Dach der Gartenlaube auftreffende Regenwasser mittels Regenrinnen in A und B gesammelt und in einen (als Punkt modellierten) Sickerschacht S abgeleitet wird. Die genaue Lage von S ist auf Grund einer Pflasterung des Vorplatzes nicht mehr ersichtlich. Man weiß nur mehr, dass S näher bei B als bei A liegt und dass der Abstand zwischen S und der Front AB $2\,\text{m}$ beträgt. Aufgrund einer bezahlten Rechnung kann man auch noch rekonstruieren, dass die Leitungen von A nach S bzw. von B nach S insgesamt eine Länge von $8\,\text{m}$ aufweisen.



Aufgabenstellung:

(a) Gemäß der im Angabetext gegebenen Beschreibung muss S auf einer bestimmten Kegelschnittslinie liegen. Erläutere, um welchen Klegelschnitt es sich dabei handelt und gib einen Überblick über die verschiedenen Kegelschnitte.

Erläutere insbesondere, welche Bedeutungen den Punkten A und B bzw. der Länge 8 bezüglich dieses Kegelschnitts zukommen, und skizziere den Kegelschnitt im abgebildeten Plan.

(b) $\boxed{\text{A}}$ Zeichne im Plan ein (geschickt gewähltes) Koordinatensystem ein und beschreibe die in (a) angesprochene Kegelschnittslinie bezüglich dieses Koordinatensystems mithilfe einer Gleichung.

(c) $\boxed{\text{A}}$ Ermittle die Position von S in diesem Koordinatensystem und berechne den Winkel zwischen den Schenkeln AB und AS.

Lösungserwartung:

(a) Da die Leitungslänge, also die Summe der Abstände $\overline{AS}$ und $\overline{BS}$, konstant ist, muss der Punkt S auf einer Ellipse mit den Brennpunkten A und B liegen, wobei gilt: $2a = 8$.

(b) Grafik siehe oben! ell: $3x^2 + 4y^2 = 48$

(c) $S = (x > 0| - 2) \Rightarrow S = (3{,}27| - 2)$

$\tan(\alpha) = \dfrac{\overline{ST}}{\overline{AT}} \Rightarrow \alpha \approx 20{,}8°$

1102 - K7 - DR - AN 1.3, FA 3.4, AN-L 3.4 - Aquarium - Dimensionen Mathematik Schularbeiten Trainer 7

102. In einem Zoo ist der Bau eines großen Aquariums geplant. Das Aquarium soll eine rechteckige Grundfläche $ABCD$ mit den Seiten $a = AB$ und $b = CD$ aufweisen, die Größe der Grundfläche soll $150\,\text{m}^2$ betragen. ____/3

Bei den Seitenwänden BC, CD und AD belaufen sich die Baukosten pro Meter auf eine Geldeinheit, bei der den Besuchern zugewandten Front AB wegen der hohen Kosten für das erforderliche Sicherheitsglas hingegen auf zwei Geldeinheiten.

Aufgabenstellung:

(a) Beschreibe die Abhängigkeit der insgesamt für die vier Seitenwände anfallenden Kosten K (K in Geldeinheiten) von den Seitenlängen a und b durch eine Formel, also $K(a,b) =?$

Ermittle $\frac{dK}{da}$ sowie $\frac{dK}{db}$ und interpretiere das Größenverhältnis zwischen diesen beiden Größen im Kontext des Beispiels.

(b) $\boxed{\text{A}}$ Aufgrund der Bedingung, dass die Grundfläche des Aquariums $150\,\text{m}^2$ betragen soll, muss zwischen den Seitenlängen a und b ein bestimmter Zusammenhang vorliegen. Beschreibe die Abhängigkeit $b(a)$ mithilfe einer Formel, veranschauliche die Abhängigkeit auch grafisch und erläutere, um welchen Funktionstyp es sich dabei handelt.

(c) Beschreibe die Abhängigkeit der Kosten K von der Seitenlänge a unter Ausnützung der Formel $b(a)$ mithilfe einer Funktionsgleichung, also $K(a) = ?$

Ermittle, bei welchen Seitenlängen a_{min} bzw. b_{min} die anfallenden Kosten minimal sind.

Angenommen, die Länge der Seite $a = AB$ soll mindestens $15\,\text{m}$ betragen. Diskutiere die Auswirkung dieser Zusatzbedingung auf die kostengünstigsten Seitenlängen a_{min} bzw. b_{min}. Begründe deine Antwort sowohl unter Bezugnahme auf die erste Ableitungsfunktion K' als auch anhand des Graphen der Funktion $K : a \to K(a)$.

Lösungserwartung:

(a) Da sich die Kosten für die vordere Front auf $2a\,\text{GE}$ und für die drei Seitenwände auf $a + 2b\,\text{GE}$ belaufen, kann für die Gesamtkosten angegeben werden: $K(a,b) = 3a + 2b$

Unter $\frac{dK}{da}$ versteht man die 1. Ableitung der Funktion K nach der Variablen a (b ist konstant)!

$\frac{dK}{da} = 3$ Erläuterung: Vergrößert man die Länge a um 1, so erhöhen sich die Kosten um $3\,\text{GE}$.

$\frac{dK}{db} = 2$ Erläuterung: Vergrößert man die Breite b um 1, so erhöhen sich die Kosten um $2\,\text{GE}$.

(b) $a \cdot b = 150 \Rightarrow b(a) = \frac{150}{a}$

Es handelt sich hierbei um eine Kehrwertfunktion vom Typ $y = \frac{k}{x}$, für die Folgendes gilt: „Verdoppelt man den x-Wert, so halbiert sich der zugehörige y-Wert.“

(c) $K(a,b) = 3a + 2b$ Ersetzt man b durch $\frac{150}{a}$, erhält man: $K(a) = 3a + \frac{300}{a}$

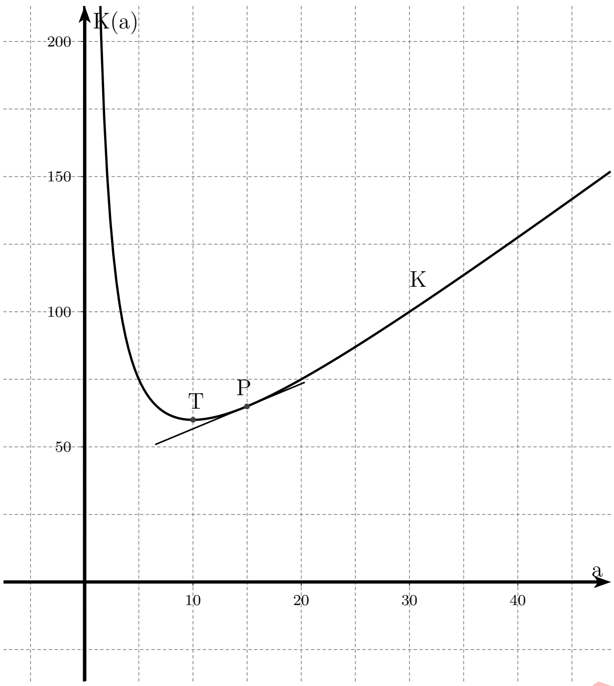
Für die Minimumsstelle der Funktion K gilt: $K'(a) = 0$

$K(a) = 3a + \frac{300}{a} = 3a + 300a^{-1}$

$K'(a) = 3 - 300a^{-2} = 3 - \frac{300}{a^2} = 0 \Rightarrow a = \pm 10$

Für die Seitenlängen $a_{\text{min}} = 10\,\text{m}$ und $b_{\text{min}} = 15\,\text{m}$ sind die anfallenden Kosten minimal.

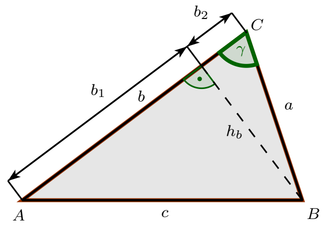
Da $K'(a) > 0$ für alle $a > 10$, nehmen die Kosten für das Aquarium im Intervall $(10; \infty)$ mit wachsendem a zu (vgl. mit nebenstehendem Graphen). Soll die Länge $a = AB$ also mindestens $15\,\text{m}$ betragen, so sind die Kosten für $a = 15\,\text{m}$ minimal.



1103 - K5 - TR - Herleitung: Cosinussatz - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

103. Von einem Dreieck sind die Seiten a und b und der von ihnen eingeschlossene Winkel γ gegeben. Erkläre mithilfe der Grafik jeden Schritt der folgenden Herleitung des Cosinussatzes aus diesen Angaben. ____/0

$$b = b_1 + b_2 \tag{6}$$
$$h_b = a \cdot \sin\gamma \tag{7}$$
$$b_2 = a \cdot \cos\gamma \tag{8}$$
$$b_1 = b - a \cdot \cos\gamma \tag{9}$$
$$c^2 = b_1^2 + h_b^2 = (b - a\cdot\cos\gamma)^2 + (a\cdot\sin\gamma)^2 \tag{10}$$
$$c^2 = b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma + a^2\cdot\cos^2\gamma + a^2\cdot\sin^2\gamma \tag{11}$$
$$c^2 = b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma + a^2 \tag{12}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma \tag{13}$$



Lösungserwartung:

(1) b ist so lang wie b_1 und b_2 zusammen.

(2) im kleinen rechtwinkligen Dreieck gilt: $\sin\gamma = \frac{h_b}{a}$

(3) im kleinen rechtwinkligen Dreieck gilt: $\cos\gamma = \frac{b_2}{a}$

(4) $b = b_1 + b_2$ und $b_2 ? a \cdot \cos\gamma$

(5) Satz des Pythagoras im großen rechtwinkligen Dreieck, die Formel für b_1 und h_b einsetzen

(6) Term rechts vereinfachen (binomische Formel bei erster Klammer)

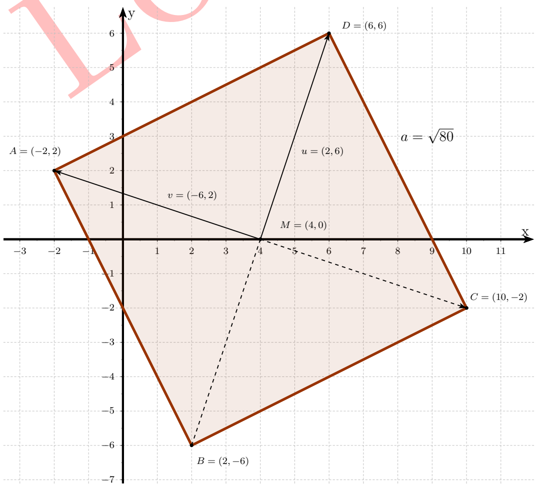
(7) Term rechts vereinfachen mit $a^2 \cdot \cos^2\gamma + a^2 \cdot (\cos^2\gamma + \sin^2\gamma) = a^2 \cdot 1 = a^2$

(8) Reihenfolge der Summanden ändern (Kommutativgesetz der Addition)

1104 - K5 - VAG2 - AG 3.2, AG 3.3, AG 3.5 - Quadrat - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

104. Von einem Quadrat $ABCD$ ist die Diagonale durch die Punkte $B(2|-6)$ und $D(6|6)$ gegeben. Berechne die Koordinaten der beiden anderen Eckpunkte und die Seitenlänge dieses Quadrats. ____/0

Lösungserwartung:



$M_{BD} = (4|0)$; $\vec{u} = \overrightarrow{MD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$

$A = M + \vec{v} = (-2|2)$; $C = M - \vec{v} = (10|-2)$

$a = \sqrt{2^2 + 6^2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{80}$

1105 - K7 - DWV - WS 1.2, WS-L 2.5, WS 2.3, WS 2.4, - Prüfungsfragen - Dimensionen Mathematik Schularbeiten Trainer 7

105. Einem Studenten werden bei einer Prüfung 15 Fragen aus einer Liste von insgesamt 500 Fragen vorgelegt. Die Fragen sind dabei in drei Schwierigkeitsklassen A, B und C eingeteilt. Aus jeder Schwierigkeitsklasse werden 5 Fragen zufällig ausgewählt. ____/3

Nur bei 350 der insgesamt 500 Fragen konnte sich der Student so vorbereiten, dass eine ausreichende Beantwortung dieser Frage während der Prüfung gewährleistet ist. Positive Antworten werden im Folgenden mit „P" bezeichnet, negative mit „N!". Bezüglich der zufälligen Auswahl einer Frage sind nachfolgende Wahrscheinlichkeiten gegeben:

- $W(A) = \frac{1}{2}$ (= Wahrscheinlichkeit, dass die ausgewählte Frage zur Schwierigkeitsklasse A gehört).
- $W(A \vee B) = \frac{4}{5}$ (= Wahrscheinlichkeit, dass die ausgewählte Frage zu einer der Schwierigkeitsklassen A ider B gehört).
- $W(A \wedge N) = \frac{1}{10}$ (= Wahrscheinlichkeit, dass die ausgewählte Frage zur Klasse A gehört und der Student sie nicht ausreichend beantworten kann).
- $W(P|C) = \frac{3}{10}$.

Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Interpretiere die gegebene Wahrscheinlichkeit $W(P|C)$ und vervollständige die untenstehende zweidimensionale Häufigkeitstabelle.

Berechne und interpretiere die Wahrscheinlichkeiten $W(A|P)$ und $W(P|B)$.

	P	N	
A	200	50	250
B	120	30	150
C	30	70	100
	350	150	500

(b) Der Student möchte die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass sich unter den ersten drei gestellten Fragen mindestens zwei Fragen befinden, die er ausreichend beantworten kann. Dazu verwendet er folgenden Ansatz: $\binom{3}{2} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{4}{5}\right)^3$. Er ist sich dabei aber bewusst, dass die damit berechnete Wahrscheinlichkeit etwas vom exakten Ergebnis abweicht. Erläutere die Lösungsidee hinter der angegebenen Formel, gehe insbesondere auf die Bedeutung des Faktors $\binom{3}{2}$ sowie des Quotienten $\frac{4}{5}$ ein. Offensichtlich geht der Student bei der Berechnung von einer bestimmten Annahme aus. Erläutere, um welche Annahme es sich handelt.

Gib für den Fall, dass die angesprochene Annahme tatsächlich zutrifft, einen Term für die Berechnung des exakten Ergebnisses an.

(c) Angenommen, positive Antworten auf Fragen der Klasse A liefern 3 Punkte, bei Fragen der Klassen B und C sind es hingegen 4 bzw. 5 Punkte. Für ein positives Gesamtergebnis sind mindestens 30 Punkte erforderlich. Angenommen, dem Studenten wurden bisher alle Fragen aus den Schwierigkeitsklassen A und B vorgelegt. Dabei hat er bis jetzt 28 Punkte erreicht.

Erläutere, inwieweit es möglich ist, aus diesen Angaben eindeutig zu ermitteln, wie viele Fragen der Schwierigkeitsklasse A bzw. wie viele Fragen der Schwierigkeitsklasse B der Student richtig beantwortet hat.

Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der Student ein positives Gesamtergebnis erreicht.

Lösungserwartung:

(a) Unter $W(P|C)$ versteht man die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frage positiv beantwortet wird, wenn man weiß, dasss die Frage aus der Schwierigkeitsklasse C stammt.

Tabelle siehe oben.

$W(A|P)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frage aus der Schwierigkeitsklasse A stammt, wissend, dass sie positiv beantwortet wurde. 350 der 500 Fragen werden positiv beantwortet, davon stammen 200 aus der Schwierigkeitsklasse A. Somit gilt: $W(A|P) = \frac{200}{300} = \frac{4}{7}$

Unter $W(P|B)$ versteht man die Wahrscheinlichkeit, eine Frage aus der Schwierigkeitsklasse B positiv zu beantworten. Von 150 Fragen der Schwierigkeitsklasse B werden 120 positiv beantwortet. Es gilt: $W(P|B) = \frac{120}{150} = \frac{4}{5}$.

(b) Unter dem Binomialkoeffizienten $\binom{3}{2}$ versteht man die Anzahl der Möglichkeiten, aus 3 Elementen, hier Fragen, 2 auszuwählen, wobei die Reihenfolge ohne Bedeutung ist.

$W(P|A) = \frac{200}{250} = W(P|B) = \frac{120}{150} = \frac{4}{5}$ ist die Wahrscheinlichkeit, die erste Frage aus den Schwierigkeitsklassen A oder B positiv zu beantworten. Diese

Wahrscheinlichkeit ändert sich für die zweite Frage, wenn die erste Frage nicht nochmals gestellt werden kann. Bei positiver Beantwortung der ersten Frage beträgt sie $\frac{319}{399}$, im negativen Fall $\frac{320}{399}$.

Der Student geht offensichtlich von der Annahme aus, dass

- die ersten 3 Fragen aus der Schwierigkeitsklasse A oder B stammen.
- sich die Wahrscheinlichkeiten von Frage zu Frage nicht ändern oder nur so wenig ändern, dass man diese Veränderungen nicht berücksichtigen muss

Die Wahrscheinlichkeit für mindestens 2 positiv beantwortete Fragen beträgt exakt:

$$W(PPN) + W(PNP) + W(NPP) + W(PPP) =$$

$$= \frac{320}{400} \cdot \frac{319}{399} \cdot \frac{80}{398} + \frac{320}{400} \cdot \frac{80}{399} \cdot \frac{319}{398} + \frac{80}{400} \cdot \frac{320}{399} \cdot \frac{319}{398} + \frac{320}{400} \cdot \frac{319}{399} \cdot \frac{318}{398} = 89{,}67\,\%$$

Das Ergebnis des Studenten beträgt 89,6 % und unterscheidet sich also nur geringfügig vom exakten Ergebnis.

(c) Hat der Student a Fragen der Schwierigkeitsklasse A und b Fragen der Schwierigkeitsklasse b richtig beantwortet, erhält er dafür $3a + 4b = 28$ Punkte.

Aus $3a + 4b = 28$ folgt $3a = 4 \cdot (7 - b)$. $7 - b$ ist ein positives Vielfaches von 3, was nun für $b_1 = 1$ oder $b_2 = 4$ der Fall ist. Die zugehörige Anzahl der richtigen Fragen der Schwierigkeitsklasse A lautet: $a_1 = 8$ oder $a_2 = 4$. Somit hat der Student 8 Fragen aus A (24 Punkte) und eine Frage aus B (4 Punkte) oder 4 Fragen aus A (12 Punkte) und 4 Fragen aus B (16 Punkte) richtig beantwortet.

Für ein positives Gesamtergebnis muss der Student aus den letzten 5 Fragen der Schwierigkeitsklasse C nur mehr mindestens eine Frage positiv beantworten. Die Berechnung der zugehörigen Wahrscheinlichkeit erfolgt mithilfe der Gegenwahrscheinlichkeit:

$1 - W(\text{keine positive Frage}) = 1 - \frac{70}{100} \cdot \frac{69}{99} \cdot \frac{68}{98} \cdot \frac{67}{97} \cdot \frac{66}{96} = 83{,}92\,\%$

Bleibt die Veränderung der Wahrscheinlichkeit unberücksichtigt, so erhält man: $W(X \geq 1) = 1 - W(X = 0) = 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^5 = 83{,}2\,\%$

Dabei ordnet die Zufallsvariable X jeder Serie von 5 gestellten Fragen die Anzahl der positiv beantworteten Fragen zu (Ziehen mit Zurücklegen).

1106 - K7 - DWV - WS-L 2.5, WS-L 2.6, WS 3.1, WS 3.2, WS 3.3 - Glücksspiel 1 - Dimensionen Mathematik Schularbeiten Trainer 7

106. Bei einem Glücksspiel tritt als Ergebnis (mit jeweils den gleichen Wahrscheinlichkeiten) eine der natürlichen Zahlen 1,2,...,9 auf. Ob man gewinnt oder verliert, hängt davon ab, welches der Ereignisse A, B bzw. C eintritt. ____/3

Bezüglich dieser Ereignisse liegen nachfolgende Informationen vor: $P(A) = \frac{2}{9}$, A und B sind unvereinbar, C ist von B unabhängig. Die Ereignisse werden durch drei der fünf anschließend angegebenen Ereignismengen festgelegt: $E_1 = \{1\}$, $E_2 = \{3,4,5\}$, $E_3 = \{5,6,7,8,9\}$, $E_4 = \{1,9\}$, $E_5 = \{3,8,9\}$.

Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Ordne den Ereignissen A, B und C die entsprechende Menge zu, begründe die Zuordnung durch stichhaltige Argumente.

(b) die Auszahlungsregeln des Spiels lauten:

(1) Treten B und C ein, gewinnt man € 3.

(2) Tritt A ein, gewinnt man € 1.

(3) In allen anderen Fällen verliert man € 1.

Berechne die Gewinnerwartung des Spiels sowie die Wahrscheinlichkeit, bei einer Serie von 10 Spielen öfter als 7-mal zu verlieren.

(c) Eine Person stell die Behauptung auf, dass die Wahrscheinlichkeit P_V, beim einen Spiel einen Euro zu verlieren, entgegen der angegebenen Spielbeschreibung größer als $\frac{2}{3}$ ist. Um diese Behauptung zu überprüfen, führt man eine Testserie von 300 Spielen durch. Die Zufallsvariable X unter der Annahme, dass $P_V = \frac{2}{3}$ gilt, die Anzahl der dabei auftretenden Spiele, die zu einem Verlust von einem Euro führen.

Bestimme den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von X und beurteile den Wahrheitsgehalt der oben formulierten Behauptung unter Bezugnahme auf die beiden Werte μ und σ, wenn in der Restserie bei 218 Spielen ein Euro verloren wird.

Lösungserwartung:

(a) $P(A) = \frac{2}{9} \Rightarrow A = E_4$

Da A und B unvereinbar sind, d.h. $A \cap B = \{\}$, muss $B = E_2$ gelten.

Ist C von B unabhängig, so gilt: $P(C) = P(C|B)$. Das Ereignis B hat keinen Einfluss auf die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses C. Beachte: $P(C|B) = \frac{P(C \cap B}{P(B)}$

$P(E_1) = \frac{1}{9}$ $\quad P(E_1|B) = \frac{P(E_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{0}{\frac{1}{3}} = 0$ $\quad P(E_3) = \frac{5}{9}$

$P(E_3|B) = \frac{P(E_3 \cap B}{P(B)} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$ $\quad P(E_5) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$P(E_5|B) = \frac{P(E_5 \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$

Da von den Ereignissen E_1, E_3 und E_5 nur E_5 von B unabhängig ist, steht fest: $C = E_5$.

$A = E_4 = \{1{,}9\}, B = E_2 = \{3{,}4{,}5\}, C = E_5 = \{3{,}8{,}9\}$

(b)
(1) $P(B \cap C) = \frac{1}{9}$ $\quad \rightarrow +3\,€$
(2) $P(A) = \frac{2}{9}$ $\quad \rightarrow +1\,€$
(3) $P(\text{sonst. } E) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ $\quad \rightarrow -1\,€$

$\mu = 3\,€ \cdot \frac{1}{9} + 1\,€ \cdot \frac{1}{9} - 1\,€ \cdot \frac{2}{3} = -0{,}11\,€$

Pro Spiel ist ein Verlust von 0,11 € zu erwarten.

Für die Wahrscheinlichkeit, bei einer Serie von 10 Spielen öfter als 7-mal zu verlieren gilt:

$P(X > 7) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) =$

$= \binom{10}{8} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \binom{10}{9} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \binom{10}{10} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 0{,}2991$

(c) $n = 300, p_V = \frac{2}{3}$

$\mu = 300 \cdot \frac{2}{3} = 200$ und $\sigma = \sqrt{300 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}} = 8{,}165$

$z = \frac{218-200}{8{,}165} \approx 2{,}20$

Die Wahrscheinlichkeit, bei 300 Spielen mindestens 218-mal zu verlieren, beträgt:

$P(X \geq 218) = 1 - \Phi(2{,}20) = 1 - 0{,}986 = 0{,}014 = 1{,}4\,\%$

Da die Wahrscheinlichkeit, bei 300 Spielen mindestens 218-mal zu verlieren, nur 1,4 % beträgt, kann man mit großer Wahrscheinlichkeit davon ausgehen, dass $P_V > \frac{2}{3}$.

1107 - K7 - DWV - WS-L 2.5, WS 3.1, WS 2.3, WS 3.2, WS 3.1, WS 3.4 - Glücksspiel 2 - Dimensionen Mathematik Schularbeiten Trainer 7

107. Bei einem Glücksspiel sorgt ein erster Zufallsmechanismus dafür, dass die Entscheidung entweder auf das Zwischenergebnis a fällt oder aber auf das Zwischenergebnis b. Abhängig vom Zwischenergebnis führen weitere Zufallsmechanismen entweder zum Endergebnis v (= Verlust) oder g (=Gewinn). ____/3

Bezüglich der Zufallsmechanismen ist Folgendes bekannt: $P(a) = 0{,}4$ und $P(a \wedge v) = 0{,}28$. Für die Wahrscheinlichkeit $P(g)$ gibt es zwei Möglichkeiten: Entweder $P(g) = p_1 = 0{,}18$ oder $P(g) = p_2 = 0{,}75$. Nur eine der beiden Angaben bezüglich $P(g)$ kann in Wirklichkeit aber zutreffen, zumal sich aus der anderen Angabe einer Folgerung ergibt, die zu einer mathematisch korrekten Aussage einen Widerspruch darstellt.

Tritt „g“ein, gewinnt der Spieler/die Spielerin vier Euro, im Falle von „v“ verliert er/sie einen Euro.

Aufgabenstellung:

(a) Erläutere, ob $P(g) = p_1$ oder $P(g) = p_2$ zutrifft, begründe deine Antwort stichhaltig.

Stelle die möglichen Abläufe des Glückspiels durch ein Baumdiagramm dar und berechne die Gewinnerwartung μ bei diesem Glückspiel (pro Spiel).

(b) Eine Person spielt im Laufe eines Abends zuerst 10-mal, nach einer Unterbrechung noch einmal 15-mal. Insgesamt verliert sie dabei 5 €. Die Ergebnisse während der ersten 10 Spiele lauten:

-1 €, -1 €, $+4$ €, -1 €, -1 €, -1 €, $+4$ €, -1 €, -1 €, -1 €.

Berechne das arithmetische Mittel der Gewinne/Verluste während der zweiten Serie von 15 Spielen.

Angenommen, eine andere Person spielt 10-mal und verliert dabei 5 €. Erläutere, ob es möglich ist, aus diesen Angaben eindeutig die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, mit der dieses Ereignis eintritt.

(c) $\boxed{\text{A}}$ Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der Gewinne in einer Serie von 500 Spielen. Bestimme den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von X.

Angenommen, in 70 der 500 Spiele tritt ein Gewinn auf. Interpretiere dieses Ergebnis unter Bezugnahme auf die beiden Werte μ und σ kontextbezogen.

Lösungserwartung:

(a) $P(a) = 0{,}4 \Rightarrow P(b) = 0{,}6$

$P(a \wedge v) = P(a) \cdot P(v|a) = 0{,}28 \Rightarrow P(v|a) = 0{,}7 \Rightarrow P(g|a) = 0{,}3$

$P(g) = P(a) \cdot P(g|a) + P(b) \cdot P(g|b) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 + 0{,}6 \cdot P(g|b) = 0{,}12 + 0{,}6 \cdot P(g|b)$

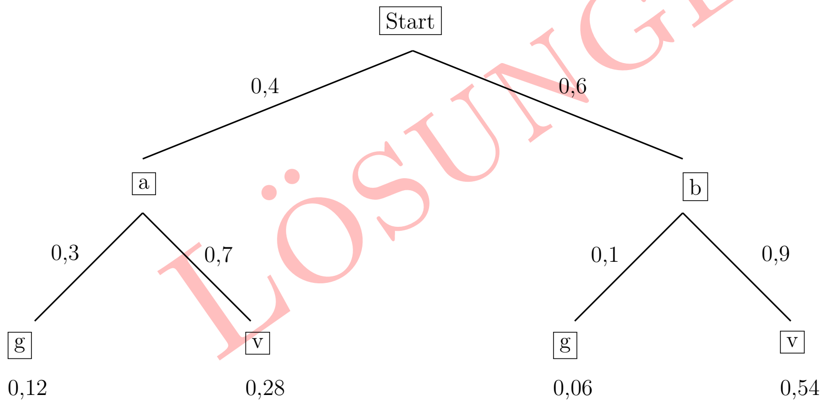
- $P(g) = p_1 = 0{,}18 = 0{,}12 + 0{,}6 \cdot P(g|b)$
  $0{,}06 = 0{,}6 \cdot P(g|b) \Rightarrow P(g|b) = 0{,}1 \Rightarrow P(v|b) = 0{,}9$
- $P(g) = p_2 = 0{,}75 = 0{,}12 + 0{,}6 \cdot P(g|b)$
  $0{,}63 = 0{,}6 \cdot P(g|b) \Rightarrow P(g|b) = 1{,}05 \rightarrow$ unmöglich, da $P(E) \in [0; 1]$

d.h., bezüglich $P(g)$ kann nur die Angabe $P(g) = 0{,}18$ zutreffen.

$P(a) \cdot P(v|a) + P(b) \cdot P(v|b) = 0{,}4 \cdot 0{,}7 + 0{,}6 \cdot 0{,}9 = P(v) = 0{,}82$

$\mu = 4\,€ \cdot 0{,}18 - 1\,€ \cdot 0{,}82 = -0{,}1\,€$

Pro Spiel ist ein Verlust von 0,1€ zu erwarten.



(b) Da die Summe der Gewinne/Verluste aus den ersten 10 Spielen 0 beträgt, die Person hier insgesamt also weder einen Gewinn noch einen Verlust hat, beträgt das arithmetische Mittel der Verluste aus der zweiten Spielserie $\overline{v} = \frac{-5}{15} = -0{,}33\,€$.

Verliert eine andere Person bei 10 Spielen 5 Euro, so ist dies nur möglich, wenn sie dabei einmal gewinnt und 9-mal verliert.

Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt: $P(Y = 1) = \binom{10}{1} \cdot 0{,}18^1 \cdot 0{,}82^9 = 0{,}3017$, wobei die Zufallsvariable Y jeder Serie aus 10 Spielen die Anzahl der Gewinne zuordnet.

(c) $n = 500$, $p = 0{,}18 \Rightarrow$ Erwartungswert: $E(X) = \mu = 500 \cdot 0{,}18 = 90$

Bei einer Serie von 500 Spielen sind im Mittel 90 Gewinne zu erwarten.

Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{500 \cdot 0{,}18 \cdot 0{,}82} = 8{,}59$

Werden von 500 Spielen nur 70 gewonnen, so liegt diese Gewinnzahl außerhalb des Intervall $[\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma] = [72{,}82; 107{,}18]$ und stellt somit ein „sehr unwahrscheinliches“ Ereignis dar, das Zweifel hinsichtlich das Angabe $P(g) = 0{,}18$ aufkommen lässt.

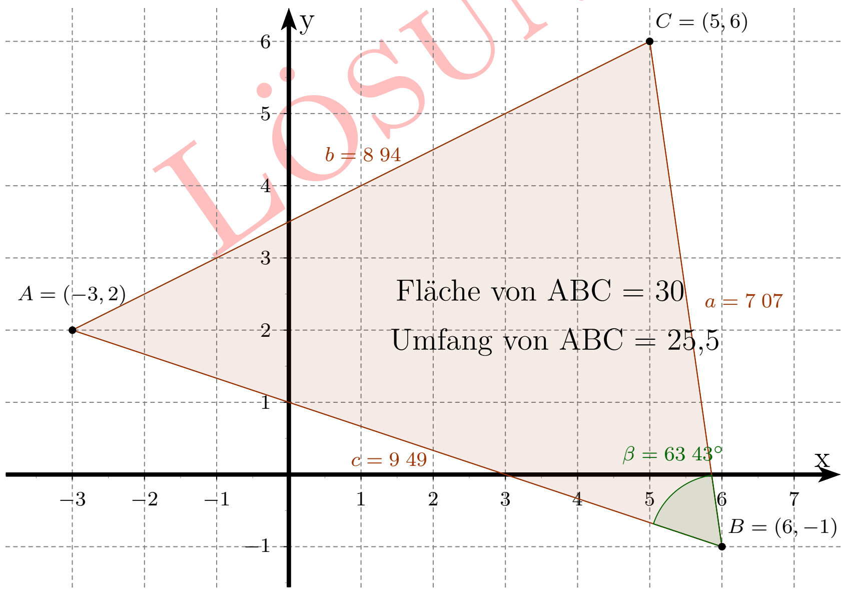
1108 - K5 - VAG2 - AG 3.2 - Dreieck: Winkel, Umfang und Flächeninhalt - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

108. Gegeben ist das Dreieck ABC mit $A(-3|2)$, $B(6|-1)$ und $C(5|6)$. ____/0

(a) Berechne die Größe des Winkels β.

(b) Berechne den Umfang und den Flächeninhalt des Punktes C.

Lösungserwartung:



(a) $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\cos\beta = \frac{\binom{-9}{3} \cdot \binom{-1}{7}}{\sqrt{90} \cdot \sqrt{50}} \Rightarrow \beta \approx 63{,}43°$

(b) $u = \sqrt{90} + \sqrt{80} + \sqrt{50} \approx 25{,}5$

$A = 0{,}5 \cdot \sqrt{90} \cdot \sqrt{50} \cdot \sin\beta = 30$

1109 - K7 - DWV - WS 2.2, WS 2.3, WS 2.1, WS 1.3 - Der faire Würfel - Dimensionen Mathematik Schularbeiten Trainer 7

109. In WIKIPEDIA findet man zum Thema *Gesetz der großen Zahlen:* „In ihrer einfachsten Form besagen diese Sätze, dass sich die relative Häufigkeit eines Zufallsergebnisses in der Regel um die theoretische Wahrscheinlichkeit eines Zufallsergebnisses stabilisiert, wenn das zugrunde liegende Zufallsexperiment immer wieder unter denselben Vorraussetzungen durchgeführt wird.“ ____/3

Ein als fair anzusehender Würfel wird 500-mal geworfen. Die folgende Tabelle beinhaltet die relativen Häufigkeiten des Ereignisses E = „Die nach dem Wurf nach oben zeigende Seitenfläche des Würfels zeigt die Zahl 6“ für die ersten 100,200,...,500 Würfe.

Anzahl der Würfe	100	200	300	400	500
Relative Häufigkeit des Ereignisses E (gerundet auf drei Dezimalen)	0,13	0,145	0,177	0,160	0,168

Aufgabenstellung:

(a) Interpretiere die angegebenen Werte in der Tabelle. Gib insbesondere an, wie viele „Sechser“ innerhalb der ersten 300 Würfe geworfen wurden.

Begründe, dass die angeführten relativen Häufigkeiten das Gesetz der großen Zahlen (in der oben angeführten Form) bestätigen.

(b) Mit einem anderen Würfel erzielt eine Person A in einer Serie von 10 Würfen folgende Ergebnisse: 4,1,5,4,2,2,1,5,3,1. Daraus meint die Person A: „Die Wahrscheinlichkeit für einen 'Sechser' ist beim nächsten Wurf sicher größer als $\frac{1}{6}$.“ Darauf erwidert eine zweite Person B: „Meiner Meinung nach ist beim nächsten Wurf die Wahrscheinlichkeit für einen 'Sechser' kleiner als $\frac{1}{6}$.“ Nimm zu beiden Aussagen stellung, untermauere deine Aussagen mithilfe stichhaltiger Argumente.

Erläutere insbesondere, von welcher Annahme die Person B vermutlich ausgeht, und gib an, auf welche Berechnungen man sich bei einer objektiven Überprüfung dieser Annahme beziehen kann. Führe diese Berechnungen durch und interpretiere das Ergebnis.

(c) Die häufig verwendete Formulierung, dass sich „die relative Häufigkeit der Wahrscheinlichkeit immer mehr annähert“ ist irreführend, da es auch bei einer großen Anzahl von Wiederholungen Ausreißer geben kann.

Gib eine mögliche Abfolge (weniger) Würfe an, anhand der du diese Aussage belegen kannst.

Erläutere in diesem Zusammenhang die Bedeutung der Aussage: „Die Annäherung ist nicht monoton“.

Lösungserwartung:

(a)

Anzahl der Würfe	100	200	300	400	500
Relative Häufigkeit des Ereignisses E	0,13	0,145	0,177	0,160	0,168
Absolute Häufigkeit	13	29	53	64	84

Innerhalb der ersten 300 Würfe werden $300 \cdot 0{,}177 = 53$ „Sechser“ geworfen.

Mit wachsender Versuchsanzahl stabilisert sich die relative Häufigkeit um die theoretische Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{6} = 0{,}1\overline{6}$.

Beachte, dass v.a. bei geringer Versuchsanzahl die relative Häufigkeit von der theoretischen Wahrscheinlichkeit noch stark abweichen kann.

(b) Die Wahrscheinlichkeit, beim 11. Wurf einen „Sechser“ zu werfen, ist unabhängig von den vorhergehenden Würfelergebnissen und beträgt $\frac{1}{6}$. Diese Wahrscheinlichkeit kann sich ohne Veränderung der Ausgangssituation nicht ändern.

Person A geht vielleicht von der Annahme aus, dass, „wenn schon so lange kein 'Sechser' mehr geworfen wurde, nun endlich einer auftreten muss“.

Person B denkt vielleicht an die Möglichkeit, dass der Würfel, da noch kein 'Sechser' geworfen wurde, vielleicht gezinkt sein könnte und somit gilt: $P(6) < \frac{1}{6}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei 10 Würfen mindestens ein „Sechser“ geworfen wird beträgt:

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{10} = 0{,}8383 = 83{,}85\,\%$

Das Ergebnis, dass sich unter den ersten 10 Würfen kein „Sechser“ befindet, ist mit 16,15 % also nicht gerade unwahrscheinlich und rechtfertigt nicht die Annahme eines gezinkten Würfels.

(c)

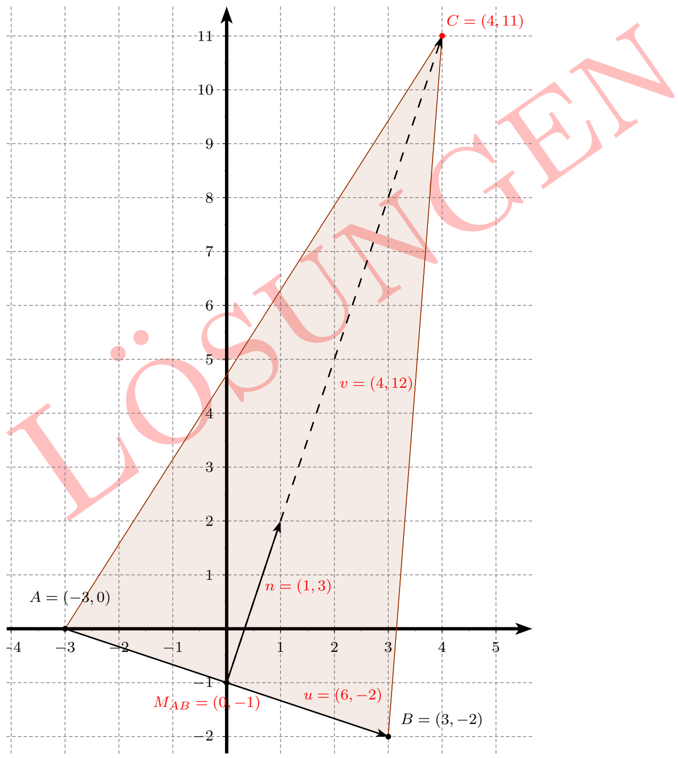
Anzahl der Würfe	10	20	30	40	50
Relative Häufigkeit des Ereignisses E	0,1	0,2	0,167	0,125	0,18
Absolute Häufigkeit	1	4	5	5	9

Die abgebildete Versuchsreihe zeigt, dass sich die relative Häufigkeit der theoretischen Wahrscheinlichkeit nicht monoton steigend oder fallend nähern muss.

1110 - K5 - VAG2 - AG 3.2, AG 3.3, AG 3.5 - Gleichschenkliges Dreieck - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

110. Errichte über der Strecke AB mit $A(-3|0)$, $B(3|-2)$ ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit $40\,\mathrm{E}^2$ Flächeninhalt. Berechne die Koordinaten des Punktes C. ____/0

Lösungserwartung:



$M_{AB} = (0|-1)$; $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{6^2 + (-2)^2} = \sqrt{40}$

$h_c = \frac{2A}{c} = \frac{80}{\sqrt{40}} = 2 \cdot \sqrt{40} = 4 \cdot \sqrt{10}$; $\overrightarrow{M_{AB}B} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{n}| = \sqrt{10} \Rightarrow C = M_{AB} + 4 \cdot \vec{n} = (4|11)$

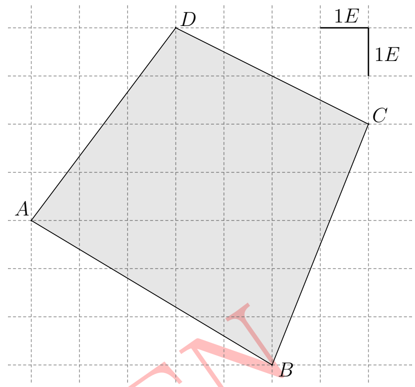
1111 - K5 - VAG2 - AG 3.2, AG 3.3, AG 3.5 - Viereck: Winkel, Umfang und Flächeninhalt - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

111. Gegeben ist ein Viereck $ABCD$. ____/0

(a) Berechne den Umfang des Vierecks.

(b) Zeige, dass die Diagonalen gleich lang sind und normal aufeinander stehen.

(c) Überprüfe, ob das Viereck $ABCD$ ein Trapez ist.



Lösungserwartung:

(a) $u = \sqrt{34} + \sqrt{29} + \sqrt{20} + 5 \approx 20{,}7\,\text{E}$

(b) $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$, daher ist $\overrightarrow{AC}$ normal auf $\overrightarrow{BD}$ und $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{BD}\right|$.

(c) Kein Trapez, weil $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ nicht parallel zu $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

1112 - K5 - VAG2 - AG 3.2, AG 3.3 - Parallelogramm - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

112. Ein Parallelogramm $ABCD$ ist gegeben durch $A = (2|-3), B = (5|1), C(-4|0)$. ____/0

(a) Berechne die Koordinaten des fehlenden Eckpunkts D und den Schnittpunkt S der Diagonalen.

(b) Überprüfe rechnerisch, ob eine Raute vorliegt.

Lösungserwartung:

(a) $D = A + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow D(-7|-4)$

$S = \frac{A+C}{2} \Rightarrow S(-1|-1{,}5)$

(b) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left| \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \left| \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -9 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{9^2 + 1^2} \neq 5$

1113 - K5 - VAG2 - AG 3.2, AG 3.3 - Parallelogramm - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

113. Ein Viereck $ABCD$ ist durch die Koordinaten seiner Eckpunkte gegeben: ____/0

$A(1|-3), B(3|3), C(0|4), D(-2|-2)$

Stelle mithilfe einer Zeichnung eine Vermutung darüber auf, welches spezielle Vieleck vorliegt. Beweise deine Vermutung anschließend rechnerisch!

Lösungserwartung:

Vermutung: Rechteck

Nachweis: Gegenüberliegende Seiten sind parallel und gleich lang, weil $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \binom{2}{6}$ und $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \binom{-3}{1}$. $\overrightarrow{AB}$ steht normal auf $\overrightarrow{AD}$, weil $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \binom{2}{6} \cdot \binom{-3}{1} = -6 + 6 = 0$. Somit stehen benachbarte Seiten aufeinander normal.

1114 - K5 - VAG2 - AG 3.1, AG 3.3 - Produktion - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

114. Eine Firma erzeugt zwei Produkte P_1 und P_2. ____/0

Die täglich verkaufte Stückzahl wird durch den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \end{pmatrix}$ angegeben. Die Produktionszeit für die beiden Produkte in Minuten wird durch den Zeitvektor $\vec{z} = \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \end{pmatrix}$ angegeben.

(a) Wie viele Stunden erfordert die Produktion der an einem Tag verkauften Menge?

(b) Die verkaufte Menge jedes Produkts wird um 20 % gesteigert, die Produktionszeit kann durch ein effizienteres Produktionsverfahren für jedes Produkt um 10 % gesenkt werden. Gib eine Formel zur Berechnung der neuen Gesamtproduktionszeit T_{neu} mithilfe der Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{z}$ an!

Lösungserwartung:

(a) $\vec{v} \cdot \vec{z} = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \end{pmatrix} = 500 \Rightarrow$ Produktionszeit der an einem Tag verkauften Menge. 8 h 20 min.

(b) $T_{\text{neu}} = 1{,}2 \cdot 0{,}9 \cdot \vec{v} \cdot \vec{z} = 1{,}08 \cdot \vec{v} \cdot \vec{z} = 540 \Rightarrow T_{\text{neu}} = 9\,\text{h}$

1115 - K5 - VAG2 - AG 3.4 - Parallele Geraden - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

115. Gegeben sind die Geraden $g: \; x - y = 2$ und $h: \; 2x + by = c$ ____/0

Gib alle Werte für b und c an, sodass $g \parallel h$ ist! Begründe deine Entscheidung!

Lösungserwartung:

$b = -2$, weil $\vec{n_g} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und somit $\vec{n_h} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $c \in \mathbb{R}\{4\}$ (bei $c = 4$ identisch)

1116 - K5 - VAG2 - AG 3.4 - Parameterdarstellung, Normalabstand - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

116. Gegeben ist die Gerade $g: \; x - 3y = 5$ ____/0

(a) Gib eine mögliche Parameterdarstellung dieser Geraden g an.

(b) Begründe rechnerisch, dass der Punkt $P(1|2)$ nicht auf der Geraden g liegt und berechne den Normalabstand des Punktes P von der Geraden g.

Lösungserwartung:

(a) $g:\ X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $1 - 3 \cdot 2 = -5 \neq 5 \Rightarrow P \notin g$

$d = \left| \frac{x - 3y - 5}{\sqrt{10}} \right| = \left| \frac{1 - 6 - 5}{\sqrt{10}} \right| = \sqrt{10}$

1117 - K5 - VAG2 - AG 3.3, AG 3.4 - Parameterdarstellung, Normalabstand - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

117. Gib die Lagebeziehung der drei Geraden g, h und k zueinander an und begründe deine Antwort. ____/0

$g:\ X = \binom{2}{1} + s \cdot \binom{-3}{4}$ $\qquad h:\ X = \binom{4}{-2} + t \cdot \binom{1{,}5}{2}$ $\qquad k:\ X = \binom{-1}{2} + u \cdot \binom{6}{8}$

Lösungserwartung:

g ist parallel zu h weil $\binom{-3}{4} = (-2) \cdot \binom{1{,}5}{-2}$, aber nicht identisch weil aus

$4 = 2 - 3s \Rightarrow s = -\frac{2}{3}$ und $-2 = 1 + 4s \Rightarrow s \neq -\frac{2}{3}$ folgt, dass $(4|-2) \notin g$.

g schneidet k, weil $\binom{6}{8} \neq a \cdot \binom{-3}{4}$.

h schneidet k, weil $\binom{6}{8} \neq b \cdot \binom{1{,}5}{-2}$.

1118 - K5 - VAG2 - AG 3.3, AG 3.4 - Dreieck, Seitensymmetrale - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

118. Gegeben ist ein Dreieck ABC mit $A(-2|-1), B(6|-1)$ und $C(-1|6)$. ____/0

Der Umkreismittelpunkt ist von allen drei Eckpunkten eines Dreiecks gleich weit entfernt. Er gibt sich als Schnittpunkt der Seitensymmetralen.

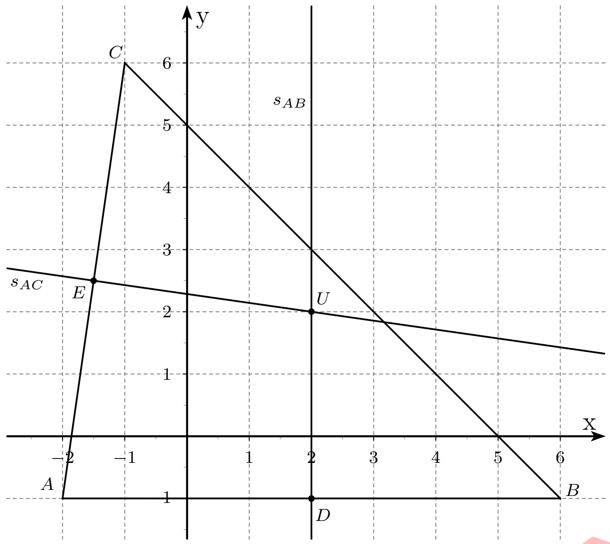
(a) Bestimme den Umkreismittelpunkt mithilfe einer Konstruktion!

(b) Bestimme den Umkreismittelpunkt rechnerisch!

(c) Berechne die Fläche des Dreiecks ABC.

Lösungserwartung:

(a) Konstruktion:



(b) $D = \frac{1}{2} \cdot (A + B) = (2|0)$ und $\overrightarrow{AB} = \binom{0}{8} = 8 \cdot \binom{1}{0} \Rightarrow s_{AB} : x = 2$

$E = \frac{1}{2} \cdot (A + C) = (-1{,}5|2{,}5)$ und $\overrightarrow{AC} = \binom{1}{7} \Rightarrow s_{AC} : x + 7y = 16$

$s_{AB} \cap s_{AC} = \{U\} : x = 2 \Rightarrow 2 + 7y = 16 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow U(2|2)$

(c) Der Flächeninhalt des Dreiecks beträgt $28\,\mathrm{E}^2$.

1119 - K7 - DWV - WS 3.3, WS 3.2, WS 1.1, WS 1.3, FA 1.7, FA 1.9, AG-L 4.3 - Kugelstoßen - Dimensionen Mathematik Schularbeiten Trainer 7

119. Eine Kugelstoßerin hat im Laufe des letzten Jahres vier (unterschiedlich lange) Trainingslager absolviert und dabei jeweils auch mehrere Versuche unternommen, bei denen die Stoßweite (gerundet auf dm genau) ermittelt wurde. ____/3

Die folgende Tabelle informiert über das jeweilige arithmetische Mittel aller beim betreffenden Trainingslager absolvierten Würfe, die Anzahl der gemessenen Versuche sowie die Anzahl jener Versuche, bei denen die erzielte Weite über 15 m liegt.

Trainingslager	Anzahl der protokollierten Versuche	Arithmetisches Mittel	Anzahl der Würfe über 15 m
Nr. 1	35	$\overline{x}(1) = 13{,}9$	6
Nr. 2	24	$\overline{x}(2) = 14{,}6$	5
Nr. 3	12	$\overline{x}(3) = 14{,}9$	5
Nr. 4	7	$\overline{x}(1) = 15{,}1$	4

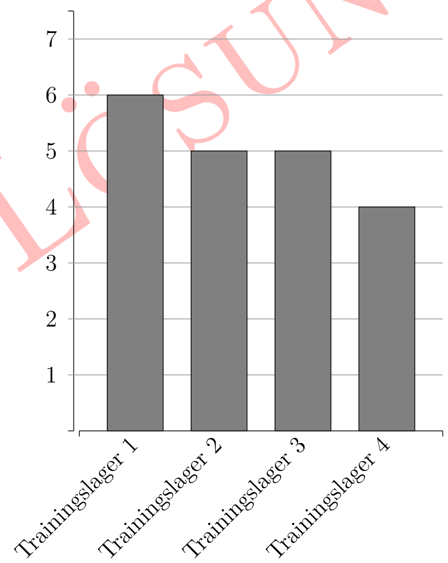
Aufgabenstellung:

(a) Die Athletin geht davon aus, dass die relative Häufigkeit jener Versuche während des Trainingslagers, bei denen die Stoßweite über 15 m liegt, der Wahrscheinlichkeit dafür entspricht, dass sie bei einem unmittelbar auf das vierte Trainingslager folgenden Wettkampf bei einem Versuch die 15-m-Marke übertrifft.

Erläutere, inwieweit diese Annahme der Athletin unter Umständen problematisch ist.

Berechne unter der genannten Annahme die Wahrscheinlichkeit, dass die Athletin bei diesem Wettkampf während der ersten drei Versuche mindestens einmal die 15-m-Marke übertrifft.

(b) Der Trainer einer Konkurrentin veranschaulicht die Entwicklung der Anzahl jener Würfe im Verlauf der vier Trainingslager, bei denen die Stoßweite der Athletin über 15 m liegt, durch das abgebildete Säulendiagramm. Erläutere, warum diese Grafik tatsächliche Leistungsentwicklung nicht objektiv beschreibt. Erstelle eine besser geeignete Darstellung.



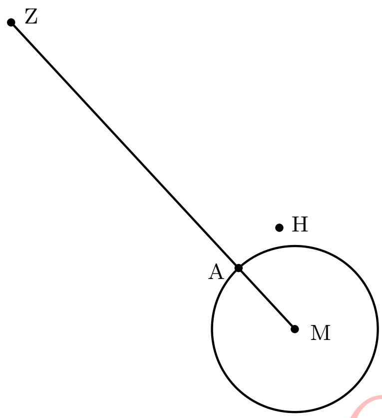
(c) Erläutere, warum die zeitliche Entwicklung der in der Tabelle angeführten arithmetischen Mittel im Verlauf der Trainingslager weder durch ein lineares, noch durch ein exponentielles Modell angemessen beschrieben werden kann.

Gib einen Funktionstyp an, der für die Beschreibung der Abhängigkeit $n \mapsto \overline{x}(n)$ (n = Nummer des Trainingslagers) besser geeignet ist. Begründe deine Wahl.

(d) Betrachte die (nicht maßstabsgetreue) Abbildung unten.

Der Kugelstoß erfolgt aus einem Kreis mit einem Durchmesser von 2,13 m. Als Stoßweite wird die Länge der Strecke AZ festgehalten, wobei die Punkte M, A und Z auf einer Geraden liegen. Angenommen, bei einem konkreten Versuch verlässt die Kugel die Hand im Punkt H, wobei gilt: $MH = 1{,}24\,\text{m}$, $\measuredangle HMA = 18°$.

Berechne die Differenz zwischen der „tatsächlichen Stoßweite HZ" und der „gemessenen Stoßweite" AZ, wenn $AZ = 10{,}2\,\text{m}$ gilt.



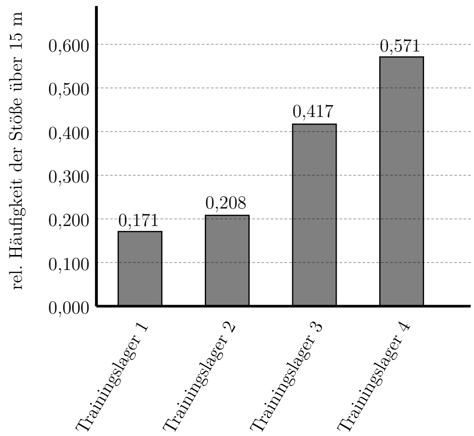
Lösungserwartung:

(a) Prinzipiell stellt eine relative Häufigkeit immer nur einen Schätzwert für eine „theoretische" Wahrscheinlichkeit dar. Die Annahme der Athletin ist insofern problematisch, da es viele Faktoren gibt, die die Ausgangssituation verändern können. Tagesform, Verletzungen, Motivation, Zuseher, Wichtigkeit des Wettkampfes und Nervosität sind nur einige Beispiele dafür.

Beträgt die Wahrscheinlichkeit für einen Stoß über 15 m tatsächlich $\frac{4}{7}$, so lautet die Wahrscheinlichkeit, dass die Athletin bei diesem Wettkampf während der ersten drei Versuche mindestens einmal die 15-m-Marke übertrifft:
$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{3}{7}\right)^3 \approx 0{,}921$

Der Zufallsvariable X ordnet dabei jeder Versuchsreihe von 3 Stößen die Anzahl jener Versuche zu, bei denen die 15-m-Marke übertroffen wird.

(b) Die Grafik stellt nur die absoluten Häufigkeiten der Stöße über 15 m dar, ohne zu zeigen, wie viele Versuche dafür benötigt wurden. Dies wäre nur sinnvoll, wenn es in jedem Trainingslager gleich viele Versuche gegeben hätte. Eine Darstellung der relativen Häufigkeiten spiegelt die Leistungsentwicklung der Athletin besser wider.



(c) Eine konstante Verbesserung im Sinne der Steigung einer linearen FUnktion, ebenso ständig ansteigende Verbesserungen der Leistung einer Athletin sind nicht realistisch.

Es bieten sich eher folgende Funktionstypen für die Abhängigkeit n von $\overline{x}(n)$ an: Logarithmusfunktion oder Wurzelfunktion bzw. Funktionen mit asymptotischem Verhalten. (Beachte: Mit zunehmenden x-Werten werden die momentanen Änderungsraten kleiner.)

(d) $MZ = MA + AZ = 1{,}065\,m + 10{,}2\,m = 11{,}265\,m$, $MH = 1{,}24\,m$, $\measuredangle HMA = 18°$

Vom Dreieck MHZ kennt man somit die Länge zweier Seiten und den eingeschlossenen Winkel.

$HZ^2 = MH^2 + MZ^2 - 2 \cdot MH \cdot MZ \cdot \cos(\measuredangle HMA)$ (Cosinussatz)

$HZ^2 = 1{,}24^2 + 11{,}265^2 - s \cdot 2{,}14 \cdot 11{,}265 \cdot \cos(18^circ) \Rightarrow HZ \approx 10{,}1\,m$

Die Differenz zwischen der „tatsächlichen Stoßweite HZ“ umd der „gemessenen Stoßweite“ beträgt ca. 1 dm.

1120 - K7 - DWV, FO - WS 1.1, WS 1.3, WS 1.4, FA-L 7.2 - Sportverhalten zweier Schulklassen - Dimensionen Mathematik Schularbeiten Trainer 7

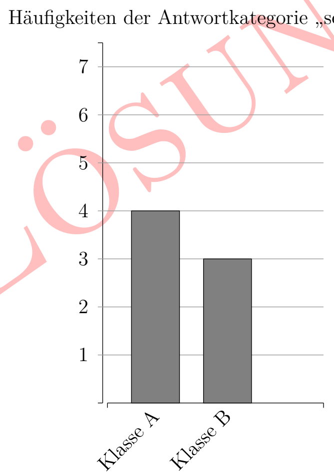
120. In zwei Schulklassen wird eine Befragung durchgeführt. Dabei wird u.a. die Frage gestellt, wie oft die Schüler/-innen Sport betreiben. Die möglichen Antwortkategorien lauten „nie“, „selten“, „manchmal“, „oft“ und „sehr oft“. In den untenstehenden Tabelle sind die absoluten Häufigkeiten der einzelnen Antwortkategorien, aufgeschlüsselt nach den beiden Klassen, zusammengefasst. ____/3

Antwortkategorie	Klasse A	Klasse B
Nie	4	4
Selten	8	2
Manchmal	6	3
Oft	6	2
Sehr oft	4	3

Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Im Rahmen einer Diskussion argumentiert eine Person auf der Basis des abgebildeten Diagramms (siehe weiter unten). Erläutere, welcher Eindruck durch diese Darstellung nahe gelegt wird und inwieweit die Darstellung den tatsächlichen Sachverhalt korrekt bzw. nicht korrekt wiedergibt. Welche Änderungen schlägst du im Sinne einer „objektiven" Darstellung vor?

Eine Person meint: „Einen Vergleich der beiden Klassen anhand der vorgegebenen Antwortkategorien halte ich grundsätzlich für problematisch." Nenne ein Argument, das diese Meinung stützt.



(b) $\boxed{\text{A}}$ Um einen Klassenvergleich anhand einer einzigen statistischen Kennzahl zu ermöglichen, entscheidet sich eine Person dazu, die Antwortkategorien mithilfe der Zahlen $x_1 = 1$ für „nie", $x_2 = 2$ für „selten", $x_3 = 3$ für „manchmal", $x_4 = 4$ für „oft" und $x_5 = 5$ für „sehr oft" zu quantifizieren und anschließend für jede Klasse das arithmetische Mittel $\overline{x}_A$ bzw. $\overline{x}_B$ zu berechnen. Bestätige durch Rechnung, dass $\overline{x}_A > \overline{x}_B$ gilt, und interpretiere das Ergebnis.

Eine andere Person entscheidet sich für die Codierung $y_1 = 1$ für „nie", $y_2 = 2$ für „selten", $y_3 = 4$ für „manchmal", $y_4 = 8$ für „oft" und $y_5 = 16$ für „sehr oft". Für das arithmetische Mittel berechnet sie $\overline{y}_A \approx 5{,}57..$ bzw. $\overline{y}_B = 6$. Eine Person argumentiert: „Da muss offensichtlich ein Rechenfehler vorliegen, denn obwohl zwischen den Antwortkategorien und den beiden Codierungsvarianten ja monotone Beziehungen bestehen, würde ein Vergleich der Mittelwerte jetzt ja ein gegenteiliges Ergebnis liefern.“ Gib an, ob diese Aussage wahr oder falsch ist, und interpretiere den Sachverhalt.

(c) Gib für die beiden bei (b) angeführten Zahlenfolgen x_n und y_n, $1 \leq n \leq 5$, Gleichungen an, die die funktionalen Abhängigkeiten $n \mapsto x_n$ und $y \mapsto y_n$ beschreiben.

Lösungserwartung:

(a) Das gegebenen Diagramm zeigt nur die Anzahl jener Personen, die „sehr oft“ Sport betreiben, noch dazu ohne Bezug zur Gesamtanzahl der Schüler in der jeweiligen Klasse. Dadurch wird fälschlicherweise der Eindruck nahegelegt, dass Klasse A „sportlicher“ ist, da sie ja mehr „sehr oft“ Sport betreibende Personen hat. Objektiver ist sicher eine Darstellung mittels relativer Häufigkeiten. So ist z.B. der Anteil der „sehr oft“ Sport betreibenden Personen in der Klasse B in Wirklichkeit größer als in der Klasse A.

Eine Einteilung in die gegebenen Klassen könnte insofern problematisch sein, da sie kaum objektiv sein kann. Ohne exakt zu definieren, was man z.B. unter „selten“ versteht, wird eine genaue Einteilung in Klassen schwer möglich sein.

(b) $\overline{x}_A = \frac{4\cdot1+8\dot{2}+6\cdot3+6\cdot4+4\cdot5}{28} = 2{,}93$

$\overline{x}_B = \frac{4\cdot1+2\dot{2}+3\cdot3+2\cdot4+3\cdot5}{14} = 2{,}86$

Klasse A kann im Durchschnitt als „sportlicher“ angesehen werden. Ausschlaggebend dafür ist v.a. der relativ große Anteil an Schülern der Klasse B, die „nie“ Sport betreiben.

$\overline{y}_A = \frac{4\cdot1+8\dot{2}+6\cdot4+6\cdot8+4\cdot16}{28} = 5{,}57$

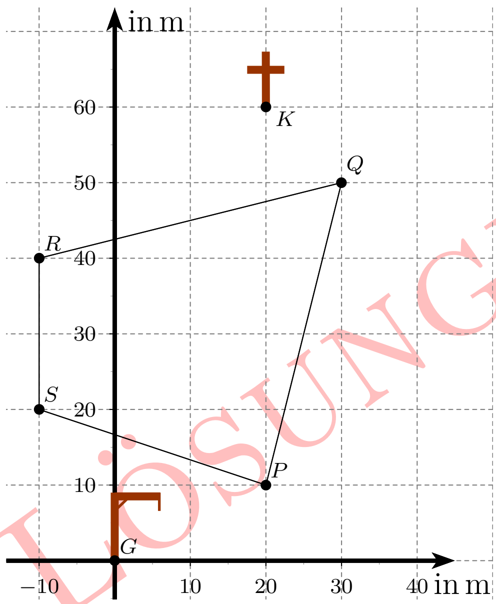
$\overline{<}_B = \frac{4\cdot1+2\dot{2}+3\cdot4+2\cdot8+3\cdot16}{14} = 6$

Es liegt hier kein Rechenfehler vor. Das gegenteilige Ergebnis kommt dadurch zustande, dass die „Gewichtung“ der einzelnen Klassen zu einseitig zugunsten der öfter Sport treibenden Schüler erfolgt.

(c) Die Gleichungen $x(n) = n$ (lineare Funktion) und $y(n) = 2^{n-1}$ (Exponentialfunktion) stellen die entsprechenden Abhängigkeiten dar.

1121 - K5 - TR - AG 4.1, AG 4.2, AG-L 4.4 - Schatzsuche - Mathematik verstehen 5

121. Robinson findet an einem Strand die unten abgebildete Karte. Auf deren Rückseite steht, dass in einem Feld $PQRS$, welches zwischen einem Galgen G und einem Kreuz K liegt, ein Schatz vergraben sei. Robinson macht sich auf die Suche und erreicht bald das beschriebene Gelände. Dort findet er allerdings nur mehr den Galgen und das Kreuz, nicht aber die Grenzsteine P, Q, R und S, die auf der Karte eingezeichnet sind. ____/0



- Robinson möchte nun die Grenzen des Feldes abstecken und braucht dazu die Koordinaten der Grenzsteine. Lies die kartesischen Koordinaten der Punkte P, Q, R, S und K ab und trage sie in die Tabelle ein.

	P	Q	R	S	K
kart. Koordinaten	(20/10)	(30/50)	(-10/40)	(-10/20)	(20/60)
Polarkoordinaten	[22,3; 26,5°]	[58,3; 59°]	[41,2; 104°]	[22,3; 116,5°]	[63,2; 71,5°]

- Berechne die Polarkoordinaten der Punkte und trage sie ebenso in die obige Tabelle ein.

- Um seinen Arbeitsaufwand abzuschätzen möchte Robinson auch wissen, wie groß der Umfang bzw. der Flächeninhalt des Feldes $PQRS$ ist. Berechne den Umfang sowie den Flächeninhalt! U=134,08 m, A=1050 m^2
- Robinson schreitet nun jeweils von G aus zu den Punkten P, Q, R und S. Gib an um welchen Winkel er jeweils von der Strecke GK abweichen muss und wie viele Schritte er braucht, um den angepeilten Punkt zu erreichen! Rechne mit einer Schrittlänge von ca. 70 cm!

  ∡(PA;PK)=45°; ca. 32 Schritte zum Punkt A
  ∡(PB;PK)=12,5°; ca. 83 Schritte zum Punkt B
  ∡(PK;PC)=32,5°; ca. 59 Schritte zum Punkt C
  ∡(PK;PD)=45°; ca. 32 Schritte zum Punkt D
- Tatsächlich findet Robinson nach längerem Suchen den Schatz im Punkt $T = (10/30)$. Trage den Punkt T in die Karte ein und begründe, dass er auf der Strecke GK liegt!

  Begründung: Da $tan^{-1}(\frac{30}{10}) = tan^{-1}(\frac{60}{20})$ folgt daraus, dass die Punkte T=(10/30) und K=(20/60) das gleiche Polarwinkelmaß haben. Somit liegt T auf der Strecke PK.

1121 - K5 - FU - AG 2.1, FA 1.2, FA 1.4, - Indizes in der Anthropometrie - Mathematik verstehen 5 modifiziert

122. In der Anthropometrie (Vermessung des menschlichen Körpers) gibt es u.a. folgende Indizes: ____/0

Body-Mass-Index (BMI)= $\frac{m}{l^2}$ (m = Körpermasse in kg, l = Körpergröße in m)
Körperfett-Verteilungsmuster-Index (KVI)= $\frac{b^2}{h}$ (B= Bauchumfang in cm, h= Hüftumfang in cm)
Taille-Hüfte-Verhältnis (THV)= $\frac{t}{h}$ (t = Taillenumfang in cm, h = Hüftumfang in cm)
Taille-Größe-Verhältnis (TGV)= $\frac{t}{l}$ (t = Taillenumfang in cm, l = Körpergröße in cm)

(a) Ein Erwachsener macht eine Diät und verliert an Gewicht. Beschreibe, wie sich sein BMI ändert.

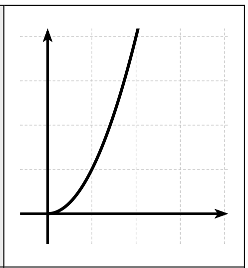
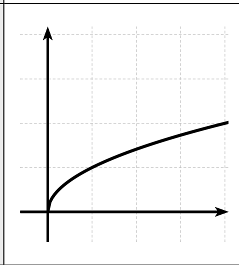
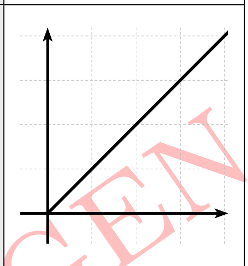
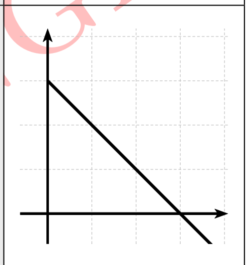
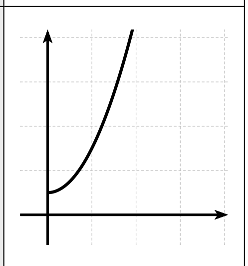
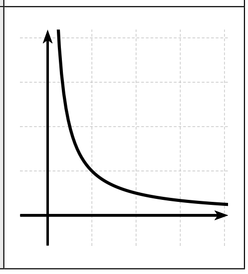
Der BMI wird kleiner.

(b) Welche Art von Proportion stellt die folgenden Funktion $f : l \mapsto \text{BMI}$ (mit m konstant) dar?

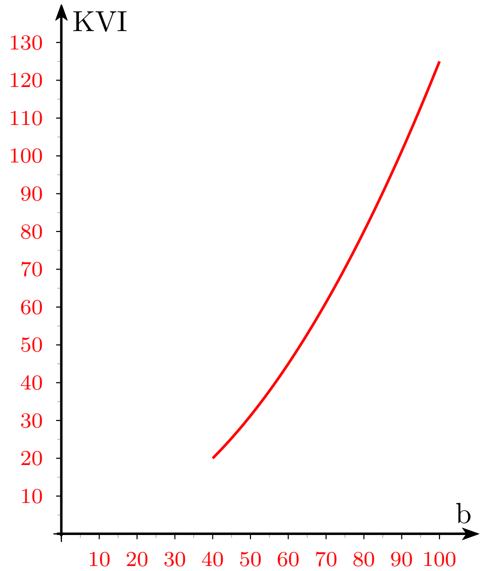
Indirekt Proportional zum Quadrat von l.

(c) Ordne die folgenden Funktionen den drei Graphen zu.

$m \mapsto BMI$ (l konstant)	C
$l \mapsto BMI$ (m konstant)	F
$b \mapsto KVI$ (b konstant)	A
________________	-

A	
B	
C	
D	
E	
F	

(d) Zeichne die Funktion des KVI mit $b \mapsto$ KVI in das Koordinatensystem bei einem konstanten Hüftumfang von 80 cm für einen Bauchumfang $40 \leq b \leq 100$ cm ein und skaliere die Achsen.



(e) Die WHO klassifiziert den BMI wie in der folgenden Tabelle:

Adipositas Grad III	BMI ≥ 40
Adipositas Grad II	$35 \leq$BMI < 40
Adipositas Grad I	$30 \leq$BMI < 35
Übergewicht	$25 \leq$BMI < 30
Normalgewicht	$18{,}5 \leq$BMI < 25
leichtes Untergewicht	$17 \leq$BMI $< 18{,}5$
mäßiges Untergewicht	$16 \leq$BMI < 17
starkes Untergewicht	BMI < 16

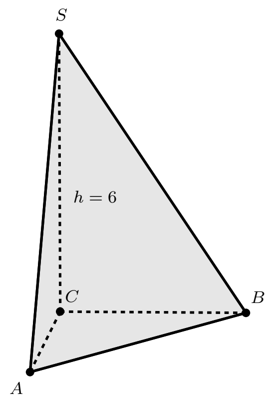
Berechne aufgrund der Tabelle, in welchem Bereich die Körpermasse eines 1,9 m großen Mannes liegen darf, damit dieser als normalgewichtig gilt.

Zwischen 66,8 kg und 90,3 kg

1123 - K6 - VAG3 - AG-L 3.8, AG-L 3.7, AG-L 3.6 - Dreiseitige Pyramide

123. Eine dreiseitige Pyramide (siehe Abbildung unten), deren Höhe h normal auf die beiden Grundkanten AC und BC steht, ist durch die Koordinaten der Punkte A, B, C und die Höhe $h = 6$ festgelegt. ____/4

$$A = (-2|1|3),\ B = (1|0|3),\ C = (-1|2|3)$$



Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Berechne die Grundfläche (die Fläche des Dreiecks ABC) der Pyramide. Für das Volumen V einer Pyramide gilt allgemein $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$, wobei h die Höhe und G der Flächeninhalt der Grundfläche der Pyramide sind. Berechne mit Hilfe dieser Formel das Volumen V der gegebenen Pyramide.

(b) Berechne die Koordinaten des Punkt S sowie den Winkel den die Seiten BC und BS einschließen.

(a) Lösungserwartung:

$$G = \frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = 2$$

$\Rightarrow$ Die Grundfläche der Pyramide beträgt 2 FE

$V = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 6 = 4$

$\Rightarrow$ Das Volumen der Pyramide beträgt 4 VE

(b) Lösungserwartung:

$$\overrightarrow{n_{ABC}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{n_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow S = C + 6 \cdot \overrightarrow{n_0} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$\cos(\varphi) = 64{,}76°$

1124 - K6 - FO - FA-L 7.1 - Fibonaccis Kaninchen

124. Beobachtet wird eine Kaninchenpopulation die im ersten Monat dieses Jahres aus einem einzigen neugeborenen Paar besteht. Folgende Annahmen über die Natur der Kaninchen werden getroffen: ____/4

- Ein neugeborenes Kaninchenpaar kriegt nach genau zwei Monaten zum ersten Mal Junge - ein neues Kaninchenpaar.
- Danach bringt das (nun erwachsene) Kaninchenpaar jeden Monat ein neues Paar zur Welt.
- Die Kaninchen sterben nie.

Tipp: Wir beginnen also mit einem Kaninchenpaar, das im ersten Monat geboren wird. Dieses ist nach zwei Monaten erwachsen und dann kommt im dritten Monat ein neues Paar zur Welt. Am Ende des dritten Monats haben wir also insgesamt zwei Paare. Während im vierten Monat das neugeborene Paar weiter heranwächst, kriegt das erwachsene Paar schon wieder Kinder...

Aufgabenstellung:

(a) Wie viele Kaninchenpaare hat man zu Weihnachten dieses Jahres?

(b) Gib eine rekursive Darstellung dieser Folge an.

(c) Wie viele Kaninchenpaare hat man zu Weihnachten, wenn diese nur einen Monat brauchen, um das erste Mal Kinder zu kriegen? Gib eine Termdarstellung dieser Folge an!

(a) **Lösungserwartung:**

1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144

(b) **Lösungserwartung:**

$f_1 = f_2 = 1$ und $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$

(c) **Lösungserwartung:**

1,2,4,8,16,32,64,126,265,512,1024,2048

$b_n = 1 * 2^n$ für $n \in \mathbb{N}^*$
$b_n = 1 * 2^{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$

1125 - K6 - VAG3 - AG 3.3, AG-L 3.8 - Cheops-Pyramide

125. Die Pyramiden von Gizeh in Ägypten gehören zu den bekanntesten und ältesten erhaltenen Bauwerken der Menschheit. Sie befinden sich am westlichen Rand des Niltals, etwa acht Kilometer südwestlich der Stadt Gizeh (Gîza). Das die Pyramiden und ihre Nebenanlagen genau nach den Himmelsrichtungen ausgerichtet wurden ist allgemein bekannt. Will man eine wie immer auch geartete Ausrichtungen von Gebäuden erreichen, muss vor dem eigentlichen Baubeginn eine exakte Vermessung und Markierung vorangehen. Ohne solche Arbeiten ist eine so exakte Ausrichtung und Anordnung der Bauwerke kaum vorstellbar. ____/4

Es muss oder könnte mit großer Wahrscheinlichkeit auf dem Gisa-Plateau so etwas wie ein Koordinatensystem festgelegt worden sein, das die Ausrichtung der Anlagen bestimmt. Angenommen, für die Cheops-Pyramide wurden folgende Punkte fixiert (sämtliche Angaben in Metern):

$A = (-1/2/3), B = (206{,}5/102/3), C = (106{,}5/309{,}5/0), D = (-101/209{,}5/0)$.

Es handelt sich bei der Cheops-Pyramide um eine gerade, quadratische Pyramide, die Spitze $S = (51{,}9/157{,}5/148)$ liegt also direkt über dem Mittelpunkt der Grundfläche.

Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Berechne den Mittelpunkt der Grundfläche der Pyramide.

Die oben genannten Koordinaten entstammen einem Modell, dass die ursprüngliche Cheopspyramide darstellen soll. Durch die natürliche Abnutzung in den letzten rund 4000 Jahren hat die Pyramide etwas an Höhe verloren und ist heutzutage nur noch 138,75 m hoch. Vorausgesetzt, dass Modell beschreibt die damalige Höhe - um wie viele Meter ist die Pyramide heute „niedriger“ als früher?

(b) Berechne händisch (ohne Geogebra) die Grundfläche (die Fläche des Vierecks $ABCD$) der Pyramide. (Runde dabei jeweils auf zwei Dezimalstellen).

(a) **Lösungserwartung:**

$$M = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 52{,}75 \\ 155{,}75 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{MS}| = \left|\begin{pmatrix} -0{,}85 \\ 1{,}75 \\ 146{,}5 \end{pmatrix}\right| = 146{,}51$$

Der Unterschied beträgt 7,76 m.

(b) **Lösungserwartung:**

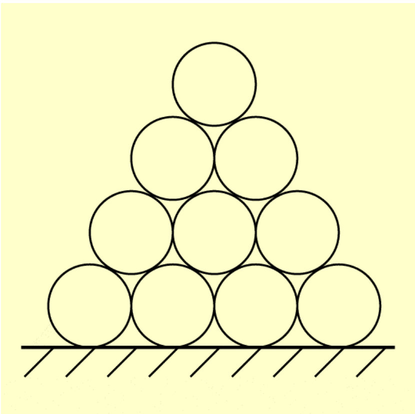
$$G = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = \left|\begin{pmatrix} 207{,}5 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -100 \\ 207{,}5 \\ -3 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -300 \\ 622{,}5 \\ 53056{,}25 \end{pmatrix}\right| = 53060{,}75$$

Die Grundfläche der Pyramide beträgt 53060,75 m^2.

1126 - K6 - FO, RE - FA-L 7.1, FA-L 8.1, AG 2.3 - Boomwhackers

126. Boomwhacker sind Musikinstrumente aus der Gruppe der Schlagidiophone. Sie bestehen aus unterschiedlich langen Kunststoffröhren.Diese sind harmonisch aufeinander abgestimmt. Beim Schlagen des Boomwhacker auf verschiedenartigen Gegenständen ergeben sich unterschiedlich klingende Töne. Boomwhackers erzeugen Töne, wenn man sie gegeneinander, auf den Boden, den Körper oder jede beliebige Oberfläche schlägt. Boomwhackers für verschiedene Tonhöhen sind verschieden lang - für dieses Beispiel verwenden wir aber ausschließlich **gleich lange** Boomwhackers. ____/4

Herr Prof. Grüneis hat nun eine neue Lieferung dieser Boomwhacker an die Schule bekommen und muss diese nun lagern, dafür stapelt er sich pyramidenweise aufeinander (siehe Grafik unten rechts).



Aufgabenstellung:

(a) Man kann die Anzahl der Boomwhackers pro Reihe als arithmetische Folge $(a_n | n \in \mathbb{N})$ betrachten - gib eine Termdarstellung jener Folge an unter der Voraussetzung, dass in der untersten Reihe 150 Boomwhackers liege.

(b) $\boxed{\text{A}}$ Wie viele Boomwhackers können gestapelt werden, wenn in der ersten Reihe zwölf Boomwhackers liegen?

(c) Herr Prof. Grüneis hat insgesamt 140 Boomwhackers gekauft, wie viele Boomwhackers müssen (mindestens) in der untersten Reihe liegen, damit er alle aufeinander stapeln kann? (Löse die Aufgabe unter Zuhilfenahme der Formel für eine endliche arithmetische Reihe).

(a) **Lösungserwartung:**

$a_n = 150 - 1 \cdot n$

(b) **Lösungserwartung:**

$s_{11} = (12 + 1) \cdot \frac{12}{2} = 78$

(c) **Lösungserwartung:**

$(n + 1) \cdot \frac{n}{2} \geq 140$
$\frac{n^2+n}{2} \geq 140$
$n^2 + n - 280 = 0$
$n \geq 16{,}24$
In der untersten Reihe müssten mindestens 17 Boomwhacker liegen.

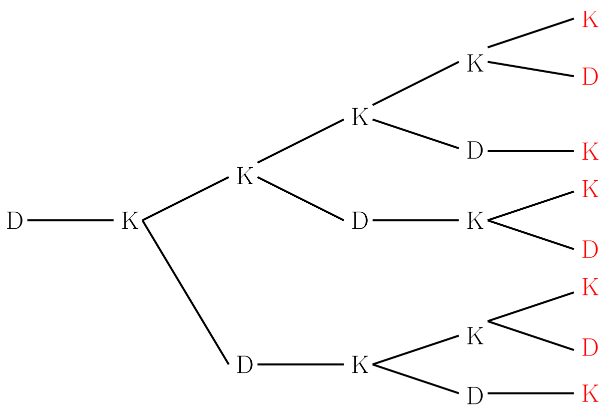
1127 - K6 - FO - FA-L 7.1 - Fibonacci Bienenkönigin

127. Die Honigbiene (apis mellifica) unterscheidet sich von vielen anderen Tierarten durch ihr komplizierteres Fortpflanzungssystem. Es existieren drei Bienengeschlechter: die Königin, die Arbeiterin und die Drohne. Nur die Königin ist in der Lage Eier zu legen. Wenn ein Ei von einer Drohne befruchtet wurde, so entwickelt sich daraus abhängig von der ihm zukommenden Pflege eine Arbeiterin oder eine Königin. Aus einem unbefruchteten Ei entspringt wieder eine Drohne. ____/4

Damit lassen sich die Vorfahren einer Drohne mit den folgenden beiden Regeln aufzälen:

- Eine Drohne hat immer eine Königin als direkten Vorfahren.
- Eine Königin hat immer eine Königin und eine Drohne als direkten Vorfahren.

Es ergibt sich für eine Drohne also folgender Stammbaum:



Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Zeichne in den obigen Stammbaum die nächste Vorfahrengeneration ein!

(b) Angenommen die erste Drohne ist die „nullte“ Generation, dann besitzt die erste Generation die Anzahl 1 (eine Königin), die zweite Generation die Anzahl 2 (eine Königin und eine Drohne), usw. - gib die Anzahl der 10. Generation an!

(c) Gib eine rekursive Darstellung einer Folge an, mit der die Anzahl der Vorfahren einer Generationsebene bestimmt werden kann.

(d) Bei einem „normalen“ Stammbaum, in dem jedes Individuum durch heterosexuelle Zeugung entsteht, wächst die Anzahl der Vorfahren einer Generationsebene exponentiell mit der Generation. Das heißt beispielsweise, dass ein Mensch genau 2^1 Eltern, 2^2 Großeltern, 2^3 Urgroßeltern,... hat. Gib eine Folge $(b_n|n \in \mathbb{N}^*)$ zur Berechnung der Anzahl der Individuen auf der n-ten Ebene des Stammbaums an, wobei das einzelne Individuum, dessen Stammbaum betrachtet wird, die erste Ebene darstellt (b_1).

Tipp: Die Eltern-Generation stellt also bereits die 2. Generation von Vorfahren da (b_2).

(a) Lösungserwartung:

siehe oben

(b) **Lösungserwartung:**

1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89 → In der 10. Generation sind es 89 Vorfahren.

(c) **Lösungserwartung:**

$f_1 = f_2 = 1$ und $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$

(d) **Lösungserwartung:**

$b_n = 1 * 2^n$ für $n \in \mathbb{N}^*$

$b_n = 1 * 2^{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$

1128 - K7 - BSW, DWV, FO - Sportverhalten zweier Schulklassen - WS 1.1, WS 2.2, FA-L 7.2, WS 1.3, - Dimensionen Mathematik 7 Schularbeitentrainer

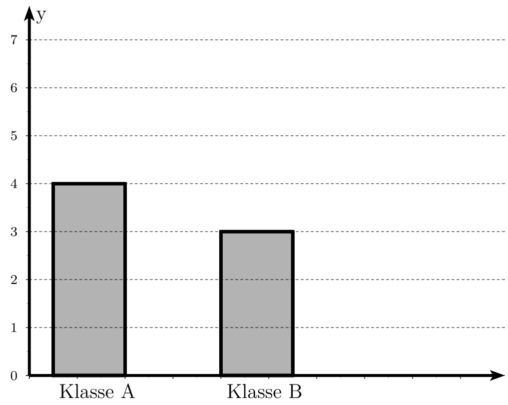
128. In zwei Schulklassen wird eine Befragung durchgeführt. Dabei wird u.a. die Frage gestellt, wie oft die Schüler/-innen Sport betreiben. Die möglichen Antwortkategorien lauten „nie“, „selten“, „manchmal“, „oft“ und „sehr oft“. In den nebenstehenden Tabelle sind die absoluten Häufigkeiten der einzelnen Antwortkategorien, aufgeschlüsselt nach den beiden Klassen, zusammengefasst. ____/6

Antwortkategorie	Klasse A	Klasse B
Nie	4	4
Selten	8	2
Manchmal	6	3
Oft	6	2
Sehr oft	4	3

Aufgabenstellung:

(a) Im Rahmen einer Diskussion argumentiert eine Person auf der Basis des abgebildeten Diagramms.

Häufigkeiten der Antwortkategorie „sehr oft“



$\boxed{\text{A}}$ Erläutere, welcher Eindruck durch diese Darstellung nahe gelegt wird und inwieweit die Darstellung den tatsächlichen Sachverhalt korrekt bzw. nicht korrekt wiedergibt. Welche Änderung schlägst du im Sinne einer „objektiveren“ Darstellung vor?

Eine Person meint: „Einen Vergleich der beiden Klassen anhand der vorgegebenen Antwortkategorien halte ich grundsätzlich für problematisch.“ Nenne ein Argument, das diese Meinung stützt.

(b) Um einen Klassenvergleich anhand einer einzigen statistischen Kennzahl zu ermöglich, entscheidet sich eine Person dazu, die Antwortkategorien mithilfe der Zahlen x_1 für „nie“, x_2 für „selten“, x_3 für „manchmal“, x_4 für „oft“ und x_5 für „sehr oft“ zu quantifizieren und anschließend für jede Klasse das arithmetische Mittel $\overline{x}_A$ bzw. $\overline{x}_B$ zu berechnen. Bestätige durch Rechnung, dass $\overline{x}_A > \overline{x}_B$ gilt, und interpretiere das Ergebnis.

Eine andere Person entscheidet sich für die Codierung $y_1 = 1$ für „nie“, $y_2 = 2$ für „selten“, $y_3 = 4$ für „manchmal“, $y_4 = 8$ für „oft“ und $y_5 = 16$ für „sehr oft!“. Für die artihmetischen mittel berechnet sie $\overline{y}_A \approx 5{,}57..$ bzw. $\overline{y}_B = 6$. Eine Person argumentiert: „Da muss offensichtlich ein Rechenfehler vorliegen, denn obwohl zwischen den Antwortkategorien und den beiden Codierungsvarianten ja monotone Beziehungen bestehen, würde ein Vergleich der Mittelwerte jetzt ja ein gegenteiliges Ergebnis liefern“. Gib an, ob diese Aussage wahr oder falsch ist, und interpretiere den Sachverhalt.

(c) Gib für die beiden bei b) angeführten Zahlenfolgen x_n und y_n, $1 \leq n \leq 5$, Gleichungen an, die die funktionalen Abhängigkeiten $n \to x_n$ und $n \to y_n$ beschreiben.

(a) **Lösungserwartung:**

Das gegebene Diagramm zeigt nur die Anzahl jener Personen, die „sehr oft“ Sport betreiben, noch dazu ohne Bezug zur Gesamtanzahl der Schüler in der jeweiligen Klasse. Dadurch wird fälschlicherweise der Eindruck nahegelegt, dass Klasse A „sportlicher" ist, da sie ja mehr „sehr oft" Sport betreibende Personen hat. Objektiver ist sicher eine Darstellung mittels relativer Häufigkeiten. So ist z.B. der Anteil der „sehr oft" Sport betreibenden Personen in der Klasse B in Wirklichkeit größer als in der Klasse A.

Eine Einteilung in die gegebenen Klassen könnte insofern problematisch sein, da sie kaum objektiv sein kann. Ohne exakt zu definieren, was man z.B. unter „selten" versteht, wird eine genaue Einteilung in Klassen schwer möglich sein.

(b) **Lösungserwartung:**

$\overline{x}_A = \frac{4\cdot1+8\cdot2+6\cdot3+6\cdot4+4\cdot5}{28} = 2{,}93$
$\overline{x}_B = \frac{4\cdot1+2\cdot2+3\cdot3+2\cdot4+3\cdot5}{14} = 2{,}86$

Klasse A kann im Durchschnitt als „sportlicher" angesehen werden. Ausschlaggebend dafür ist v.a. der relativ große Anteil an Schülern der Klasse B, die „nie" Sport betreiben.

$\overline{y}_A = \frac{4\cdot1+8\cdot2+6\cdot4+6\cdot8+4\cdot16}{28} = 5{,}57$
$\overline{x}_B = \frac{4\cdot1+2\cdot2+3\cdot4+2\cdot8+3\cdot16}{14} = 6$

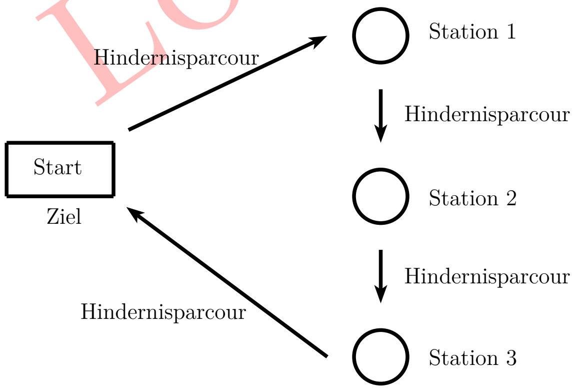
Es liegt hier kein Rechenfehler vor. Das gegenteilige Ergebnis kommt dadurch zustande, dass die „Gewichtung" der einzelnen Klassen zu einseitig zugunsten der öfter Sport treibenden Schüler erfolgt.

(c) **Lösungserwartung:**

Die Gleichung $x(n) = n$ (lineare Funktion) und $y(n) = 2^{n-1}$ Exponentialfunktion) stellen die entsprechenden Abhängigkeiten dar.

1129 - K7 - DWV, RF, GL - Geschicklichkeitswettbewerb beim Schulfest - AG 2.1, FA 1.8, AG 2.4, WS 3.3, WS 3.2, FA 1.4, WS 1.3 - Dimensionen Mathematik 7 Schularbeitentrainer

129. Im Rahmen eines Schulfests können Freiwillige an einem Geschicklichkeitswettbewerb teilnehmen. Wie in der Abbildung rechts schematisch dargestellt, geht es dabei darum, einen mit Hindernissen versehenden Parcours zu durchlaufen. Während des Parcours gelangen die Teilnehmer/-innen zu drei Stationen. Pro Station steht den Teilnehmern und Teilnehmerinnen jeweils ein Zeitintervall von exakt 10 Sekunden Dauert zur Verfügung. Während dieser Zeit können sie durch Lösung verschiedener Aufgaben Pluspunkte sammeln (Station 1 ... Rechenaufgaben, Station 2 ... Wortergänzungsaufgaben, Station 3 ... Zielwurfaufgaben). Bei jeder der drei Stationen wird die Fortsetzung des Hindernisparcours erst nach Ablauf der 10 Sekunden freigegeben. Für die Bewertung der im Wettbewerb erbrachte Gesamtleistung L sind die für die vom Start zum Ziel insgesamt benötigte Zeit t und die während der drei Stationen gesammelten Pluspunkte P maßgeblich. Hohe L-Werte sollen dabei „gute Leistungen“ zum Ausdruck bringen. ____/6



Aufgabenstellung:

(a) Erläutere, inwieweit die nachfolgend angeführten zwei Formeln für die Festlegung der im Bewerb erbrachten Leitung L auf der Grundlage der benötigten Zeit t und der gesammelten Pluspunkte P problematisch sind.

Formel 1: $L = 100 + \frac{P}{t}$ Formel 2: $L = 100 + \frac{t}{P}$

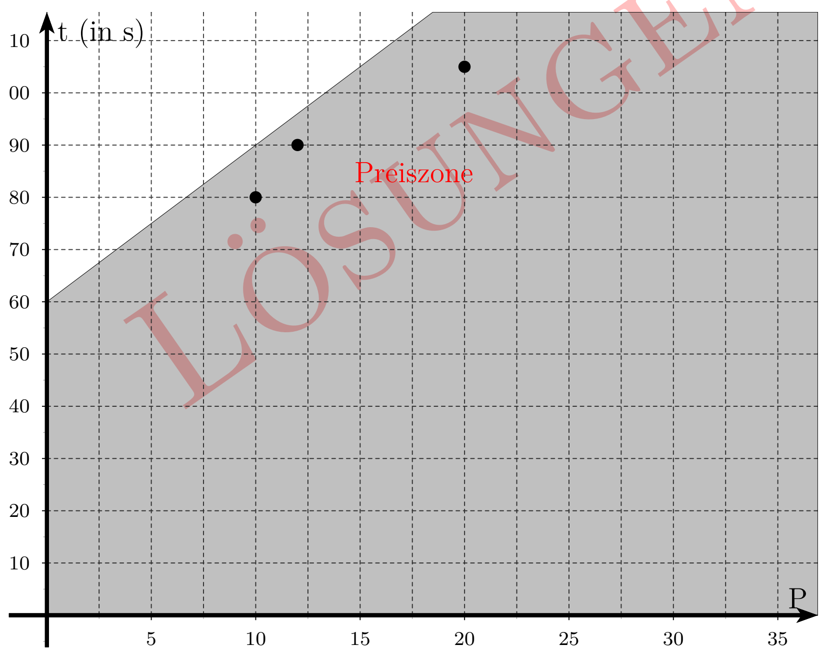
(b) $\boxed{\text{A}}$ Das Organisationsteam des Wettbewerbs legt fest, dass der Berechnung

von L eine Gleichung folgender Art zugrunde gelegt werden soll:
$L = a + b \cdot P + c \cdot t$.

Gib an wie die Parameter a, b und c zu wählen sind, wenn nachfolgende Bedingungen erfüllt werden sollen:

- Jeder zusätzliche Pluspunkt soll (gleiche Laufzeit vorausgesetzt) eine Vergrößerung von L um 3 bewirken.
- Jede zusätzlich benötigte Sekunde soll (gleiche Anzahl von Pluspunkten vorausgesetzt) eine Verkleinerung von L um 1 bewirken.
- Im Falle von $P = 0$ und $t = 100$ soll L den Wert 100 annehmen.

Es wird vereinbart, dass Teilnehmern und Teilnehmerinnen, die einen Wert $L > 140$ erreichen, ein Preis zusteht. Veranschauliche im abgebildeten Koordinatensystem welcher Zusammenhang zwischen P und t bestehen muss, damit ein Preis gewonnen wird. Gib für (P, t) mindestens drei zutreffende realistische Wertepaare an.



(c) Bei der Station 3 besteht die Aufgabe darin, mit Tennisbällen möglichst viele Dosen umzuschießen. Die Dosen sind dabei so angeordnet, dass pro Wurf maximal eine Dose getroffen werden kann und die Abstände der aufgestellten Dosen von der Abwurfposition von Dose zu Dose jeweils um 0,5 m zunehmen. Eine Person geht davon aus, dass in dem zur Verfügung stehenden Zeitraum von 10 Sekunden maximal 8 Würfe absolviert werden können, und argumentiert, dass die Wahrscheinlichkeit für mehr als zwei umgeschossene Dosen mit folgendem Ansatz berechnet werden kann:
$P(X > 2) = 1 - \binom{8}{0} \cdot 0{,}6^0 \cdot 0{,}4^8 - \binom{8}{1} \cdot 0{,}6^1 \cdot 0{,}4^7 - \binom{8}{2} \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}4^6$

Erläutere, von welchen weiteren Annahmen die Person offensichtlich ausgeht, und zähle Argumente auf, die gegen die Richtigkeit des angeführten Ansatzes sprechen.

(d) Einen Höhepunkt des Schulfests stellt ein Wettkampf zwischen einem Lehrer/-innen- und einem Schüler/innen-Team dar. Beide Teams bestehen aus jeweils vier Personen. Die Tabelle unten fasst pro Person die gestoppte Zeit und die gesammelte Anzahl von Pluspunkten zusammen. Das Lehrer/-innen-Team sieht sich als Sieger. Gib an, auf welche Berechnungen sich das Lehrer/-innen-Team beziehen kann. Nenne Argumente, die den Sieg des Lehrer/-innen-Teams in Zweifel stellen.

Lehrer/-innen	P	t (in s)	Schüler/-innen	P	t (in s)
L1	8	95	S1	7	85
L2	10	101	S2	4	91
L3	7	85	S3	2	88
L4	12	105	S4	6	79

(a) **Lösungserwartung:**

$L = 100 + \frac{P}{t}$
Sowohl eine hohe Punktezahl als auch eine kurze Laufzeit vergrößern den L-Wert, wobei P in dieser Formel „überbewertet“ wird. Werden außerdem keine zusätzlichen Punkte erzielt, so kann auch eine gute Laufzeit den L-Wert nicht mehr verbessern.

$L = 100 + \frac{t}{P}$
Für einen hohen L-Wert muss der Läufer eine langsame Laufzeit und eine geringe Punkteanzahl erreichen. Beides ist nicht im Sinne des Wettbewerb. Erreicht der Läufer keinen zusätzlichen Pluspunkt, also $P = 0$, so kann der L-Wert gar nicht berechnet werden.

(b) **Lösungserwartung:**

$L = a + b \cdot P + c \cdot t$

- Nimmt b den Wert 3 an, so vergrößert jeder zusätzliche Pluspunkt den L-Wert um 3.
- Für $c = -1$ verkleinert sich pro zusätzlich benötigter Sekunde der L-Wert um 1.
- Aus (1) und (2) folgt: $L = a + 3 \cdot P - 1 \cdot t$

Für $L = 100$, $P = 0$ und $t = 100$ ergibt sich: $100 = a + 3 \cdot 0 - 1 \cdot 100 \Rightarrow a = 200$
$L = 200 + 3 \cdot P - t$
Um einen Wert $L > 140$ zu erreichen, muss gelten: $200 + 3 \cdot P - t > 140$ bzw. $t < 3 \cdot P + 60$

Mögliche Wertepaare $(P \mid t) : (10 \mid 80), (12 \mid 90), (20 \mid 105), \ldots$
Abbildung: siehe oben

(c) **Lösungserwartung:**

Die Person geht davon aus, dass

- sie die maximale Anzahl von Würfen auch ausführt.
- die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer 0,6 beträgt.
- sich die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer nicht ändert, auch wenn sich die Entfernung zu den Dosen vergrößert.

Gegen diesen Ansatz spricht, dass innerhalb der 10 Sekunden nicht immer 8 Würfe abgegeben werden können und die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer verkleinert, wenn sich die zu treffenden Dosen in einem immer größer werdenden Abstand befinden.

(d) **Lösungserwartung:**

Lehrer/-innen	P	t (in s)	L-Wert	Schüler/-innen	P	t (in s)	L-Wert
L1	8	95	129	S1	7	85	136
L2	10	101	129	S2	4	91	121
L3	7	85	136	S3	2	88	118
L4	12	105	131	S4	6	79	139
			$\overline{L}_L = 131{,}25$				$\overline{L}_S = 131{,}25$

Die Summe der L-Werte der Lehrer beträgt 525 ($\overline{L}_L = 131{,}25$), die der Schüler 514 ($\overline{L}_S = 128{,}5$). Wertet man den Wettkampf als Team-Bewerb, so können sich die Lehrer als Sieger sehen.

Die Schüler/-innen-Mannschaft stellt jedoch mit S_4 und dem L-Wert 139 den stärksten Einzelkämpfer.

1130 - K7 - DR, RF - Gartenpflege - AG 2.1, FA 1.4, AN 1.2, AN 1.3, FA 1.7, FA 4.3 - Dimensionen Mathematik 7 Schularbeitentrainer

130. In einer Gartenpflege-Firma machen sich die Mitarbeiter/-innen Gedanken darüber, wie oft der Rasen eines bestimmten Grundstücks während einer Saison gemäht werden soll. Den Überlegungen liegen folgende Beobachtungen bzw. Annahmen zugrunde: ____/6

Während einer Saison wächst der Rasen insgesamt (ca.) 80 cm.

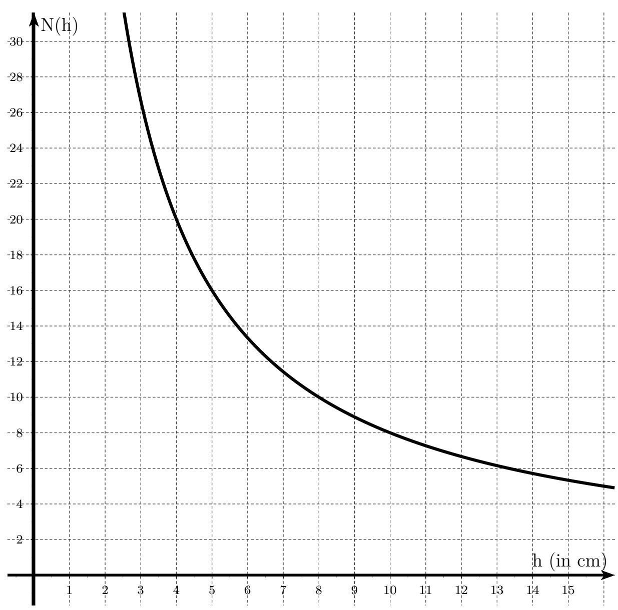
Es kann davon ausgegangen werden, dass der Rasen bei jeweils gleicher Grashöhe gemäht wird. Je höher das Grad ist, desto länger dauert ein Mähvorgang. Es wird angenommen, dass die Abhängigkeit der für einen Mähvorgang benötigten Zeit t (in Minuten) von der aktuellen Grashöhe h (in cm) näherungsweise durch die Funktion f mit der Gleichung $t = f(h) = 0{,}5 \cdot h^2 + 30$ beschrieben wird.

Die Variable N gibt an, wie oft der Rasen während einer Saison gemäht wird.

Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Beschreibe die Abhängigkeit $N(h)$ mithilfe einer Formel.

Einer Person veranschaulicht die Abhängigkeit $N(h)$ für $8 \leq h \leq 12$ wie im Diagramm unten dargestellt. Erläutere inwieweit diese Darstellung den tatsächlichen Sachverhalt nicht korrekt beschreibt, und veranschauliche exemplarisch welche Korrekturen am Diagramm vorzunehmen sind.



(b) T bezeichnet die insgesamt während einer Saison für das Mähen aufgewendete Zeit. Diese hängt davon ab, bei welcher (konstanten) Grashöhe h der Rasen jeweils gemäht wird. Beschreibe die Abhängigkeit $T(h)$ mithilfe einer Formel.

Um eine bestimmte Fragestellung zu beantworten, läst eine Person die Gleichung $T'(0) = 0$ und erhält als Lösung den Wert h_1. Berechne h_1 und interpretiere die Lösung im Kontext.

Eine andere Person schlägt für die entsprechende Fragestellung einen anderen Lösungsweg vor, der über die abgebildete Tabelle führt, und erhält als Lösung den Wert h_2.

N	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$h(N)$	40,0	26,7	20,0	16,0	13,3	11,4	10,0	8,9	8,0	7,3	6,7	6,2	5,7
$T(h)$	1660	1157	920	790	713	667	640	626	620	621	627	636	649

Ergänze die Tabelle (mithilfe eines Tabellenkalkulations-Programms), bestimme h_2 und nimm einen bewertenden Vergleich der beiden Lösungen h_1 bzw. h_2 vor.

(c) Erläutere, inwieweit die eingangs angeführte Gleichung $t = f(h) = 0{,}5 \cdot h^2 + 30$ den tatsächlichen Sachverhalt nur bedingt zutreffend beschreiben kann.

Angenommen, die Person macht folgende Beobachtungen: Bei einer Grashöhe von 11 cm benötigt sie pro Mähvorgang zwischen 3 und 4 Minuten länger als bei einer Grashöhe von 10 cm. Bei einer Grashöhe von 12 cm nimmt der Mähvorgang hingegen zwischen 5 und 6 Minuten mehr Zeit in Anspruch als bei einer Grashöhe von 10 cm.

Erläutere, warum diese Beobachtung im Widerspruch zur Annahme von $t = 0{,}5 \cdot h^2 + 30$ stehen.

(a) **Lösungserwartung:**

$N(h) = \frac{80}{h}$

Wird der Rasen immer in gleicher Höhe gemäht, so gilt folgende Beziehung: $80 = h \cdot N(h)$, wobei $N(h)$ nur natürliche Zahlenwerte annehmen darf.

Für das Höhenintervall $[8; 12]$ erhält man folgende gültige Zahlenpaare:

h (in cm)	8	8,8	10	11,4
$N(h)$	10	9	8	7

Der Graph der Funktion ist also keine zusammenhängende Kurve, sondern besteht aus einzelnen Punkten $(h \mid N(h))$, mit $N(h) \in \mathbb{N}$.

(b) **Lösungserwartung:**

$T(h) = \frac{80}{h} \cdot (0{,}5h^2 + 30) = 40h + \frac{2400}{h} = 40h + 2400^{-1}$

[(Anzahl der Mähvorgänge)·(benötigte Zeit pro Mähvorgang)]

$T'(h) = 40 - 2400 \cdot h^{-2} = 40 - \frac{2400}{h^2}$

$T'(h) = 0$

$40 - \frac{2400}{h^2} = 0 \Rightarrow h^2 = 60$ bzw. $h_1 = \pm 7{,}75$

Wird der Rasen immer bei einer Höhe von $h_1 = 7{,}75\,\text{cm}$ gemäht, so ist die insgesamt während einer Saison aufgewendete Zeit minimal. $T(7{,}75) \approx 620\,\text{min}$

Tabelle: siehe oben

Aus der Tabelle geht hervor, dass bei einer Rasenhöhe von $h_2 = 8\,\text{cm}$ und 10 Mähvorgängen die aufgewendete Gesamtzeit einem minimalen Wert annimmt.

Der Unterschied der beiden Lösungen h_1 und h_2 ergibt sich daraus, dass in der Berechnung von h_1 keine Rücksicht darauf genommen wird, dass die Anzahl der Mähvorgänge ganzzahlig sein muss. Insofern ist der zweite Lösungsansatz vorzuziehen.

(c) **Lösungserwartung:**

Die Funktion als Modell funktioniert nicht unbegrenzt. Die nach der Funktion für einen Mähvorgang benötigte Zeit wird ab einer gewissen Rasenhöhe unrealistisch. So würde z.B. der Mähvorgang bei einer Rasenhöhe von 30 cm 6 Stunden dauern.

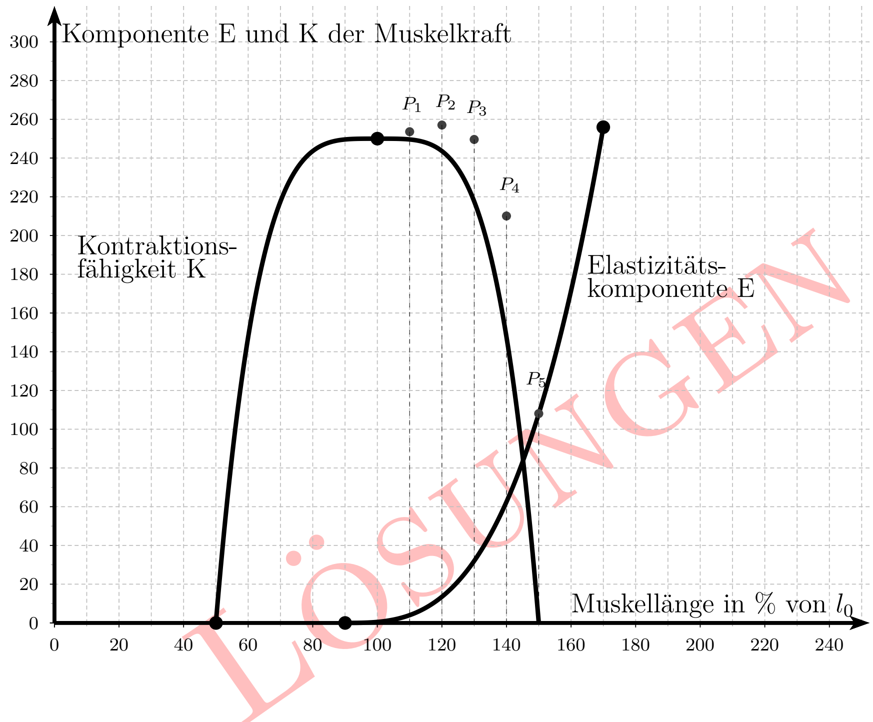
Die Beobachtungen stehen im Widerspruch zur Annahme von $t = 0{,}5 \cdot h^2 + 30$, weil bei diesem Funktionstyp die Differenzenquotienten $\frac{\Delta f}{\Delta h}[h; h+1]$ mit größer werdendem h ansteigen. Anders ausgedrückt müsste der zeitliche Mehraufwand pro cm Rasenhöhe mit der Rasenhöhe ansteigen.

1131 - K7 - DR, RF - Muskelkraft - FA 1.3, FA 1.4, FA 1.5, AN 3.3 - Dimensionen Mathematik 7 Schularbeitentrainer

131. Muskeln ermöglichen durch die Abfolge von Kontaktion und Erschlaffen Bewegung. Laborversuche zeigen, dass sich die Kontraktionskraft F eines (bestimmten) Muskels (abgesehen von seinem Aufbau und seiner Querschnittsfläche) aus ____/6

zwei Komponenten zusammensetzt: Nämlich einerseits aus dem Bestreben des elastischen Teils des Muskels, bei Dehnung seine Ursprungslänge wieder einzunehmen (Elastizitätskomponente E) und andererseits aus dem aktiven Kontraktionsvermögen K des Muskels, also $F = E + K$ (alle Angaben in Newton).

Sowohl E als auch K hängen ihrerseits wiederum davon ab, welche Länge l der Muskel zum Zeitpunkt des Kontraktionsimpulses im Verhältnis zu seiner Ruhelänge l_0 aufweist. Die Abbildung unten veranschaulicht diese Abhängigkeiten der beiden Kraftkomponenten von der jeweiligen Muskellänge.



Aufgabenstellung:

(a) Beschreibe die gemäß Abbildung bestehenden Abhängigkeiten des aktiven Kontraktionsvermögen K und der Elastizitätskomponente E von der Muskellänge verbal.

Erläutere insbesondere die inhaltliche Bedeutung der in der Abbildung angegebenen Punktkoordinaten.

(b) Für die mathematische Modellierung sollen die Abhängigkeiten $E(l)$ und $K(l)$ mithilfe von Funktionsgleichungen dargestellt werden. In einem Fall soll der Funktionsterm dabei die Form $a_1 \cdot (l - b_1)^2 + c_1$ aufweisen, im anderen die Form $a_2 \cdot (l - b_2)^3 + c_2$. Gib die beiden Funktionsgleichungen für $E(l)$ und $K(l)$ inklusiver konkreter Werte für die in den Gleichungen vorkommenden Parameter an.

Hinweis: Die momentane Änderungsrate der Elastizitätskomponente E bei einer Muskellänge von l_0 ist mit null anzunehmen.

(c) In der Fachliteratur wird sinngemäß ausgeführt (vgl. etwa: Wirhed, R.: Sportanatomie/Bewegungslehre, Stuttgart 2001, S. 17): *„Da die Elastizität E im Gebiet $l > l_0$ steiler ansteigt als die K-Kurve abnimmt, nimmt die tatsächliche, gesamte Kontraktionskraft zu, wenn der Muskel über eine Länge von l_0 auseinandergezogen und durch Stimulierung gezwungen wird, sich zu kontrahieren. Dies führt dazu, dass die Gesamt-Kontraktionskraft bei einer Länge $l_1 > l_0$ am größten ist.“*

Interpretiere diese Aussage. Konstruiere in der oben dargestellten Abbildung fünf Punkte, durch die die Kurve der Gesamt-Kontraktionskraft F verläuft, und gib anhand geometrischer Überlegungen einen Näherungswert für l_1 an.

(d) Für die Überprüfung der für $K(l)$ angenommenen Funktionsgleichung stehen nachfolgende konkrete Messwerte zu Verfügung.

l	50	60	70	80	90	100	110	120
$K(l)$	0	148	215	245	249	250	248	242

Bewerte auf der Basis des vorliegenden Datenmaterials die Qualität der entsprechenden mathematischen Modellierung. Gib gegebenenfalls mögliche Verbesserschungsvorschläge an.

Berechne l_1 anhand der unter b) bzw. d) ermittelten Funktionsgleichungen.

(a) **Lösungserwartung:**

Die Elastizitätskomponente E wächst ab einer Muskellänge von $0{,}9 \cdot l_0$ zuerst leicht und dann immer stärker an.

Die Kontraktionsfähigkeit K weist bei einer Muskellänge l_0 mit 250 Newton einen maximalen Wert auf.

Mit zunehmender bzw.- abnehmender Muskellänge nimmt K in gleichem Maße zuerst leicht und dann immer stärker ab, um bei einer Muskellänge von $0{,}5 \cdot l_0$ bzw. $1{,}5 \cdot l_0$ den Wert 0 anzunehmen.

(b) **Lösungserwartung:**

Der Graph der Kontraktionsfähigkeit K gleicht einer Parabel 2. Ordnung. Es gilt:

$$I: K(50) = 0$$
$$II: K(100) = 250$$
$$III: K'(100) = 0$$

$K(l) = -\frac{1}{10} \cdot (l - 100)^2 + 250$

Der Graph der Elastizitätskomponente E gleicht einer Parabel 3. Ordnung. Es gilt:

$$I: E(90) = 0$$
$$II: E(170) = 256$$
$$III: E'(90) = 0$$

$E(l) = \frac{1}{2000}(l - 90)^3$

(c) **Lösungserwartung:**

Anhand der Lage der Punkte $P_1, ..., P_5$ (siehe Grafik oben) kann angenommen werden, dass die Kontraktionskraft F einen Maximalwert bei $l_1 \approx 1{,}2 \cdot l_0$ annimmt.

(d) **Lösungserwartung:**

$K(l) = -\frac{1}{10} \cdot (l - 100)^2 + 250$

$K(100) = 250, K(90) = 240, K(110) = 240, K(80) = 210, K(120) = 210, K(70) = 160, K(60) = 90, K(50) = 0$

Die Koordinaten des Scheitels und der Nullstelle(n) stimmen mit den Tabellenwerten überein, die K-Werte nehmen jedoch in unmittelbarer Nähe vom Maximum stärker ab, als in der Tabelle beschrieben.

Hier kann eine Funktion der Form $K(l) = a_3 \cdot (l - b_3)^4 + c_3$ die Qualität der mathematischen Modellierung verbessern.

$$I: K(50) = 0$$
$$II: K(100) = 250$$
$$III: K'(100) = 0$$

$K(l) = -\frac{1}{25\,000} \cdot (l-100)^4 + 250$

Berechnung von l_1:

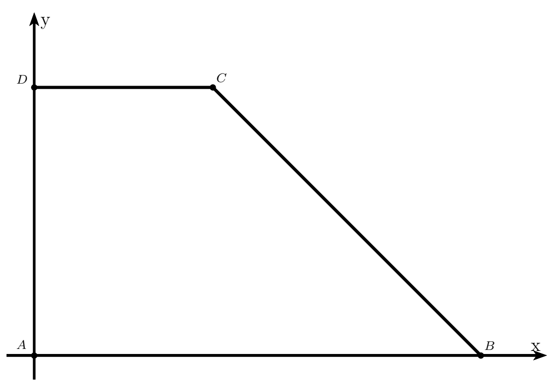
$F(l) = -\frac{1}{25\,000} \cdot (l-100)^4 + 250 + \frac{1}{2000} \cdot (l-90)^3$

$F'(l_1) = 0 \Rightarrow l_1 = 120{,}65$

Somit wird die Annahme aus c) bestätigt, dass die maximale Kontraktionskraft bei ca. $1{,}2 \cdot l_0$ erreicht wird.

1132 - K7 - DR, VAG2 - Gebrochene Glasplatte - AN-L 3.4, AN 3.3, AN 2.1, AG 3.4 - Dimensionen Mathematik 7 Schularbeitentrainer

132. Von einer rechteckigen Glasplatte ist ein Stück weggebrochen. Der noch weiter benützbare, trapezförmige Rest $ABCD$ ist im Koordinatensystem unten dargestellt: $A = (0 \mid 0), B = (10 \mid 0), C = (4 \mid 6), D = (0 \mid 6)$. Eine Längeneinheit entspricht 1 dm. Aus dem abgebildeten trapezförmigen Teil soll eine rechteckige Glasplatte mit maximaler Fläche so herausgeschnitten werden, dass zwei Seiten auf den Koordinatenachsen liegen und ein Eckpunkt zwischen B und C liegt. Dieser Eckpunkt wird im Weiteren mit $P(u \mid v)$ bezeichnet. ____/6



Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Gib eine Gleichung jener Geraden g in parameterfreier Form an, die durch die Punkte B und C verläuft, und beschreibe die Abhängigkeit der zu maximierenden Rechtecksfläche A von der x-Koordinate u der Punktes P mithilfe einer Funktionsgleichung: $A = f(u)$.

Begründe, warum die Lösung der Aufgabenstellung über den Ansatz $f'(u) = 0$ führt, und gib an, bei welcher Lage von P die Rechtecksfläche den maximal möglichen Wert annimmt. Erläutere in diesem Zusammenhang, welche Folgerung aus der Gleichung der zweiten Ableitungsfunktion f'' gezogen werden kann.

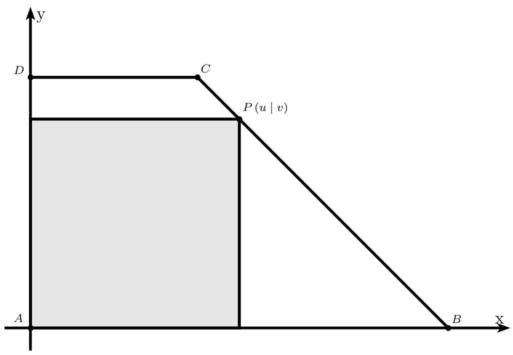
(b) Nicht immer entspricht die Lösung der Gleichung $f'(u) = 0$ der x-Koordinate des „optimalen" Punktes P. Illustriere diesen Sachverhalt, indem du für die Eckpunkte von C und D eine entsprechende Änderung der Koordinaten so vornimmst, dass sich zwar die Gleichung der Geraden g nicht ändert, die Lösung der Gleichung $f'(u) = 0$ aber nicht mehr mit der Lösung der Extremwertaufgabe übereinstimmt. Illustriere die neue Situation anhand des Graphen der Funktion f und gib für die veränderte Situation an, bei welcher Lage von P die Rechtecksfläche jetzt ihren maximalen Wert annimmt.

(a) **Lösungserwartung:**

$g[C, B] : X = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

parameterfreie Form: $g : x + y = 10 \Rightarrow u + v = 10$ bzw. $v = 10 - u$

$A = f(u) = u \cdot (10 - u) = 10u - u^2$, wobei die Definitionsmenge der Funktion f $D_f = [4; 10]$ lautet.



Da die Rechtecksfläche ein Maximum werden soll, sucht man eine Extremstelle u innerhalb dieses Definitionsbereichs, für die gilt: $f'(u) = 0$.

$f(u) = 10u - u^2$

$f'(u) = 10 - 2u$

$10 - 2u = 0$
$u = 5$
Wählt man für P die Koordinaten $P = (5 \mid 5)$, so erhält man mit $25\,\text{dm}^2$ die maximale Rechtecksfläche. Die Gleichung der 2. Ableitung lautet $f''(u) = -2$. Der Graph der Funktion ist also überall rechtsgekrümmt und an der Stelle $u = 5$ liegt somit eine Maximumsstelle vor.

(b) **Lösungserwartung:**

Wählt man z.B. für die Punkte C und D die Koordinaten $C = (6 \mid 4)$ und $D = (0 \mid 4)$, so bleibt die Gleichung der Geraden g unverändert. Der Definitionsbereich der Funktion f ändert sich jedoch in $D_f = [6; 10]$.

In diesem Fall liegt ein mögliches lokales Maximum außerhalb des Definitionsbereichs. Die maximale Fläche wird an der Stelle $u = 6$ (Randmaximum) mit $A_{\text{max}} = 24\,\text{dm}^2$ erreicht. Der Punkt P fällt hier mit C zusammen.

1133 - K7 - DR, RF - Temperaturveränderung in einem Treibhaus - FA 1.4, AN 3.3, FA 2.1, FA 2.2 - Dimensionen Mathematik 7 Schularbeitentrainer

133. Im Rahmen eines biologischen Experiment wird die Temperatur T in einem Treibhaus im Laufe von 10 Stunden gezielt verändert. Die Abhängigkeit der Temperatur von der Zeit t kann modellhaft durch eine Funktion T mit der Gleichung $T(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$ beschrieben werden: $T(t)$ wird dabei in °C angegeben, die Zeit t in Stunden. Die Zeitmessung startet am Beginn des Experiments. ____/6

Über die Entwicklung der Temperatur liegen nachfolgende Informationen vor:

- Die momentane Änderungsrate der Temperatur am Beginn beträgt 4 °C/Stunde.
- Innerhalb der ersten acht Stunden steigt die Temperatur, anschließend fällt sie.
- Am Ende der 10 Stunden beträgt die Temperatur 35 °C.

Aufgabenstellung:

(a) Einige der nachfolgend angeführten Bedingungen stehen im Widerspruch zur Angabe. Erläutere, um welche Bedingungen es sich handelt, und begründe deine Auswahl stichhaltig.

$T''(3) > 0$	$T'(8) = 0$	$T'(9) > 0$	$T''(7) < 0$	$T(10) = 35$
$T''(8) = 0$	$T'(5) > 0$	$T'(6) = -T'(10)$	$T(8) = 32$	$T'(0) = 4$

(b) Nicht alle der zutreffenden Bedingungen eigenen sich bei beliebiger Kombination für die Erstellung eines Gleichungssystems zur Berechnung der Parameter a, b und c. Gib drei zwar zutreffende Bedingungen an, die sich aber - zu einem System zusammengefasst - nicht für eine eindeutige Bestimmung der Parameter eigenen, und interpretiere den Sachverhalt.

Wähle anschließend eine geeignete Kombination von Bedingungen und berechne die Werte der Parameter.

(c) Die Temperatur T beeinflusst die Luftfeuchtigkeit L im Treibhaus. Nimm modellhaft an, dass unter den gegebenen Bedingungen eine Erhöhung der Temperatur um 1 °C eine Erhöhung der Luftfeuchtigkeit um 0,5 g/m³ bewirkt. Bei einer Temperatur von 10 °C beträgt die Luftfeuchtigkeit 6 g/m³.

Weise durch eine Rechnung nach, dass unter den genannten Annahmen die Höhe der Luftfeuchtigkeit in Abhängigkeit von der Zeit durch nachfolgende Funktionsgleichung beschrieben werden kann:

$L(t) = -\frac{1}{8}t^2 + 2t + 11$

Berechne, wie hoch die maximale Luftfeuchtigkeit im Rahmen des Experiments ist und bei welcher Temperatur t_1 diese maximale Luftfeuchtigkeit auftritt.

Berechne den Wert $T'(t_1)$ und erläutere, warum das Ergebnis auch ohne Verwendung der Funktionsgleichung der Ableitungsfunktion T' angegeben werden kann.

(a) **Lösungserwartung:**

$T''(3) > 0$	Falsch! Der Graph der Funktion T ist eine nach unten offene Parabel und überall rechtsgekrümmt, d.h. $T''(t) < 0$, für alle t.
$T''(8) = 0$	Falsch! s.o.
$T'(8) = 0$	Richtig! Da die Temperatur innerhalb der ersten acht Stunden steigt und anschließend fällt, liegt an der Stelle $t = 8$ eine lokale Maximumstelle vor.
$T'(5) > 0$	Richtig! Die Temperatur steigt innerhalb der ersten 8 Stunden, d.h., zu jedem Zeitpunkt in diesem Intervall liegt eine positive momentane Änderungsrate vor.
$T'(9) > 0$	Falsch! Da die Temperatur nach acht Stunden zu sinken beginnt, liegt für jeden Zeitpunkt $t > 8$ eine negative Änderungsrate vor.
$T'(6) = -T'(10)$	Richtig! Der Graph der Funktion T verläuft symmetrisch zur Geraden $x = 8$ und steigt an der Stelle $t = 6$ im selben Maße, wie er an der Stelle $t = 10$ fällt.
$T''(7) < 0$	Richtig! Der Graph der Funktion T ist überall rechtsgekrümmt.
$T(8) = 32$	Falsch! Da die Temperatur nach 8 Stunden zu sinken beginnt und nach 10 Stunden 35 °C beträgt, kann sie 2 Stunden vorher nicht 32 °C betragen.
$T(10) = 35$	Richtig! Laut Angabe beträgt die Temperatur am Ende der 10. Stunde 35 °C.
$T'(0) = 4$	Richtig! Laut Angabe beträgt die momentane Änderungsrate der Temperatur am Beginn 4 °C/Stunde.

(b) **Lösungserwartung:**

$T(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$
$T'(t) = 2a \cdot t + b$

Wählt man z.B. die 3 richtigen Bedingungen aus,

I.	$T(10) = 35:$	$35 = 100a + 10b + c$	
II.	$T'(8) = 0:$	$0 = 16a + b$	$\Rightarrow b = -16a$
III.	$T'(6) = -T'(10):$	$12a + b = -20a - b$	$\Rightarrow 32a = -2b$ bzw. $b = -16a$

so können daraus die Parameter a, b und c nicht eindeutig bestimmt werden.

Folgende Kombination führt zu einer eindeutigen Festlegung von a, b und c:

I:	$T'(0) = 4:$	$4 = b$
II:	$T'(8) = 0:$	$0 = 16a + b$
III:	$T(10) = 35:$	$35 = 100a + 10b + c$

$a = -\frac{1}{4}, b = 4, c = 20$
$T(t) = -\frac{1}{4}t^2 + 4t + 20$

(c) **Lösungserwartung:**

Die Funktion $L(T)$ ist eine lineare Funktion der Form $L(T) = k \cdot T + d$ mit einer Steigung von $k = 0{,}5\,\mathrm{g/m^3}$ und $L(10) = 6\,\mathrm{g/m^3}$.

$L(T) = 0{,}5 \cdot T + d$

$6 = 0{,}5 \cdot 10 + d \Rightarrow d = 1$

$L(T) = 0{,}5 \cdot T + 1$

$L(T) = 0{,}5 \cdot \left(-\frac{1}{4}t^2 + 4t + 20\right) + 1 = -\frac{1}{8}t^2 + 2t + 11$

Für den Zeitpunkt der maximalen Luftfeuchtigkeit muss gelten $L'(t) = 0$

$L'(t) = -\frac{1}{4}t + 2$

$0 = -\frac{1}{4}t + 2$

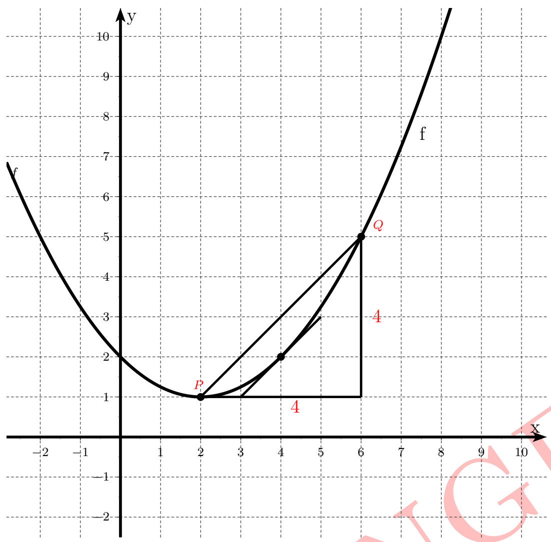
$t_1 = 8, T(8) = 36\,[°\mathrm{C}]$

Bei einer Temperatur von 36 °C nimmt die Luftfeuchtigkeit mit $L(8) = 19\mathrm{g/m^3}$ einen maximalen Wert an.

Da die Luftfeuchtigkeit mit steigender Temperatur zunimmt, muss ein maximaler Wert der Luftfeuchtigkeit zum Zeitpunkt der maximalen Temperatur auftreten.

1134 - K7 - DR - Polynomfunktion zweiten Grades - AN 1.2, AN 3.3, AN 2.1 - Dimensionen Mathematik 7 Schularbeitentrainer

134. Die Abbildung zeigt den Graphen einer Polynomfunktion f zweiten Grades. ____/6



Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Ermittle anhand des Funktionsgraphen sowohl den Differenzenquotienten der Funktion f im Intervall $[2; 6]$ als auch einen Näherungswert für den Differentialquotienten der Funktion f an der Stelle 4.

(b) Bestimme die Gleichung der Funktion f und überprüfe die Ergebnisse aus a) anhand der Funktionsgleichung.

(c) Betrachte Intervalle der Form $[2; a]$ mit $a > 2$. Abhängig von der Wahl von a nimmt der zugehörige Differenzenquotient der Funktion f im Intervall $[2; a]$ verschiedene Werte an. In diesem Sinne wird der zu a gehörende Differenzenquotient der Funktion f im Intervall $[2; a]$ hier mit q_a bezeichnet.

Demonstriere die Richtigkeit nachfolgender Aussage anhand passender Werte für a und interpretiere den Sachverhalt grafisch: „Je kleiner a ist, desto kleiner ist auch q_a. Während aber a gegen 2 geht, unterschreitet q_a nicht eine bestimmte Schranke S."

Gib an, welche Aussage über S gemacht werden kann. Begründe deine Antwort durch eine Rechnung und beschreibe den Sachverhalt mithilfe des Grenzwertsymbols.

(a) **Lösungserwartung:**

Aus der Grafik lässt sich der Differenzenquotient im Intervall $[2;6]$ exakt bestimmen und lautet: $\frac{\Delta y}{\Delta x}[2;6] = \frac{4}{4} = 1$
Legt man im Punkt $(4 \mid f(4))$ eine Tangente an den Funktionsgraphen, so scheint diese parallel zur Sekante PQ zu sein. Vermutung: $f'(4) \approx 1$

(b) **Lösungserwartung:**

$f(x) = a \cdot x^2 + bx + c \qquad T = (2 \mid 1), R = (0 \mid 2)$
$f'(x) = 2a \cdot x + b$
I. $f(0) = 2: \quad 2 = c$
II. $f(2) = 1: \quad 1 = 4a + 2b + 2$
III. $f'(2) = 0: \quad 0 = 4a + b$
$a = \frac{1}{4}, b = -1, c = 2: f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x + 2$

$\frac{\Delta y}{\Delta x}[2;6] = \frac{f(6)-f(2)}{4} = \frac{5-1}{4} = 1$
$f'(x) = \frac{1}{2}x - 1$
$f'(4) = 1$

(c) **Lösungserwartung:**

$q_a = \frac{\Delta y}{\Delta x}[2;a] = \frac{f(a)-f(2)}{a-2}$
$a = 4: q_4 = \frac{f(4)-f(2)}{4-2} = 0{,}5$
$a = 2{,}5: \; q_4 = \frac{f(2{,}5)-f(2)}{2{,}5-2} = 0{,}125$
$a = 2{,}1: \; q_4 = \frac{f(2{,}1)-f(2)}{2{,}1-2} = 0{,}025$
$\vdots$
$\lim\limits_{a\to 2} q_a = \lim\limits_{a\to 2} \frac{f(a)-f(2)}{a-2} = \lim\limits_{a\to 2} \frac{\frac{1}{4}a^2-a+2-1}{a-2} = \lim\limits_{a\to 2} \frac{\frac{1}{4}(a-2)^2}{a-2} = \lim\limits_{a\to 2} \frac{1}{4}(a-2) = 0$

q_a unterschreitet die Schranke $S = 0$ nicht.

1135 - K7 - DR, RF - Modellierung eines Firmenumsatzes - FA 5.1, FA 2.1, FA 2.4, FA 5.2, FA 2.2, FA 1.7, AN 1.2 - Dimensionen Mathematik 7 Schularbeitentrainer

135. Der Umsatz U in einer Firma betrug vor vier Jahren 5,1 Millionen Euro, vor einem Jahr 5,7 Millionen Euro. Zur Beschreibung der Umsatzentwicklung werden ____/8

zwei Modelle verwendet:

Modell 1: Es wird angenommen, dass der Umsatz U pro Jahr um den gleichen Eurobetrag gesteigert werden kann. Die entsprechende Funktionsgleichung lautet: $U = f(t)$, (t in Jahren, beginnend vor vier Jahren).

Modell 2: Es wird angenommen, dass der Umsatz U pro Jahr um den gleichen Prozentsatz gesteigert werden kann. Die entsprechende Funktionsgleichung lautet: $U = g(t)$, (t in Jahren, beginnend vor vier Jahren).

Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Bestimme die Funktionsgleichung $U = f(t)$ und $U = g(t)$.

(b) Berechne, wann im Sinne der beiden Modelle jeweils ein Umsatz von 6 Millionen Euro zu erwarten ist. Diskutiere Fragen der Angemessenheit der beiden Modelle.

(c) Angenommen, für dieses Jahr zeichnet sich ein Gewinn von 5,9 Millionen Euro ab.

„Anhand des insgesamt vorliegenden Datenmaterials kann eindeutig entschieden werden, welches der beiden Modelle die Umsatzentwicklung besser beschreibt.“

Erläutere, inwieweit du dieser Aussage zu- bzw. nicht zustimmst. Begründe deine Antwort.

(d) Überprüfe den Wahrheitsgehalt nachfolgender Aussage: *„Beim Modell $U = g(t)$ ist die Wachstumsgeschwindigkeit des Umsatzes stets größer als beim Modell $U = f(t)$.“* Begründe deine Antwort mithilfe einer Rechnung.

(a) **Lösungserwartung:**

$U(0) = 5{,}1$ und $U(3) = 5{,}7$:

Modell 1: Die Funktion f wird durch eine lineare Funktion der Form $f(t) = k \cdot t + d$ dargestellt, wobei der jährliche Zuwachs $k = \frac{5{,}7-5{,}1}{3} = 0{,}2$ lautet und der Anfangswert bei $d = 5{,}1$ liegt.

$f(t) = 0{,}2 \cdot t + 5{,}1$

Modell 2: Die Funktion g ist eine Exponentialfunktion der Form $g(t) = a \cdot b^t$. Der Anfangswert liegt ebenso bei $a = 5{,}1$, der Wachstumsfaktor beträgt $b = \sqrt[3]{\frac{5{,}7}{5{,}1}} = 1{,}03777$.

$g(t) = 5{,}1 \cdot 1{,}03777^t$

(b) **Lösungserwartung:**

Modell 1: $6 = 0{,}2 \cdot t + 5{,}1 \Rightarrow t = 4{,}5$

Bei diesem Modell wird der Umsatz in einem halben Jahr 6 Millionen Euro betragen.

Modell 2: $6 = 5{,}1 \cdot 1{,}03777^t$

$\frac{6}{5{,}1} = 1{,}03777^t$

$\ln\left(\frac{6}{5{,}1}\right) = t \cdot \ln(1{,}03777) \Rightarrow t = 4{,}38$

Nach Modell 2 wird der Umsatz von 6 Millionen Euro schon nach 0,38 Jahren ($\approx$ 4,5 Monaten) erreicht.

Da nur eine sehr geringe Menge von Daten vorhanden ist, kann man nicht mit Sicherheit festlegen, ob ein lineares oder ein exponentielles Wachstum des Umsatzes vorliegt.

Grenzen beider Modelle sind darin zu sehen, dass beide ein unbegrenztes Anwachsen des Umsatzes beschreiben, $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty} g(t) = \infty$.

Beide Modelle können die Entwicklung des Umsatzes bestenfalls zeitlich begrenzt angemessen beschreiben.

(c) **Lösungserwartung:**

$f(4) = 0{,}2 \cdot 4 + 5{,}1 = 5{,}9$

$g(4) = 5{,}1 \cdot 1{,}03777^4 = 5{,}915$

Auch wenn durch das Modell der linearen Funktion der Wert 5,9 genau getroffen wird, kann man nicht eindeutig festlegen, welches der beiden Modelle die Umsatzentwicklung besser beschreibt. Es handelt sich dabei um eine Momentaufnahme und aufgrund der geringen Datenmenge kann man nur schwer Prognosen abgeben.

(d) **Lösungserwartung:**

$f(t) = 0{,}2 \cdot t + 5{,}1 \Rightarrow f'(t) = 0{,}2$

$g(t) = 5{,}1 \cdot 1{,}03777^t \Rightarrow g'(t) = 5{,}1 \cdot 1{,}03777^t \cdot \ln(1{,}03777)$

Die Wachstumsgeschwindigkeit (momentane Änderungsrate, Tangentensteigung) beträgt beim Modell stets 0,2, während sie beim Modell 2 zu Beginn einen kleineren Wert ($g'(0) \approx 0{,}19$) und nach 3 Jahren einen größeren Wert ($g'(3) \approx 0{,}21$) annimmt.

1136 - K7 - RF - Windkraft - FA 1.7, FA 1.9, FA 6.4, FA 6.5, FA 6.2, FA 6.3, AG 4.1 - Dimensionen Mathematik 7 Schularbeitentrainer

136. *Einflügler* sind Windkraftanlagen mit nur einem einzigen Rotorblatt. Da sie im Vergleich mit Zwei- bzw. Dreiblattrotoren eine größere Geräuschbelastung verursachen, werden sie vor allem im Meer (oder in großen Seen) auf schwimmenden Fundamenten errichtet. ____/8

Im Bild rechts sind die Spitze S des Rotorblatts und die Nabe N eines bestimmten Einflüglers zu erkennen. Die Nabe verbindet das Rotorblatt mit dem Rest der Windkraftanlage, bei der Rotation beschreibt S einen Kreis mit dem Mittelpunkt N. Im betrachteten Fall kann angenommen werden, dass die Entfernung $NS = 25\,\text{m}$ beträgt. Die Nabe befindet sich (ca.) 45 m über dem Meeresspiegel.

Während eines 5-minütigen Beobachtungszeitraums bläst ein Wind mit konstanter, nicht zu großer Stärke (ab einer gewissen Windstärke wird die Anlage abgeschaltet und das Rotorblatt „aus dem Wind gedreht“, um Beschädigungen zu vermeiden). Das Rotorblatt weist bei der gegebenen Windstärke eine konstante Rotationsgeschwindigkeit von 12 Umdrehungen pro Minute auf. Die Funktion h beschreibt während dieses Zeitintervalls die Höhe $h(t)$ der Spitze S über dem Meeresspiegel in Abhängigkeit von der Zeit t. Die jeweilige Höhe $h(t)$ wird dabei in Meter gemessen, die Zeit t in Sekunden. Am Beginn des Zeitintervalls (also zum Zeitpunkt $t = 0$) befindet sich die Spitze senkrecht über der Nabe.

Aufgabenstellung:

(a) Eine Person schlägt vor, die Funktion h als Polynomfunktion zweiten Grades anzusetzen und begründet ihren Vorschlag wie folgt: *„Am Beginn befindet sich S in großer Höhe, diese nimmt bis zu einem Minimum ab, bevor sie dann wieder monoton zunimmt. Am Ende einer Rotation weist sie wieder die gleiche Höhe wie am Anfang auf. Dieser Ablauf kann grafisch mithilfe einer nach oben offenen Parabel modelliert werden.*

Begründe, warum diese Sichtweise den Sachverhalt nicht zutreffend wiedergibt. Schlage einen angemesseneren Funktionstyp für h vor, begründe deine Wahl.

(b) Beschreibe die Funktion h gemäß des vorgeschlagenen Funktionstyps mithilfe einer Gleichung und skizziere den Graphen der Funktion h für einen Zeitintervall, in dem das Rotorblatt eine Umdrehung vollzieht.

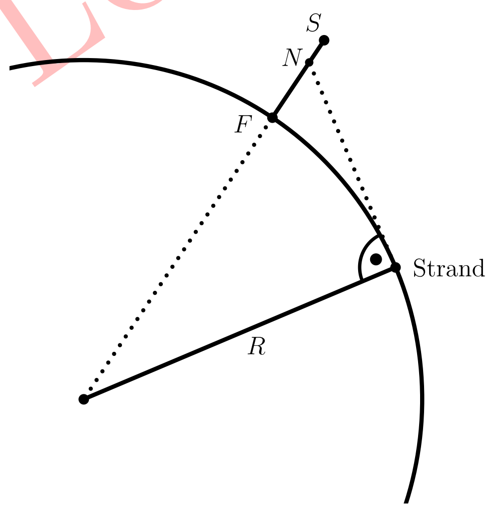
Berechne die Höhe der Spitze S über dem Meeresniveau, nachdem 160 Sekunden ab dem Beginn des Beobachtungszeitraums vergangen sind.

(c) Um die Funktion h an die Situation mit unterschiedlichen Windstärken anpassen zu können, muss eine in der soeben bestimmten Gleichung von h vorkommende Konstante als veränderbarer Parameter vorgesehen werden.

Beschreibe die Monotoniebeziehung zwischen diesem Parameter und der Windstärke. Erläutere, welche Annahmen du deinen Überlegungen zugrunde legen musst.

(d) Die Anlage ist so weit vom Strand entfernt positioniert, dass sie aufgrund der Erdkrümmung vom Stand aus (in liegender Position) genau ab der Nabenhöhe sichtbar ist.

Berechne unter Bezugnahme auf die abgebildete (nicht maßstabsgetreue) Skizze die Entfernung zwischen dem Strand und dem Fußpunkt F der Anlage längs der Wasseroberfläche (Erdradius $R = 6\,371\,\text{km}$).



(a) **Lösungserwartung:**

Die Spitze S benötigt für eine Umdrehung 5 Sekunden. Die Höhe des Punktes S nimmt zuerst langsam, dann immer schneller ab, wobei sich nach

1,25 s (nach 90°) die Höhe am schnellsten ändert, um nachher wieder langsamer abzunehmen. Ab 2,5 s (nach 180°) nimmt die Höhe in gleicher Weise wieder zu um nach 5 s wieder den maximalen Wert anzunehmen.

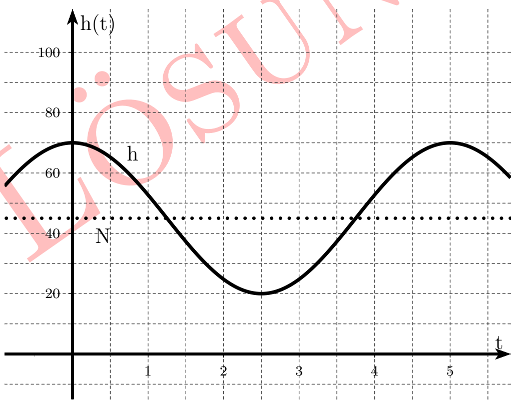
Diese Veränderung der Höhe wird am besten durch eine bestimmte Sinus- oder Cosinusfunktion beschrieben. Vergleiche die Bewegung der Spitze S mit der Bewegung eines Punktes $P(\cos(x) \mid \sin(x))$ auf dem Einheitskreis. Dieser Vorgang wiederholt sich periodisch!

(b) **Lösungserwartung:**

$h(t) = 25 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{5} \cdot t\right) + 45$
bzw.
$h(t) = 25 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{5}t + \frac{\pi}{2}\right) + 45$
Beachte: $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$h(160) = 70\,\text{m}$

Da das Rotorblatt für eine Runde 5 Sekunden benötigt, d.h. die Spitze sich alle 5 Sekunden wieder in der Maximalhöhe von 70 m befindet, muss das auch nach 160 Sekunden der Fall sein.



(c) **Lösungserwartung:**

Eine Vergrößerung der Windstärke bewirkt eine schnellere Drehung der Rotorblätter, somit verkürzt sich das Intervall für eine volle Umdrehung. Für die Funktion h bedeutet dies eine Erhöhung der Frequenz.

Eine entsprechende Funktionsgleichung wird durch
$h(t) = 25 \cdot \cos\left[a \cdot \left(\frac{2\pi}{5} \cdot t\right)\right] + 45$ beschrieben.

Eine Vergrößerung der Windstärke bewirkt also eine entsprechende Vergrößerung des Parameters a. Bestimmte Werte von a setzen konstante Windstärken voraus.

(d) **Lösungserwartung:**

Für den in der Abbildung ersichtlichen Zentriwinkel α gilt:
$\cos(\alpha) = \frac{R}{R+0{,}045} = \frac{6\,371}{6\,371{,}045} \Rightarrow \alpha = 0{,}2153°$
Der zugehörige Bogen auf der Meeresoberfläche hat die Länge
$b = \frac{R\cdot\pi\cdot\alpha}{180} = \frac{6\,271\cdot\pi\cdot 0{,}2153}{180} \approx 23{,}9\,\text{km}$

1137 - K7 - DR - Sportmotorischer Test - FA 1.3, AN 3.2, AN 3.3, AN 1.2, AN 1.3, AN 2.1, FA 1.4 - Dimensionen Mathematik 7 Schularbeitentrainer

137. Mehrere Personen nehmen an einem sportmotorischen Test teil. Die Aufgabe besteht darin, ausgehend von der Startposition nach erfolgtem Startkommando möglichst schnell eine 30 m lange Strecke zu durchlaufen. Mithilfe von Lichtschranken, die in einem Abstand von je zwei Metern aufgestellt sind, werden die jeweiligen Durchgangszeiten ermittelt, um mit den so erhobenen Daten die Entwicklung der Laufgeschwindigkeit analysieren zu können. ____/8

Bei einem konkreten Lauf wurden nachfolgende Durchgangszeiten $t_1, t_2, ..., t_{15}$ (in s, gerundet auf zwei Dezimalen) ermittelt:

s (in m)	0	2	4	6	8	10	12	14
t (in s)	$t_0 = 0$	$t_1 = 1{,}52$	$t_2 = 2{,}10$	$t_3 = 2{,}52$	$t_4 = 2{,}87$	$t_5 = 3{,}19$	$t_6 = 3{,}47$	$t_7 = 3{,}74$

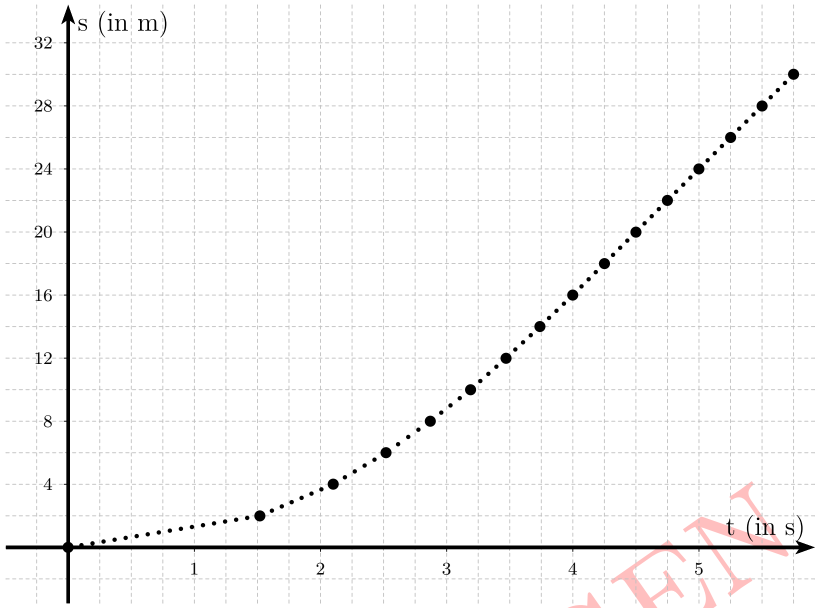
s (in m)	16	18	20	22	24	26	28	30
t (in s)	$t_8 = 4{,}00$	$t_9 = 4{,}25$	$t_{10} = 4{,}50$	$t_{11} = 4{,}75$	$t_{12} = 5{,}00$	$t_{13} = 5{,}25$	$t_{14} = 5{,}50$	$t_{15} = 5{,}75$

Im Weiteren wird davon ausgegangen, dass sich die Laufgeschwindigkeit v (in m/s) in Abhängigkeit von der Zeit t (in s) bis zum Erreichen der Maximalgeschwindigkeit modellhaft mithilfe einer Polynomfunktion v dritten Grades mit $v(t) = a\cdot t^3 + b\cdot t^2$ $(a, b \in \mathbb{R})$ angemessen beschreiben lässt, wobei die erreichte maximale Laufgeschwindigkeit v_{max} dem lokalen Maximum der Funktion v entspricht. Bezeichnet t_{max} die lokale Maximumstelle von v, kann angenommen werden, dass ab dem Zeitpunkt t_{max} bis zum Erreichen der 30-m-Marke die Laufgeschwindigkeit den konstanten Wert v_{max} annimmt.

Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Veranschauliche die in der Tabelle angeführten Wertepaare im abgebildeten Koordinatensystem.

Gib mithilfe der erstellten Grafik einen möglichst guten Näherungswert für die im konkreten Fall erreichte Maximalgeschwindigkeit an, begründe deine Vorgangsweise.



(b) $\boxed{\text{A}}$ Üblicherweise wird die Gleichung einer Polynomfunktion dritten Grades in der Form
$v(t) = a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t + d$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ angesetzt.

Nenne kontextbezogene Argumente, die dafür sprechen, die Parameterwerte c und d bei der verwendeten Modellfunktion gleich null zu setzen.

Fertige eine Skizze an, die die Laufgeschwindigkeit als Funktion der Zeit im Zeitintervall $[0\,\text{s}; 5\,\text{s}]$ dargestellt, wenn

- sich die Laufgeschwindigkeit tatsächlich so wie in der Einleitung beschrieben entwickelt,
- für die Maximalgeschwindigkeit $v_{\text{max}} = 8\,\text{m/s}$ gilt und
- $t_{\text{max}} = 4\,\text{s}$ beträgt.

(c) Bestimme für die angeführten Tabellenwerte mithilfe eines Computerprogramms für alle Zeitintervalle $[t_i; t_{i+1}], 0 \leq i \leq 14$, die jeweilige Durchschnittsgeschwindigkeit $\overline{v}_i$ und gib das arithmetische Mittel $\overline{v}$ dieser Durchschnittsgeschwindigkeiten $\overline{v}_0, \ldots, \overline{v}_{14}$ an.

Erläutere, ob $\overline{v}$ mit der tatsächlichen Durschnittsgeschwindigkeit während des 30 m langen Laufs übereinstimmt.

(d) Angenommen, bei einem bestimmten Lauf ergibt sich für die Gleichung der Geschwindigkeitsfunktion v: $v(t) = -0{,}25 \cdot t^3 + 1{,}5 \cdot t^2$.

Bestimme die Gleichung der zugehörigen Wegfunktion s.

Eine Videoanalyse des entsprechenden Laufes zeigt, dass der Oberkörper der Person nach dem Start nach vorne geneigt ist und erst nach einer Laufstrecke von 13 m eine aufrechte Position einnimmt. Berechne auf der Basis der entsprechenden Wegfunktion, zu welchem Zeitpunkt dies der Fall ist. Runde das Ergebnis auf zwei Dezimalen.

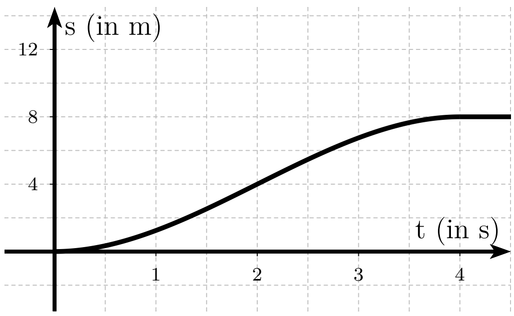
(a) **Lösungserwartung:**

Nach ca. 4 s erreicht der Läufer seine Maximalgeschwindigkeit, da er für alle folgenden 2-m-Abschnitte jeweils 0,25 s benötigt. Dies entspricht einer Geschwindigkeit von $v_{\text{max}} = 8\,\text{m/s}$.

(b) **Lösungserwartung:**

$v(t) = a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t + d$
$v'(t) = 3a \cdot t^2 + 2b \cdot t + c$
Da der Läufer zum Zeitpunkt $t = 0$ erst startet, gilt: $v(0) = 0 \Rightarrow d = 0$
Angesichts der benötigten Reaktionszeit gilt für die Tangentensteigung/Beschleunigung zu diesem Zeitpunkt: $v'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$:
$v(t) = a \cdot t^3 + b \cdot t^2$

Der Graph der Funktion v hat in $P(4 \mid 8)$ einen lokalen Hochpunkt.
$v(t) = -\frac{1}{4}t^3 + \frac{3}{2}t^2$



(c) **Lösungserwartung:**

s (in m)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
t (in s)	0	1,52	2,1	2,52	2,87	3,19	3,47	3,74	4	4,25	4,5	4,75	5	5,25	5,5	5,75
$\overline{v}_i$ (in m/s)	1,32	3,45	4,76	5,71	6,25	7,14	7,41	7,69	8	8	8	8	8	8	8	
arithm. Mittel	6,65															

Das arithmetische Mittel der Durchschnittsgeschwindigkeit beträgt 6,65 m/s.
Die tatsächliche Durchschnittsgeschwindigkeit während des 30 m langen Laufs beträgt $\overline{v} = \frac{30\,\text{m}}{5{,}75\,\text{s}} \approx 5{,}22\,\text{m/s}$

Erläuterung: Werden z.B. zwei gleich lange Teilstrecken s in t_1 bzw. t_2 Sekunden zurückgelegt, so lauten die zugehörigen Durchschnittsgeschwindigkeiten $\frac{s}{t_1}$ und $\frac{s}{t_2}$ und ihr arithmetisches Mittel $\frac{\frac{s}{t_1}+\frac{s}{t_2}}{2}$. Die Durchschnittsgeschwindigkeit über die Gesamtstrecke beträgt $\frac{2s}{t_1+t_2}$.

Wären beide Werte gleich, müsste gelten:

$\frac{\frac{s}{t_1}+\frac{s}{t_2}}{2} = \frac{2s}{t_1+t_2} \qquad | \cdot 2$

$\frac{s}{t_1} + \frac{s}{t_2} = \frac{4s}{t_1+t_2} \qquad |: s$

$\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} = \frac{4}{t_1+t_2}$

$(t_1 + t_2)^2 = 4t_1t_2$

$(t_1 - t_2)^2 = 0 \Leftrightarrow t_1 = t_2$

D.h., nur bei gleichen Teilzeiten fällt die Durchschnittsgeschwindigkeit über die Gesamtstrecke mit dem arithmetischen Mittel der einzelnen Durchschnittsgeschwindigkeiten zusammen.

(d) **Lösungserwartung:**

$v(t) = -0{,}25 \cdot t^3 + 1{,}5 \cdot t^2$

Die Tangentensteigung einer Zeit-Weg-Funktion s stehen für die Momentangeschwindigkeiten. Somit muss gelten: $s'(t) = v(t)$

$s(t) = -\frac{1}{16}t^4 + \frac{1}{2}t^3$

Wann nimmt der Oberkörper eine aufrechte Position ein?

$s(t) = 13\,\text{m} \Rightarrow t = 3{,}62\,\text{m}$

1138 - K7 - PWLU, BSW - Aktien und Rendite - AG 2.1, WS 1.3 - Dimensionen Mathematik 7 Schularbeitentrainer

138. Eine Anlegerin bzw. ein Anleger investiert in Aktien. In der abgebildeten Tabelle sind die sogenannten logarithmischen Renditen für zwei Aktien innerhalb der ersten 8 Monate des aktuellen Jahres dargestellt. ____/8

Monat	Aktie A	Aktie B
Jänner	−0,0134	−0,0044
Februar	−0,0067	0,0441
März	0,0612	0,0624
April	0,0882	−0,0206
Mai	0,0307	−0,0468
Juni	0,0676	0,0784
Juli	0,0906	0,0154
August	0,0612	0,0714

Eine Rendite beschreibt die Beziehung zwischen dem Kurswert K_A einer Aktie am Anfang und dem Kurswert K_E am Ende eines bestimmten Zeitintervalls (hier Monate).

Während einfache Rediten R_E gemäß ihrer Definition $R_E = \frac{K_E - K_A}{K_A}$ im Sinne relativer Änderungen der Kurswerte interpretiert werden können und einfache Rückschlüsse auf Kursgewinne bzw. Kursverluste zulassen, werden in der Finanzmathematik logarithmische Renditen $R_L = \ln\left(\frac{K_E}{K_A}\right)$ bevorzugt, da diese unter anderem rechentechnische Vorteile aufweisen.

Das arithmetische Mittel und die Standardabweichung von Renditen bezüglich bestimmter Zeiträume sind zwei wichtige Kennzahlen eine Aktie. Während das arithmetische Mittel (genannt Drift) ein „Trendmaß“ für die Aktie darstellt, ist die Volatilität im Sinne eines Streuungsmaßes ein Chancen- bzw. Risikomaß, das die Höhe von Kursschwankungen beschreibt.

Aufgabenstellung:

(a) Weise nach, dass zwischen einfachen und logarithmischen Renditen der Zusammenhang $R_E = e^{R_L} - 1$ besteht. Berechne die einfache Rendite der Aktie A bezogen auf den Monat Jänner und interpretiere das Ergebnis.

(b) $\boxed{\text{A}}$ Berechne anhand der in der Tabelle angeführten Daten den jeweiligen Drift für die Aktien A und B und gib an, bei welcher der beiden Aktien eine Investorin bzw. ein Investor bei gleich hoher Anlage am Ende des Vorjahres innerhalb der ersten 8 Monate des aktuellen Jahres den höheren Gewinn erzielt.

Berechne anhand der in der Tabelle angeführten Daten die Volatilitäten der Aktien A und B und gib an, bei welcher der beiden Aktien gemäß Volatilität das größte Risiko von Kursverlusten besteht.

(c) Ein wichtiger Vorteil logarithmischer Rendite ist ihre Additivitätseigenschaft: Angenommen $K(0)$ bezeichnet den Kurswert einer Aktie am Ende des Vorjahres, $K(1)$ den Kurswert Ende Jänner des aktuellen Jahres, $K(2)$ jenen Ende Februar usw., sodass $K(8)$ schließlich den Kurswert der Aktie Ende August angibt. Die entsprechenden monatlichen, logarithmischen Renditen werden mit $R_L(n-1,n) = \ln\left(\frac{K(n)}{K(n-1)}\right)$ bezeichnet.

Weise durch eine allgemeine Rechnung nach, dass die logarithmische Rendite der Aktie für den Zeitraum vom Ende des Vorjahres bis Ende August, also $R_L(0;8)$, als Summe der einzelnen monatlichen Renditen $R_L(0;1) + R_L(1;2) + ... + R_L(7;8)$ ermittelt werden kann.

Angenommen, des Kurswert der Aktie A betrugt am Ende des Vorjahres $K_0 = 120{,}35$ €. Benütze die Additivitätseigenschaft der logarithmischen Rendite, um den Kurs der Aktie Ende August, also $K(8)$, zu ermitteln.

(d) In der Praxis besitzt eine Investorin bzw. ein Investor eine Vielzahl von Anlagemöglichkeiten. Alle Anlagen, die ein/e Investor/-in hält, bilden zusammen sein/ihr Portfolio. Das Portfolio einer bestimmten Person besteht aus den Aktien A und B, wobei sie p % des zu veranlagenden Kapitals in die Aktie A und den Rest, also $100 - p$ %, in die Aktie B investiert hat.

Nimm im Weiteren an, dass für die auf einen bestimmten Monat bezogene Rendite R_P des Portfolios die Gleichung $R_P = \frac{p}{100} \cdot R_A + \frac{100-p}{100} \cdot R_B$ gilt, wobei R_A und R_B den auf den entsprechenden Monat bezogenen (logarithmischen) Renditen der Aktien A bzw. B entsprechen.

Ermittle die Volatilität des Portfolios für $p = 40$ %.

Erstelle für p einen Schieberegler (Schrittweite= 1 %) und ermittle, bei welcher Aufteilung des Anlagevolumens auf die beiden Aktien A und B das Portfolio die geringste Volatilität und somit das minimale Gesamtrisiko aufweist.

(a) Lösungserwartung:

Zu zeigen: $R_E = e^{R_L} - 1$, wobei $R_E = \frac{K_E - K_A}{K_A}$ und $R_L = \ln\left(\frac{K_E}{K_A}\right)$

Beachte: $\ln(e^x) = x$ und $e^{\ln(x)} = x$

$e^{\ln\left(\frac{K_E}{K_A}\right)} - 1 = \frac{K_E}{K_A} - 1 = \frac{K_E - K_A}{K_A}$

Einfache Rendite der Aktie A (Jänner): $R_E = e^{-0{,}0134} - 1 = -0{,}0133$

$\frac{K_E - K_A}{K_A} = -0{,}0133$

$K_E - K_A = -0{,}0133 \cdot K_A \qquad | +K_A$

$K_E = 0{,}9867 \cdot K_A$

Der Kurswert K_E beträgt nur mehr 98,67 % des Anfangswertes K_A. Er hat also 1,33 % an Wert verloren.

(b) **Lösungserwartung:**

Drift der Aktie A: 0,04743
Drift der Aktie B: 0,02499
Eine Investorin bzw. ein Investor erzielt daher mit Aktie A den höheren Gewinn.

Volatilität der Aktie A: 0,03745
Volatilität der Aktie B: 0,04324
Für Aktie B besteht daher das größere Risiko von Kursverlusten.

(c) **Lösungserwartung:**

Beachte: $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$

$R_L(0;1) + R_L(1;2) + ... + R_L(6;7) + R_L(7;8) =$
$= \ln\left(\frac{K(1)}{K(0)}\right) + \ln\left(\frac{K(2)}{K(1)}\right) + ... + \ln\left(\frac{K(7)}{K(6)}\right) + \ln\left(\frac{K(8)}{K(7)}\right) =$
$= \ln\left(\frac{K(1)}{K(0)} \cdot \frac{K(2)}{K(1)} \cdot ... \frac{K(7)}{K(8)} \cdot \frac{K(8)}{K(7)}\right) = \ln\left(\frac{K(8)}{K(0)}\right) = R_L(0;8)$

$K(0) = 120{,}35$ €
$R_L(0;8) = -0{,}0134 + (-0{,}0067) + ... + 0{,}0906 + 0{,}0612 = 0{,}3794$
$\ln\left(\frac{K(8)}{K(0)}\right) = 0{,}3794$
$\frac{K(8)}{K(0)} = e^{0{,}3794}$
$K(8) = K(0) \cdot e^{0{,}3794} = 120{,}36 \cdot e^{0{,}3794} = 175{,}88$ €

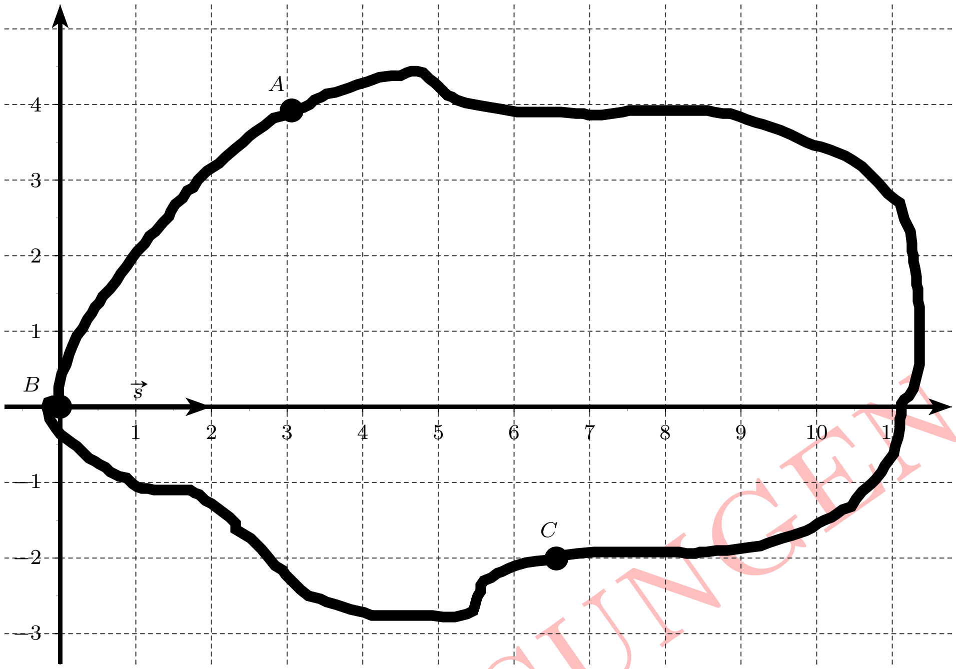
(d) **Lösungserwartung:**

$R_P = \frac{p}{100} \cdot R_A + \frac{100-p}{100} \cdot R_B$
Für $p = 40$ ergibt sich: $R_P = 0{,}40 \cdot R_A + 0{,}60 \cdot R_B$
Die Volatilität des Portfolios für $p = 40\,\%$ beträgt 0,03182

Bei einer Aufteilung 58 % : 42 % weist das Portfolio die geringste Volatilität und somit das minimale Gesamtrisiko auf.

1140 - AG 3.2, AG 3.3 - Rudern im See - ChriGrü

139. Sarah und Meghan sind mit ihrem Schlauchboot auf einem See. Weil das Wetter so schön ist nehmen sie sich für diesen Tag viel vor. Sie starten bei der Anlegestelle A und möchte zum Punkt C übersetzen. (Einheiten in der Skizze in km). ____/0



(a) Wie lange brauchen Sie geradlinig von A nach C, wenn sie durchschnittlich mit 6 km/h rudern?

(b) Nach einer Badepause setzen sie ihren Tag zu Fuß fort und wandern von Punkt C zu Punkt B. Von B aus wollen sie wieder zurück zu Punkt A fahren. Das Wetter ist nun doch nicht mehr so schön und ein leichter Westwind tritt auf, der im See eine Strömung mit dem Geschwindigkeitsvektor (in km/h) $\vec{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ erzeugt. Sarah und Meghan bemerken nichts vom Wind und steuern ihr Ziel ganz gewöhnlich an, da sie ein bisschen müder sind nun mit dem Geschwindigkeitsvektor (in km/h) von $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, merken aber nach einer Stunde, dass sie durch den Wind vertragen wurden.
Bei welchem Punkt befinden sich die beiden nun?

(c) Gib den Vektor $\vec{v_1}$ an, den sie bei diesem Wind gebraucht hätten, um direkt von B zu A zu kommen.

(a) 1,15 h bzw. 69 min.

(b) P = (5/4)

(c) $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

1141 - K6 - VAG3 - AG 3.4, AG 3.3, AG-L 3.6, AG-L 3.7, AG-L 3.9 - Flugbahn eines Flugzeugs - mathe-total.de

140. Ein Flugzeug fliegt auf geradem Weg von $A = (2 \mid 4 \mid 1)$ nach $B = (5 \mid 2 \mid 2)$ ____/7
und benötigt dafür eine Minute. Die Koordinaten wurden in km angegeben. Es Fliegt mit einer konstanten Geschwindigkeit.

Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Wie lautet die Gleichung der Geraden in Parameterform, die die Flugbahn beschreibt?

Interpretiere den Parameter der Geradengleichung im gegebenen Kontext.

(b) Berechne nach wie vielen Minuten von Punkt A aus das Flugzeug eine Flughöhe von 5 km erreicht. Gib die Koordinaten des Flugzeugs in dem Moment an.

(c) Eine Nebelwand ist durch die Gleichung $\epsilon : y + 2z = 8$ gegeben. Wo trifft das Flugzeug auf die Nebelwand bzw. trifft es diese überhaupt?

(d) Auf der Flugroute liegt auch ein Berg, dessen Bergspitze die Koordinaten $P = (10 \mid 3 \mid 3)$ besitzt. Wie nah fliegt das Flugzeug an dieser Bergspitze vorbei? (Minimaler Abstand!)

(e) Wo wäre das Flugzeug gestartet, wenn die Flugbahn insgesamt als eine Gerade gesehen werden könnte?

(a) **Lösungserwartung:**

Geradengleichung: $g : X = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB}$ mit $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

$$g : X = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da das Flugzeug eine Minute von A nach B benötigt und sich für $r = 1$ der Ortsvektor von B ergibt, entspricht r genau den Flugminuten. Wenn das Flugzeug z.B. 4 Minuten von A nach B benötigt hätte, dann würde sich z.B. für $r = 5$ der Ortsvektor des Punktes nach $5 \cdot 4$ Minuten, also nach 20 Minuten, ergeben.

(b) **Lösungserwartung:**

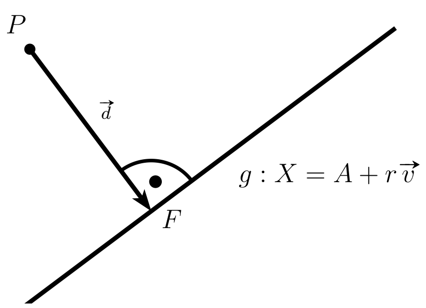
$z = 5$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow 5 = 1 + 5 \text{ also } r = 4$$

Daher: $\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 14 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow Q = (14 \mid -4 \mid 5)$

Da $r = 4$ ist, wird die Höhe von 5 km in 4 Minuten von Punkt A aus erreicht.

(c) **Lösungserwartung:**



Zuerst muss der Punkt F ausgerechnet werden.

$$\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$r = 2$, dadurch erhält man $F = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ und dadurch den Vektor $\overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Der Abstand ist die Länge des Vektors: $|\overrightarrow{PF}| \approx 3{,}61$

Also beträgt der Abstand des Flugzeuges zur Bergspitze mindestens 3,61 km

(d) **Lösungserwartung:**

Auf dem Boden ist $z = 0$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Also ist $0 = 1 + r$ und somit $r = -1$. Wenn nun $r = -1$ in g eingesetzt wird, ergibt sich der Startpunkt $S = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1142 - K6 - VAG3 - AG-L 3.7, AG-L 3.6, AG 3.4, AG 3.3 - Bergschächte - mathe-total.de

141. Es werden zwei Schächte in einen Berg gebohrt. Der eine Schacht verläuft durch die Punkte $A = (0 \mid 0 \mid 4)$ und $B = (2 \mid 1 \mid 3{,}8)$ und der andere verläuft durch $C = (a \mid 4 \mid 3{,}6)$ und geht senkrecht nach unten. Alle Angaben sind in km gegeben und die z-Komponente gibt die Höhe über dem Meeresspiegel an. ____/5

Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Wie muss a gewählt werden, damit sich die Schächte treffen und wo treffen sich die beiden Schächte?

(b) Unter welchem Winkel treffen sich die Schächte?

(c) Ein Bergarbeiter betritt bei einer Höhe von 2,5 km den ersten Bergschacht. Gib die Koordinaten seines Eintritts an.

Danach geht er 500 Meter in dem Schacht hinunter, welche Koordinaten geben nun seine Position an?

(a) **Lösungserwartung:**

Gleichung der Geraden für Schacht 1:

$s_1 : X = A + r \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -0{,}2 \end{pmatrix}$

Da der Schach 2 senkrecht nach unten geht wäre z.B. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ein Richtungsvektor, daher:

$s_2 : X = \begin{pmatrix} a \\ 4 \\ 3{,}6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Die beiden Geraden sollen sich schneiden, also:

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 4 \\ 3{,}6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$r = 4, a = 8, t = 0{,}4$

Für $r = 4$ erhält man aus der ersten Gleichung den Schnittpunkt $S = (8 \mid 4 \mid 3{,}2)$

(b) **Lösungserwartung:**

$\cos(\alpha) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -0{,}2 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\alpha \approx 84{,}89°$

(c) **Lösungserwartung:**

$z = 2{,}5 \Leftrightarrow 2{,}5 = 4 - 0{,}2r \Leftrightarrow r = 7{,}5$

Die Koordinaten des Bergarbeiters lauten:

$Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + 7{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 7{,}5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$

Einheitsvektor von Vektor $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB}_0 \approx \begin{pmatrix} 0{,}89 \\ 0{,}45 \\ -0{,}09 \end{pmatrix}$$

Der Punkte des Berarbeiters nach 500 Meter in die Tiefe liegt bei

$R = A + 0{,}5 \cdot \overrightarrow{AB}$

$$R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + 0\,5 \cdot \begin{pmatrix} 0{,}89 \\ 0{,}45 \\ -0{,}09 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}45 \\ 0{,}23 \\ 3{,}96 \end{pmatrix}$$

1143 - K6 - VAG3 - AG 3.3, AG 3.4, AG-L 3.7, AN-L 3.4 - Flugzeuge - mathe-aufgaben.com

142. Zwei Flugzeuge F_1 und F_2 fliegen mit jeweils konstanter Geschwindigkeit auf geradlinigen Flugbahnen. Die Position der Flugzeuge wird bezüglich eines Koordinatensystems mit der Längeneinheit 1 km angegeben. Die x_3-Koordinate gibt die Flughöhe an. Zum Zeitpunkt $t = 0$ (in Minuten) ist das Flugzeug F_1 im Punkt $P_1(0 \mid 0 \mid 0)$ und das Flugzeug F_2 im Punkt $P_2(-15 \mid -30 \mid 8)$. Nach 4 Minuten hat F_1 die Position $Q_1(16 \mid 16 \mid 4)$ erreicht. F_2 befindet sich nach 5 Minuten an der Position $Q_2(30 \mid 30 \mid 8)$. ____/6

Aufgabenstellung:

(a) Welches Flugzeug ist schneller?

(b) $\boxed{\text{A}}$ Gib für jedes Flugzeug eine Gleichung an, welche die Position in Abhängigkeit von der Zeit in Minuten beschreibt.

Nach welcher Zeit hat F_1 dieselbe Flughöhe wie F_2 erreicht?

(c) Untersuche, ob sich die Flugbahnen schneiden.

(d) Bestimme den Abstand der beiden Flugzeuge in Abhängigkeit von der Zeit. Zu welchem Zeitpunkt sind sich die beiden Flugzeuge am nächsten? Wie weit sind sie zu diesem Zeitpunkt voneinander entfernt?

(a) **Lösungserwartung:**

Um die Geschwindigkeit der Flugzeuge zu ermitteln muss zuerst der zurückgelegte Weg ermittelt werden.

Flugzeug F_1:

$$|\overrightarrow{P_1Q_1}| = \left|\begin{pmatrix}16\\16\\4\end{pmatrix}\right| \approx 22{,}98\,\mathrm{km}$$

Die Geschwindigkeit beträgt $v_1 = \frac{22{,}98\,\mathrm{km}}{4\,\mathrm{min}} = 5{,}74\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{min}}$

Flugzeug F_2:

$$|\overrightarrow{P_2Q_2}| = \left|\begin{pmatrix}45\\60\\0\end{pmatrix}\right| = 75\,\mathrm{km}$$

Die Geschwindigkeit beträgt $v_2 = \frac{75\,\mathrm{km}}{5\,\mathrm{min}} = 15\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{min}}$

Flugzeug 2 ist schneller als Flugzeug 1.

(b) **Lösungserwartung:**

Richtungsvektor F_1: $\frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{P_1Q_1}$

Flugzeug 1: $X = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}4\\4\\1\end{pmatrix}$, t in Minuten

Richtungsvektor F_2: $\frac{1}{5} \cdot \overrightarrow{P_2Q_2}$

Flugzeug 2: $X = \begin{pmatrix}-15\\-30\\8\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}9\\12\\0\end{pmatrix}$, t in Minuten

Die Flughöhe der Flugzeuge wird durch die x_3-Koordinate der Geradengleichung beschrieben. Das Flugzeug 2 hat als konstante Koordinate $x_3 = 8\,\mathrm{km}$, das heißt, dass dieses Flugzeug seine Flughöhe nicht ändert.

Für Flugzeug 1 gilt $x_3 = 0 + t$, das heißt, dass es pro Minute um $1\,\mathrm{km}$ steigt. Für $t = 8$ (das heißt nach 8 Minuten) haben die beiden Flugzeuge die gleiche Flughöhe erreicht.

(c) **Lösungserwartung:**

Die Geradengleichungen der beiden Flugbahnen haben keine vielfachen Richtungsvektoren. Das heißt, dass die Geraden entweder windschief sind oder sich schneiden. Dies wird durch Gleichsetzen der Geradengleichungen geprüft:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}4\\4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-15\\-30\\8\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}9\\12\\0\end{pmatrix}$$

Man erhält eine falsche Aussage, damit sind die beiden Flugbahnen windschief.

(d) **Lösungserwartung:**

Nach t Minuten befindet sich das Flugzeug 1 im Punkt $P(4t \mid 4t \mid t)$.

Nach t Minuten befindet sich das Flugzeug 2 im Punkt $Q(-15+9t \mid -30+12t \mid 8)$.

Zum Zeitpunkt t beträgt der Abstand der Flugzeuge:

$$d(t) = |\overrightarrow{PQ}| = \left| \begin{pmatrix} -15+5t \\ -30+8t \\ 8-t \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-15+5t)^2 + (-30+8t)^2 + (8-t)^2}$$

Von dieser Funktion muss nun das Minimum $d'(t) = 0$ bestimmt werden - daraus folgt: $t = 3{,}59$ (also nach 3 Minuten und 35,4 Sekunden) haben die Flugzeuge einen minimalen Abstand von 5,46 km voneinander.

1144 - K6 - VAG3 - AG 3.4, AG 3.3, AG-L 3.7 - Zwei Flugzeuge - rzuser.uni-heidelberg.de

143. Zwei Flugzeuge F_1 und F_2 fliegen mit jeweils konstanter Geschwindigkeit auf geradem Kurs über eine flache Landschaft. Diese Landschaft wird in einem Koordinatensystem als x_1x_2-Ebene beschrieben. ____/10

F_1 befindet sich zur Zeit $t = 0$ im Punkt $P = (0 \mid 0 \mid 1)$, zur Zeit $t = 1$ im Punkt $Q = (0 \mid 8 \mid 5)$. Zu den entsprechenden Zeiten befindet sich F_2 in $R = (0 \mid 0 \mid 4)$ bzw. in $S = (-1 \mid 5 \mid 6)$ (Koordinatenangaben in km, Zeitangaben in min).

Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Bestimme je eine Gleichung der Geraden g und h, welche die Flugbahnen der beiden Flugzeuge beschreibt.

Zeige, dass sich die beiden Flugbahnen nicht schneiden.

(b) Welchen Abstand haben die beiden Flugzeuge zum Zeitpunkt $t = 0$, welchen nach 30 Sekunden?

In welcher Höhe befinden sich die Flugzeuge zum Zeitpunkt $t = 0$?

(c) Welche Geschwindigkeit hat F_1, welche F_2?

Befinden sich die Flugzeuge im Steigflug oder im Sinkflug? Begründe deine Aussage.

(d) Wann erreicht F_1 die Höhe von 1,8 km?

In welchem Punkt befindet sich F_1 zu diesem Zeitpunkt?

(e) Welchen Abstand haben die beiden Flugzeuge zu diesem Zeitpunkt?

Wann befinden sich beide Flugzeuge auf gleicher Höhe? Wie nahe sind sie sich zu diesem Zeitpunkt?

(a) **Lösungserwartung:**

$$F_1 : X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix},\ F_2 : X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die beiden Geraden müssen gleichgesetzt werden:

$$\begin{aligned} 0 &= -2 \\ 8r &= 5s \\ 1 + 4r &= 4 + 4s \end{aligned}$$

Daraus folgt: $s = 0, r = 0, 1 = 4$, die Bahnen schneiden sich also nicht.

(b) **Lösungserwartung:**

Abstand von P und R ist $|\overrightarrow{PR}| = 3$; zum Zeitpunkt $t = 0$, sind die Flugzeuge 3 km voneinander entfernt.

30 sec = 0,5 min; Einsetzen von $t = 0{,}5$ liefert die beiden Punkte $P_1 = (0 \mid 4 \mid 3)$ und $P_2 = (-0{,}5 \mid 2{,}5 \mid 5)$. Abstand ist daher: $|\overrightarrow{P_1P_2}| \approx 2{,}5$. Nach 30 Sekunden ist der Abstand etwa 2,5 km.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich F_1 in einer Höhe von 1 km, F_2 in einer Höhe von 4 km.

(c) **Lösungserwartung:**

$v_1 = \sqrt{0^2 + 8^2 + 4^2} \approx 8{,}94$, d.h. F_1 hat eine Geschwindigkeit von 8,94 km/min $\approx$ 537 km/h.

$v_2 = \sqrt{1^2 + 5^2 + 2^2} \approx 5{,}48$, d.h. F_2 hat eine Geschwindigkeit von 5,48 km/min $\approx$ 329 km/h.

Die beiden Flugzeuge steigen, da ihre x_3-Koordinaten der Richtungsvektoren positiv sind.

(d) **Lösungserwartung:**

Es muss $x_3 = 1 + 4r = 1{,}8$ sein; dies liefert $r = 0{,}2$, d.h. F_1 erreicht nach 0,2 Minuten eine Höhe von 1,8 km.

Zum Zeitpunkt $r = 0{,}2$ befindet sich F_1 in $(0 \mid 1{,}6 \mid 1{,}8)$.

(e) **Lösungserwartung:**

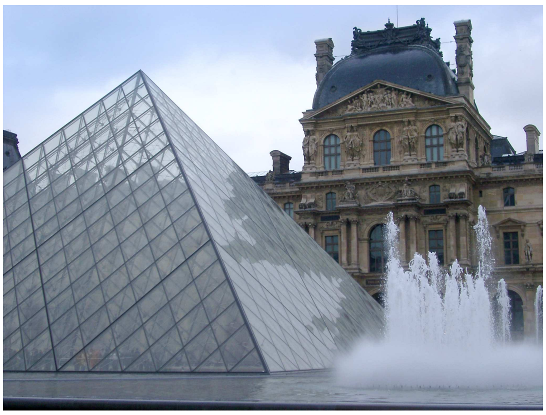
F_2 befindet sich zu diesem Zeitpunkt in $(-0{,}2 \mid 1 \mid 4{,}4)$. Der Abstand der Flugzeuge zu diesem Zeitpunkt ist daher:
$d = \sqrt{0{,}2^2 + 0{,}6^2 + 2{,}6^2} \approx 2{,}7$
also etwa 2,7 km.

Gleiche Höhe zum Zeitpunkt t bedeutet $1 + 4t = 4 + 2t$, also $t = 1{,}5$. Dies ist nach 1,5 min, also nach 90 Sekunden. Einsetzen von $t = 1{,}5$ ergibt $P_1 = (0 \mid 12 \mid 7)$ für F_1 und $P_2 = (-1{,}5 \mid 7{,}5 \mid 7)$ für F_2.

1145 - K6 - VAG3 - AG 3.2, AG-L 3.9, AG-L 3.6, AG-L 3.8, AG 3.4, AG 3.3 - Louvre - http://ne.lo-net2.de

144. Der Eingang des berühmten Pariser Kunst-Museums „Louvre“ wird durch eine Glas-Pyramide mit quadratischer Grundfläche gebildet: ____/1

Die Breite beträgt ungefähr 35 m und die Höhe 22 m.



Diese Pyramide wird jetzt in einem dreidimensionalen rechtwinkligen Koordinatensystem (mit den Längeneinheiten von jeweils 1 m) betrachtet.

Die Bodenfläche sei die x_1-x_2-Ebene, und die x_3-Achse sei lotrecht nach oben gerichtet. Das Koordinatensystem sei weiterhin so gewählt, dass die vier Eckpunkte auf dem Boden die folgenden Koordinaten haben:

$A = (0 \mid 0 \mid 0) \quad B = (35 \mid 0 \mid 0) \quad C = (35 \mid 35 \mid 0) \quad D = (0 \mid 35 \mid 0)$

Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Die Dachspitze sei S. Begründe, dass S die folgenden Koordinaten hat: $(17{,}5 \mid 17{,}5 \mid 22)$.

Bestimme eine Parameterform der Ebene ε, in der die Pyramidenseitenfläche ABS liegt.

(b) Bestimme den Winkel, den die Seitenflächen der Pyramide jeweils mit dem Fußboden bilden.

(c) Um ein Angebot für die Fensterreinigung einzuholen, muss man den Flächeninhalt der Glasflächen berechnen. Berechnen Sie dazu zuerst den Flächeninhalt eines der vier (kongruenten) Seitendreiecke und dann die gesamte innen und außen zu reinigende Glasfläche.

(d) Am Tage fällt bei schönem Wetter (paralleles) Sonnenlicht auf die Pyramide. Zum nun betrachtenden Zeitpunkt sei der Richtungsvektor vom Sonnenlicht:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix}$$

Berechne die Koordinaten des Schattenpunktes P der Pyramidenspitze auf dem Boden.

(e) Nachts sollen zur Verstärkung der Lichteffekte dann und wann die Seitenflächen der Pyramide von außen mit Scheinwerfern beleuchtet werden.

Einer der Scheinwerfer soll mit Hilfe eines Lichtmastes lotrecht über dem Bodenpunkt $F = (17{,}5 \mid -7 \mid 0)$ angebracht werden. Die als punktförmig angenommene Lichtquelle soll die Seitenfläche ABS so beleuchten, dass das Licht im Schwerpunkt dieser Seitenfläche senkrecht auftrifft.

Zeige zunächst, dass der Schwerpunkt M_1 die Koordinaten $\left(\frac{35}{2} \mid \frac{35}{6} \mid \frac{22}{3}\right)$ hat.

Bestimme dann die notwendige Höhe der Lichtquelle über dem Boden.

(a) **Lösungserwartung:**

S liegt in x_3-Richtung 22 m über dem Mittelpunkt $M = (17{,}5 \mid 17{,}5 \mid 0)$ der Grundfläche der Pyramide. Darum hat S die Koordinaten $(17{,}5 \mid 17{,}5 \mid 22)$.

Eine Parameterform der Ebene ε ergibt sich aus der Drei-Punkte-Form:
$\varepsilon : \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AD},\ r, t \in \mathbb{R}$

$$\vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 35 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 17{,}5 \\ 17{,}5 \\ 22 \end{pmatrix},\ r, t \in \mathbb{R}$$

(b) **Lösungserwartung:**

Der Winkel, den zwei Ebenen einschließen, entspricht dem Winkel zwischen den zugehörigen Normalvektoren der benen. Einen Normalvektor $\vec{n}$ von ε erhält man durch das Kreuzprodukt:

$$\vec{n}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 \\ 44 \\ -35 \end{pmatrix}$$

Einen Normalvektor n_{x_1,x_2} zur x_1x_2-Ebene ist z.B.:

$$\vec{n}_{x_1,x_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Über die Beziehung:

$$\cos(\alpha) = \frac{\mid \vec{n}_\varepsilon \cdot \vec{n}_{x_1,x_2} \mid}{\mid \vec{n}_\varepsilon \mid \cdot \mid \vec{n}_{x_1,x_2} \mid}$$

$\alpha \approx 51{,}50^\circ$

(c) **Lösungserwartung:**

Die zur Fußbodenseite gehörende Höhe eines jeden der Pyramidendreiecke erhält man mithilfe des Satzes von Pythagoras aus der Höhe der Pyramide und der halben Fußbodenseite:

$h_\Delta = \sqrt{22^2 + 17{,}5^2}$ und damit $A_\Delta = \frac{35 \cdot h_\Delta}{2}\,\mathrm{m}^2 \approx 492\,\mathrm{m}^2$

Acht Flächen sind zu reinigen, also rund 4 000 Quadratmeter.

(d) **Lösungserwartung:**

Die Geradengleichung des „Sonnenstrahls“ durch S lautet:

$$g_5 : \vec{x} = \overrightarrow{OS} + t \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} 15t + \frac{35}{2} \\ 10t + \frac{35}{2} \\ -10t + 22 \end{pmatrix}$$

Auf dem Fußboden ist die x_3-Komponente Null. Also gilt für den Schattenpunkt P der Pyramidenspitze: $t = \frac{11}{5}$ und damit hat P die Koordinaten: $(50{,}5 \mid 39{,}5 \mid 0)$.

(e) **Lösungserwartung:**

Der Schwerpunkt M_1 des Dreiecks ABS hat den Ortsvektor $\overrightarrow{OM_1} = \frac{\overrightarrow{0A}+\overrightarrow{0B}+\overrightarrow{0S}}{3}$ un damit hat M_1 die Koordinaten $\left(\frac{35}{2} \mid \frac{35}{6} \mid \frac{22}{3}\right)$

Der Scheinwerfe liegt auf einer Geraden mit der Gleichung:

$$g : \vec{x} = \overrightarrow{0M_1} + t \cdot \vec{n_\varepsilon} = \overrightarrow{OM_1} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 44 \\ -35 \end{pmatrix}$$

Um den gesuchten Scheinwerferpunkt M_s zu ermitteln, ist t so zu bestimmen, dass die zweite Komponente -7 wird.

Also $44 \cdot t + \frac{35}{6} = -7$

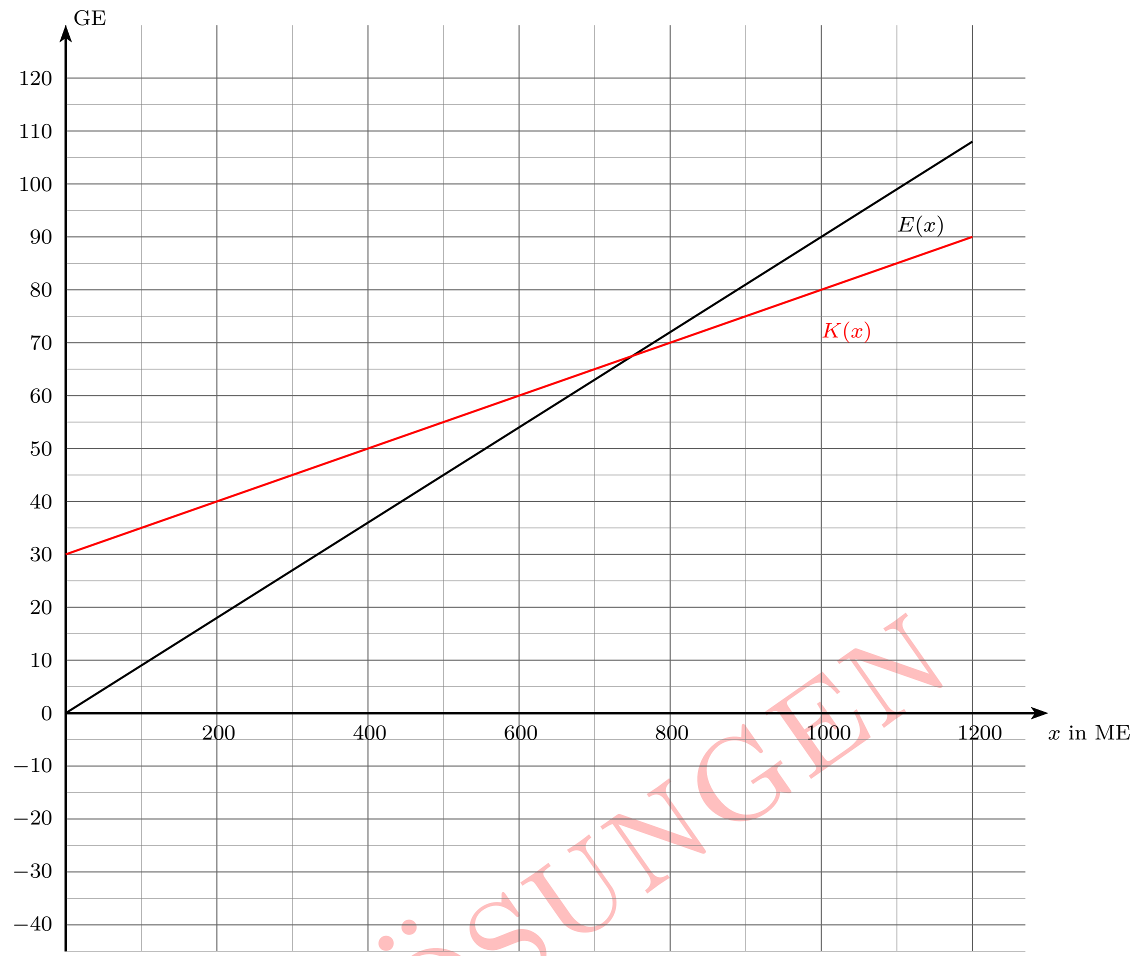
Man erhält $t = -\frac{7}{24} \approx -0{,}29$ und damit die Koordinaten für den Ort M_s der Lichtquelle: $\left(\frac{35}{2} \mid -7 \mid \frac{421}{24}\right) = (17{,}5 \mid -7 \mid 17{,}5)$.

Die notwendige Höhe der Lichtquelle beträgt also 17,5 m

1146 - K5 - FA 2.1, FA 2.2, FA 2.3, FA 1.6 - Kunststoffproduktion - ChWe

145. Die Chemie-AG produziert einen Kunststoff. Über diese Produktion liegen folgende Informationen vor: Pro Monat kann eine Menge von maximal 1200 Mengeneinheiten (ME) produziert werden. Die Produktionskosten $K(x)$ in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x können durch eine lineare Funktion modelliert werden. ____/1

Die Erlösfunktion $E(x)$, die jeder verkauften Kunststoffmenge x (in ME) den Erlös $E(x)$ (0,09 Geldeinheiten GE/Stück) zuordnet, ist in der Abbildung veranschaulicht:



(a) Lineare Kostenfunktion

(i) Betrachte die unten angegebene Tabelle, die jeder Produktionsmenge die Produktionskosten zuordnet. (1P)

Produktionsmenge x in ME	200	500
Produktionskosten K(x) in GE	40	55

Gib eine lineare Funktion an, die das beschreibt!

(ii) Interpretiere k und d dieser Funktion im Sachzusammenhang. (2P)

(iii) Zeichne den Graphen der Funktion K in der obigen Abbildung ein. (1P.)

(b) Schnittpunkt von E und K

(i) Ermittle graphisch die Koordinaten des Schnittpunktes der Graphen der Funktionen E und K. (1P)

(ii) Interpretiere die Koordinaten des Schnittpunktes im Kontext. (1P)

Lösungserwartung:

(a) (i) $K: \ y = 0{,}05x + 30$

(ii) k: gibt die Produktionskosten pro Stück an.
d: Die Fixkosten bei einer Produktionsmenge von 0 betragen 30 GE.

(iii) siehe Abbildung

(b) (i) $S = (750 \mid 67{,}5)$

(ii) Ab einer Produktionsmenge von 750 Stück pro Monat macht die Chemie-AG Gewinn.

1147 - K5 - FA 2.1, FA 2.2, FA 2.3, FA 2.4, FA 2.5 - Züge - ChWe

146. Die folgende Abbildung zeigt die Entfernung s (in km) zweier Züge X und Y vom Bahnhof B in Abhängigkeit von der Zeit t (in Stunden). Beide Züge fahren mit konstanter Geschwindigkeit auf der selben Strecke und fahren um 08:30 Uhr weg. ____/8

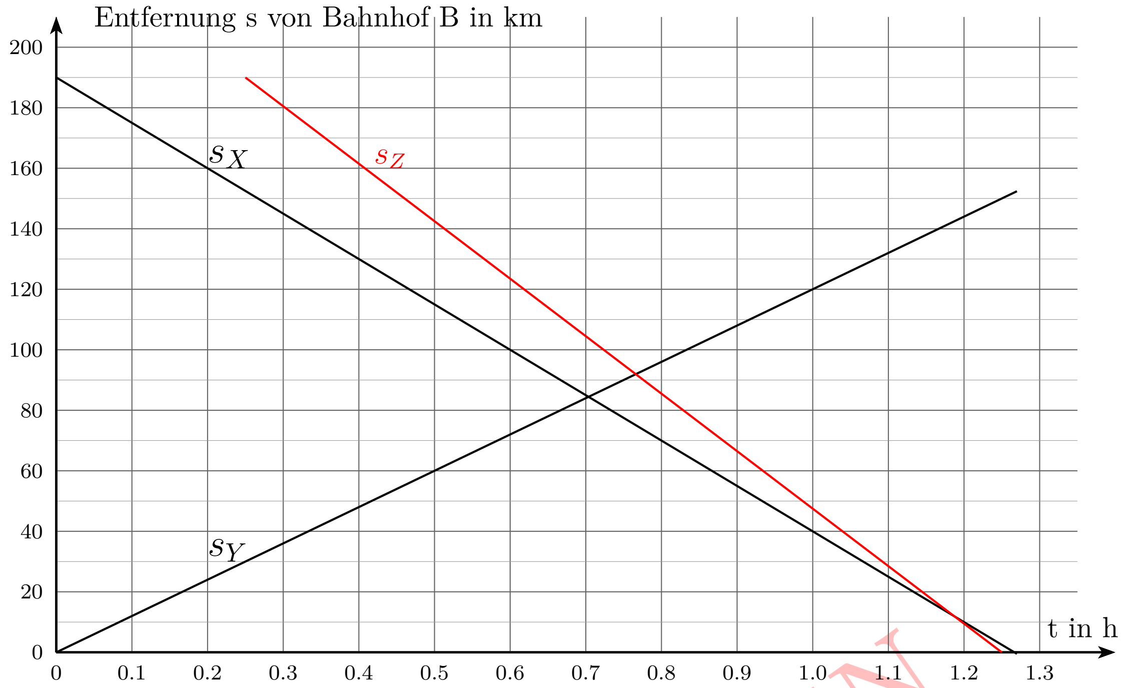
(a) Gib an, mit welcher Geschwindigkeit der Zug Y fährt (in km/h)! (1P)

(b) Gib die Funktionsgleichung für die Entfernung s_X des Zuges X vom Bahnhof B nach t Stunden an! (2P)

(c) Ermittle, um welche Uhrzeit die Züge X und Y einander begegnen! (1P)

(d) Bestimme die Entfernungen der beiden Züge von Bahnhof B um 09:00 Uhr! (2P)

(e) Ergänze in der Abbildung den Graphen der Funktion s_Z, die die Entfernung eines Zuges Z vom Bahnhof B nach t Stunden beschreibt, wenn Z um 08:45 Uhr vom selben Bahnhof wie X wegfährt und mit einer gleichbleibenden Geschwindigkeit von 190 km/h fährt. (2P)



Lösungserwartung:

(a) Der Zug fährt 120 km/h.

(b) $s_X: \; y = -150x + 190$

(c) $S = (0{,}7|84{,}44) \rightarrow$ Die beiden Züge treffen sich nach 42 min, also um 9:12.

(d) $E_X = (0{,}5|115)$ und $E_Y = (0{,}5|60) \rightarrow$ Um 9:00 ist Zug X 115 km und der Zug Y 60 km vom Bahnhof B entfernt

(e) siehe Abbildung

1148 - K5 - FA 1.4, FA 1.5, FA 1.6, FA 1.7 - Gewinnfunktion - ChWe

147. Ein Verkäufer analysiert seine Einnahmen und Ausgaben und beschreibt danach seinen Gewinn mit folgender Funktion: ____/10

$$G(p) = -50 \cdot p^2 + 8\,000 \cdot p - 140\,000$$

Dabei entspricht G dem Gesamtgewinn in €, der bei einem Stückpreis von p € erzielt wird. (Tipp: Zeichne die gegebene Funktion mit Geogebra!)

(a) Gib die abhängige und die unabhängige Größe an. (1P)

(b) Gib für den Definitionsbereich $D = [0; 160]$ die passende Wertemenge an. (1P)

(c) Bestimme den Gewinn, den der Verkäufer bei einem Stückpreis von 110 € erzielt. (1P)

(d) Gib an, bei welchem Stückpreis der Verkäufer den maximalen Gewinn erzielt. (1P)

(e) Welche Stückpreise liefern einen Gewinn von über 100 000 Euro? Gib ein Intervall an! (2P)

(f) Gib jene Stellen an, bei denen gilt $G(p) = 0$. Beschreibe die Lösungen im Kontext. (2P)

(g) Der Verkäufer legt 80 000 € seines Gewinns für ein Jahr auf ein Sparbuch, das mit p % verzinst wird. Anschließend hebt er 12 500 € ab. Nach einem weiteren Jahr hat er insgesamt 71 000 € auf dem Sparbuch. Stelle eine Gleichung auf, um den Sachverhalt zu beschreiben und berechne den jährlichen Zinssatz p %. (2P)

Lösungserwartung:

(a) abhängige Größe: G, unabhängige Größe: p

(b) $W = [-140\,000; 180\,000]$

(c) $G(110) = 135\,000$

(d) Bei einem Stückpreis von 80 € macht der Verkäufer den maximalen Gewinn.

(e) $x \in (40; 120)$

(f) $x_1 = 20$ und $x_2 = 140$; Bei diesen Stückpreisen macht der Verkäufer weder Gewinn noch Verlust.

(g) $(80\,000 \cdot p - 12\,500) \cdot p = 71\,000 \Rightarrow (p_1 = -0{,}87), p_2 = 1{,}02$. Der jährliche Zinssatz beträgt ca. 2 %

1149 - K5 - AG 1.1 - Mengen von Bauern - ChWe

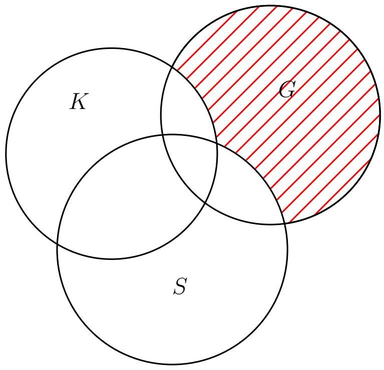
148. Im folgenden Diagramm sei ____/6

K ... die Menge der Bauern mit Kuhhaltung.

S ... die Menge der Bauern mit Schweinemast.

G ... die Menge der Bauern mit Getreideanbau.

(a) Gib in Mengenschreibweise und in Worten an, welcher Bereich im gegebenen Mengendiagramm gekennzeichnet ist. (3P)



(b) Zeichne in das oben stehende Mengendiagramm folgenden Bereich ein: (1P)
„Die Menge der Bauern, die nur Getreide anbauen und keine Tiere halten."

(c) Gib die Menge $A\backslash B$ im beschreibenden Verfahren an: (2P)

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 3\},\ B = (1;3]$$

Lösungserwartung:

(a) $(K \cap S)\backslash S$: Die Menge beschreibt alle Bauern mit Kuhhaltung und Schweinemast, aber ohne Getreideanbau.

(b) siehe Abbildung

(c) $A\backslash B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 1\}$

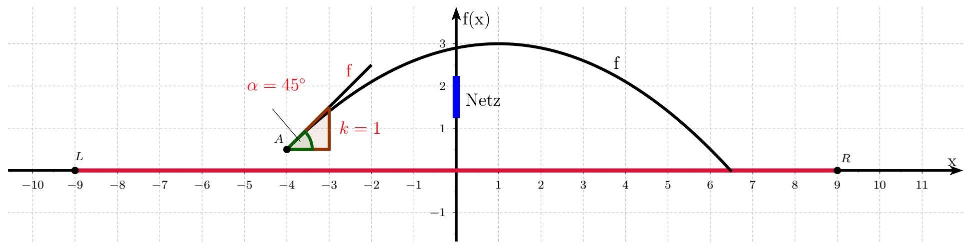
1150 - K7 - FA 1.4, FA 4.3, AN 1.2, AG 4.1, AG-L 2.7, AN 3.3, FA 4.1 - Die Flugbahn eines Volleyballs - Dimensionen Mathematik 7 Schularbeiten Trainer

149. Unten ist ein Teil der Flugbahn eines (im Weiteren vereinfachend als Punkt modellierten) Volleyballs in einem Koordinatensystem (LE=1 m) dargestellt. Die Flugbahn liegt in einer Vertikalebene, die zu den Seitenlinien des Spielfeldes parallel ist. ____/8

Sie kann im vorliegenden Koordinatensystem näherungsweise durch den Graphen einer Polynomfunktion f zweiten Grades mit $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

dargestellt werden. Der Punkt $A = (-4 \mid y_A)$ markiert die Position des Ballkontakts und somit den Beginn der Flugbahn.

Die Punkte L und R kennzeichnen die Endlinien des insgesamt 18 m langen Spielfeldes. Genau über der Mittellinie des Spielfeldes ist ein Netz gespannt. Die Oberkante befindet sich in einer Höhe von 2,24 Meter. Das Netz selbst ist einen Meter hoch.



Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Im Fall einer konkreten Flugbahn gilt: $f(x) = -0{,}1x^2 + 0{,}2x + 2{,}9$.
Weise durch Rechnung nach, dass der Ball gemäß der durch f festgelegten Flugbahn das netz „ordnungsgemäß" überquert und (ohne weitere Einwirkung durch die gegnerische Mannschaft) innerhalb des Spielfeldes der gegnerischen Mannschaft auf den Boden trifft.
Für die Lösung einer bestimmten Aufgabenstellung berechnet eine Person den Wert $f'(-4)$ und gibt als Lösung jenen Wert $\alpha \in [0°; 90°]$ an, für den $\tan(\alpha) = f'(-4)$ gilt.
Bestimme α und interpretiere das Ergebnis im Aufgabenkontext.

(b) In einem anderen Fall liegen folgende Informationen vor: Der in der Abbildung dargestellte Ballkontakt (vgl. Punkt A) erfolgt in einer Höhe von 0,5 m. Im Moment der Netzüberquerung befindet sich der Ball 0,4 m oberhalb der Netzoberkante und der Ball trifft bei der Landung genau auf der Endlinie des Spielfeldes auf.
Bestimme die Gleichung der zugehörigen Funktion f und ermittle die maximale Höhe des Balles während des Flugs.

(c) Angenommen es gilt, $A = (-4 \mid 0{,}4)$ und der Ball trifft innerhalb des rechten Spielfeldes einen Meter vor der Endlinie auf dem Boden auf.
Begründe verbal, dass die Gleichung der Funktion f durch die vorliegenden Informationen nicht eindeutig festgelegt ist.
Ermittle die Funktionsgleichung von f in Abhängigkeit des Parameters a.
Gib einen passenden Wert für a so an, dass der Ball das Netz ordnungsgemäß überquert und zusätzlich eine maximale Flughöhe von 3 m nicht überschreitet.

(d) Im Rahmen der aktuell vorliegenden Aufgabenstellung nimmt der Parameter b den Wert null an, also $f(x) = a \cdot x^2 + c$.
Erläutere, inwieweit die oben dargestellte Flugbahn unabhängig von der Wahl der Parameter a und c den Sachverhalt nicht korrekt wiedergibt, und ermittle, in welcher horizontalen Entfernung vom Netz eine im rechten Spielfeld gedachte Person im Falle der Parameter $a = -\frac{1}{8}$ und $c = 2{,}5$ Ballkontakt hat, wenn sie den Ball in einer Höhe von $h = 2\,\text{m}$ „pritscht".
Gib für a und c passende Werte so an, dass nachfolgende Bedingungen erfüllt sind:

- Für die y-Koordinate des Punktes A gilt: $y_A = 0{,}5$.
- Der Ballkontakt der „pritschenden" Person erfolgt im Punkt $P = (2 \mid h)$ mit $h > 2\,\text{m}$.
- Der Ball weist beim Überqueren des Netzes eine Höhe von maximal 4,5 m (vom Boden gemessen) auf.

(a) Lösungserwartung:

Der Ball überquert das Netz an der Stelle $x = 0$, wobei gilt: $f(0) = 2{,}9\,\text{m}$.
An der Stelle $x = 6{,}48\,\text{m}$ trifft der Ball wieder am Boden auf, da $f(6{,}48) = 0$.

$f'(-4)$ stellt die Steigung der Tangente an den Funktionsgraphen im Punkt $(-4 \mid f(-4))$ dar, mit der der Abwurfwinkel des Balles berechnet werden kann. Im abgebildeten Steigungsdreieck gilt: $\tan(\alpha) = \frac{k}{1} = k = f'(-4)$.
Für $k = 1$ erhält man einen Abwurfwinkel von 45°.

(b) Lösungserwartung:

Aus der Angabe können folgende Punkte der Flugkurve herausgelesen werden:
$A = (-4 \mid 0{,}5), N = (0 \mid 2{,}74), B = (9 \mid 0)$
$f(x) = -0{,}066x^2 + 0{,}294x + 2{,}74$
Die Maximalhöhe erreicht der Ball an der Stelle $x = 2{,}23\,\text{m}$, da hier die Steigung der Tangente den Wert 0 annimmt. Die zugehörige Höhe des Balles beträgt 3,07 m.

(c) **Lösungserwartung:**

Durch die Punkte $A = (-4 \mid 0{,}4)$ und $B = (8 \mid 0)$ können beliebig viele Parabeln gefunden werden. Zur eindeutigen Festlegung der Koeffizienten a, b und c der Funktion $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ ist eine weitere Bedingung notwendig.

Nimmt der Parameter a einen Wert zwischen $-0{,}0777$ und $-0{,}0617$ an, so überquert der Ball ordnungsgemäß das Netz und überschreitet die maximale Flughöhe von 3 m nicht.

(d) **Lösungserwartung:**

Der Graph der Funktion $f(x) = a \cdot x^2 + c$ verläuft symmetrisch zur y-Achse. Die maximale Flughöhe des Balles wird also genau oberhalb des Netzes erreicht. $f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + 2{,}5$

Die „pritschende“ Person ist 2 m vom Netz entfernt, da gilt: $f(2) = 2$.

$f(x) = a \cdot x^2 + c$

Der Graph der Funktion verläuft durch den Punkt $A = (-4 \mid 0{,}5)$, wenn gilt: $f(-4) = 0{,}5$: $0{,}5 = 16a + c \Rightarrow c = -16a + 0{,}5$, d.h.:
$f(x) = a \cdot x^2 - 16a + 0{,}5$

Für die maximale Flughöhe c gilt: $2{,}24 < c < 4{,}5 \Rightarrow 2{,}24 < -16a + 0{,}5 < 4{,}5 \Rightarrow -0{,}25 < a < -0{,}10875$

Nimmt a Werte zwischen $-0{,}25$ und $-0{,}10875$ an, so liegt die maximale Flughöhe zwischen 2,24 m und 4,5 m. Erfolgt jedoch der Ballkontakt der pritschenden person im Punkt $P = (2 \mid h)$ mit $h > 2$, so muss grundsätzlich gelten: $f(2) > 2$ bzw. $4a - 16a + 0{,}5 > 2 \Rightarrow a < -0{,}125$. Liegt also a im Intervall $[-0{,}25; -0{,}125)$, so sind alle Bedingungen erfüllt.

1151 - K7 - DR, RF - FA 1.2, FA 1.9, FA 1.3, FA 1.5, FA 1.6, FA 1.4, AN 3.3 - Materialbedarf für einen quaderförmigen Behälter - Dimensionen Mathematik 7 Schularbeiten Trainer

150. Das Volumen eines oben offenen, quaderförmigen Behälters mit quadratischer Grundfläche soll $V\,\mathrm{dm}^3$ betragen. Die Länge der Grundkante a sowie die Höhe h des Behälters werden in Dezimeter angegeben. ____/8

Die Funktion f beschreibt die Abhängigkeit des für den Boden und die vier Seitenwände benötigten Materialbedarfs M (in dm^2) in Abhängigkeit von der Grundkantenlänge a (die Wandstärke des verwendeten Materials sowie Klebelaschen können vernachlässigt werden).
Für einen bestimmten Wert V_0 des Behältervolumens ergibt sich für f die nachfolgende Funktionsgleichung:
$f(a) = \dfrac{a^3+8}{a}$.

Aufgabenstellung:

(a) Bei gegebenen Volumen V des Behälters besteht zwischen den Seitenlängen a und h ein bestimmter Zusammenhang. Beschreibe die Abhängigkeit $h(a)$ mithilfe einer Funktionsgleichung und skizziere die charakteristische Form des entsprechenden Funktionsgraphen. Bestimme V_0.

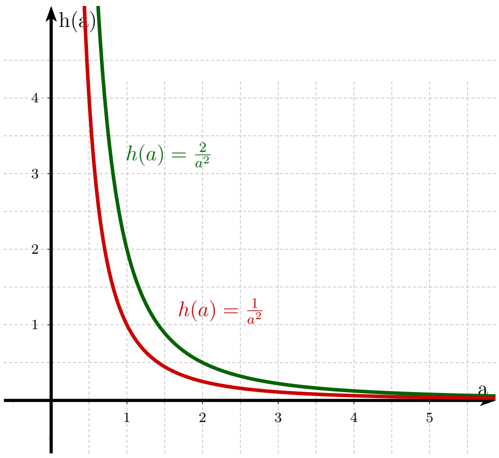
(b) Skizziere den Graphen der Funktion f mit $f(a) = \frac{a^3+8}{a}$, gib einen dem Kontext angemessenen Definitionsbereich an und interpretiere das „Grenzverhalten" der Funktion f „am Rande des Definitionsbereiches" kontextbezogen. Ermittle anhand des Funktionsgraphen die Lösungsmenge der Gleichung $f(a) = 7$. Interpretiere das Ergebnis kontextbezogen.

(c) Im Zuge der Lösung einer Aufgabenstellung, die auf die Funktionsgleichung $f(a) = \frac{a^3+8}{a}$ führt, ermittelt eine Person die Lösung a_0 der Gleichung $f'(a) = 0$.
Gib a_0 an und interpretiere den Wert im Kontext des Beispiels. Nimm diesbezüglich auch Bezug auf den Wert $f''(a_0)$.

(d) $\boxed{\text{A}}$ Ermittle, wie viele Werte für die Grundkantenlänge a in Frage kommen, sodass der zugehörige Materialverbrauch $f(a) = \frac{a^3+8}{a}$ genau 12 dm^2 beträgt. Erläutere für jeden möglichen Wert von a anhand des Vorzeichens des Wertes $f'(a)$, wie sich eine (geringfügige) Vergrößerung der Grundkantenlänge über den jeweiligen Wert a hinaus auf den Materialverbrauch auswirken würde.

(a) **Lösungserwartung:**

$V = a^2 \cdot h \Rightarrow h(a) = \frac{V}{a^2}$



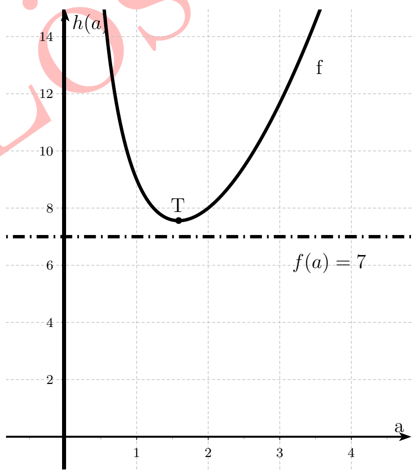
Da die Länge der Grundkante a des Behälters nur positive Werte annehmen kann, gilt für die Definitionsmenge: $D_h = \mathbb{R}^+$

Für den Materialverbrauch abhängig von Grundkante a und Höhe h gilt:
$M(a, h) = a^2 + 4ah$ (Boden + 4 Seitenwände)

Ersetzt man in dieser Gleichung h durch $\frac{V}{a^2}$, so ergibt sich:
$M(a) = a^2 + 4a\frac{V}{a^2} = \frac{a^3+4V}{a}$

Für die geforderte Funktion $f(a) = \frac{a^3+8}{a}$ muss somit gelten: $V_0 = 2\,\text{dm}^3$

(b) **Lösungserwartung:**



Die Ermittlung eines Materialverbrauchs ist nur für positive Grundkantenlängen a sinnvoll, somit gilt auch für die Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R}^+$.

Dem Funktionsgraphen ist zu entnehmen, dass sowohl bei minimaler Grundkantenlänge ($a \to 0$), als auch bei sehr großer Grundkantenlänge ($a \to \infty$) der Materialverbrauch stark zunimmt, während er im Intervall $[1; 2]$ einen minimalen Wert annimmt.

In der Grafik ist auch zu erkennen, dass, bei einem geforderten Volumen von $2\,\text{dm}^3$, es nicht möglich ist einen Materialverbrauch von $7\,\text{dm}^2$ zu erzielen.

(c) **Lösungserwartung:**

Bei einer Grundkantenlänge $a_0 = \sqrt[3]{4} \approx 1{,}59\,\text{dm}$ beträgt der Wert der 1. Ableitung 0, während die 2. Ableitung an dieser Stelle einen positiven Wert annimmt. Es liegt also ein Kurvenpunkt mit horizontaler Tangente und positiver Krümmung (=Linkskrümmung) vor. Der Punkte $T = (1{,}59 \mid f(1{,}59))$ ist also ein Tiefpunkt dieses Funktionsgraphen. Für eine Grundkantenlänge von 1,59 dm ist daher der Materialverbrauch für diesen oben offenen, quaderförmigen Behälter mit einem Volumen von $2\,\text{dm}^3$ minimal.

(d) **Lösungserwartung:**

Beträgt die Grundkantenlänge $a_1 = 0{,}86\,\text{dm}$ oder $a_2 = 2{,}64\,\text{dm}$, so ergibt sich der zugehörige Materialverbrauch von $10\,\text{dm}^2$.

$f'(0{,}86) < 0$ (negative momentane Änderungsrate) $\Rightarrow$ Eine geringfügige Vergrößerung der Grundkantenlänge bringt eine Verkleinerung es Materialverbrauchs mit sich.

$f'(2{,}64) > 0$ (positive momentane Änderungsrate) $\Rightarrow$ Eine geringfügige Vergrößerung der Grundkantenlänge bringt auch eine Vergrößerung des Materialverbrauchs mit sich.

1152 - K7 - FA 1.7, AG 4.1, AN 3.3, FA 1.4, FA 1.5, FA 4.3 - Steinwurf - Dimensionen Mathematik 7 Schularbeiten Trainer

151. Die Funktion h beschreibt die Höhe eines geworfenen Steins in Abhängigkeit von der waagrechten Entfernung des Steins vom Abwurfspunkt $A = (0 \mid y_A)$. Sowohl die waagrechte Entfernung x, als auch die zugehörige, bezüglich des Bodens (=x-Achse) gemessene Höhe $h(x)$ werden in Mter angegeben. ____/8

Für h ist eine geeignete Modellfunktion zu ermitteln, dazu soll unter den anschließend angeführten Funktionen die geeignetste ausgewählt werden.

$h_1(x) = -\frac{1}{32}x^2 + \frac{1}{2}x + 2$, $h_2(x) = -\frac{1}{16}(x^2 - 20x - 16)$, $h_3(x) = -\frac{1}{30}x^2 + \frac{2}{3}x + 2$

Nachfolgende Bedingungen sind zu berücksichtigen:

(a) Der Abwurfwinkel ist kleiner als 45°.

(b) Die maximale Höhe, die der Stein während des Wurfes erreicht ist größer al 5 m.

Aufgabenstellung:

(a) Begründe anhand der Graphen der drei Funktionen h_1, h_2 und h_3, welche der drei Funktionen sich für deine Modellierung im Sinne der gegebenen Bedingungen am besten eignet. Stelle die Funktionsgraphen in einem Koordinatensystem dar. Achte darauf, die im Sinne der Modellanforderungen als wesentlich anzusehenden Eigenschaften der jeweiligen Funktionsverläufe zutreffend darzustellen.
Kreuze in der untenstehenden Tabelle an, welche Bedingungen die einzelnen Funktionen erfüllen. Gehe im Weiteren von der gewählten Modellfunktion aus.

	(1)	(2)
h_1	x	
h_2		x
h_3	x	x

(b) $\boxed{\text{A}}$ Ermittle den Abwurfwinkel, gib das Ergebnis gerundet auf ganze Grad an. Berechne die maximale Flughöhe des Steins, gib das Ergebnis gerundet auf cm an.

(c) $\boxed{\text{A}}$ Gib an, aus welcher Höhe der Stein abgeworfen wird, und ermittle die Wurfweite. Letztere wird bis zum ersten Aufprall des Steins auf dem Boden gemessen. Runde das Ergebnis für die Wurfweite auf cm.

(d) In der Gleichung der gewählten Modellfunktion wird das Absolutglied, d.h. der konstante Summand, durch den Parameter c ersetzt. Erläutere, wie sich eine Vergrößerung bzw. Verkleinerung von c auf die maximale Wurfhöhe bzw. die Wurfweite auswirkt.

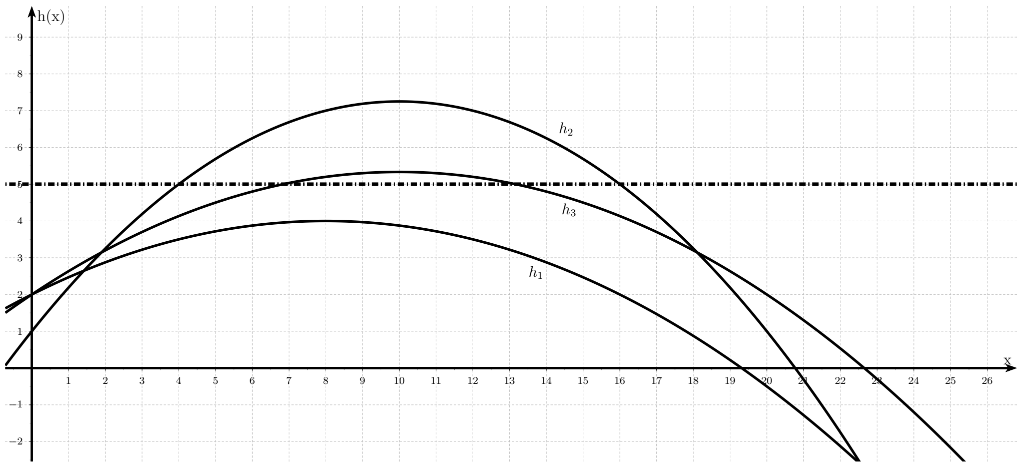
Kann c so gewählt werden, dass die maximale Wurfhöhe größer als 7 m und die Wurfweite kleiner als 24 m ist? Wenn ja, gib einen passenden Wert für c an. Wenn nein, begründe, warum dies nicht möglich ist.

(a) **Lösungserwartung:**

(i) Die Graphen von h_1 und h_3 weisen einen eindeutig kleineren Steigungswinkel im Punkt $(0 \mid 2)$ auf. Der Steigungswinkel von h_2 im Punkt $(0 \mid 1)$ liegt knapp über 45°.

(ii) Die Graphen von h_2 und h_3 schneiden die Gerade $h = 5$ in jeweils zwei Punkten. Somit übertrifft hier der Stein die geforderte Höhe von 5 m.

Wie auch aus der Tabelle ersichtlich: h_3 eignet sich am besten.



(b) **Lösungserwartung:**

Der Abwurfwinkel α, jener Winkel, den die Tangente an den Funktionsgraphen im Abwurfpunkt mit der Horizontalen einschließt, kann mit $h'(x) = k = \tan(\alpha)$ berechnet werden

$\tan(\alpha) = \frac{2}{3} \Rightarrow \alpha = 33{,}69° \approx 34°$

Die maximale Wurfhöhe wird an jener Stelle erreicht, an der die Tangentensteigung bzw. die 1. Ableitung der Funktion den Wert 0 annimmt.

An dieser Stelle $x = 10$ beträgt die Wurfhöhe $h(10) = 5{,}33\,\text{m}$.

(c) **Lösungserwartung:**

Die Abwurfhöhe ist der Funktionswert an der Stelle 0 und beträgt $h(0) = 2\,\text{m}$.

Die Wurfweite wird durch $h(x) = 0$ festgelegt und liegt bei $22{,}65\,\text{m}$.

(d) **Lösungserwartung:**

$h(x) = -\frac{1}{30}x^2 + \frac{2}{3}x + c$

Eine Vergrößerung (Verkleinerung) von c bewirkt eine Verschiebung des Graphen nach oben (unten), was eine Vergrößerung (Verkleinerung) der maximalen Wurfhöhe und Wurfweite nach sich zieht. Durch den Einsatz eines Schiebereglers für c kann dieser Sachverhalt veranschaulicht werden.

Da der Parameter $c = h(0)$ keine Auswirkung auf die 1. Ableitungsfunktion hat, wird die maximale Wurfhöhe immer an der Stelle $x = 10$ erreicht. Sie liegt, da der Abwurfwinkel gleich bleibt, $3{,}33\,\text{m}$ über der Abwurfhöhe c.

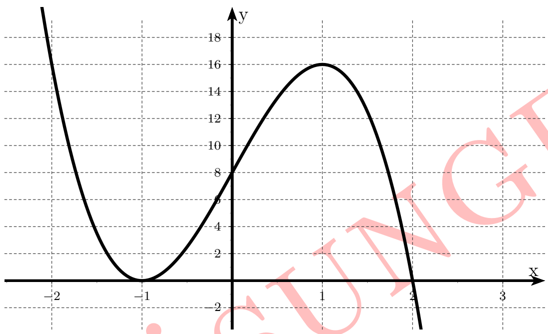
Soll die maximale Wurfhöhe größer als $7\,\text{m}$ sein, muss c also einen Wert von mindestens 3,67 annehmen. Für diesen Parameter c beträgt die Wurfweite

24,49 m.

Eine Verkleinerung von c würde zwar die Wurfweite verringern, die geforderte Maximalhöhe von 7 m bliebe jedoch unerreicht.

1153 - K8 - IR, DR - AN 3.3, FA 4.4, AN 4.3, AN 4.2 - Polynomfunktion dritten Grades - thema mathematik 8 - Schularbeiten

152. Eine Polynomfunktion f dritten Grades ist durch ihren Term: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $y = -4x^3 + 12x + 8$ und abschnittsweise durch ihren Graphen gegeben. ____/6



Aufgabenstellung:

(a) Argumentiere und beweise allgemein, warum jede Funktion dritten Grades genau einen Wendepunkt besitzt.

$\boxed{\text{A}}$ Berechne diesen Wendepunkt für die Funktion f.

(b) Erläutere, warum diese Funktion f nur zwei verschiedene Nullstellen bei $x = -1$ und bei $x = 2$ hat, obwohl sie ein Polynom 3. Grades ist.

Gib den Funktionsterm in faktorisierter Form an.

(c) Gib eine Stammfunktion F von f an.

Berechne den Flächeninhalt, den der Graph mit den beiden Koordinatenachsen im 1. Quadranten einschließt.

(a) **Lösungserwartung:**

Die 2. Ableitung ist eine lineare Funktion mit Steigung $\neq 0$, diese hat genau eine Nullstelle.

$W(0 \mid 8)$

(b) **Lösungserwartung:**

Bei $x = -1$ handelt es sich um eine doppelte Nullstelle, der Graph berührt die x-Achse.

$f(x) = -4 \cdot (x+1)^2 \cdot (x-2)$

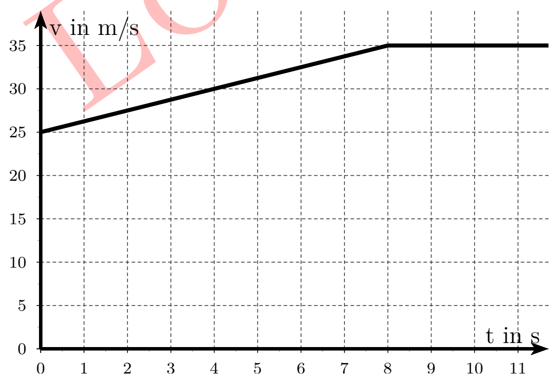
(c) **Lösungserwartung:**

$F(x) = -x^4 + 6x^2 + 8x$ (optional + eine Konstante $C \in \mathbb{R}$)

Flächeninhalt: $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 24\,\mathrm{E}^2$

1154 - FA 2.2, FA 2.1, AN 4.2, AN 4.3, AN 3.2 - Beschleunigung eines Fahrzeuges - thema mathematik 8 - Schularbeiten

153. Am Ende eines Baustellenbereichs beschleunigt ein Fahrzeug 8 Sekunden lang und fährt anschließend mit konstanter Geschwindigkeit weiter. Der Bewegungsablauf des Fahrzeuges wird modellhaft durch folgendes Diagramm beschrieben: ____/4

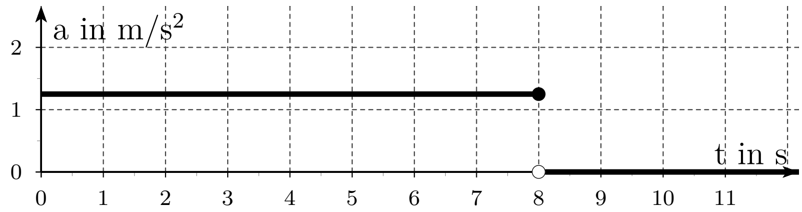


Aufgabenstellung:

(a) Argumentiere, warum die Geschwindigkeit v des Fahrzeugs während der Beschleunigungsphase durch den Term $v(t) = 25 + 1{,}25t$ gegeben ist.

$\boxed{\text{A}}$ Berechne, welchen Weg das Fahrzeug während der Beschleunigungsphase zurücklegt.

(b) Das Diagramm zeigt die Beschleunigung a des Fahrzeuges in Abhängigkeit von der Zeit t:



Begründe:

- Dieses Diagramm ist mathematisch korrekt.
- Dieses Diagramm stellt aber den Bewegungsablauf des Fahrzeuges nicht zu jedem Zeitpunkt realistisch dar.

(a) **Lösungserwartung:**

In der Beschleunigungsphase ist v eine lineare Funktion mit $v(t) = k \cdot t + d$.
Dabei ist $d = v(0) = 25$ und $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{35-25}{8} = 1{,}25$.
Länge der Beschleunigungsstrecke: $\int_0^8 v(t)\,\mathrm{d}t = 240\,\mathrm{m}$

(b) **Lösungserwartung:**

Die Beschleunigung a ist die 1. Ableitungs der Geschwindigkeit v. Diese Ableitung ist für die ersten 8 Sekunden konstant $1{,}25\,\mathrm{m/s^2}$ und anschließend null.

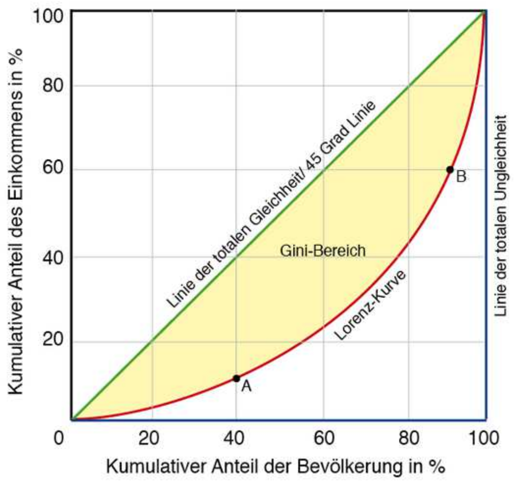
Zum Zeitpunkt $t = 8$ fällt die Beschleunigung sprunghaft von $1{,}25\ \mathrm{m/s^2}$ auf null. Das ist unrealistisch.

1155 - FA 1.4, AN 4.3 - Gini-Koeffizient - thema mathematik 8 - Schularbeiten

154. Der Gini-Koeffizient ist ein weit verbreitetes Maß zur Quantifizierung der relativen Konzentration einer Einkommensverteilung. Er ist benannt nach dem italienischen Statistiker Corrado Gini (1884-1965). Im Falle der Gleichverteilung der Einkommen bezieht jede Person exakt das gleiche Einkommen. In diesem Fall nimmt der Gini-Koeffizient den Wert null an. Im Extremfall einer maximal ungleichen Einkommensverteilung bezieht eine einzige Person das komplette Einkommen der betrachteten Grundgesamtheit. In diesem Fall nimmt der Gini-Koeffizient den Wert eins an. ____/4

Allgemein können wir den Gini-Koeffizienten mit der Lorenzkurve veranschaulichen, die 1905 vom amerikanischen Statistiker und Ökonom Max O. Lorenz (1876-1959) entwickelt wurde.

In den untenstehenden Grafik sind zwei Punkte A und B auf der Lorenz-Kurve dargestellt. Die Koordinaten von A beschreiben: Die ärmsten 40 % der Bevölkerung besitzen 10 % des gesamten Einkommens. Die Koordinaten von B beschreiben: Die ärmsten 90 % der Bevölkerung besitzen 60 % des gesamten Einkommens. Daraus lässt sich auch ablesen, dass die restlichen 40 % des gesamten Einkommens auf die reichsten 10 % entfallen.

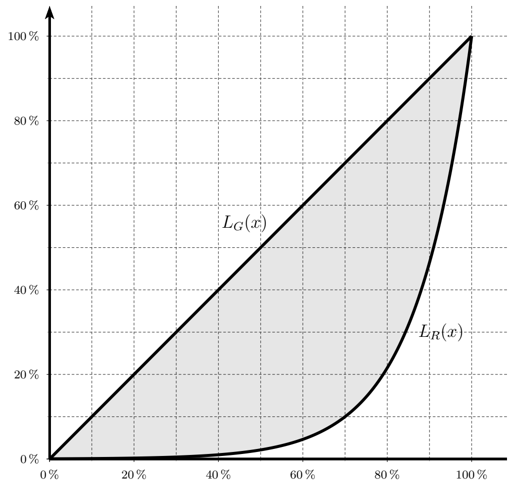


(Quelle: https://www.lai.fu-berlin.de/e-learning/projekte/vwl_basiswissen/Umverteilung/Gini_Koeffizient/index.html)

Der Gini-Bereich ist die Fläche zwischen der 45 Grad Linie und der Lorenzkurve. Die Gini-Koeffizient wird berechnet als der Anteil des Flächeninhaltes des Gini-Bereichs am Flächeninhalt unterhalb der 45 Grad Linie.

Aufgabenstellung:

(a) Die nachfolgende Abbildung stellt einen möglichen Verlauf einer Lorenzkurve dar:



Interpretiere den Funktionswert $L_R(80)$ im gegebenen Zusammenhang. Begründe an Hand des Kontextes, warum $L_R(90)$ nicht kleiner sein kann als $L_R(80)$.

(b) Gib einen Term zur allgemeinen Berechnung des Gini-Koeffizienten an. Verwende dazu die beiden Funktionen L_G und L_R aus der Abbildung.

Berechne den Wert des Gini-Koeffizienten, wenn der Verlauf der Funktion L_R einer Viertelkreislinie entspricht.

(a) **Lösungserwartung:**

80 % der Bevölkerung besitzen nur rund 22 % (Toleranz 21 – 24 %) des gesamten Einkommensvolumens. Die restlichen 78 % des Einkommensvolumens entfallen auf die reichsten 20 % der Bevölkerung.

Das Gesamteinkommen der ärmsten 90 % der Bevölkerung kann nicht geringer sein als das Gesamteinkommen der ärmsten 80 %, da diese in den 90 % enthalten sind.

(b) **Lösungserwartung:**

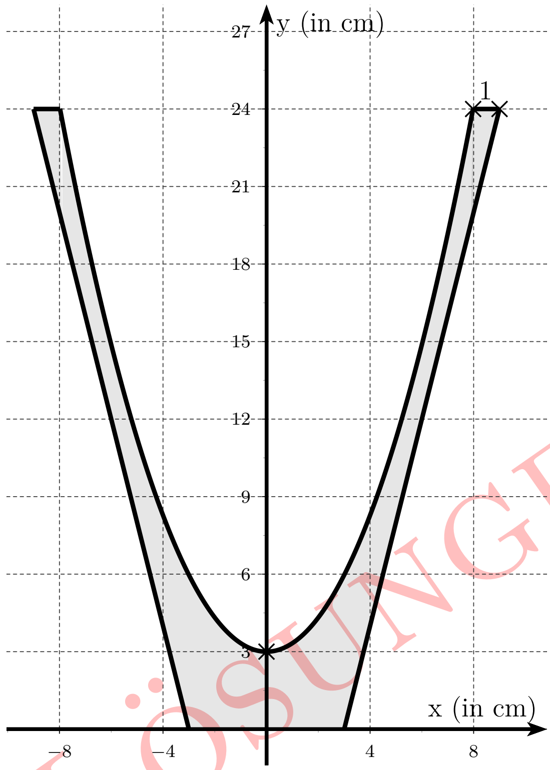
Folgender oder ein äquivalenter Term:

$$\text{Gini} = \frac{\int_0^{100} (L_G(x) - L_R(x))\,dx}{\int_0^{100} L_G(x)\,dx}$$

$\text{Gini} = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) : \left(\frac{1}{2}\right) \approx 0{,}57$ oder $\text{Gini} = \left(\frac{100^2\cdot\pi}{4} - \frac{100^2}{2}\right) : \left(\frac{100^2}{2}\right) \approx 0{,}57$

1156 - FA 4.3, AN 4.3 - Vase - thema mathematik 8 - Schularbeiten

155. Die Abbildung zeigt den Querschnitt einer Vase, die ca. 2l Wasser fasst. Sie besteht aus Glas mit einer Dichte von 2,5 g/cm^3. ____/1



Die Form der Vase entsteht durch Rotation einer linearen Funktion f mit $f(x) = 4x - 12$ und einer Parabel p mit der Gleichung $p(x) = a \cdot x^2 + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ um die y-Achse.

Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Gib die Gleichung der Parabel an.

Das Wasser in der Vase steht bis 4 cm unter dem Rand. Gib einen Term für das Volumen V dieser Wassermenge an.

(b) Gesucht ist die Masse m der leeren Vase. Erläutere, wie diese Masse m berechnet werden kann und berechne sie.

(a) **Lösungserwartung:**

$p(x) = \frac{21}{64} \cdot x^2 + 3$

Volumen: $V = \pi \cdot \int_3^{20} \frac{64}{21} \cdot (y - 3)\,\mathrm{d}y$ oder ein äquivalenter Term

(b) **Lösungserwartung:**

Zuerst V berechnen: $V = \pi \cdot \int_0^{24} \left(\frac{y}{4}+3\right)^2 \mathrm{d}y - \pi \cdot \int_0^{24} \frac{64}{21} \cdot (y-3)\,\mathrm{d}y \approx 829{,}4\,\mathrm{cm}^3$

Dann mit der Dichte multiplizieren: $m = V \cdot \rho \approx 829{,}4 \cdot 2{,}5\,\mathrm{g} = 2073\,\mathrm{g} \approx 2\,\mathrm{kg}$

1157 - K8 - SWS - WS 3.3, WS-L 3.5 - Zuckerpackungen - thema mathematik 8 - Schularbeiten

156. Die Füllmenge X von Zuckerpackungen ist produktionsbedingt normalverteilt mit einem Erwartungswert $\mu = 1005\,\mathrm{g}$ und einer Standardabweichung von $\sigma = 10\,\mathrm{g}$. ____/4

Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Begründe, warum die Zufallsvariable X sicher nicht binomialverteilt ist!

Erkläre, warum die folgenden beiden Aussagen gleich wahrscheinlich sind!

- Aussage 1: Eine Zuckerpackung enthält mindestens 1020 g Zucker.
- Aussage 2: Eine Zuckerpackung enthält höchstens 990 g Zucker.

(b) Erläutere mit Hilfe einer Skizze der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion f der Füllmenge der Zuckerpackungen, warum gelten muss: $\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,\mathrm{d}u = 1$

Interpretiere im gegebenen Kontext die Unbekannte x in der Ungleichung: $\int_x^{\infty} f(u)\,\mathrm{d}u \geq 0{,}98$

(a) **Lösungserwartung:**

X ist eine stetige Zufallsvariable, weil die Füllmenge ein stetiges Merkmal (reelle Zahl) ist. Eine binomialverteilte Zufallsvariable ist aber eine Anzahl (natürliche Zahl).

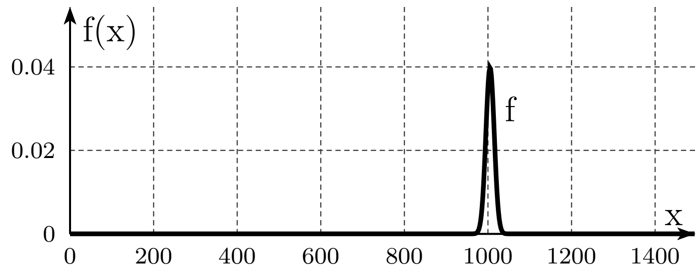
Wegen der Symmetrie der Normalverteilung, entweder aufzeichnen oder rechnen:

$P(\text{Aussage 1}) = \int_{1,5}^{\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 1 - \Phi(1{,}5)$

$P(\text{Aussage 2}) = \int_{-\infty}^{-1,5} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \Phi(-1{,}5) = 1 - \Phi(1{,}5)$

(b) **Lösungserwartung:**

Skizze:



Das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,\mathrm{d}u = 1$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass eine Zuckerpackung eine Masse zwischen minus und plus unendlich hat. Diese Wahrscheinlichkeit ist klarerweise 100 %.

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zuckerpackung eine Masse von mindestens x Gramm hat, beträgt zumindestens 98 %.

1158 - K8 - SWS - WS-L 3.5, WS 3.4 - Metallbolzen - thema mathematik 8 - Schularbeiten

157. Eine stetige Zufallsvariable X heißt normalverteilt mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass X einen Wert zwischen x_1 und x_2 annimmt, folgendermaßen bestimmt ist, wobei $f(x)$ als Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion bezeichnet wird: ____/8

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ mit } f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Eine Firma produziert Metallbolzen, deren Durchmesser annähernd normalverteilt sind. Ein Metallbolzen kann nur verkauft werden, wenn sein Durchmesser zwischen 80,7 mm und 81,3 mm liegt.

Aufgabenstellung:

(a) Erfahrungswerte für die Durchmesser der Metallbolzen sind: Erwartungswert $\mu = 81\,\text{mm}$ und Standardabweichung $\sigma = 0{,}2\,\text{mm}$

Berechne, wie viel Prozent der Produktion Ausschuss sind!

$\boxed{\text{A}}$ Ermittle die Wahrscheinlichkeit, dass der Durchmesser eines Bolzens genau 81 mm beträgt!

(b) Der Ausschussanteil soll durch eine neue Maschine auf 8 % gesenkt werden. Der Erwartungswert der neuen Maschine ist unverändert $\mu = 81\,\text{mm}$.

Gib an, welche Standardabweichung diese Maschine höchstens haben darf!

(c) Hersteller C einer neuen Maschine behauptet, dass diese Maschine nur 5 % Ausschuss produziert. Diese Aussage wird durch einen signifikanten Test geprüft. Dazu sollen 400 Metallbolzen untersucht werden. Es wird festgelegt, dass man der Aussage des Herstellers glaubt, wenn maximal 27 Metallbolzen schadhaft sind. Der kritische Bereich ist also $K = \{28, .. 400\}$.

Erkläre genau die Bedeutung des kritischen Bereichs und der Irrtumswahrscheinlichkeit 1. Art im gegebenen Kontext!

(d) Hersteller D einer weiteren Maschine behauptet, dass diese Maschine nur 3 % Ausschuss produziert. Es soll ein rechtsseitiger Test mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit 1. Art von höchsten 1 % für diese Behauptung konstruiert werden. Für diesen Test werden auf der neuen Maschine 500 Metallbolzen produziert und untersucht.

Ermittle den kritischen Bereich.

(a) **Lösungserwartung:**

$P(80{,}7 < X < 81{,}3) \approx 0{,}866 \Rightarrow 13{,}4\,\%$ Ausschuss

$P(X = 81) = 0$

(b) **Lösungserwartung:**

Ansatz der Standardisierung: $\Phi(z) = 0{,}96 \Rightarrow z \approx 1{,}751 = \frac{81{,}3-81}{\sigma} \Rightarrow \sigma \approx 0{,}17$

ohne Standardisierung: $\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{80{,}7}^{81{,}3} e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-81}{\sigma}\right)^2} = 0{,}92 \Rightarrow$ mit CAS nach σ lösen $\Rightarrow \sigma \approx 0{,}17$

(c) **Lösungserwartung:**

Wenn von den 400 Bolzen mehr als 27 Ausschuss sind, glaubt man, dass die neue Maschine mehr als 5 % Ausschuss produziert. Weil der Test signifikant ist, liegt die Wahrscheinlichkeit, dass nur zufällig so viele Bolzen fehlerhaft sind, unter 5 % (=Irrtumswahrscheinlichkeit 1. Art)

(d) **Lösungserwartung:**

X = Anzahl der BOlzen, die Ausschuss sind, X ist binomialverteilt mit $n = 500$, falls die Nullhypothese $H_0 : p = 3\,\%$ stimmt, ist $\mu = 15$ und $\sigma \approx 3{,}81 > 3$, daher ist die Approximation durch eine normalverteilte Zufallsvariable X_{NV} möglich.

$1\,\% \geq P(x \leq X \leq 500) \approx P(x - 0{,}5 < X_{NV} < 500{,}5)$

$\Rightarrow 99\,\% \leq P(X_{NV} < x - 0{,}5)$

$\Phi(z) = 0{,}99 \Rightarrow z \approx 2{,}326 \approx \frac{x-0{,}5-1{,}5}{3{,}81} \Rightarrow x \approx 24{,}4$

$\Rightarrow K = \{25, .. \, 500\}$

(Gilt auch als gelöst, wenn die Stetigkeitskorrektur nicht berücksichtigt wurde.)

1159 - AN 1.4, AN 1.1 - Stickoxide - thema mathematik 8 - Schularbeiten

158. Stickstoffdioxid NO_2 kann die Lungenfunktion beeinträchtigen und Infekte und Entzündungen auslösen. Zudem belastet es die Umwelt durch Versauerung und Ozonbildung. Hauptverursacher sind Dieselautos und LKW. ____/6

Eine EU-Richtlinie erlaubt im Jahresschnitt eine maximale Belastung von NO_2 von 40 Mikrogramm pro Kubikmeter Luft. In Österreich liegt der gesetzliche Höchstwert sogar bei nur 35 Mikrogramm. In der Umgebung von Graz werden entlang der Südautobahn A2 besonders hohe Werte gemessen.

Im ersten Jahr wird an einer Messstelle ein Jahresmittel von 50 Mirkogramm pro m^3 festgestellt, ein Jahr später stellt man durchschnittlich 55 Mikrogramm pro m^3 fest.

Wir bezeichnen die Menge an Stickstoffdioxid in Mikrogramm pro m^3 im Jahr n mit y_n.

Aufgabenstellung:

(a) Beschreibe die Entwicklung der Stickstoffdioxidbelastung an dieser Messstelle durch ein diskretes lineares Modell mit Hilfe einer geeigneten Differenzengleichung!

$\boxed{\text{A}}$ Erläutere, was dieses Modell für die weitere Entwicklung der Stickstoffdioxidbelastung prognostiziert!

(b) Verwende ein diskretes exponentielles Modell, um die Stickstoffdioxidbelastung zu beschreiben. Gib die entsprechende Differenzengleichung an!

Erläutere, was dieses Modell für die jährliche Zunahme der Stickstoffdioxide vorhersagt.

(c) Die Differenzengleichung $y_{n+1} = y_n + 5 - 0{,}08 \cdot y_n$ mit $y_1 = 50$ gibt ein diskretes Modell für die Stickstoffdioxidbelastung y_n in Mikrogramm pro m^3 im Jahre n an.

Interpretiere, wie sich die Stickstoffdioxidbelastung entsprechend diesem Modell von einem Jahr zum nächsten verändert!

Berechne, bei welcher Menge y_n an Stickstoffdioxid die absolute Änderung bis zum nächsten Jahr gleich null ist und interpretiere diesen Wert!

(a) **Lösungserwartung:**

$y_{n+1} = y_n + 5$ mit $y_1 = 50$

Das lineare Modell sagt voraus, dass die Stickstoffdioxidbelastung jedes Jahr um 5 Mikrogramm pro m^3 steigen wird.

(b) **Lösungserwartung:**

$y_{n+1} = 1{,}1 \cdot y_n$ mit $y_1 = 50$

Das exponentielle Modell sagt voraus, dass die Stickstoffdioxidbelastung jedes Jahr um 10 % steigen wird.

(c) **Lösungserwartung:**

Die Stickstoffbelastung steigt jährlich um 5 Mikrogramm pro m^3. Gleichzeitig wird die Stickstoffbelastung jedoch um 8 % des Vorjahreswertes reduziert.

$y_{n+1} - y_n = 5 - 0{,}08 \cdot y_n = 0 \Rightarrow y_n = 62{,}5$

Wenn die Stickstoffdioxidbelastung 62,5 Mikrogramm pro m^3 erreicht, dann bleibt sie konstant.

1160 - K7 - DR - AN 1.3, FA 1.4, AN 3.3 - Wachstum einer Population - die Verhulst Gleichung - thema mathematik 8 - Schularbeiten

159. Die Größe einer Population N (in 1000 Individuen) ändert sich mit der Zeit t (in Jahren ab Beobachtungsbeginn). Ob und wie schnell eine Population mit anfangs N_0 Individuen wächst, hängt unter anderem von Umweltbedingungen oder dem Nahrungsmittelangebot des Lebensraumes ab. ____/6

Schon Mitte des 19. Jahrhunderts beschrieb der Mathematiker Verhulst diese zeitliche Entwicklung einer Populationsgröße. Er stellte die nach ihm benannte Verhulst-Gleichung für die momentane Änderungsrate der Populationsgröße auf:

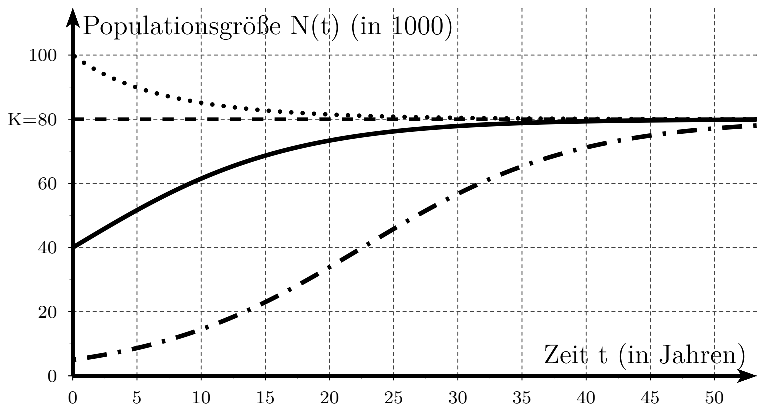
$N'(t) = \frac{r}{K} \cdot N(t) \cdot (K - N(t))$ mit Startwert N_0

Der Wachstumsparameter r und die Konstante K sind positiv und können für die zu beschreibende Population aus statistischen Daten geschätzt werden. Der Parameter K wird als Umweltkapazität bezeichnet. Die Differenz $K - N(t)$ ist der Freiraum zur Zeit t.

Aus der Verhulst-Gleichung kann die Funktion N für die Populationsgröße in Abhängigkeit von der Zeit t berechnet werden:

$$N(t) = N_0 \cdot K \cdot \frac{e^{r \cdot t}}{K + N_0 \cdot (e^{r \cdot t} - 1)}$$

Die folgende Abbildung zeigt für $r = 0{,}12$ sowie $K = 80$ und verschiedene Startwerte mögliche Verläufe der Funktion N:

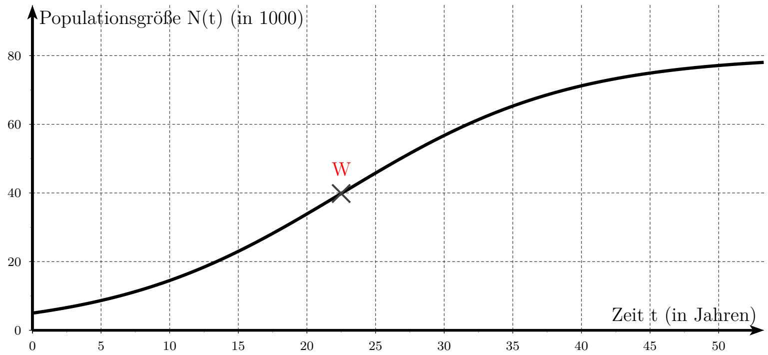


Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Berechne $N'(0)$ für $r = 0{,}12$ sowie $K = 100$ und den Startwert 60.

Interpretiere diesen Wert im Kontext!

(b) Zeichne in der folgenden Abbildung so genau wie möglich die Lage des Wendepunktes der dargestellten Funktion ein!

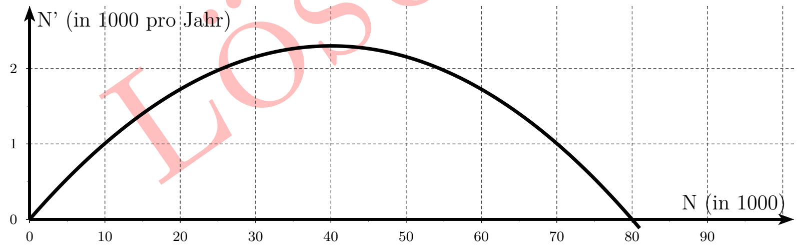


Im Wendepunkt der Funktion N gilt (falls vorhanden):

$\frac{r}{K} \cdot (K \cdot N' - 2 \cdot N \cdot N') = 0$

Berechne mit Hilfe dieser Gleichung die Populationsgröße N im Wendepunkt unter der Voraussetzung, dass zu diesem Zeitpunkt N' ungleich 0 ist.

(c) Die momentane Änderungsrate $N'(t)$ einer Populationsgröße hängt von der Populationsgröße $N(t)$ zum aktuellen Zeitpunkt t ab. Die folgende Abbildung zeigt den Zusammenhang zwischen der momentanen Änderungsrate N' und der Populationsgröße N.



Lese aus dieser Grafik ab: Für welche Populationsgröße (n) nimmt die Anzahl der Individuen weiter zu?

Interpretiere den Monotonieverlauf der dargestellten Funktion im gegebenen Kontext!

(a) **Lösungserwartung:**

$N'(0) = \frac{0{,}12}{100} \cdot 60 \cdot (100 - 60) = 2{,}88$

Zu Beginn des Beobachtungszeitraumes (zum Zeitpunkt $t = 0$) nimmt die Größe der Population um 2880 Individuen pro Jahr zu.

Hinweis: Nur korrekt, wenn die Zunahme der Bevölkerung zum Zeitpunkt $t = 0$ richtig erkannt wurde und die korrekte Einheit (2880 Individuen pro Jahr) angegeben wurde.

(b) **Lösungserwartung:**

Die Aufgabe gilt als gelöst, wenn die 1. Koordinate von W im Intervall $[20; 25]$ liegt.

Berechnung: $N = \frac{K}{2}$

(c) **Lösungserwartung:**

$0 < N(t) < 80\,000$

Die Population wächst für Populationsgrößen unter 40 000 Individuen immer schneller, danach wächst die Population immer langsamer.
Oder eine äquivalente Formulierung, die die Änderung der Wachstumsgeschwindigkeit vor und nach dem Extremum korrekt wiedergibt.

1161 - WS 1.3, WS 1.4, WS 3.3, WS 3.2, WS 3.4, WS-L 3.5 - PKW pro 1000 EinwohnerInnen - thema mathematik 8 - Schularbeiten

160. Unter www.welt-in-zahlen.de werden Länder nach verschiedenen Kriterien miteinander vergleichen. Die unten stehende Tabelle zeigt die Anzahl der PKW pro 1000 EinwohnerInnen für alle Länder der Europäischen Union: ____/6

	PKW pro 1000 Einwohner	
1	Belgien	517,39
2	Bulgarien	337,02
3	Dänemark	410,96
4	Deutschland	573,03
5	Estland	392,66
6	Finnland	472,15
7	Frankreich	499,54
8	Griechenland	440,68
9	Großbritannien	465,06
10	Irland	416,02
11	Italien	605,00
12	Kroatien	352,85
13	Lettland	266,84
14	Litauen	333,81

	PKW pro 1000 Einwohner	
15	Luxemburg	655,43
16	Malta	614,69
17	Niederlande	458,42
18	Österreich	506,78
19	Polen	318,14
20	Portugal	496,89
21	Rumänien	169,57
22	Schweden	513,94
23	Slowakei	253,15
24	Slowenien	465,58
25	Spanien	515,92
26	Tschechische Republik	394,71
27	Ungarn	312,98
28	Zypern	383,78

Europäische Union	473,20

(Daten nach: Welt in Zahlen. In: http://www.welt-in-zahlen.de/laendervergleich.phtml (Stand: 10.11.2014))

Die relative Häufigkeit der PKW in Österreich bezogen auf die Anzahl der EinwohnerInnen kann als Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit p verwendet werden, dass eine zufällig ausgewählte Person aus Österreich zumindest einen PKW besitzt: $p \approx 51\,\%$

Aufgabenstellung:

(a) Berechne das arithmetische Mittel der gegebenen Anzahlen der PKW pro 1000 EinwohnerInnen!

Begründe, warum die durchschnittliche Anzahl der PKW pro 1000 EinwohnerInnen in der Europäischen Union sinnvollerweise nicht mit dem von dir berechneten Mittel übereinstimmt.

(b) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 1000 Personen aus Österreich 510 zumindest einen PKW besitzen.

$\boxed{\text{A}}$ Berechne diese Wahrscheinlichkeit!

Begründe, warum für diese Berechnung die Binomialverteilung verwendet werden kann!

(c) Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca $\frac{2}{3}$ liegt die Anzahl der PKW in einer Stichprobe von 1000 ÖsterreicherInnen im Intervall $[495; 525]$. Weise dies rechnerisch nach!

Gib ein entsprechendes Intervall an, in dem die Werte mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 95 % liegen. Runde die Intervallgrenzen auf Zehner.

(a) **Lösungserwartung:**

ca. 433,68

Das berechnete arithmetische Mittel ist nicht sinnvoll, weil es die sehr unterschiedlichen Einwohnerzahlen der EU-Staaten nicht berücksichtigt. Der korrekte Wert 473,20 ist das nach Einwohnerzahlen gewogene Mittel.

(b) **Lösungserwartung:**

Berechnung mit Binomialverteilung (Technologie):
X ... Anzahl der PKW, $P(X = 510) = \binom{1000}{510} \cdot 0{,}51^{510} \cdot 490^{490}$

Berechnung mit Approximation durch Normalverteilung:
$\mu = n \cdot p = 510; \sigma = 15{,}8 \Rightarrow P(X = 510) \approx P(509{,}5 < X_{NV} < 510{,}5) \approx 2{,}52\,\%$

Berechnung mit Hilfe der Bionialverteilung, weil

- es zwei mögliche Ausgänge gibt (mindestens 1 PKW oder kein PKW)
- die Wahrscheinlichkeit p konstant bleibt
- die Zufallvariable diskret ist (= eine Anzahl angibt).

Hinweis: Gilt auch als gelöst, wenn die 3. Eigenschaft (diskrete ZV) fehlt.

(c) **Lösungserwartung:**

$\mu = n \cdot p = 510; \sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p) \Rightarrow \sigma \approx 15{,}8$

1. Möglichkeit - Faustregel:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx P(494{,}2 < X < 525{,}8) \approx P(495 < X < 525) \approx \frac{2}{3}$

2. Möglichkeit - Wahrscheinlichkeit mit Hilfe einer approximierten Normalverteilung berechnen:

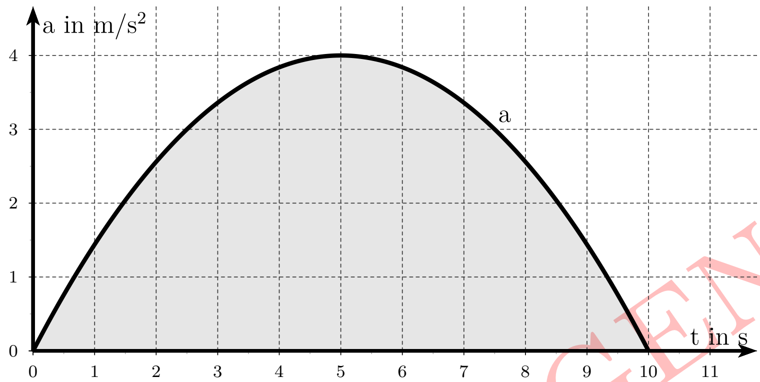
$P(495 < X < 525) \approx 65{,}7\,\% \approx \frac{2}{3}$

95 %–Intervall laut Faustregel: $[480; 540]$

Begründung: $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx P(478{,}4 < X < 541{,}6) \approx 0{,}95$

1162 - AN 4.3, AN 4.1 - Beschleunigung - thema mathematik 8 - Schularbeiten

161. Ein Auto fährt auf der Autobahn mit konstanter Geschwindigkeit $v_0 = 15\,\mathrm{m/s}$ und beschleunigt ab dem Zeitpunkt $t = 0$. Der Beschleunigungsvorgang des Autos in den nächsten 10 s wird durch eine Polynomfunktion zweiten Grades modelliert. Der Graph dieser Beschleunigungsfunktion a ist in folgendem Diagramm dargestellt: ____/4



Aufgabenstellung:

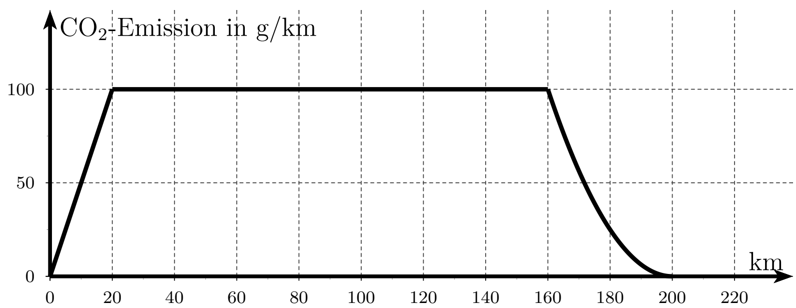
(a) Gib eine Funktionsgleichung für die Beschleunigungsfunktion a an.

$\boxed{\text{A}}$ Es gilt: $\int_0^{10} a(t)\,\mathrm{d}t \approx 26{,}67$

Gib die Bedeutung des Zahlenwertes 26,67 im Kontext an!

(b) Nach einem Bericht des Lebensministeriums (Daten nach: http://www.umweltbundesamt.at) sind im Zeitraum von 1990 bis 2012 die Treibhausgas-Emissionen (THG) des Verkehrs um 54 % gestiegen. Die gesamten THG-Emissionen in Österreich betrugen 2011 rund 83 Millionen Tonnen CO_2, davon entfielen 22 Millionen Tonnen CO_2 auf den Verkehr und davon rund 60 % auf PKW und leichte Nutzfahrzeuge.

Berechne, wie viel Prozent der CO_2-Emissionen Österreichs 2011 auf PKW und leichte Nutzfahrzeuge entfielen!



Die Abbildung zeigt den CO_2-Ausstoß eines PKW in g/km in Abhängigkeit von der Zahl der gefahrenen Kilometer.

Schätze mit Hilfe des Graphen die Gesamtmasse des ausgestoßenen Kohlendioxidgases während der 200 km langen Fahrt ab! Erläutere deine Vorgangsweise!

(a) **Lösungserwartung:**

$a(t) = c \cdot t \cdot (t - 10); a(5) = 4 \Rightarrow a(t) = -0{,}16t^2 + 1{,}6t$

Der Zahlenwert 26,67 gibt die Geschwindigkeitsveränderung während der Beschleunigungsphase an. (Das Auto hat daher eine Endgeschwindigkeit von $v = v_0 + 26{,}67 = 41{,}67\,\mathrm{m/s} \approx 150\,\mathrm{km/h}$.)

(b) **Lösungserwartung:**

$\frac{22}{83} \approx 26{,}5\,\%$, davon $60\,\%$ $\Rightarrow$ ca. $15{,}9\,\%$ der CO_2-Emissionen entfallen auf PKW und leichte Nutzfahrzeuge.

Gesamtmasse entspricht der Fläche unter der Kurve. 2 mögliche Lösungsarten:

- Zerlegung in Teilflächen:
  $10 \cdot 100 + 140 \cdot 100 + 20 \cdot 50 + 20 \cdot \frac{50}{4} = 16\,250\,\mathrm{g} = 16{,}25\,\mathrm{kg}$
- Abzählen der Rechtecke im Koordinatensystem mit je
  $20 \cdot 50 = 1\,000\,\mathrm{g} = 1\,\mathrm{kg} \Rightarrow$ ca. 17 kg

Die Aufgabe gilt als gelöst für $15\,\mathrm{kg} <$ angegebene Masse in kg $< 18\,\mathrm{kg}$ (exakt: $16{,}33\,\mathrm{kg}$)

1163 - AN 3.3 - Ertragsgesetz - thema mathematik 8 - Schularbeiten

162. Ziel jedes Landwirtes ist es auf seinen Flächen einen möglichst hohen Ertrag bei einem ökonomischen Einsatz von Düngemitteln zu erreichen. Neben dem Dünger haben aber auch andere Faktoren wie Wasserversorgung oder die Witterung in der Vegetationsperiode Einfluss auf die Höhe des Ertrages. In der Wirtschaftslehre wird mit dem Ertragsgesetz ein wirtschaftliches Modell formuliert, das die Relation von Einsatz (Input) und Ertrag (Output) beschreibt, wenn ein Faktor ____/4

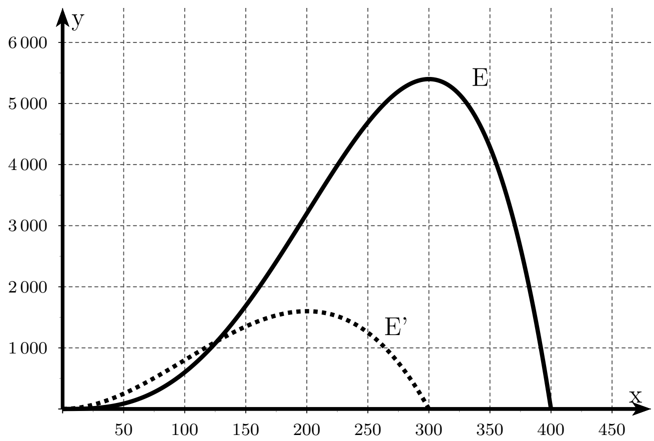
verändert wird und alle anderen gleich bleiben (ceteris paribus). Es wurde ursprünglich von Anne Robert Jacques Turgot im 18. Jhdt. für die Landwirtschaft als Bodenertragsgesetz mit dem Input des Faktors Arbeitseinsatz definiert: „Erhöht man auf dem gleichen Stück Boden stetig den Arbeitseinsatz, so nimmt der Ertrag zunächst schnell zu, dann nur noch langsam, dann bleibt er gleich, und schließlich nimmt er sogar wieder ab.“
(Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Ertragsgesetz#cite_ref-Gabler_1-1 unter der Linzenz CC-BY-SA 3.0 http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/legalcode (Stand: 4.9.2015))

Ein heute wichtige Faktor in der Landwirtschaft ist die Düngermenge. Daher wird untersucht, welchen Einfluss ein kontinuierlich gesteigerter Einsatz von Düngemitteln (bei sonst gleich bleibenden Ressourcen/Bedingungen) auf die Höhe des Ertrages hat. Von degressiven Wachstum spricht man, wenn der Ertragszuwachs je zusätzlich ausgebrachter Düngermenge abnimmt, von progressiven Wachstum, wenn dieser zunimmt.

In einer landwirtschaftlichen Versuchsstation wird auf mehreren Versuchsfeldern gleicher Qualität die Abhängigkeit der Weizeneträge von der zugeführten Düngermenge untersucht und die Daten werden durch eine Funktion E modelliert.

Eine konkrete Modellfunktion lautet $E(x) = \frac{1}{50\,000} \cdot (-0{,}1x^4 + 40x^3)$ mit $x \in [0; 400]$

Das folgende Diagramm zeigt den Ertrag E (in kg/ha) in Abhängigkeit von der Düngermenge x (in kg/ha) und den Verlauf des Grenzertrags E':



Aufgabenstellung:

(a) Das Bodenertragsgesetz mit dem Inputfaktor Dünger lautet: „Erhöht man auf dem gleichen Stück Boden stetig die Düngermenge, so nimmt der Ertrag zunächst schnell zum dann nur noch langsam, dann bleibt er gleich, und schließlich nimmt er sogar wieder ab.“

- Beschreibe, inwiefern sich diese Aussage im Verlauf des Graphen der Funktion E zeigt, indem du die entsprechenden Intervall angibst!
- Berechne den größten Ertrag, der in diesem Modell zu erreichen ist!

(b) Berechne jene Düngermenge, bei der mit dem größten Ertragszuwachs zu rechnen ist! Gib den Wert dieses Ertragszuwachses mit der zugehörigen Einheit an!

(a) **Lösungserwartung:**

Der Ertrag steigt schneller für Düngermenge $x \in]0;200[$, steigt langsamer für Düngermengen $x \in]200;300[$ und sinkt für $x > 300$.
$E'(x) = \frac{1}{50\,000} \cdot (-0{,}4x^3 + 120x^2) = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $x = 300 \Rightarrow E(0) = 0$ und $E(300) = 5\,400 \Rightarrow$ Maximaler Ertrag von 5 400 kg/ha bei einer Düngermenge von 300 kg/ha.

(b) **Lösungserwartung:**

Berechnung des Wendepunktes: $E''(x) = \frac{1}{50\,000} \cdot (-1{,}2x^2 + 240x) = 0 \Rightarrow$ $x = 0$ oder $x = 200$
$E'(0) = 0$ und $E'(200) = 32 \Rightarrow$ Größte Ertragssteigerung von 32 kg/ha bei einer Steigerung der Düngermenge um 1 kg/ha bei einer Düngermenge von 200 kg/ha. Berechnung auch möglich über: $E(201) - E(200) = 32$

1164 - FA 2.5, FA 1.9, FA 5.6, FA 5.5 - Moore’sches Gesetz - thema mathematik 8 - Schularbeiten

163. Der Mitbegründer der Firma Intel, Gordon Moore, stellte 1965 die Vermutung auf, dass sich die Anzahl der Transistoren in einem Speicherchip und damit die Speicherkapazität S regelmäßig verdoppelt. In der Literatur werden 12, 18 oder 24 Monate als Zeitraum für diese Verdopplung genannt (Quelle: Wikipedia). ____/4

Entsprechende Daten werden in Abbildung 1 und der Tabelle dargestellt:

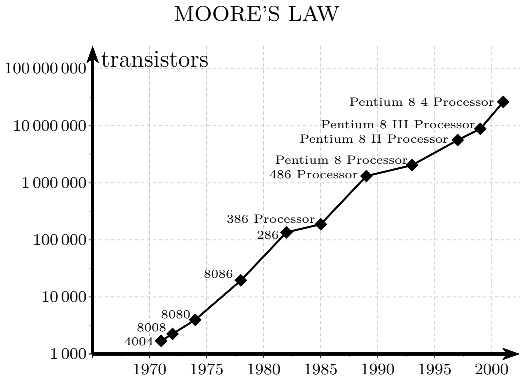


Abbildung 1

Prozessor	Jahr	Transistoren
Intel 4004	1971	2 300
Intel 8008	1972	3 500
Intel 8080	1974	6 000
Intel 8085	1976	6 500
Intel 8086	1978	29 000
Intel 80286	1982	134 000
Intel 80386	1985	275 000
Intel 80486	1989	1 200 000
Intel Pentium	1993	3 100 000
Intel Pentium II	1997	7 500 000
Intel Pentium III	1999	9 500 000
AMD Athlon	1999	22 000 000
Intel Pentium 4	2001	42 000 000
AMD Athlon64 2800	2003	105 900 000
Intel Pentium M 710	2004	140 000 000
AMD Athlon64 X2 4400+	2005	233 200 000
Intel Core 2 Quad Q9 450	2008	820 000 000

Eine einschlägige Zeitschrift beschreibt eine Trendwende im Zusammenhang mit den Grenzen des Moore'schen Gesetzes und titelt „Kleiner ist nicht mehr billiger!“

Sollen auf einem Chip immer mehr kleinere Bauelemente Platz finden, so steigen gleichzeitig die Entwicklungs- und Produktionskosten.

Die Abbildungen 2 und 3 belegen diesen Zusammenhang:

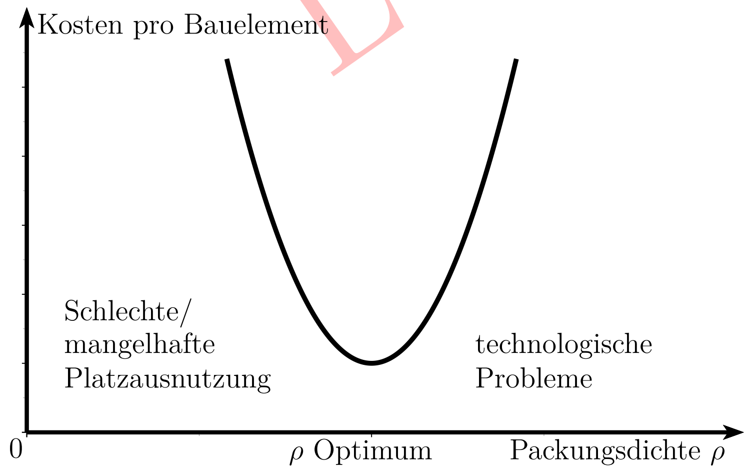


Abbildung 2

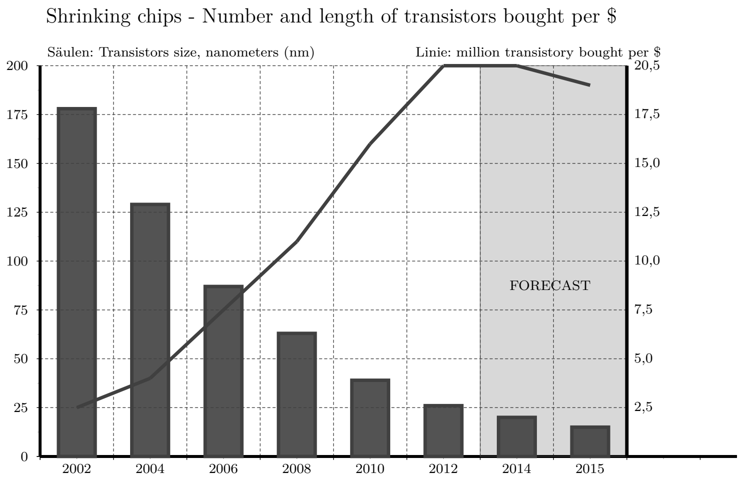


Abbildung 3

Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Abbildung 1 „MOORE'S LAW" zeigt annähernd eine Gerade. Begründe, warum trotzdem nicht einmal annähernd ein linearer Zusammenhang zwischen der Zeit und der Anzahl der Transistoren vorliegt.

Erläutere, welcher Funktionstyp zur Modellierung des Moore'schen Gesetzes geeignet ist und gib ein mathematisches Argument für deine Wahl an!

(b) Berechne unter Zuhilfenahme der Daten der Tabelle aus den Jahren 1971 und 2008 die Verdopplungszeit der Transistoren-Anzahl auf Monate genau!

Erläutere, wie aus Abbildung 3 „Shrinking chips" die Trendwende „Kleiner ist nicht billiger" abgelesen werden kann! Wann tritt diese Trennwende ein?

(a) **Lösungserwartung:**

Eine der folgenden oder andere äquivalente Formulierungen gegen linearen Zusammenhang:

- Die Abstände auf der senkrechten Achse (Anzahl der Transistoren) sind nicht gleich.
- Die Anzahl der Transistoren steigt in 5 Jahren nicht immer um den gleichen Wert.
- Bei linearen Zusammenhängen gibt es keine Verdopplungszeit.

Geeignet ist eine Exponentialfunktion, weil sich die Anzahl der Transistoren in gleichen Zeitabständen verdoppelt (oder jede andere Formulierung, die sich auf die Verdopplungszeit bezieht).

(b) **Lösungserwartung:**

ca. 24 Monate

Säulen: Die Transistorgröße wird mit der Zeit kleiner.

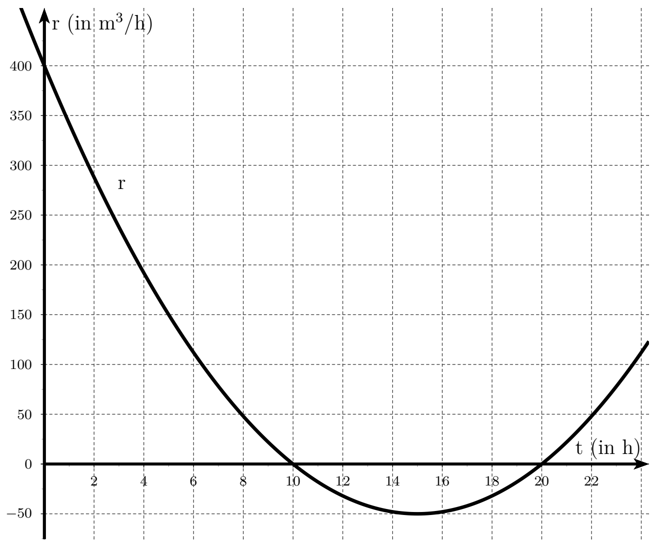
Linie: Die Anzahl der Transistoren, die man für 1 Dollar erhält, steigt mit der Zeit bis 2012. Ab 2012 werden die Transistoren zwei weiterhin kleiner, aber die Anzahl der Transistoren, die man für 1 Dollar kaufen kann, stagniert und geht ab 2015 sogar zurück.

(Oder jede äquivalente Formulierung).

1165 - K8 - IR - FA 1.4, AN 1.3, AN 4.3 - Forellenteich - thema mathematik 8 - Schularbeiten

164. Forellen lieben kalte und sauerstoffreiche Gebirgsbäche, Flüsse und Teiche. In einer fachgerechten Forellenzucht müssen daher Becken mit klarem kaltem Wasser zur Verfügung stehen. Zur Versorgung mit immer frischem Wasser ist jedes Becken mit einem Zufluss und einem Abfluss versehen, deren Durchflussmenge (in m^3/h) mit Ventilen geregelt werden können. ____/6

Angenommen das Becken wird frisch befüllt, d.h. es befindet sich zur Zeit $t = 0$ kein Wasser im Becken. Die Änderungsrate der Wassermenge (in m^3/h), die Differenz aus Zuflussrate und Abflussrate, ist für den Zeitraum $[0; 20]$ durch die Funktion r in folgender Graphik dargestellt:



Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an!

Die Wassermenge im Becken steigt zum Zeitpunkt $t = 0$ um $400\,\mathrm{m}^3/\mathrm{h}$.	☒
Die Wassermenge im Becken nimmt in den ersten 10 h ab.	
Nach 20 h ist kein Wasser im Becken.	
In der Zeit zwischen 10. und 20. Stunde fließt mehr Wasser zu als ab.	
Die Wassermenge im Becken steigt zu Beginn am schnellsten.	☒

Lies aus der Grafik ab: Wann ist im betrachteten Zeitraum die Wassermenge im Becken maximal?

(b) Gib die momentane Änderungsrate der Wassermenge zum Zeitpunkt $t = 8$ an!

Für die Wassermenge V zum Zeitpunkt 8 gilt: $1300\,\mathrm{m}^3 \leq V \leq 2000\,\mathrm{m}^3$ Begründe beide Grenzen mit Hilfe der Grafik!

(c) $\boxed{\text{A}}$ Gib mit Hilfe der Integralrechnung an, wie man die Wassermenge W im Becken unter Kenntnis der Funktion r zum Zeitpunkt $t = 10$ berechnen kann!

Begründe mit der Grafik, warum die Wassermenge im Becken zum Zeitpunkt $t = 20$ größer ist als zum Zeitpunkt $t = 3$!

(a) **Lösungserwartung:**

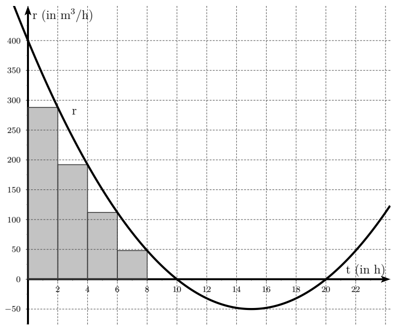
MC siehe oben

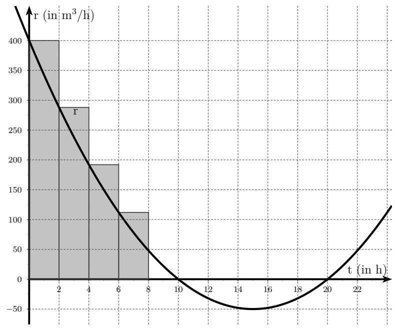
Die Wassermenge im Becken ist zum Zeitpunkt $t = 10\,\mathrm{h}$ maximal.

(b) **Lösungserwartung:**

$r(8) = 50\,\mathrm{m}^3/\mathrm{h}$

1 Kästen im Bild entspricht $100\,\mathrm{m}^3$





Untergrenze: 13 Kästchen $\Rightarrow 1300\,\mathrm{m}^3$

Obergrenze: 20 Kästchen $\Rightarrow 2000\,\mathrm{m}^3$

(c) **Lösungserwartung:**

$W = \int_0^{20} r(t)\,\mathrm{d}t$

Die Fläche unter der Kurve für $3 < t < 10$ ist größer als die Fläche unter der Kurve im Intervall $10 < t < 20$. Daher fließt im Zeitraum $3 < t < 10$ mehr Wasser zu, als im Zeitraum $10 < t < 20$ abfließt.

1166 - K8 - IR - AN 1.3, AN 4.3 - Wasserkraftwerk - thema mathematik 8 - Schularbeiten

165. Zur Unterstützung der Stromversorgung einer Gemeinde wird in der Zeit von 14:00 Uhr bis 20:00 Uhr ein kleines Wasserkraftwerk zugeschaltet. Durch unterschiedlichen Wasserzufluss in m^3 pro Minute kann die Stromabgabe an den Energiebedarf der Gemeinde angepasst werden. ____/6

Der Wasserdurchfluss an einem bestimmten Tag wird in Abhängigkeit von der Tageszeit annähernd durch die Funktion $w\colon [0;360] \to \mathbb{R}$ mit $w(t) = 160\frac{t+300}{3t+300}$ beschrieben. Dabei ist t die Zeit in Minuten ab 14:00 Uhr.

Aufgabenstellung:

(a) Ermittle den Differenzenquotienten $\frac{w(120)-w(0)}{120}$!

Interpretiere diesen Wert im gegebenen Kontext!

(b) Interpretiere das Integral $\int_{t_1}^{t_2} w(t)\,\mathrm{d}t$ im gegebenen Zusammenhang!

Ermittle den entsprechenden Wert für den Zeitraum von 14:00 bis 20:00 Uhr!

(c) Berechne jene Uhrzeit, zu der etwa die Hälfte der Wassermenge durchgeströmt ist, die in der Zeit von 14:00 bis 20:00 Uhr durchgeflossen sein wird!

Ermittle, zu welcher Uhrzeit der momentane Wasserdurchfluss gleich dem durchschnittlichen Wasserdurchfluss im Intervall $[0; 360]$ ist!

(a) **Lösungserwartung:**

$\frac{w(120)-w(0)}{120} = -0{,}48\,\text{m}^3/\text{min}^2$

Die durchschnittliche Abnahme des Wasserdurchflusses pro Minute beträgt ca. $-0{,}48\,\text{m}^3/\text{min}$.

(b) **Lösungserwartung:**

Das Integral berechnet die Durchflussmenge vom Zeitpunkt t_1 bis zum Zeitpunkt t_2.

Von 14:00 bis 20:00 beträgt der Wert ca. $35\,478\,\text{m}^3$.

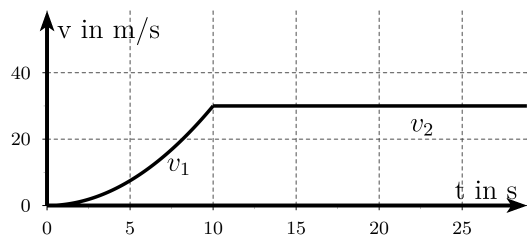
(c) **Lösungserwartung:**

ca. um 16:30 Uhr; $0{,}5 \cdot \int_0^{360} w(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x w(t)\,\mathrm{d}t \Rightarrow x \approx 150 \Rightarrow 16{:}30$

ca. um 16:16 Uhr; $w(t) = \frac{1}{360} \cdot \int_0^{360} w(t)\,\mathrm{d}t \Rightarrow t \approx 136 \Rightarrow 16{:}16$

1167 - AN 1.2, AN 1.3, AN 3.3 - Ein Personenkraftwagen beschleunigt - thema mathematik 8 - Schularbeiten

166. Die Grafik zeigt, wie sich die Geschwindigkeit v (in m/s) eines PKWs mit der Zeit t (in s) ändert. Der PKW beschleunigt in den ersten 10 Sekunden gemäß $v_1(t) = 0{,}3 \cdot t^3$, bis er seine Höchstgeschwindigkeit v_2 erreicht: ____/4



Aufgabenstellung:

(a) Bestimme die mittlere Beschleunigung in diesen ersten 10 Sekunden!

Bestimme die maximale Beschleunigung des PKWs!

(b) Begründe, warum der Kurvenverlauf bei $t = 10$ unrealistisch ist!

Erkläre, warum die maximale Geschwindigkeit des PKWs nicht mit Hilfe der 1. Ableitung berechnet werden kann!

(a) **Lösungserwartung:**

mittlere Beschleunigung: $3\,\mathrm{m/s^2}$

maximale Beschleunigung: $v_1'(10) = 6\,\mathrm{m/s^2}$

(b) **Lösungserwartung:**

Die Beschleunigung wechselt zum Zeitpunkt $t = 10$ sprunghaft ihren Wert.

Die Grafikt zeigt, dass die maximale Geschwindigkeit bei $t = 10$ erreicht wird. Dies ist aber kein lokales Extremum der Funktion v_1.

1168 - K8 - DDG - AN-L 1.5, FA 5.1 - Internet - thema mathematik 8 - Schularbeiten

167. Der Anteil $y(t)$ der Haushalte, die zu einem Zeitpunkt t über einen Internetanschluss verfügen, wird durch die logistische Differentialgleichung $\frac{dy}{dt} = 1{,}2 \cdot y \cdot (1 - y)$ beschrieben (t in Jahren). Zu Beginn ist dieser Anteil $y(0) = 8\,\%$. ____/4

Aufgabenstellung:

(a) Löse die Differentialgleichung!

Skizziere die Lösungsfunktion!

(b) Die allgemeine logistische Differentialgleichung lautet $y'(t) = \lambda \cdot y(t) \cdot (G - y(t))$ mit $0 < y(0) < G$.

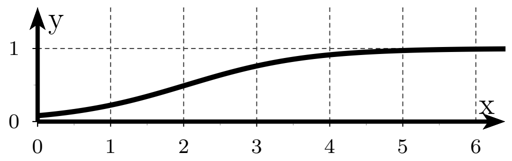
Erläutere, warum die Lösungsfunktion einer allgemeinen logistischen Differentialgleichung streng monoton wachsend ist!

Beschreibe das Verhalten der Funktionswerte für $t \to \infty$!

(a) **Lösungserwartung:**

$\frac{dy}{y\cdot(1-y)} = 1{,}2\,dt \Leftrightarrow \frac{dy}{y} + \frac{dy}{1-y} = 1{,}2\,dt \Leftrightarrow \ln(y) - \ln(1-y) = 1{,}2t + C \Leftrightarrow \frac{y}{1-y} = e^{1{,}2t}\cdot e^C$

Wegen $y(0) = 0{,}08 \Rightarrow e^C = \frac{0{,}08}{0{,}92} = \frac{2}{23} \Rightarrow y = \frac{2}{2+23\cdot e^{-1{,}2t}}$



(b) **Lösungserwartung:**

Wegen $y(t) < G$ ist der Term in der Klammer $(G - y(t))$ immer positiv. Daher ist auch $y'(t)$ immer positiv und deshalb ist $y(t)$ streng monoton wachsend.

$y'(t)$ ist positiv, daher werden die Funktionswerte $y(t)$ größer und die Klammer $(G - y(t))$ wird kleiner. Daher nähern sich die Funktionswerte asymptotisch dem Wert G.

1169 - AG 4.1, WS 1.1, WS 1.3, FA 1.8, FA 2.6 - Windpark 1 - thema mathematik 8 - Schularbeiten

168. Der Windpark Bruck an der Leitha wurde im Jahr 2000 mit Bürgerbeteiligung errichtet und besteht aus fünf Anlagen des Typs *Enercon E66/18.70* mit 65 m Nabenhöhe und 3 Rotorblättern mit einer Länge von $r = 35$ m. Die installierte Gesamtleistung beträgt 9 Megawatt. ____/6

Eine der fünf Windkraftanlagen ist in 60 m Höhe mit einer Aussichtskanzel ausgestattet, die bei einer Führung besichtigt werden kann. Diese Aussichts-Windkraftanlage ist eine von nur zwei derartigen in Österreich und eine von weniger als einem Dutzend weltweit.
(Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Windpark_Bruck_an_der_Leitha unter der Linzenz CC-BY-SA 3.0 http://creativecommons.org/licences/by-sa/3.0/legalcode (Stand 26.8.2015))

Ein wichtiger Kennwert von Windkraftanlagen ist die Schnelllaufzahl λ. Sie gibt das Verhältnis der Geschwindigkeit der Rotorspitzen u zur Windgeschwindigkeit v an:

$$\lambda = \frac{u(r)}{v} = \frac{2\pi \cdot r \cdot f}{v}$$

Dabei ist $u(r)$ die Bahngeschwindigkeit an der Spitze des Rotorblattes und v die Windgeschwindigkeit in m/s. Die Frequenz f gibt die Umdrehungen der Rotorblätter pro Sekunde an. Die maximale Drehzahl (Umdrehungen/Minute) des Rotos beträgt bei den Windrädern in Bruck an der Leitha 22 Umdrehungen pro Minute.

Die Berechnung der Leistung P in Watt für ein Windrad erfolgt nach der Formel $P = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \pi r^2 \cdot v^3$.

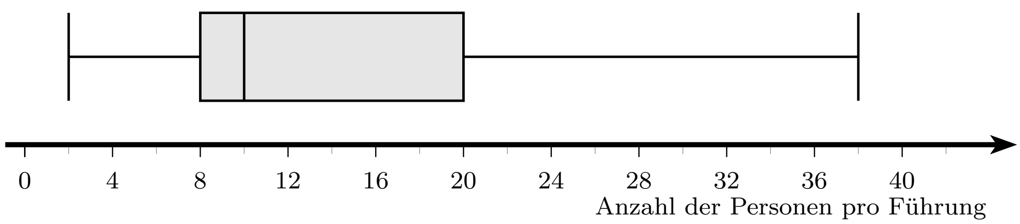
Dabei ist ρ die Dichte der Luft, r der Radius der Rotorfläche und v die Windgeschwindigkeit. Für eine Temperatur von 20 °C beträgt $\rho \approx 1{,}2\,\mathrm{kg/m^3}$.

Aufgabenstellung:

(a) Von der Aussichtskanzel des Windrades sieht man die Spitze des Kirchturms der Stadtpfarrkirche unter einem Tiefenwinkel von 0,67 °. Die Stadtpfarrkirche ist 3,4 km (Luftlinie) entfernt und steht um 33 m tiefer als die Basis des Windrads.

Erstelle anhand einer Skizze eine Rechenanleitung zur Berechnung der Höhe des Kirchturms und berechne die Höhe des Kirchturms.

(b) Das Kastenschaubild visualisiert die Anzahl der Personen pro Führung durch den Windpark aus dem Jahr 2013.



Kreuze die beiden Aussagen an, die aus dem Boxplot gefolgert werden können!

Bei genau einer Führung nahmen 38 Personen teil.	
Bei den meisten Führungen nahmen 10 Personen teil.	
Bei 50 % der Führungen nahmen höchstens 10 Personen teil.	⊠
Im Jahr 2013 gab es genau 38 Führungen.	
Es gab mindestens eine Führung mit nur zwei TeilnehmerInnen.	⊠

Die durchschnittliche Besucheranzahl im Jahr 2013 wird in einer Besucherstatistik mit 14,6 Besuchern pro Führung bei 85 Führungen angegeben. Bei der Berechnung dieses Wertes wurde eine Führung mit 49 Personen vergessen.

Berechne die korrekte durschnittliche Besucheranzahl!

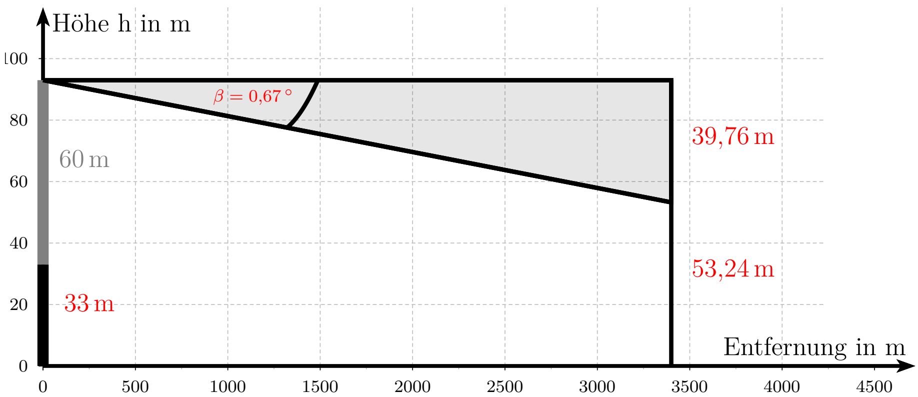
(c) Für Anlagen mit 3 Rotorblättern liegt der optimale Wert für die Schnelllaufzahl zwischen 7 und 8 (Daten nach http://www.physik.uni-greifswald.de). Ermittle passende Drehzahlen für den Rotor, damit eine Windgeschwindigkeit von 35 km/h optimal genutzt werden kann!

Begründe, unter welcher Voraussetzung die Schnelllaufzeit λ zur Frequenz f direkt proportional ist!

(a) **Lösungserwartung:**

$h = 93 - 3400 \cdot \tan(0{,}67\,°) \approx 53{,}24$

Kirchturmhöhe: 53,24 m



(b) **Lösungserwartung:**

MC Lösungen siehe oben

$(14{,}6 \cdot 85 + 49) : 86 = 15$
Die korrekte Besucheranzahl beträgt 15 Personen pro Führung.

(c) **Lösungserwartung:**

ca. 18,5 bis 21,3 Umdrehungen pro Minute:
$35\,\text{km/h} = 35 \cdot \frac{10}{36}\,\text{m/s}$
$f_{\min} = \dfrac{\lambda_{\min} \cdot v}{2\pi \cdot r} = \dfrac{7 \cdot 35 \cdot 10}{2\pi \cdot 35 \cdot 36} \approx 0{,}309\,\text{u/s}$
$\Rightarrow$ ca. 18,6 Umdrehungen pro Minute
$f_{\max} = \dfrac{\lambda_{max} \cdot v}{2\pi \cdot r} = \dfrac{8 \cdot 35 \cdot 10}{2\pi \cdot 35 \cdot 36} \approx 0{,}354\,\text{u/s} \Rightarrow$ ca. 21,2 Umdrehungen pro Minute
$\lambda = \dfrac{2\pi \cdot r \cdot f}{v} \Rightarrow$ für konstantes v gilt dann $\lambda = c \cdot f$
λ ist zu f direkt proportional, wenn die Windgeschwindigkeit v konstant ist.

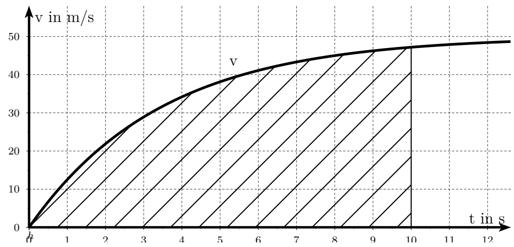
1170 - AN 4.3, AN 3.2, AN 3.3, AN-L 1.5 - Fallschirmspringer - thema mathematik 8 - Schularbeiten

169. Ein Fallschirmspringer springt aus einem Flugzeug. Der Fallschirm ist noch geschlossen. Der Luftwiderstand F_L steigt, je schneller der Fallschirmspringer nach unten fällt. Er stellt eine Kraft dar, die dem Gewicht des Fallschirmspringers entgegenwirkt und seinen Fall bremst. Das Gewicht G wird in Newton N gemessen und ist näherungsweise gleich $G = m \cdot g$, wobei m die Masse des Fallschirmspringers und $g \approx 10\,\text{ms}^{-1}$ die Erdbeschleunigung ist. Den Luftwiderstand berechnet man mit $F_L = 0{,}312 \cdot v^2$, wobei v die Geschwindigkeit des Fallschirmspringers in m/s ist. Für den Fallschirmspringer gilt die Gleichung: ____/6
Masse $\cdot$ Beschleunigung $=$ Gewicht $-$ Luftwiderstand.

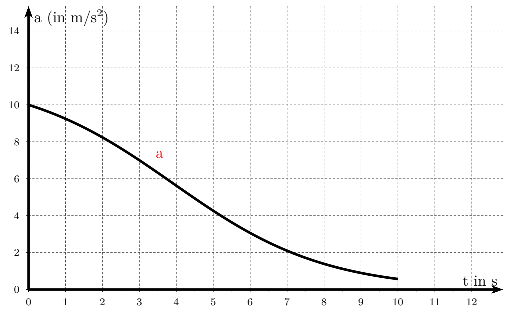
Der Fallschirmspringer hat eine Masse von 78 kg. Alle Geschwindigkeiten und Beschleunigungen werden lotrecht Richtung Erdmittelpunkt gemessen.

Aufgabenstellung:

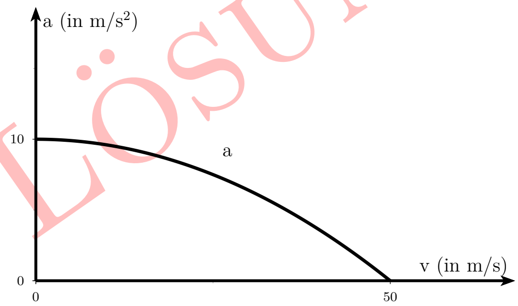
(a) Der Graph zeigt den Verlauf der Geschwindigkeitsfunktion v für eine Zeitdauer von 12 Sekunden. Interpretiere den schraffierten Flächeninhalt im gegebenen Kontext!



Skizziere im Diagramm den qualitativen Verlauf der Beschleunigungsfunktion a des Fallschirmspringers für eine Zeitdauer von 10 Sekunden!



(b) Die Abbildung zeigt die Beschleunigung a des Fallschirmspringers in Abhängigkeit von seiner Geschwindigkeit v. Interpretiere den Verlauf der Funktion $a(v)$ im gegebenen Kontext!



Begründe, dass mit dem bestimmten Integral $\int_0^{50} a(v)\,\mathrm{d}v$ keine Geschwindigkeit des Fallschirmspringers berechnet werden kann!

(c) Argumentiere, dass für die Geschwindigkeitsfunktion v des Fallschirmspringers folgende Differentialgleichung gilt: $78\frac{dv}{dt} = 780 - 0{,}312 \cdot v^2$

Argumentiere mit Hilfe dieser Gleichung, dass die maximale Geschwindigkeit des Fallschirmspringers $50\,\mathrm{m/s}$ beträgt!

(a) **Lösungserwartung:**

Der Flächeninhalt ist der in den ersten 10 Sekunden gefallene Weg.

Beispiel für eine Skizze: siehe oben!

In der Skizze muss korrekt sein:

- $a(0) = 10$
- a streng monoton fallend
- a nähert sich immer mehr 0

(b) **Lösungserwartung:**

Beim Absprung ist die Beschleunigung mit $10\,\mathrm{m/s^2}$ maximal. Mit zunehmender Geschwindigkeit nimmt die Beschleunigung immer mehr ab. Bei $v = 50\,\mathrm{m/s}$ ist die Beschleunigung null. Das ist daher die maximale Geschwindigkeit des Fallschirmspringers.
Allgemein ist das bestimmte Integral $\int_0^t a(t)\,\mathrm{d}t$ die Geschwindigkeitszunahme in den ersten t Sekunden. Im Integral $\int_0^{50} a(v)\,\mathrm{d}v$ steht aber die Funktion $a(v)$ und nicht $a(t)$.

(c) **Lösungserwartung:**

Masse · Beschleunigung = Gewicht − Luftwiderstand, wobei Masse $m = 78$, Beschleunigung $a = \frac{dv}{dt}$, Gewicht $G = 78 \cdot 10 = 780$ und Luftwiderstand $F_L = 0{,}312 \cdot v^2$
Die maximale Geschwindigkeit bedeutet, dass die Beschleunigung null ist. Daher muss die rechte Seite der Gleichung null sein: $0 = 780 - 0{,}312 \cdot v^2 \Rightarrow v^2 = 780 : 0{,}312 = 2\,500 \Rightarrow v = 50$

1171 - K8 - DDG - AN 1.3, FA 5.2, FA 5.3, FA 5.6 - Baldrian - thema mathematik 8 - Schularbeiten

170. Echter Baldrian ist eine ausdauernde Pflanze, die bis zu 2 Meter hoch werden kann. Die Baldrianwurzel ist eines der meist genutzten pflanzlichen Beruhigungsmittel. Bei allen Zustände von Nervosität, Schlaflosigkeit und vielen psychosomatisch bedingten Krankheiten kann Baldrian als Tee, Tinktur oder Pulver eingesetzt werden. Baldrian wird häufig mit anderen Arzneipflanzen wie Melisse, Hopfen oder Weißdorn kombiniert, da sich so gegenseitig verstärkende Effekte ergeben können. ____/10

Das Höhenwachstum von Pflanzen wird üblicherweise durch ein logistisches Modell beschrieben. Es verläuft in der Anfangsphase näherungsweise exponentiell, die Wachstumsgeschwindigkeit wird dabei immer größer und ist annähernd proportional zur Größe der Pflanze. Nach dem Erreichen der maximalen Wachstumsgeschwindigkeit nimmt diese wieder ab und nähert sich dem Wert null. Das Wachstum der Pflanze ist daher durch eine maximale Höhe H begrenzt.

Die Höhe h der Pflanze (in m) ist eine Funktion der Zeit t (in Wochen ab Beobachtungsbeginn) und gehorcht der allgemeinen logistischen Differentialgleichung $h'(t) = c \cdot h(t) \cdot (H - h(t))$. Die Konstante $c > 0$ ist hier ein Wachstumsfaktor.

Die Höhe einer konkreten Baldrianpflanze wird wöchentlich gemessen. Die folgende Tabelle enthält einige Messwerte:

Zeit	0	2	4	6	8	10	12	20
Höhe	0,20	0,40	0,71	1,10	1,46	1,72	1,86	1,99

Das Wachstum dieser Pfalnze kann durch die Funktion h mit $h(t) = \frac{2}{1+9\cdot e^{-0,4t}}$ beschrieben werden.

Aufgabenstellung:

(a) Berechne den Differenzenquotienten zwischen der sechsten und zehnten Woche!

Interpretiere diesen Wert im gegebenen Kontext!

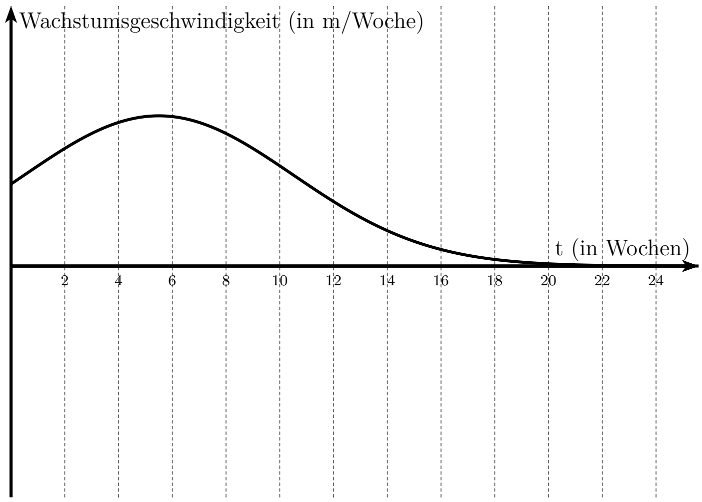
(b) Weise rechnerisch nach, dass die Baldrianpflanze eine Höhe von maximal 2 Meter erreichen kann!

Zeige, dass die Funktion h eine Lösung der logistischen Differentialgleichung für $H = 2$ und $c = 0{,}2$ ist!

(c) Gib eine Exponentialfunktion f an, die das Pflanzenwachstum in der Anfangsphase näherungsweise beschreibt. Verwende dazu die Messwerte zu Beginn und nach zwei Wochen.

Begründe mit Hilfe der gegebenen Messdaten, dass das Wachstum der Pflanze im gesamten Beobachtungszeitraum nicht einmal annährend exponentiell verläuft!

(d) Skizziere den Verlauf der Wachstumsgeschwindigkeit der beobachteten Pflanze im gesamten Beobachtungszeitraum im gegeben Koordinatensystem!



Begründe unter Zuhilfenahme des Kontextes, warum der Graph dieser Funktion nicht durch den Koordinatenursprung verläuft!

(e) Zeige, dass die allgemein Form der logistischen Differentialgleichung in der Form $\frac{h'}{h} + \frac{h'}{H-h} = H \cdot c$ geschrieben werden kann!
Begründe mit Hilfe der allgemeinen Form der logistischen Differentialgleichung:
Die Pflanze wächst streng monoton zu jedem Zeitpunkt t, in dem $0 < h(t) < H$ ist.

(a) **Lösungserwartung:**

$\frac{1{,}72-1{,}10}{4} = 0{,}155\,\text{m/Woche}$
Die Pflanze wächst zwischen sechster und zehnter Woche im Mittel 155 mm pro Woche.

(b) **Lösungserwartung:**

$\lim\limits_{t\to\infty} h(t) = \dfrac{2}{1+9\cdot e^{-0{,}4t}} = 2$, weil $e^{-0{,}4t} \to 0$ für $t \to \infty$
Einerseits gilt $h'(t) = \frac{7{,}2\cdot e^{-0{,}4t}}{(1+9\cdot e^{-0{,}4t})^2}$, andererseits
$0{,}2 \cdot h(t) \cdot (2 - h(t)) = \frac{0{,}4}{1+9\cdot 3^{-0{,}4t}} \cdot \frac{2+18\cdot e^{-0{,}4t}-2}{1+9\cdot e^{-0{,}4t}}$

(c) **Lösungserwartung:**

$f(t) = 0{,}2 \cdot a^t \Rightarrow 0{,}4 = 0{,}2 \cdot a^2 \Rightarrow a = \sqrt{2} \Rightarrow f(t) = 0{,}2 \cdot 2^{\frac{t}{2}}$ oder $f(t) = 0{,}2 \cdot \sqrt{2}^t$

Bei exponentiellen Wachstum müsste die Steigung laufend größer werden.
Oder: Die Wachstumsgeschwindigkeit der Pflanze müsste im gesamten Beobachtungszeitraum zunahmen.
Oder: Berechne beispielsweise $f(20) = 0{,}2 \cdot 2^{10} = 204{,}8$; d.h. die Pflanze wäre am Ende des Beobachtungszeitraums über 200 m hoch.

(d) **Lösungserwartung:**

Die Skizze muss folgende Anforderungen erfüllen:

- streng monoton wachsend bis zu einem globalen Maximum
- das globale Maximum liegt im Intervall $[4; 8]$
- rechts vom Maximum streng monoton fallend
- für $t \to \infty$ asymptotisch gegen null

Für ein Beispiel siehe Grafik oben!

Die Funktion verläuft nicht durch den Ursprung, da die Wachstumsgeschwindigkeit der Pflanze zu Beobachtungsbeginn nicht null ist.

(e) **Lösungserwartung:**

$\frac{h'}{h} + \frac{h'}{H-h} = H \cdot c \Leftrightarrow \frac{h' \cdot (H-h) + h' \cdot h}{h \cdot (H-h)} = H \cdot c \Leftrightarrow \frac{h' \cdot H}{h \cdot (H-h)} = H \cdot c \Leftrightarrow h' = c \cdot h \cdot (H-h)$
Für $0 < h(t) < H$ ist der Term in der Klammer $H - h$ positiv und daher ist h' positiv $\Leftrightarrow h(t)$ ist streng monoton wachsend.

1172 - WS 4.1 - Ernäherungsgewohnheiten - thema mathematik 8 - Schularbeiten

171. Eine Tageszeitung beschäftigt sich mit den Ernäherungsgewohnheiten der Bevölkerung. Dazu soll der Anteil p jener Personen in der Bevölkerung geschätzt werden, die an mindestens einem Tag der Woche vegetarisch essen. ____/4

Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der Personen in einer Stichprobe, die an mindestens einem Tag der Woche vegetarisch essen. Diese Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit den Parametern n und p. Mit einer bestimmten Sicherheit γ liefert eine solche Stichprobe ein Konfidenzintervall, in dem der unbekannte Parameter p liegt.

Für die Breite 2ϵ eines solchen Konfidenzintervalls gilt näherungsweise die Formel $\epsilon = z \cdot \sqrt{\frac{p_0 \cdot (1-p_0)}{n}}$. Dabei sind p_0 der relative Anteil der Personen in der

Stichprobe, die an mindestens einem Tag der Woche vegetarisch essen und z ein von der gewählten Sicherheit γ abhängiger Wert. Dieser Wert z kann auf zwei Arten berechnet werden.

Methode 1: $z = \frac{x^* - \mu}{\sigma}$ mit $P(X < x^*) = \frac{1}{2} + \frac{\gamma}{2}$

Methode 2: mit Hilfe der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung $z = \Phi^{-1}\left(\frac{1}{2} + \frac{\gamma}{2}\right)$

Aufgabenstellung:

(a) Im Auftrag der Zeitung werden 150 Personen nach ihren Ernäherungsgewohnheiten befragt. 50 Personen geben an, dass sie an mindestens einem Tag in der Woche vegetarisch essen. Die Zeitung formuliert als Schlagzeile „Jeder Dritte isst an mindestens einem Tag in der Woche vegetarisch!“. Begründe, warum diese Aussage mathematisch nicht korrekt ist.

Ein 90%-Konfidenzintervall für den gesuchten Anteil ist gegeben durch [0,27; 0,40]. Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an!

90 % der Stichproben liefern ein Intervall, in dem der wahre Anteil p liegt.	☒
Die Wahrscheinlichkeit, dass der gesuchte Anteil p im Konfidenzintervall liegt, ist 95 %.	
Wenn die Sicherheit auf 95 % erhöht wird, wird das Konfidenzintervall breiter.	☒
Wenn mehr Personen befragt werden, sinkt die Sicherheit des Konfidenzintervalls.	
Der Anteil der Personen, die an keinem Tag der Woche vegetarisch essen, beträgt 10 %.	

(b) Die Schlagzeile der Zeitung lautet: „Mit 95%-iger Sicherheit essen 30 % ± 2,5 % der Österreicher an mindestens einem Tag in der Woche vegetarisch“.

Wie viele Personen wurden befragt, wenn man annehmen kann, dass die Aussage der Schlagzeile seriös ist?

Erläutere, was die Aussage der Schlagzeile mathematisch bedeutet!

(a) **Lösungserwartung:**

$\frac{1}{3}$ ist der Wert in der Stichprobe, nicht in der Gesamtbevölkerung.

Antworten MC siehe oben

(b) **Lösungserwartung:**

$\Phi(z) = \frac{1}{2} + \frac{\gamma}{2} = 0{,}975 \Rightarrow z \approx 1{,}96 \Rightarrow 0{,}025 \approx 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}3 \cdot 0{,}7}{n}} \Rightarrow n \approx 1291$

Würde die Zeitung (oder irgendwer sonst) diese Umfrage mit 1291 zufällig ausgewählten Befragten sehr oft durchführen, so würde 95 % der Stichproben der wahre Anteil der an mindestens einem Tag in der Woche vegetarisch essenden Personen im jeweils ermittelten Konfidenzintervall liegen.

1173 - WS 4.1 - Marketing - thema mathematik 8 - Schularbeiten

172. Die Marketingabteilung einer Firma möchte durch eine Umfrage feststellen, wie bekannt ihr aktuell beworbenes Produkt ist. Dazu soll der Anteil p jener Personen in der Bevölkerung geschätzt werden, die das beworbene Produkt kennen. ____/4

Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der Personen in einer Stichprobe, die das beworbene Produkt kennen. Diese Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit den Parametern n und p. Mit einer bestimmten Sicherheit γ liefert eine solche Stichprobe ein Konfidenzintervall, in dem der unbekannte Parameter p liegt.

Für die Breite 2ϵ eines solchen Konfidenzintervalls gilt näherungsweise die Formel $\epsilon = z \cdot \sqrt{\frac{p_0 \cdot (1-p_0)}{n}}$. Dabei sind p_0 der relative Anteil der Personen in der Stichprobe, die das beworbene Produkt kennen und z ein von der gewählten Sicherheit γ abhängiger Wert. Dieser Wert z kann auf zwei Arten berechnet werden:

1. Methode: $z = \frac{x^* - \mu}{\sigma}$ mit $P(X < x^*) = \frac{1}{2} + \frac{\gamma}{2}$

2. Methode: mit Hilfe der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung: $z = \Phi^{-1}\left(\frac{1}{2} + \frac{\gamma}{2}\right)$

Aufgabenstellung:

(a) Von 500 zufällig ausgewählten Befragten geben 400 an, dieses Produkt zu kennen. Ermittle ein 96%-Konfidenzintervall für den Anteil der Personen in der Bevölkerung, die das Produkt kennen. Rechne mit der vereinfachten Formel $\epsilon = z \cdot \sqrt{\frac{p_0 \cdot (1-p_0)}{n}}$!
Trotz der hohen Sicherheit des berechneten Konfidenzintervall muss der tatsächliche Anteil nicht notwendigerweise in diesem Intervall liegen. Begründe dies!

(b) Berechne, wie sich die Breite des 96%-Konfindenzintervalls verändert, wenn statt 500 Personen nur 50 Personen befragt werden!

Erläutere an Hand der vereinfachten Formel, wie sich eine Erhöhung des Stichprobenumfangs n auf die Genauigkeit ϵ eines 96%-Konfidenzintervalls auswirkt!

(a) **Lösungserwartung:**

$\Phi(z) = \frac{1}{2} + \frac{\gamma}{2} = 0{,}98 \Rightarrow z \approx 2{,}0537$ und $p_0 = 80\,\%$

$\Rightarrow \epsilon = z \cdot \sqrt{\frac{p_0 \cdot (1-p_0)}{n}} \approx 2{,}0537 \cdot \sqrt{\frac{0{,}8 \cdot 0{,}2}{500}} \approx 0{,}037 \Rightarrow$ Intervall $[76{,}3\,\%; 83{,}7\,\%]$

Die Sicherheit 96 % bedeutet: Führt man diese Umfrage mit 500 zufällig ausgewählten Befragten sehr oft durch, so erhält man in 4 % der Fälle ein Konfidenzintervall, in dem der gesuchte Anteil nicht enthalten ist. Die konkret gegebene Umfrage kann natürlich zu diesen 4 % gehören.

(b) **Lösungserwartung:**

$\Phi(z) = \frac{1}{2} + \frac{\gamma}{2} = 0{,}98 \Rightarrow z \approx 2{,}0537$ und $p_0 = 80\,\%$, daher

- für $n = 500$: $\epsilon \approx 2{,}0537 \cdot \sqrt{\frac{0{,}8 \cdot 0{,}2}{500}} \approx 0{,}037$
- für $n = 50$: $\epsilon \approx 2{,}0537 \cdot \sqrt{\frac{0{,}8 \cdot 0{,}2}{50}} \approx 0{,}116$

Die Breite 2ϵ des Konfidenzintervalls ändert sich von 7,4 % auf 23,2 %. Das Konfidenzintervall ist ca. 3 Mal so breit.

Je größer der Stichprobenumfang n, umso kleiner ist der Wert von $\epsilon = z \cdot \sqrt{\frac{p_0 \cdot (1-p_0)}{n}}$, weil n im Nenner steht. Ein kleinerer Wert von ϵ bedeutet eine größere Genauigkeit der Schätzung.

1174 - AN 3.3, AN 4.3 - Sinken eines Steins - thema mathematik 8 - Schularbeiten

173. Die Geschwindigkeit v eines Steins in m/s wird ab dem Eintritt ins Wasser durch die Funktion $v(t) = 0{,}8 - \frac{8t}{(4+t^2)^2}$ beschrieben. ____/6

Aufgabenstellung:

(a) Stelle den Funktionsgraphen mit Hilfe von Technologie in einem geeigneten Koordinatensystem für die ersten 10 Sekunden nach dem Eintritt ins Wasser dar!

Berechne, zu welchem Zeitpunkt der Stein mit der größten Beschleunigung sinkt!

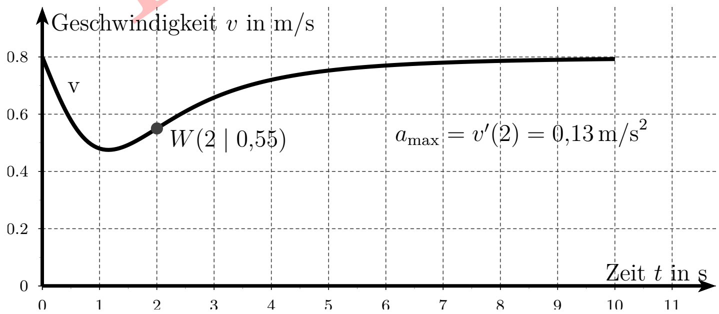
(b) Ermittle eine Funktion, die die Tiefe des Steins in den ersten 10 Sekunden beschreibt!

Stelle ihren Graphen in einem geeigneten Koordinatensystem dar!

(c) Erläutere, was mit $\int_0^5 v(t)\,\mathrm{d}t$ berechnet wird!

Beschreibe allgemein den Zusammenhang zwischen Weg, Zeit und Beschleunigung eines Körpers!

(a) **Lösungserwartung:**

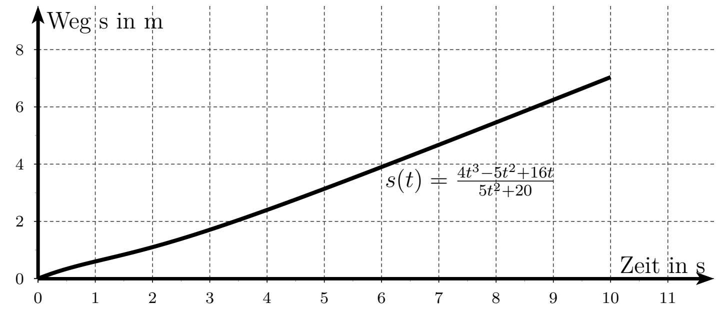


$a_{\max}$ 2 Sekunden nach dem Wassereintritt

(b) **Lösungserwartung:**

$s(t) = \int_0^t v(u)\,\mathrm{d}u = \frac{4t^3-5t^2+16t}{5t^2+20}$

Oder: $s(t) = \frac{4}{t^2+4} + 0{,}8t - 1$



(c) **Lösungserwartung:**

$\int_0^5 v(t)\,dt$ beschreibt wie tief der Stein in den ersten 5 Sekunden sinkt.

$s'(t) = v(t)$ $\quad s(t)$ ... Wegfunktion

$v'(t) = a(t)$ $\quad v(t)$ ... Geschwindigkeitsfunktion

$s''(t) = a(t)$ $\quad a(t)$ ... Beschleunigungsfunktion

Oder Beschreibung in Worten.

1175 - K7 - DR - Bungee-Jump - thema mathematik 8 - Schularbeiten

174. Du hast bei einem Gewinnspiel mitgemacht und einen Gutschein für einen Bungee-Jump von der 192 m hohen Europabrücke in Tirol gewonnen. Das Gesetz (ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes), nach dem du dich bei diesem Sprung bewegen wirst, zumindest solange sich das 80 m-Seil noch nicht spannt, lautet: ____/6

$s(t) = \frac{g}{2} \cdot t^2$ (mit $s(t)$ in m und t in s)

Mit g wird die Fallbeschleunigung auf der Erde bezeichnet. Sie beträgt 9,8 m/s^2. Bei Berücksichtigung des Luftwiderstandes beschreibt die Funktion

$s_1(t) = 50 \cdot (5 \cdot \ln(e^{0,4t} + 1) - t - 5 \cdot \ln(2))$

den zurückgelegten Weg für eine Person mit ca. 65 kg Masse hinreichend genau.

Aufgabenstellung:

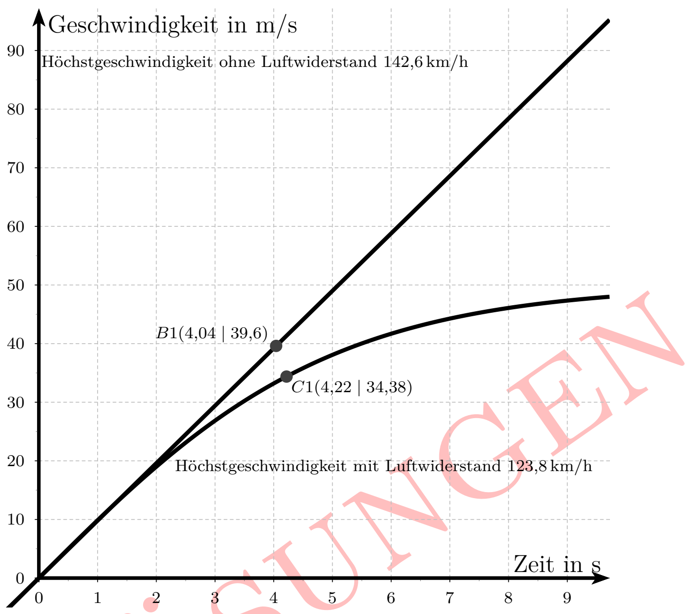
(a) Stelle die Geschwindigkeitsfunktion für beide Modelle (mit und ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes) mit Hilfe einer geeigneten Technologie in einem passenden Koordinatensystem dar!

Begründe anhand der Zeichnung, für welchen Zeitraum das einfachere Modell ausreichend genau ist!

(b) Berechne für beide Modelle, wie lange du den freien Fall genießen kannst, bis dich das Seil stoppt!

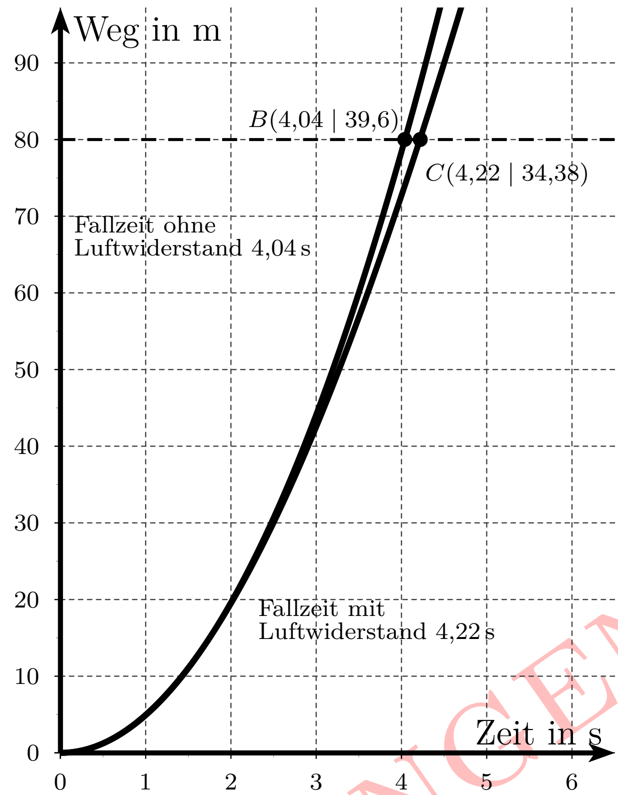
(c) Ermittle für beide Modelle die Maximalgeschwindigkeit in km/h, die du erreichst, bevor du durch das Seil abgebremst wirst!

(a) **Lösungserwartung:**



Das einfachere Modell ist von 0 bis ca. 2,5 Sekunden ausreichend genau, die Funktionsgraphen unterscheiden sich kaum.

(b) **Lösungserwartung:**



Mit Luftwiderstand: 4,22 s

Ohne Luftwiderstand: 4,04 s

(c) **Lösungserwartung:**

Siehe Grafik von (a)!

Mit Luftwiderstand: 123,8 km/h

Ohne Luftwiderstand: 142,6 km/h

1176 - AN 3.3, AN 2.1, AN 1.3 - Medikamentenkonzentration - thema mathematik 8 - Schularbeiten

175. Einem Patienten wird zum Zeitpunkt $t = 0$ eine bestimmte Menge eines Medikaments verabreicht. Die Funktion k mit $k(t) = \frac{3}{50}t^3 - \frac{9}{10}t^2 + \frac{5}{2}t + \frac{125}{18}$ beschreibt die Konzentration dieses Medikaments (in Milliliter pro Liter Blut) nach t Stunden. ____/8

Aufgabenstellung:

(a) Berechne, nach wie viel Minuten die höchste Konzentration des Medikaments im Blut vorhanden ist!

(b) Ermittle jenen Zeitpunkt nach der Verabreichung des Medikaments, in dem sich die Konzentration des Medikaments am stärksten verringert!

Berechne die Abbaugeschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt!

(c) Gib eine Funktionsgleichung der Funktion an, welche die Abbaugeschwindigkeit des Medikaments beschreibt!

Gib für diese Funktion einen sinnvollen Definitionsbereich an!

(d) Bestimme die mittlere Abbaugeschwindigkeit im Zeitintervall zwischen höchster Konzentration und völligem abbau des Medikaments!

Berechne jene Zeitpunkte, zu denen die momentane Abbaugeschwindigkeit gleich der mittleren ist!

(a) **Lösungserwartung:**

$t_1 = \frac{5}{3} \Rightarrow$ 100 Minuten ist die höchste Konzentration im Blut erreicht.

(b) **Lösungserwartung:**

$W\left(5 \mid \frac{40}{9}\right) \Rightarrow t = 5$; oder: $k''(t) = 0 \Rightarrow t = 5$

$t_w: y = -2x + 14,\dot{4} \Rightarrow v = -2\,\text{ml/h}$ pro Liter Blut; oder: $k'(5) = -2$

(c) **Lösungserwartung:**

$v(t) = k'(t) = 0{,}18t^2 + 1{,}8t + 2{,}5$

$D_v \approx \left[\frac{5}{3}; \frac{25}{3}\right]$ maximal bis zur Nullstelle von $k(t)$

(d) **Lösungserwartung:**

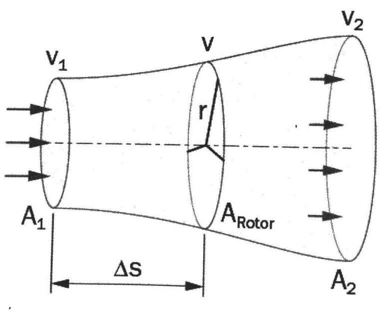
$\overline{v} \approx 1{,}33\,\text{ml/h}$

$t_1 \approx 3{,}08\,\text{h}$; $t_2 \approx 6{,}92\,\text{h}$

1177 - AN 3.3, AN 1.3 - Windpark 2 - thema mathematik 8 - Schularbeiten

176. Der Windpark Bruch an der Leitha wurde im Jahr 2000 mit Bürgerbeteiligung errichtet und besteht aus fünf Anlagen des Typs *E66/18.70* mit 65 m Nabenhöhe und einem Rotordurchmesser von $2r = 70\,\text{m}$. Die installierte Gesamtleistung beträgt 9 Megawatt. ____/1

(Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Windpark_Bruck_an_der_Leitha unter der Lizenz CC-BY-SA 3.0 http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/legalcode (Stand: 26.8.2015))



Eine Windkraftanlage wandelt die Windenergie in mechanische und dann in elektrische Energie um. Ihre Nennleistung (die maximal mögliche Leistung) wird in Megawatt (MW) angegeben. Die tatsächlich erreichte Leistung hängt von den örtlichen Windverhältnissen und den technischen Gegebenheiten der Anlage ab und liegt bei der Anlage in Bruck an der Leitha im Durchschnitt bei ca. 22 % der Nennleistung.

Der Leistungsbeiwert c_p beschreibt den Wirkungsgrad einer Windkraftmmaschine. Er gibt an, wie viel Windenergie vom Windrad tatsächlich genutzt wird. Die Berechnung erfolgt nach folgender Formel:

$$c_p = \frac{(v_1 + v_2) \cdot (v_1^2 - v_2^2)}{s \cdot v_1^3}$$

Dabei ist v_1 die Windgeschwindigkeit vor und v_2 die Windgeschwindigkeit nach dem Rotor.

Aufgabenstellung:

(a) Berechne, wie viel Energie in Megawattstunden (MWh) die Anlage in Bruck an der Leitha durchschnittlich pro Jahr (365 Tage) liefert!
(Hinweis: Energie ist Leistung mal Zeit)

Zeige durch Umformen der Formel für c_p, dass der Leistungsbeiwert c_p mit Hilfe der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2} \cdot (1+x) \cdot (1-x^2)$ und $x = \frac{v_2}{v_1}$ beschrieben werden kann!

(b) Ermittle rechnerisch, für welchen Wert x die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2} \cdot (1+x)(1-x^2)$ maximal wird!

Interpretiere diesen Wert im gegebenen Kontext unter Beachtung von $x = \frac{v_2}{v_1}$!

(c) Ein wichtiger Kennwert von Windkraftanlagen ist die Schnelllaufzahl λ. Sie gibt das Verhältnis der Geschwindigkeit der Rotorspitzen u zur Windgeschwindigkeit v an:

$$\lambda = \frac{u(r)}{v} = \frac{2\pi \cdot r \cdot f}{v}$$

Dabei ist $u(r)$ die Bahngeschwindigkeit an der Spitze des Rotorblattes und v die Windgeschwindigkeit in m/s. Die Frequenz f gibt die Umdrehungen der Rotorblätter pro Sekunde an.

Die maximale Drehzahl des Rotors beträgt bei den Windrädern in Bruck an der Leitha 22 Umdrehungen pro Minute. Berechne die Frequenz (Umdrehungen pro Sekunde)!

Für Anlagen mit 3 Rotorblättern liegt der optimale Wert für die Schnelllaufzahl zwischen 7 und 8 (Daten nach: http://www.physik.uni-greifswald.de). Berechne ein Intervall für die entsprechende optimale Windgeschwindigkeit in km/h bei maximaler Drehzahl!

(a) **Lösungserwartung:**

$24 \cdot 365 \cdot 9 \cdot 0{,}22 \approx 17\,345\,\mathrm{MWh}$

$c_p = \dfrac{(v_1+v_2)\cdot(v_1^2-v_2^2)}{2\cdot v_1^3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{v_1+v_2}{v_1}\cdot\frac{v_1^2-v_2^2}{v_1^2} = \frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{v_2}{v_1}\right)\cdot\left(1-\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2\right)$

(b) **Lösungserwartung:**

$x_{\text{max}} = \frac{1}{3}$

Bremst ein Windrad den Wind auf $\frac{1}{3}$ ab, so entnimmt es dem Wind etwa 59 % der Bewegungsenergie $[f(\frac{1}{3}) \approx 0{,}593]$

(c) **Lösungserwartung:**

$f_{\text{max}} = \frac{11}{30}$

$v_{\text{opt}} \in [36{,}3\,\mathrm{km/h}; 41{,}5\,\mathrm{km/h}]$, da $\left[v_{\text{min}} = \frac{70\pi\cdot 11\cdot 3{,}6}{30\cdot 8}; v_{\text{max}} = \frac{70\pi\cdot 11\cdot 3{,}6}{30\cdot 7}\right]$