08 - MAT - AG 1.2, FA 1.2, FA 1.4, FA 1.7, FA 3.3 - Haber'sche Regel - BIFIE Aufgabensammlung

1. Abhängig von der Dosis von Giftgasen und der Dauer ihrer Einwirkung kann es zu toxischen Wirkungen bei lebenden Organismen kommen. Diesen Zusammenhang untersuchte der deutsche Chemiker Fritz Haber. Die nach ihm benannte Haber'sche Regel $c \cdot t = W$ (mit $W =$ konstant) beschreibt den Zusammenhang zwischen toxischen Wirkungen W (in $mg \cdot min \cdot L^{-1}$ oder $ppm \cdot min$), der Einwirkzeit t (in min) der Verabreichung und der Wirkkonzentration c (in ppm oder $mg \cdot L^{-1}$) eines Giftstoffes. ____/0

   Die toxische Wirkung kann eine Erkrankung (beispielsweise Krebs) hervorrufen oder den Tod des diesem Gift ausgesetzten Lebewesens bedeuten. Nicht am Erbgut angreifende Gifte zeigenerst dann eine Wirkung W, wenn eine für das Gift spezifische Konzentration (Schwellenkonzentration e) erreicht wird. Zum Beispiel hat Kohlenmonoxid keinen schädlichen Effekt, wenn seine Konzentration unter einem Wert von $5ppm$ liegt. Für Gifte mit einer Schwellenkonzentration e wird die Haber'sche Regel abgewandelt dargestellt: $(c - e) \cdot t = W$ (mit $W =$ konstant).

   ## Aufgabenstellung:

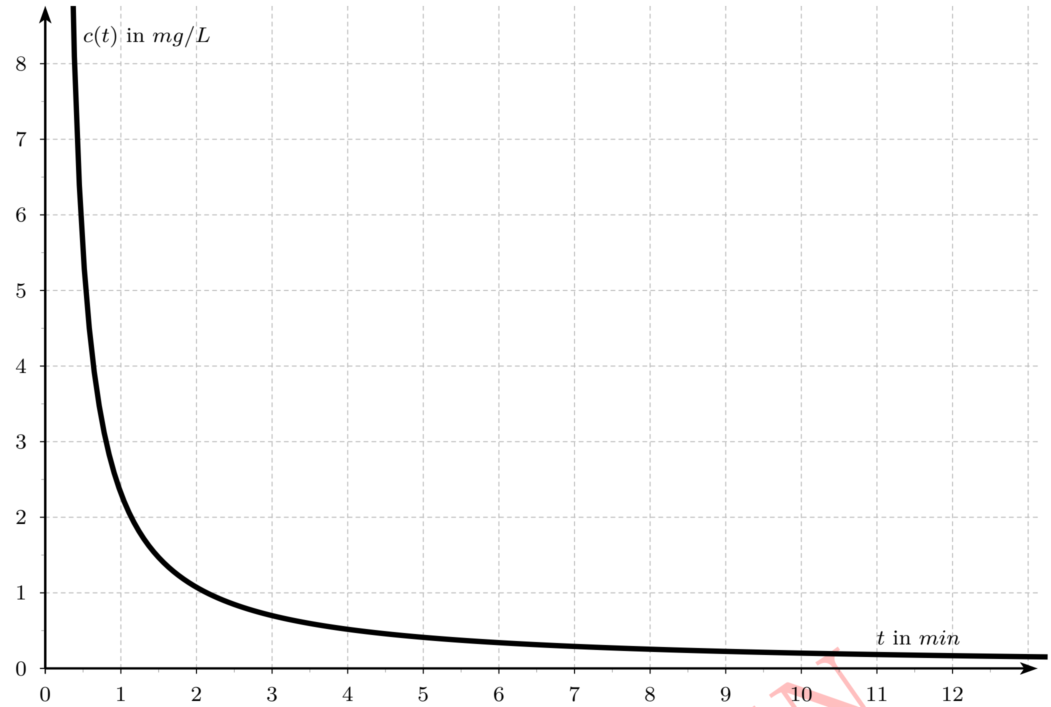
   (a) Die Haber'sche Regel $c \cdot t = W$ (mit $W =$ konstant) kann als Funktion c in Abhängigkeit von der Variablen t geschrieben werden.

   Kreuze die zutreffende Aussage an!

Bei der Funktion c handelt es sich um eine lineare Funktion f vom Typ $f(x) = k \cdot x + d$ mit $k, d \in \mathbb{R}$.	
Bei der Funktion c handelt es sich um eine Potenzfunktion f vom Typ $f(x) = a \cdot x^z$ mit $z \in \mathbb{Z}$.	⊠
Bei der Funktion c handelt es sich um eine Potenzfunktion f vom Typ $f(x) = a \cdot x^n + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.	
Bei der Funktion c handelt es sich um eine Polynomfunktion f vom Typ $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$ mit $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.	
Bei der Funktion c handelt es sich um eine Exponentialfunktion f vom Typ $f(x) = a \cdot b^x$ bzw. $f(x) = a \cdot e^{\lambda \cdot x}$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+, \lambda \in \mathbb{R}$.	
Bei der Funktion c handelt es sich um eine konstante Funktion f vom Typ $f(x) = a$ mit $a \in \mathbb{R}$.	

Phosgen ist ein sehr giftiges Gas. Ein Lebewesen wird für eine Zeitdauer von 10 Minuten diesem Giftgas in einer Wirkkonzentration von 0,3 mg/L ausgesetzt. Gib jene Wirkkonzentration in mg/L an, mit der in nur einer Minute die gleiche toxische Wirkung erreicht wird.

(b) Stelle den Zusammenhang zwischen der Wirkkonzentration c (in mg/L) und der Einwirkzeit t (in min) für eine Wirkung von $W = 2\,mg \cdot min \cdot L^{-1}$ dar!



Ergänze die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine mathematisch korrekte Aussage entsteht!

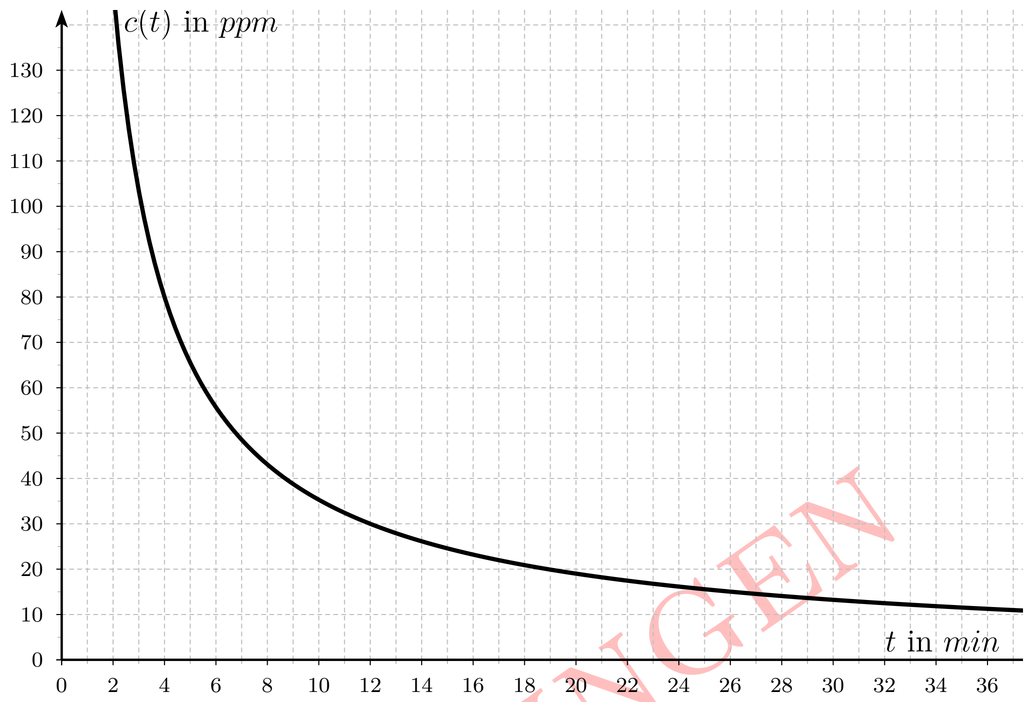
Die Größen c und t in der Haber'sche Regel $c \cdot t = W$ (mit $W =$ konstant) sind zueinander _____①_____, weil _____②_____ dieselbe Wirkung W erzielt wird.

①	
direkt proportional	☐
indirekt proportional	☒
weder indirekt noch direkt proportional	☐

②	
bei Erhöhung der Einwirkzeit t auf das $n-$Fache und Reduktion der Konzentration c auf den $n-$ten Teil	☒
bei Erhöhung der Einwirkzeit t auf der $n-$Fache und beliebiger Konzentration c	☐
bei Erhöhung der Einwirkzeit t auf das $n-$Fache und Erhöhung der Konzentration c auf den $n-$Fache	☐

(c) Ein nicht näher bezeichnetes Giftgas hat eine natürliche Schwellenkonzentration von $e = 5\,ppm$. Bei einer Einwirkzeit von $10\,min$ liegt die tödliche

Dosis (letale Dosis) bei etwa $c = 35\,ppm$. Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Konzentration c in Abhängigkeit von der Einwirkzeit t bei der letalen Dosis.



Lies aus dem Graphen die letale Dosis des angegebenen Giftes für einen Menschen bei einer Einwirkzeit von 20 Minuten ab! Interpretiere das Ergebnis im Vergleich zu den Angabewerten!

(d) Die abgewandelte Haber'sche Regel $(c - e) \cdot t = W$ (mit $W =$ konstant) kann als eine Funktion c in Abhängigkeit von der Einwirkzeit t geschrieben werden.

Kreuze die zutreffende(n) Aussage(n) an!

Der Wert e ist im Funktionsterm der Funktion c eine additive Konstante.	⊠
Der Wert e ist im Funktionsterm der Funktion c eine multiplikative Konstante.	
Der Wert e ist im Funktionsterm der Funktion c eine von t abhängige Variable.	
Der Wert e ist im Funktionsterm der Funktion c nicht mehr vorhanden, weil der Wert e bei der Umformung wegfällt.	
Der Wert e ist im Funktionsterm der Funktion c immer gleich groß wie W.	

Die Haber'sche Regel ohne Schwellenkonzentration lautet $c \cdot t = W$, die Form mit Schwellenkonzentration e und mit derselben biologischen Wirkungskonstante W lautet $(c - e) \cdot t = W$. Woran erkennt man an der graphischen Darstellung beider Funktionen c mit $c(t)$, um welche es sich handelt? Begründe!

Lösungserwartung:

(a) Funktionsterm: $c(t) = \frac{W}{t}$. Multiple Choice: siehe oben
$W = c \cdot t = 0{,}3\,\frac{mg}{L} \cdot 10\,min = 3\,mg \cdot min \cdot L^{-1}$
$\rightarrow c(t) = \frac{3}{t} \Rightarrow c(1) = 3$
Die Konzentration beträgt $3\,mg/L$. (Der Rechengang sowie die Einheiten sind für das Erreichen des Punktes nicht von Bedeutung.

(b) Funktion und Lückentext: siehe oben

(c) Die letale Dosis beträgt für eine Einwirkzeit von 20 Minuten zirka $20\,ppm$. Verdoppelt sich die Einwirkzeit, so halbiert sich die letale Dosis hier nicht. Durch das Vorhandensein einer Schwellenkonzentration von $5\,ppm$ liegt das Ergebnis höher als die Hälfte von $35\,ppm$.

(d) Funktionsterm: $c(t) = \frac{W}{t} + e$. Multiple Choice: siehe oben
Der Wert e ist im Funktionsterm der Funktion c eine additive Konstante, dadurch wird der Graphe der Funktion $c(t) = \frac{W}{t}$ entlang der y-Achse verschoben.
Die Haber'sche Regel ohne Schwellenkonzentration lautet $c \cdot t = W$ und hat als Funktion c mit $c(t)$ gesehen die beiden Achsen als Asymptoten.

Die Haber'sche Regel mit Schwellenkonzentration $(c - e) \cdot t = W$ mit derselben biologischen Wirkungskonstante W besitzt statt der x-Achse an der Stelle $y = e$ eine Asymptote. Der Graph der Funktion ist entlang der y-Achse um den Wert e verschoben. (Adäquate Antworten sind als richtig zu werten.)

---

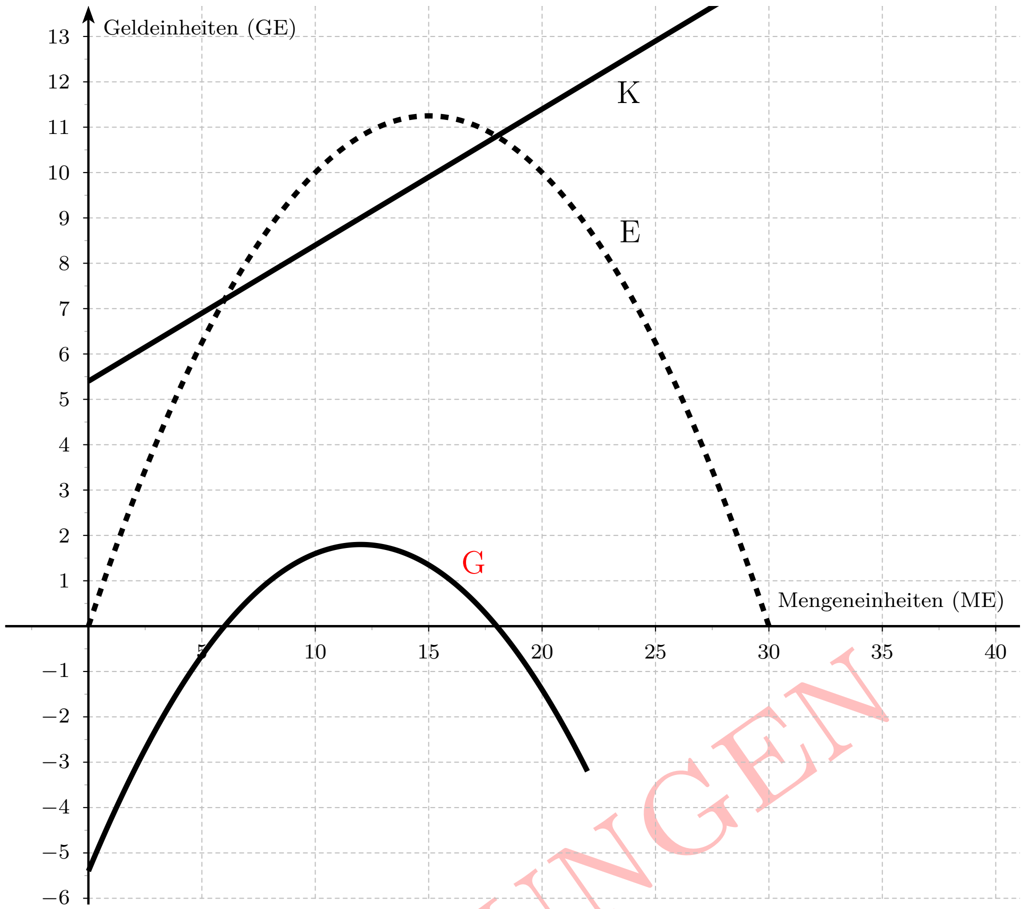
09 - MAT - AG 2.3, FA 1.4, FA 1.6, FA 1.7, FA 2.3 - Gewinnfunktion - BIFIE Aufgabensammlung

2. In einem Unternehmen werden die Entwicklungen der Kosten K und des Erlöses E in Geldeinheiten (GE) bei variabler Menge x in Mengeneinheiten (ME) beobachtet. Als Modellfunktionen werden die Erlösfunktion E mit $E(x) = -0{,}05 \cdot x^2 + 1{,}5 \cdot x$ und eine Kostenfunktion K mit $K(x) = 0{,}3 \cdot x + 5{,}4$ angewendet. Alle produzierten Mengeneinheiten werden vom Unternehmen abgesetzt. ____/0

Aufgabenstellung:

(a) Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte der Funktionsgraphen von E und K! Beschreibe, welche Informationen die Koordinaten dieser Schnittpunkte für den Gewinn des Unternehmens liefern!

(b) Zeichne den Graphen der Gewinnfunktion G in die untenstehende Abbildung ein! Markiere in der Abbildung den Gewinn im Erlösmaximum!



(c) Berechne den zu erwartenden Gewinn, wenn 13 Mengeneinheiten produziert und abgesetzt werden!

Bei der gegebenen Kostenfunktion K gibt der Wert 5,4 die Fixkosten an. Im folgenden werden Aussagen getroffen, die ausschließlich die Änderungen der Fixkosten in Betracht ziehen. Kreuze die für den gegebenen Sachverhalt zutreffende(n) Aussage(n) an!

Eine Senkung der Fixkosten bewirkt eine breitere Gewinnzone, d.h., der Abstand zwischen den beiden Nullstellen der Gewinnfunktion wird größer.	☒
Eine Veränderung der Fixkosten hat keine Auswirkung auf diejenigen Stückzahl, bei der der höchste Gewinn erzielt wird.	☒
Eine Erhöhung der Fixkosten steigert die Höhe des maximalen Gewinns.	
Eine Veränderung der Fixkosten hat keine Auswirkung auf die Höhe des maximalen Gewinns.	
Eine Senkung der Fixkosten führt zu einer Erhöhung des Gewinns.	☒

Lösungserwartung:

(a) $-0{,}05 \cdot x^2 + 1{,}5 \cdot x = 0{,}3 \cdot x + 5{,}4$

$-0{,}05 \cdot x^2 + 1{,}2 \cdot x - 5{,}4 = 0$

Die Lösung der quadratischen Gleichung führt zu den Lösungen $x_1 = 6$ und $x_2 = 18 \rightarrow S_1\,(6/7{,}2)$ und $S_2\,(18/10{,}8)$.

Reflexion beispielsweise:

Für die Mengen x_1 und x_2 sind Erlös und Kosten jeweils gleich groß, der Gewinn ist daher null.

Für die Stückzahlen x_1 und x_2 wird kein Gewinn erzielt.

Für den Stückzahlbereich $(x_1; x_2)$ wird ein Gewinn erzielt.

(b) Eine der möglichen Markierungen für den Gewinn reicht in der Lösung aus. Lösungsvorschlag siehe Grafik oben.

$G(x)$ einzeichnen, Markierung des Gewinns

(c) $G(x) = -0{,}05 \cdot x^2 + 1{,}2 \cdot x - 5{,}4$

$G(13) = 1{,}75$ GE (Geldeinheiten)

Lösungen Multiple Choice: siehe oben

---

11 - MAT - FA 1.6, FA 1.7, FA 2.1, AN 3.3 - Erlös und Gewinn - BIFIE Aufgabensammlung

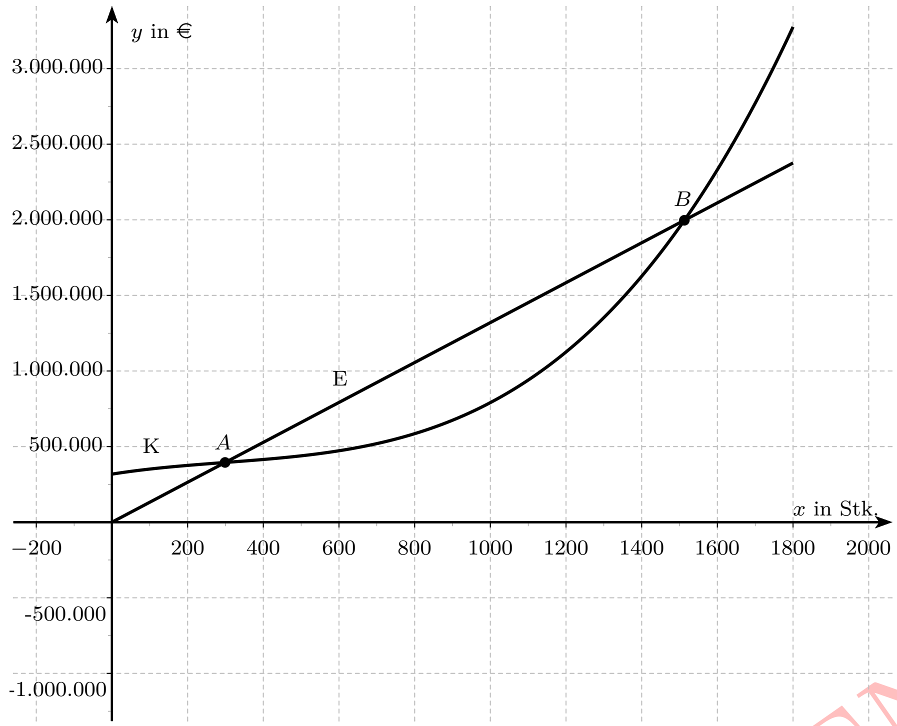
3. Eine Digital-Spiegelreflexkamera wird zu einem Stückpreis von € 1.320 angeboten. ____/0

Ein Produktionsbetrieb kann monatlich maximal 1.800 Stück dieser Kamera produzieren. Es wird dabei angenommen, dass der Verkaufspreis unabhängig von der verkauften Stückzahl x konstant gehalten wird und alle produzierten Kameras auch verkauft werden. Die Funktion K mit

$$K(x) = 0{,}00077x^3 - 0{,}693x^2 + 396x + 317900$$

beschreibt die Gesamtkosten K für die Produktion in Abhängigkeit von der produzierten Stückzahl x.

Die Graphen der Kostenfunktion K und der Erlösfunktion E sind in der nachstehenden Grafik dargestellt.



Aufgabenstellung:

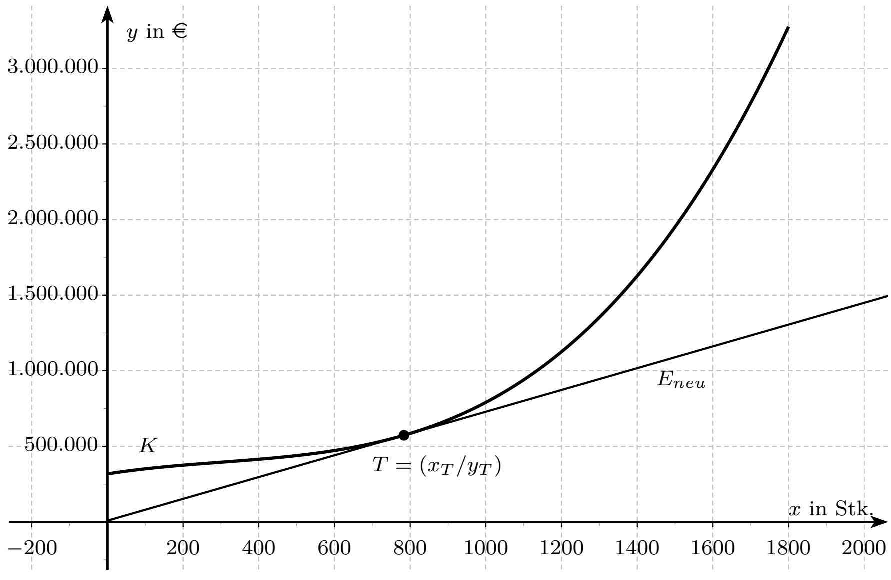
(a) Zeichne in der obigen Abbildung den Graphen der Gewinnfunktion G ein!

Eine Stückpreisänderung wurde vorgenommen und hat bewirkt, dass der Break-even-Point bei einer geringeren Stückzahl erreicht wird. Gib an, wie der Stückpreis verändert wurde und welchen Einfluss diese Veränderung auf die Lage der Nullstellen der Gewinnfunktion G und den Gewinnbereich hat!

(b) Erstelle die Gleichung der Gewinnfunktion G!

Berechne diejenige Stückzahl, bei der der Gewinn maximal wird!

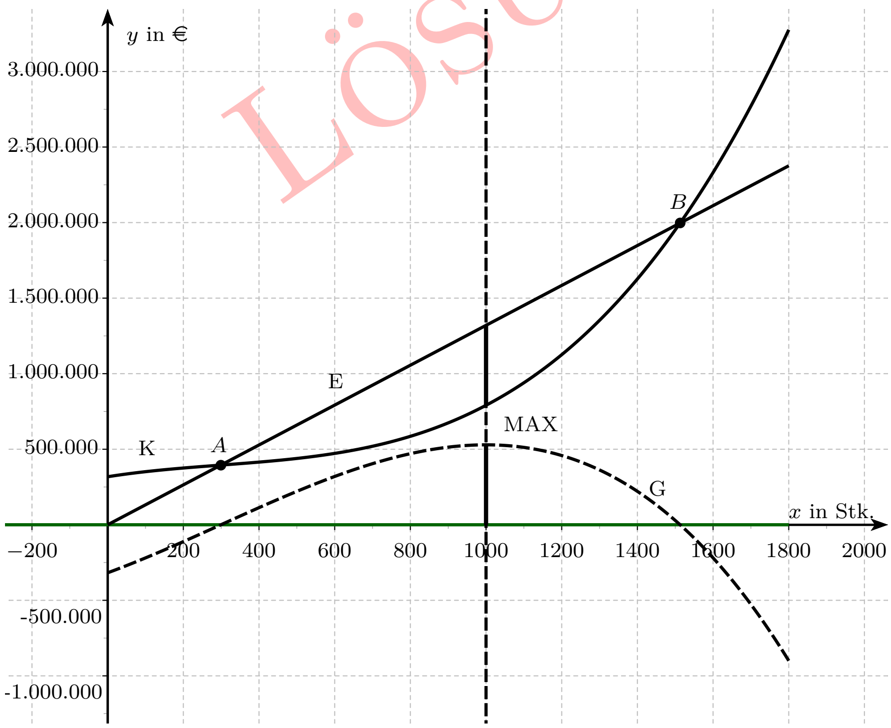
(c) In der nachstehenden Grafik wurde die Erlösfunktion so abgeändert, dass die Graphen der Kostenfunktion K und der Erlösfunktion E_{neu} einander im Punkt T berühren. Bestimme die Gleichung der Erlösfunktion E_{neu}!



Interpretiere die Koordinaten des Punktes T im gegebenen Kontext und erkläre, welche Auswirkung die Änderung der Erlösfunktion auf den Gewinnbereich hat!

Lösungserwartung:

(a) Graph der Gewinnfunktion:



Der Stückpreis muss erhöht werden. Die Nullstellen liegen weiter auseinander, das heißt, der Gewinnbereich wird größer.

(b) Gewinnfunktion:

$G(x) = E(x) - K(x)$

$G(x) = 1320x - (0{,}00077x^3 - 0{,}693x^2 + 396x + 317900)$

$G(x) = -0{,}00077x^3 + 0{,}693x^2 + 924x - 317900$

Bedingung für maximalen Gewinn:

$G'(x) = 0 \rightarrow G'(x) = -0{,}00231x^2 + 1386x + 924$

$-0{,}00231x^2 + 1{,}386x + 924 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{-1{,}386 \pm \sqrt{1{,}386^2 + 4 \cdot 0{,}00231 \cdot 924}}{-0{,}00462} \rightarrow$

$(x_1 = -400); x_2 = 1000$

Der maximale Gewinn wird bei einer Stückzahl von 1000 erzielt.

(c) Die Gleichung der Erlösfunktion E_{neu} lautet:

$E_{neu}(x) = \frac{y_T}{x_T} \cdot x$

Nur bei der Produktionsmenge von x_T Stück wird genau kostendeckend produziert. Kosten und Erlös betragen je € y_T. Bei dieser Produktionsmenge ist es nicht möglich, mit Gewinn zu produzieren.

---

13 - MAT - FA 1.3, FA 1.4, FA 1.7, AG 2.1 - Photovoltaikanlagen - BIFIE Aufgabensammlung

4. Die benachbarten Familien Lux und Hell haben auf den Dächern ihrer Einfamilienhäuser zwei baugleiche Photovoltaikanlagen installiert, deren Maximalleistung jeweils 5 kW beträgt. Nicht selbst verbrauchte elektrische Energie wird zu einem Einspeisetarif ins Netz geliefert. Energie, die nicht durch die Photovoltaikanlage bereitgestellt werden kann, muss von einem Energieunternehmen zum regulären Stromtarif zugekauft werden (netzgekoppelter Betrieb). Beide Familien wollen die Wirtschaftlichkeit ihrer Anlagen durch Messungen überprüfen. ____/0

Aufgabenstellung:

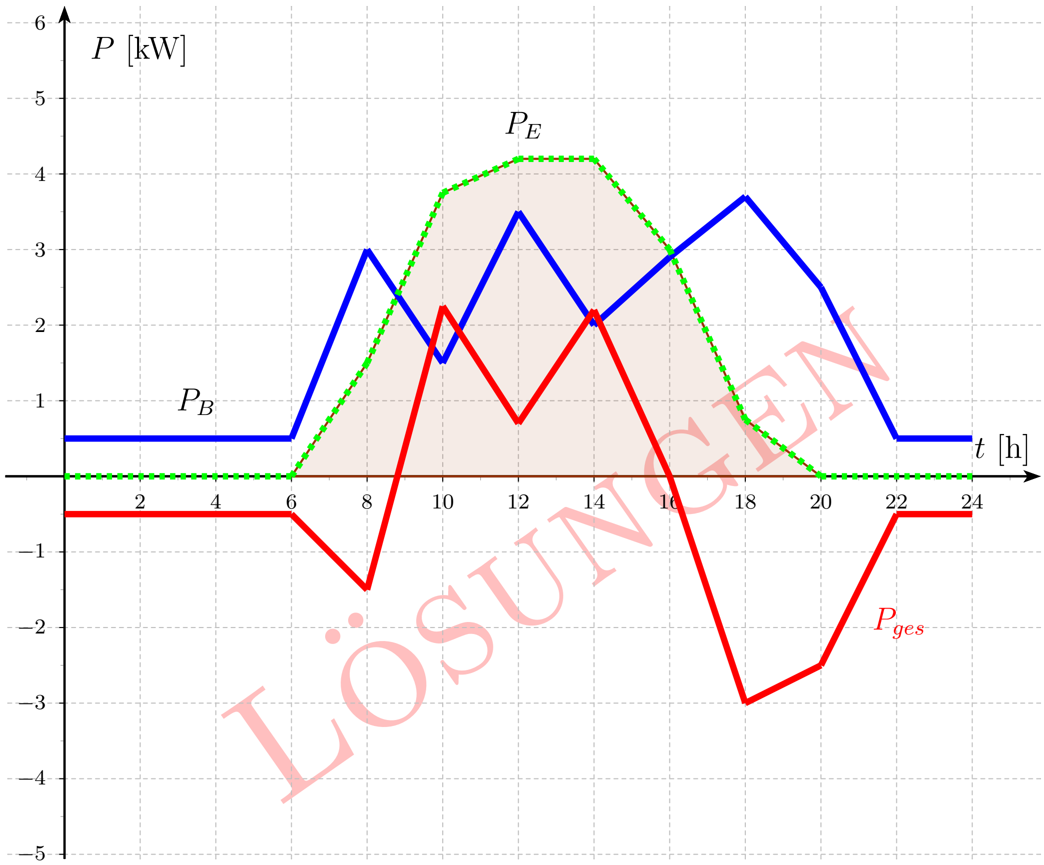
(a) Familie Lux hat dazu an einem durchschnittlichen Frühlingstag folgende Leistungsdaten für P_B (im Haus der Familie Lux benötigte Leistung) und P_E (durch die Photovoltaikanlage erzeugte elektrische Leistung) in Abhängigkeit vom Zeitpunkt t über den Tagesverlauf ermittelt. Die Leistungsdaten wurden um Mitternacht beginnend alle zwei Stunden aufgezeichnet.

Leistungsdaten:

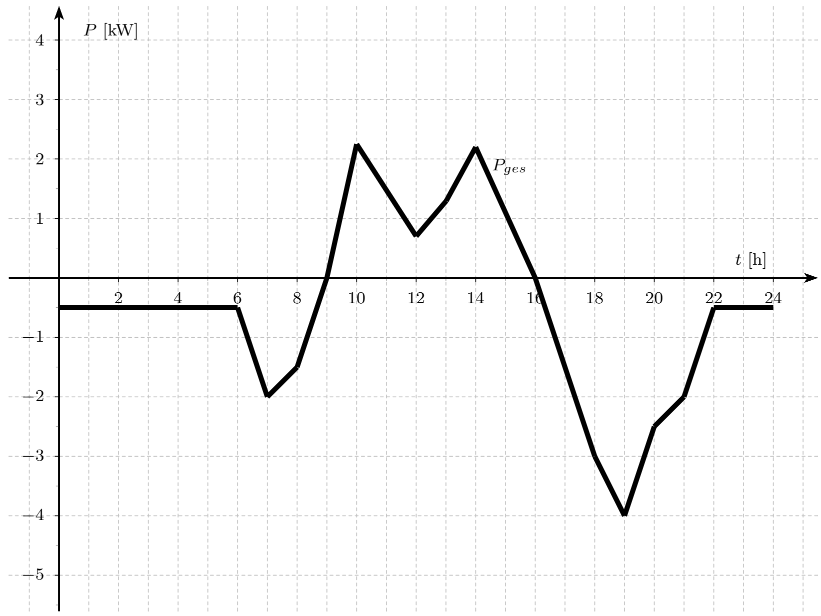
t in h	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
P_B in kW	0,5	0,5	0,5	0,5	3	1,5	3,5	2	2,9	3,7	2,5	0,5	0,5
P_E in kW	0	0	0	0	1,5	3,75	4,2	4,2	3	0,75	0	0	0

Zeichne in die nachstehende Abbildung aus den vorgegebenen Graphen für P_B und P_E den Tagesverlauf der elektrischen Gesamtleistungsbilanz P_{ges} für die Photovoltaikanlage der Familie Lux ein! Die Gesamtleistungsbilanz P_{ges} ist die Differenz der beiden Leistungsteile $P_E - P_B$.

Markiere zusätzlich in der Abbildung die gesamte über den Tagesverlauf erzeugte elektrische Energie dieser Photovoltaikanlage!



(b) Familie Hell hat aus einer an einem durchschnittlichen Frühlingstag erfolgten stündlichen Messung folgenden Tagesverlauf für die Gesamtleistungsbilanz P_{ges} ihrer elektrischen Leistung ermittelt und durch den gegebenen Graphen modelliert:



Gib an, was in dieser Grafik positive bzw. negative Funktionswerte für P_{ges} bedeuten!

Positive Funktionswerte ________________________________

Negative Funktionswerte ________________________________

Familie Hell möchte den Amortisationszeitpunkt für die Photovoltaikanlage ermitteln. Das ist derjenige Zeitpunkt, ab dem die Errichtungskosten gleich hoch wie die Einsparungen durch den Betrieb der Anlage sind. Ab diesem Zeitpunkt arbeitet die Anlage rentabel.

Kann sich die Anlage für die Familie Hell auch amortisieren, wenn die finanzielle Tagesbilanz der Photovoltaikanlage für alle Tage im Jahr negativ ist? Begründe deine Antwort!

Lösungserwartung:

(a) Grafik siehe oben

Die eingefärbe Fläche stellt die gesamte über den Tagesverlauf erzeugte elektrische Energie dieser Photovoltaikanlage dar.

(b) Positive Funktionswerte bedeuten, dass elektrische Energie ans Stromnetz geliefert wird.

Negative Funktionswerte bedeuten, dass elektrische Energie aus dem Netz entnommen wird.

Die Anlage kann sich amortisieren, wenn der Betrag, den man aufgrund der Anlage an Stromkosten eingespart hat, größer ist als der Anschaffungsbetrag der Anlage.

(Formulierungen, die sinngemäß dieser Aussage entsprechen, sind als richtig zu werten.)

---

14 - MAT - AG 2.2, FA 1.7, FA 5.2, WS 2.3, WS 3.1, WS 3.3 - Schwarzfahren als Volkssport - BIFIE Aufgabensammlung

5. Im Jahr 2010 wurden in den Graz-Linien exakt 36 449 Schwarzfahrer und Schwarzfahrerinnen auf frischer Tat ertappt. ____/0

   "‘Ihren Fahrschein, bitte!"’ - diese freundliche, aber bestimmte Aufforderung treibt Schwarzfahrern regelmäßig den Angstschweiß ins Gesicht. Zu Recht, heißt es dann doch 65 Euro Strafe zahlen. Mehr als 800 000 Fahrschein- kontrollen wurden im Vorjahr in den Grazer Bus- und Straßenbahnlinien durchgeführt. 36 449 Personen waren Schwarzfahrer. Gegenüber 2009 ist das ein leichtes Minus von 300 Beanstandungen. Für die Graz-Linien ist das ein Beweis für den Erfolg der strengen Kontrollen. Für den Vorstand der Graz-Linien steht darum eines fest: "‘Wir werden im Interesse unserer zahlenden Fahrgäste auch 2011 die Kontrollen im gleichen Ausmaß fortsetzen."’ Denn den Graz-Linien entgehen durch den Volkssport Schwarzfahren jedes Jahr Millionen. Rechnet m an die Quote der bei den Kontrollen ertappten Schwarzfahrer (ca. 5 %) auf die Gesamtzahl der beförderten Personen hoch (ca. 100 Mio. pro Jahr), dann werden aus 36 449 schnell fünf Millionen, die aufs Ticket pfeifen...

   (Quelle: Meine Woche Graz, April 2011, adaptiert)

   In diesem Zeitungsartikel wird der Begriff Schwarzfahrer für Personen, die ohne gültigen Fahrschein angetroffen werden, verwendet. Fahrgäste, die ihre Zeitkarte (z. B. Wochenkarte, Schülerfreifahrtsausweis) nicht bei sich haben, gelten nicht als Schwarzfahrer/innen.

   Nach Angaben der Graz-Linien beträgt der Anteil der Schwarzfahrer/innen etwa 5 %.

   Zwei Kontrolleure steigen an der Haltestelle Jakominiplatz in einen Wagen der Straßenbahnlinie 5 und kontrollieren alle 25 Fahrgäste. An der Haltestelle Hauptplatz steigen sie in einen Wagen der Linie 3 um, in dem sie alle 18 Fahrgäste kontrollieren.

Aufgabenstellung:

(a) Es soll die Wahrscheinlichkeit p_1 berechnet werden, dass die Kontrolleure mindestens eine Schwarzfahrerin/einen Schwarzfahrer ermitteln, aber erst in der Linie 3 auf diese Person treffen. Gib einen geeigneten Term an, mit dem diese Wahrscheinlichkeit p_1 ermittelt werden kann, und berechne diese!

Es sei p_2 die Wahrscheinlichkeit, bereits im Wagen der Linie 5 auf mindestens eine Schwarzfahrerin/einen Schwarzfahrer zu treffen. Begründe, warum p_2 größer als p_1 sein muss, ohne p_2 zu berechnen!

(b) Es wird angenommen, dass bei den durchgeführten Kontrollen nur 1 % aller fünf Millionen Personen, die keinen Fahrschein mithaben, entdeckt werden. Man weiß, dass 10 % dieser fünf Millionen Personen eine Zeitkarte besitzen, die sie aber nicht bei sich haben, und daher nicht als Schwarzfahrer/innen gelten. Wird eine Schwarzfahrerin/ein Schwarzfahrer erwischt, muss sie/er zusätzlich zum Fahrpreis von € 2 noch € 65 Strafe zahlen. Gehe davon aus, dass im Durchschnitt die nicht erwischten Schwarzfahrer/innen jeweils entgangene Einnahmen eines Einzelfahrscheins von € 2 verursachen.

Berechne den in einem Jahr durch die Schwarzfahrer/innen entstandenen finanziellen Verlust für die Grazer Linien!

Das Bußgeld müsste wesentlich erhöht werden, um eine Kostendeckung zu erreichen. Ermittle den neuen Betrag für ein kostendeckendes Bußgeld!

(c) Die Anzahl der entdeckten Schwarzfahrer/innen nahm gegenüber 2009 um 300 ab und betrug 2010 nur mehr 36 449. Man geht davon aus, dass durch verstärkte Kontrollen eine weitere Abnahme der Anzahl an Schwarzfahrerinnen/Schwarzfahrern erreicht werden kann.

Beschreibe diese Abnahme beginnend mit dem Jahr 2009 sowohl als lineares als auch als exponentielles Modell!

Gib jeweils einen Funktionsterm an, der die Anzahl S der Schwarzfahrer/innen nach t Jahren, ausgehend von dem Jahr 2009, beschreibt!

Berechne die Anzahl der Schwarzfahrer/innen nach 10 Jahren, also im Jahr 2019, mit beiden Modellen! Welche Schlussfolgerungen über die beiden Modelle ziehst du aus dem Ergebnis?

Lösungserwartung:

(a) $p_1 = 0{,}95^{25} \cdot (1 - 0{,}95^{18}) \approx 0{,}1672$

Mögliche Argumentationen:

- Die Wahrscheinlichkeit p_1 ist höchstens die Wahrscheinlichkeit, unter 18 Personen mindestens 1 Schwarzfahrer/in zu finden. Die Wahrscheinlichkeit p_2, bereits im Wagen der Linie 5 auf mindestens 1 Schwarzfahrer/in zu treffen, ist größer als die Wahrscheinlichkeit p_1, da die Wahrscheinlichkeit, unter 25 Kontrollierten eher 1 Schwarzfahrer/in anzutreffen, größer ist als unter 18 Kontrollierten.
- Die Wahrscheinlichkeit p_1 ist höchstens die Wahrscheinlichkeit, unter 25 Personen keine Schwarzfahrerin/keinen Schwarzfahrer zu finden. Diese ist kleiner als 0,5. Die Wahrscheinlichkeit p_2 ist die Wahrscheinlichkeit, unter 25 Personen mindestens 1 Schwarzfahrer/in zu treffen. p_2 ist größer als 0,5, also $p_2 > p_1$.

(b) Der zu erwartende Verlust wird wie folgt berechnet:

10 % der Fahrgäste ohne Fahrschein besitzen eine Zeitkarte, daraus folgt, dass 90 % von den 99 % Schwarzfahrer/innen sind.

$V = (-0{,}99 \cdot 0{,}9 \cdot 2 + 0{,}01 \cdot 0{,}9 \cdot 65) \cdot 5\,000\,000 =$

$= (-0{,}891 \cdot 2 + 0{,}009 \cdot 65) \cdot 5\,000\,000 \approx -1{,}197 \cdot 5\,000\,000 \approx$ € -5.985-000

Soll der Verlust $V = 0$ sein, dann gilt: $0 = -0{,}891 \cdot 2 + 0{,}009 \cdot B$

$\rightarrow B =$ € 198.

Das Bußgeld B müsste auf € 198 erhöht werden.

(c) lineare Abnahme: $S(t) = 36\,749 - 300 \cdot t$

exponentielle Abnahme: $S(t) = 36\,749 \cdot (36\,449/36\,749)^t$

Bei linearer Abnahme sind es nach 10 Jahren noch 33 749, bei exponentieller Abnahme 33 857 Personen. Der Unterschied ist gering und beide Modelle sind für diesen Zeitraum gleich gut.

---

15 - MAT - AG 2.1, FA 1.5, FA 2.3, FA 2.5 - Treibstoffverbrauch - BIFIE Aufgabensammlung

6. Fast vier Fünftel aller Güter werden zumindest auf einem Teil ihres Weges vom Erzeuger zum Konsumenten mit dem Schiff transportiert. ____/0

   In der Schifffahrt werden Entfernungen in Seemeilen (1 sm = 1,852 km) und Geschwindigkeiten in Knoten (1 K = 1 sm/h) angegeben.

   Der stündliche Treibstoffverbrauch y des Schiffs *Ozeanexpress* kann in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit x (in Knoten) durch die Gleichung $y = 0{,}00002 * x^4 + 0{,}6$ beschrieben werden. Dieses Schiff hat noch einen Treibstoffvorrat von 600 Tonnen.

Aufgabenstellung:

(a) Gib eine Formel für die Zeit t (in Stunden) an, die das Schiff mit einer konstanten Geschwindigkeit x unterwegs sein kann, bis dieser Treibstoffvorrat aufgebraucht ist.

Die Funktion f soll den Weg $f(x)$ beschreiben, den das Schiff mit diesem Treibstoffvorrat bei einer konstanten Geschwindigkeit x zurücklegen kann. Gib den Term der Funktion f an!

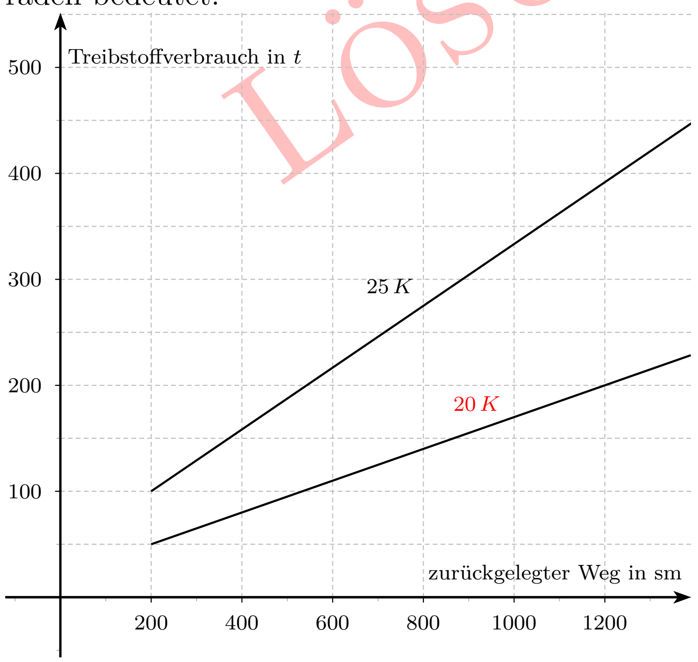
Die Funktion f hat in $H\,(10|7\,500)$ ein Maximum, Interpretiere die Koordinaten dieses Punktes im vorliegenden Kontext!

(b) Der Chef eines Schifffahrtsunternehmens stellte fest, dass sich der Treibstoffverbrauch um rund 50 % verringert, wenn Schiffe statt mit 25 nur noch mit 20 Knoten unterwegs sind.

In der nachstehenden Grafik wird der Treibstoffverbrauch in Abhängigkeit vom zurückgelegten Weg bei einer Geschwindigkeit von 25 Knoten dargestellt.

Überlege, wie sich diese Grafik ändert, wenn die Geschwindigkeit nur 20 Knoten beträgt, und zeichne den entsprechenden Graphen ein!

Interpretiere, was die 50 %ige Treibstoffreduktion für die Steigung der Geraden bedeutet!



(c) Eine Reederei hat den Auftrag erhalten, in einem vorgegebenen Zeitraum eine bestimmte Warenmenge zu transporten. Ursprünglich plante sie, dafür acht Schiffe einzusetzen.

Gib an, wie viele zusätzliche Schiffe gleichen Typs bei einer Drosselung der

Geschwindigkeit von 25 auf 20 Knoten erforderlich sind, damit der Auftrag zeitgerecht ausgeführt werden kann (Die Stehzeiten der Schiffe sind dabei zu vernachlässigen)

Gib eine Formel an, mit der die erforderliche Anzahl der Schiffe in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit x ermittelt werden kann!

Lösungserwartung:

(a) $t = \frac{600}{0{,}00002x^4 + 0{,}6}$; $f(x) = \frac{600}{0{,}00002x^4 + 0{,}6} \cdot x$

Bei einer Geschwindigkeit von 10 Knoten kann mit dem vorhandenen Treibstoff die längste Strecke, nämlich 7 500 Seemeilen, zurückgelegt werden.

(b) Grafik siehe oben

Die Steigung der Geraden wird halbiert, wenn der Treibstoffverbrauch um 50 % reduziert wird.

(c) Es müssen zwei weitere Schiffe eingesetzt werden.

Anzahl der Schiffe $= \frac{200}{x}$

---

16 - MAT - FA 1.6, FA 2.3, FA 1.5, FA 2.2, AN 3.3, AN 1.3 - Produktionskosten - BIFIE Aufgabensammlung

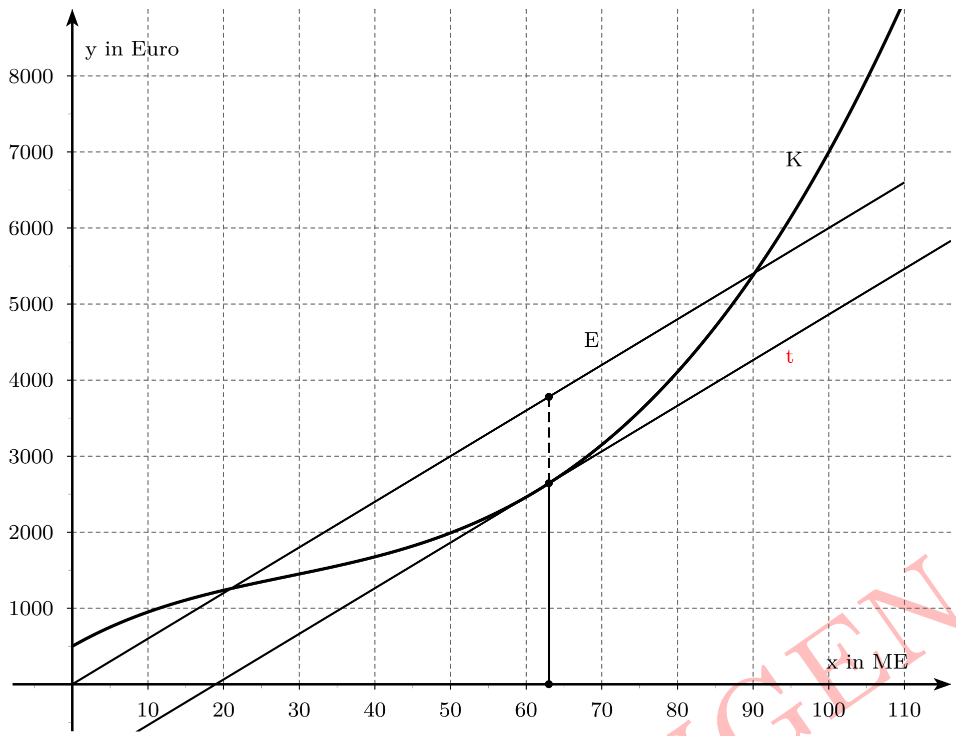
7. Die Produktionskosten eines Betriebes setzen sich aus Fixkosten und variablen Kosten zusammen und können durch eine Kostenfunktion beschrieben werden. Fixkosten fallen auf jeden Fall an und sind unabhängig von der produzierten Menge. Variable Kosten hingegen nehmen mit steigender Produktionsmenge zu. ____/0

   Die Kostenkehre ist jene Produktionsmenge, ab der die variablen Kosten immer stärker steigen, in diesem Fall spricht man von einem progressiven Kostenverlauf. Vor der Kostenkehre ist der Kostenverlauf degressiv, das heißt, die Kosten steigen bei zunehmender Produktionsmenge immer schwächer.

   Der Verkaufserlös ist das Produkt aus der verkauften Stückzahl und dem Verkaufspreis pro Stück.

   Die untenstehende Abbildung zeigt die Graphen der Kostenfunktion K und der Erlösfunktion E des Betriebes, wobei x die Anzahl der produzierten und verkauften Mengeneinheiten (ME) pro Tag ist. 1 ME entspricht einer Verpackungseinheit von 100 Stück. Pro Tag können höchstens 110 ME produziert werden.

Der Gewinn ist die Differenz aus Erlös und Produktionskosten.



Aufgabenstellung:

(a) Ermittle anhand der obigen Abbildung den Gewinnbereich, das sind jene Stückzahlen (1 ME = 100 Stück), für die der Betrieb Gewinn erzielt!

Beschreibe, wie sich eine Senkung des Verkaufspreises auf den Verlauf des Graphen der Erlösfunktion E auswirkt und wie sich dadurch der Gewinnbereich verändert!

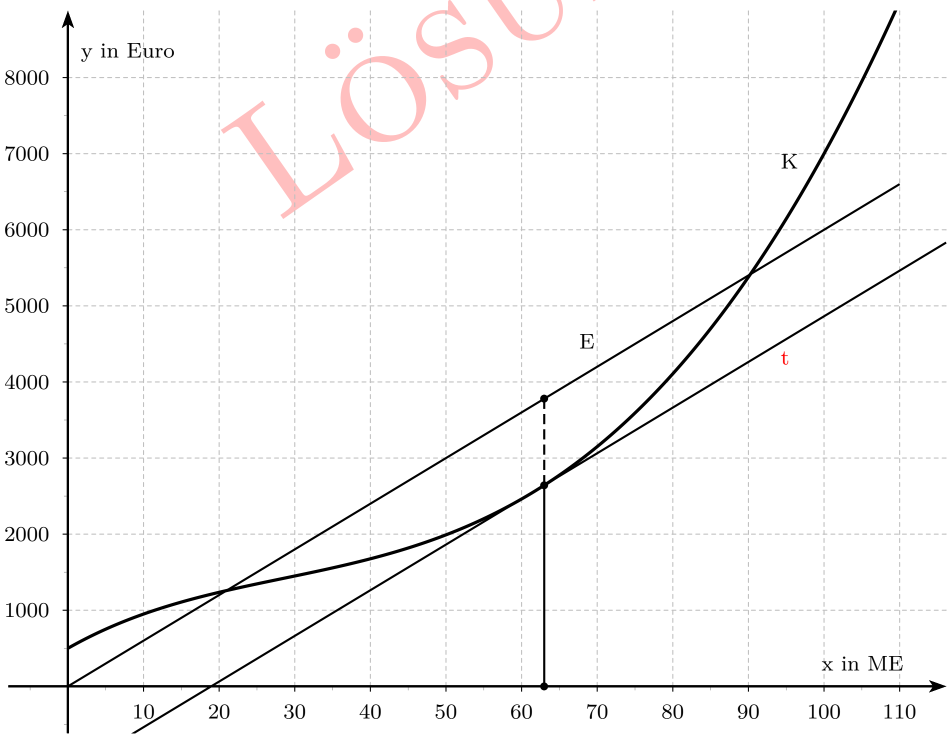
(b) Bestimme anhand der Abbildung die Fixkosten und den Verkaufspreis pro ME möglichst genau!

(c) Welche der nachstehenden Aussagen treffen für die in der Grafik abgebildeten Produktionskosten zu? Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an!

Bei degressivem Kostenverlauf gilt: $K'(x) < 0$.	
Bei progressivem Kostenverlauf gilt: $K''(x) > 0$.	⊠
Bei der Kostenkehre gilt: $K'(x) = 0$.	
Für alle x aus dem Definitionsbereich [0 ME; 110 ME] gilt: $K'(x) > 0$.	⊠
Es gilt: K'(50)>K'(90).	

Erkläre ausführlich, was die 1. und die 2. Ableitung der Kostenfunktion an einer bestimmten Stelle über den Verlauf des Graphen von K an dieser Stelle aussagen!

(d) Deute die Beziehung $K'(x) = E'(x)$ geometrisch und ermittle anhand der nachstehenden Abbildung jene Produktionsmenge x_1 fpr die dies zutrifft! Begründe, warum der erzielte Gewinn bei dieser Produktionsmenge x_1 am größten ist!



Lösungserwartung:

(a) Die Antwort ist als richtig zu werten, wenn **beide** Grenzen des Grenzbereichs richtig angegeben sind, z.B.: *Bei einer Produktion von 2 000 bis 9 000 Stück wird Gewinn erzielt* (Toleranz bei Gewinngrenzen: ±100 Stück).

Weiters muss eine richtige Interpretation angeführt sein, wie sich eine Senkung des Verkaufspreises auf den Gewinnbereich auswirkt, z.B.: *Bei einer Senkung des Verkaufspreises verläuft der Graph von E flacher, wodurch der Gewinnbereich kleiner ("'schmäler"') wird.*

Als richtig zu werten ist auch die Antwort, dass bei einer starken Senkung des Verkaufspreises bei allen Produktionsmengen Verlust erzielt wird.

(b) **Fixkosten:** 500 Euro (Toleranz: ±100 Euro)

Verkaufspreis pro ME: $\frac{3000}{50} = 60$ Euro (Toleranz: ±5 Euro)

Falls der Verkaufspreis durch ein "'zu kleines"' Steigungsdreieck sehr ungenau abgelesen wird (z.B.: 50 Euro), so ist das Ergebnis als falsch zu werten.

(c) Lösung Multiple Choice siehe oben

Zudem muss eine Erklärung angegeben sein, z.B.:

$K'(x)$ beschreibt die Steigung der Kostenfunktion (oder: Steigung der Tangente) an der Stelle x (bei Produktion von x ME).

$K''(x)$ beschreibt die Änderung der Steigung, also das Krümmungsverhalten der Kostenfunktion an der Stelle x.

Im degressiven Bereich ist der Graph von K rechtsgekrümmt und im progressiven Bereich ist der Graph von K linksgekrümmt.

Auch folgende bzw. alle anderen inhaltlich richtigen Formulierungen sind als richtig zu werten:

K' beschreibt das Monotonieverhalten von K, d.h. falls $K'(x) > 0$ ist, steigt K an der Stelle x.

K'' beschreibt das Monotonieverhalten von K', d.h. falls $K''(x) > 0$ ist, steigt K' an der Stelle x (d.h., die Kostensteigerung nimmt zu).

Anmerkung: Aus der Antwort muss jedenfalls ersichtlich sein, welche geometrische Bedetuung K' und K'' besitzen, der Begriff *Monotonieverhalten* alleine ist nicht ausreichend.

(d) Die Antwort ist als richtig zu werten, wenn die richtige geometrische Deutung angegeben ist und x_1 bestimmt ist (falls x_1 nur eingezeichnet ist, der Wert aber nicht angegeben ist, so ist dies auch als richtig zu werten), z. B.: Geometrisch bedeutet dies, dass der Graph von K und der Graph von E an dieser Stelle die gleiche Steigung besitzen.

Oder: Die Tangente t an den Graphen von K verläuft parallel zum Graphen von E. Dies ist bei ca. 63 ME der Fall (Toleranz: ± 3 ME).

Zudem muss die Interpretation angegeben sein, dass an der gesuchten Stelle $G'(x) = 0$ gilt und somit $G(x_1)$ der maximale Gewinn ist, z. B.: *Wegen der Beziehung* $G(x) = E(x) - K(x)$ *gilt:* $G'(x) = E'(x) - K'(x)$.

Somit gilt: $G'(x_1) = E'(x_1) - K'(x_1) = 0$ *und* $G(x_1)$ *ist daher der maximale Gewinn.*

(Anmerkung: Der Nachweis des Maximums (Monotoniewechsel von G an der Stelle x_1 ist nicht erforderlich.)

Auch die geometrische Begründung, dass der vertikale Abstand zwischen Erlös- und Kostenkurve an der Stelle x_1 am größten ist, ist als richtig zu werten, falls dieser Abstand (strichlierte Linie) richtig eingezeichnet ist.

Lösung der Graphik: siehe oben!

---

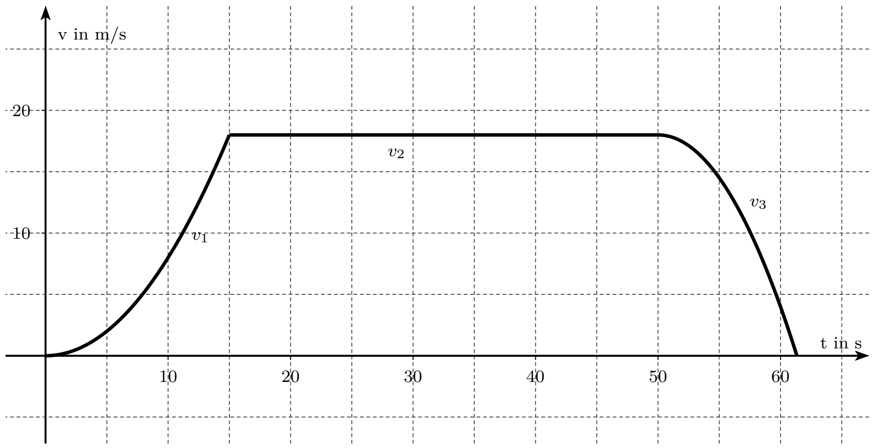
18 - MAT - AN 1.3, FA 1.7, FA 5.3 - Wiener U-Bahn - BIFIE Aufgabensammlung

8. Die Wiener U-Bahn-Linie U2 verkehrt zwischen den Stationen *Karlsplatz* und *Aspernstraße*. Die Gesamtstrecke der U2 beträgt 12,531 km (Stand 2012). ____/0

   Zwischen den beiden Stationen *Donaumarina* und *Donaustadtbrücke* fährt die U-Bahn nahezu geradlinig und benötigt für diese 855 m lange Strecke ca. eine Minute.

   Betrachtet man die Geschwindigkeit eines Zuges zwischen diesen beiden Stationen, so lässt sie sich näherungsweise durch drei Funktionen beschreiben. Diese Funktionen sind im nachstehenden Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm dargestellt. Die Zeit t ist in Sekunden, die Geschwindigkeit v in m/s angegeben.

$$\begin{aligned} v_1(t) &= 0{,}08t^2 && [0;15) \\ v_2(t) &= 18 && [15;50) \\ v_3(t) &= -0{,}14(t-50)^2 + 18 && [50;61{,}34] \end{aligned}$$



Aufgabenstellung:

(a) Berechne die Länge desjenigen Weges, den die U-Bahn im Zeitintervall $[15; 50]$ zurückgelegt!

Um den Bremsvorgang zu modellieren, wurde die Funktion $v_3(t) = -0{,}14(t-50)^2 + 18$ verwendet.

Erläutere, in welcher Weise eine Veränderung des Parameters von $-0{,}14$ auf $-0{,}2$ den Bremsvorgang beeinflusst!

(b) Berechne die mittlere Beschleunigung des Zuges vom Anfahren bis zum Erreichen der Höchstgeschwindigkeit.

Erkläre, wieso der Verlauf des Graphen des $v-t$-Diagramms im Intervall $[14; 16]$ nicht exakt der Realität entsprechen kann!

Lösungserwartung:

(a) $18 \cdot (50 - 15) = 630$ - Der Weg ist 630 m lang.

Eine Veränderung des Parameters von $-0{,}14$ auf $-0{,}2$ würde bedeuten, dass der Zug "‘stärker"’ (d.h. mit einer größeren negativen Beschleunigung) bremst und daher rascher zum Stillstand kommt. Auch der Bremsweg verkürzt sich.

(b) Mittlere Beschleunigung: $\overline{a_1}(0; 15) = \frac{v_1(15)-v_1(0)}{15-0} = \frac{18}{15} = 1{,}2\, m/s^2$

Bei diesem Geschwindigkeitsverlauf würden die Fahrgäste einen zu starken Ruck bei 15 s verspüren. Um diesen Ruck zu vermeiden, müsste in Wirklichkeit die Geschwindigkeitsfunktion ihre Steigung allmählich ändern, sodass kein Knick (wie jetzt) entsteht. Der Knick des Funktionsgraphen würde einen plötzlichen Sprung der Beschleunigung und somit einen für die Fahrgäste unangenehmen Ruck bedeuten. (Adäquate Erklärungen sind als richtig zu werten.)

Lösungsschlüssel:

(a) - 1 Grundkompetenzpunkt für die Berechnung der Weglänge

- 1 Reflexionspunkt für die Erläuterung. Äquivalente Antworten sind ebenfalls zu werten, sofern sie klar formuliert sind und sinngemäß eines der folgenden Schlüsselwörter enthalten: *kürzerer Bremsweg, schnellerer Stillstand, stärkere negative Beschleunigung, stärkere Bremsung.*

(b) -1 Grundkompetenzpunkt für die Berechnung der mittleren Beschleunigung

-1 Reflexionspunkt für die Erklärung. Äquivalente Antworten sind ebenfalls zu werten, sofern sie klar formuliert sind und sinngemäß eines der folgenden Schlüsselwörter enthalten: *plötzlicher Ruck, unstetige Änderung der Steigung, ruckartige Beschleunigungsveränderung.*

---

20 - MAT - AN 1.1, AN 1.3, FA 1.1, FA 2.2, FA 3.1 - Höhe der Schneedecke - BIFIE Aufgabensammlung

9. Die Höhe $H(t)$ einer Schneedecke nimmt aufgrund von Witterungseinflüssen mit der Zeit t ab. Zuerst ist die Abnahme gering, mit der Zeit wird sie aber immer stärker. Daher kann die Höhe der Schneedecke durch folgende quadratische Funktion $H(t)$ beschrieben werden: ____/0

$$H(t) = H_0 - a \cdot t^2 \text{ mit } a > 0, t \geq 0$$

(H wird in cm und t in Tagen gemessen, H_0 beschreibt die Schneehöhe zu Beginn der Messung)

Das beschriebene Modell gilt in guter Näherung bei einer Witterung mit gleichbleibender Temperatur bis zur vollständigen Schneeschmelze. Dabei wird vorausgesetzt, dass bis zur vollständigen Schneeschmelze kein weiterer Schnee hinzukommt.

Aufgabenstellung:

(a) Eine 20 cm dicke Schneedecke reduziert sich innerhalb von 12 Stunden auf 18 cm. Nach wie vielen Tagen (von Anfang an) ist der Schnee gänzlich geschmolzen? Gib die Lösung auf zwei Dezimalstellen genau an!

Wie wirkt sich eine Erhöhung des Parameters a auf $H(t)$ aus? Begründe deine Antwort!

(b) In einem Alpendorf gilt für die Schneehöhe H (gemessen in cm) und die Zeit t (gemessen in Tagen) der folgende funktionale Zusammenhang:

$$H(t) = 40 - 5t^2$$

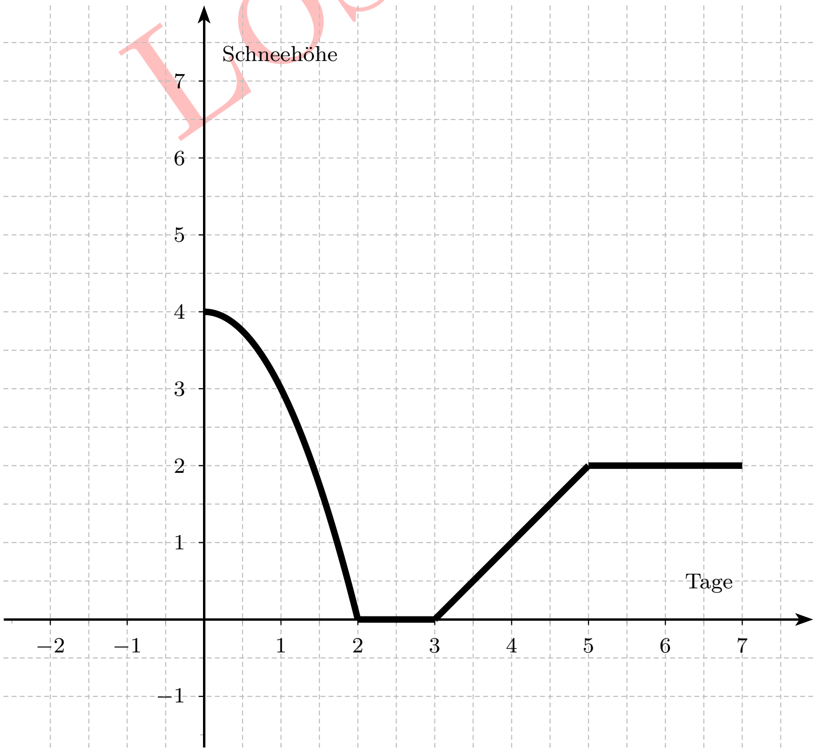
Wie hoch ist die mittlere Änderungsrate der Schneehöhe innerhalb der ersten beiden Tage nach Beginn der Messung? Berechne diese!

Begründe, warum die Berechnung der mittleren Änderungsrate im Zeitintervall $[0;3]$ mithilfe der angegebenen Funktion nicht sinnvoll ist, um Aussagen über den Verlauf der Höhe der Schneedecke zu machen!

(c) Berechne $H'(0{,}5)$ für $H(t) = H_0 - a \cdot t^2$ und $a = 3$!

Deute das Ergebnis hinsichtlich der Entwicklung der Schneehöhe H!

(d) Der nachstehende Graph beschreibt idealisiert den Verlauf der Schneehöhe in Dezimetern innerhalb einer Woche in einem Alpendorf.



Handelt es sich bei diesem Graphen um eine auf $[0;7]$ definierte Funktion? Begründe deine Antwort!

Bestimme die Gleichung $y = k \cdot x + d$ mit $k, d \in \mathbb{R}$ einer Funktion f, welche den Graphen im Intervall $[3; 5]$ beschreibt!

Lösungserwartung:

(a) Frage 1: $18 = 20 - a \cdot 0{,}5^2 \Rightarrow a = 8; 20 - 8t^2 = 0 \Rightarrow t = 1{,}58$ Tage

Frage 2: Je größer a, desto schneller nimmt die Schneehöhe ab!

(b) Frage 1: $\frac{H(2)-H(0)}{2} = \frac{20-40}{2} = -10$ cm/Tag

Frage 2: Der Anwendungsbereich (Definitionsbereich) der Formel $H(t)$ liegt im Bereich $[0; \sqrt{8}]$, wobei $\sqrt{8} \approx 2{,}8$ die positive Nullstelle von $H(t)$ ist.

Da $[0; 2{,}8]$ eine Teilmenge des Intervalls $[0; 3]$ ist, ist die Berechnung des Differenzenquotienten im Intervall $[0; 3]$ nicht sinnvoll.

Oder:

An der Stelle $t = 3$ wird der Funktionswert $H(t)$ negativ. Die Schneehöhe H kann allerdings nicht negativ sein, daher ist die Berechnung der mittleren Änderungsrate im Intervall $[0; 3]$ nicht sinnvoll.

(c) Frage 1: $H(t) = H_0 - 3 \cdot t^2$

$H'(t) = -6 \cdot t$

$H'(0{,}5) = -3$ cm/Tag

Frage 2: Nach $t = 0{,}5$ Tagen nimmt die Höhe der Schneedecke mit einer Geschwindigkeit von 3 cm/Tag ab.

(d) Frage 1: Der Graph beschreibt eine Funktion, da jedem Zeitpunkt x genau eine Schneehöhe y zugeordnet wird.

Frage 2:

$f(3) = 0 \Rightarrow 0 = k \cdot 3 + d$

$f(5) = 2 \Rightarrow 2 = k \cdot 5 + d$

daher: $k = 1; d = -3$

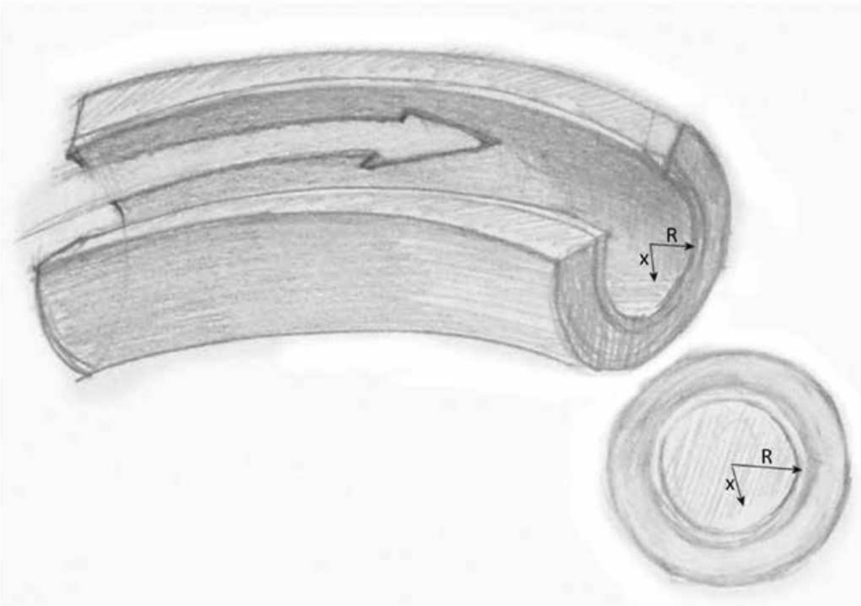
$y = x - 3$

---

21 - MAT - AG 2.1, AN 1.3, AN 2.1, FA 1.7 - Blutgefäß - BIFIE Aufgabensammlung

10. In einem Blutgefäß hingt die Geschwindigkeit v des Blutes davon ab, wie groß der Abstand x zum Mittelpunkt ist. ein gültiger Zusammenhang zwischen der ____/0

Geschwindigkeit v und dem Abstand x kann mittels einer Formel $v(x) = v_m \cdot (1 - \frac{x^2}{R^2})$ modelliert werden.



(Quelle: http://www.gefaesschirurgie -klinik.de/patienteninformationen/arterienverkalkung.php, ergänzt durch Pfeile und Beschriftung)

Die in der Formel auftretenden Größen sind im Foglenden beschrieben:

R ... Innenradius des Blutgefäßes in mm

v_m ... maximale Geschwindigkeit des Blutes im Mittelpunkt des Blutgefäßes in cm/s

x ... Abstand vom Mittelpunkt des Blutgefäßes in mm

$v(x)$ ... Geschwindigkeit des Blutes bei Abstand x vom Mittelpunkt des Blutgefäßes in cm/s

Aufgabenstellung:

(a) Gib einen Definitionsbereich für x an, der für das Blutgefäß sinnvoll ist, und begründe, warum die Formel eine vereinfachte Beschreibung der Blutgeschwindigkeit ist!

(b) In einem Lehrbuch der Medizin wird bhauptet, dass beim Abstand $x = \frac{R}{2}$ die Geschwindigkeit des Blutes 75 % vom maximalen Wert beträgt. Um diese Aussage mathematisch zu beweisen, wird der Ansatz $v(x) = \frac{3}{4}\, v_m$ gemacht, und damit wird die Stelle x berechnet.

Führe die Berechnung von der Stelle x aus und zeige, dass man mit der Berechnung des Funktionswertes $v\left\langle\frac{R}{2}\right\rangle$ zum gleichen Ergebnis kommt!

(c) Forme die gegebene Formel für $v(x)$ so um, dass man eine Funktion $x(v)$ erhält!

Erläutere, was der Funktionswert $x\left(\frac{v_m}{2}\right)$ für die Blutströmung bedeutet!

(d) Gib die momentane Änderungsrate der Geschwindigkeit v (bei Veränderung von x) beim Abstand x an und gib an, was das Vorzeichen der Änderungsrate über das Verhalten der Blutströmung aussagt!

Lösungserwartung:

(a) Der Definitionsbereich ist $[0; R]$ (Minimalanforderung: Angabe des Intervalls).

Negative Abstände ($x < 0$) sind sinnlos, und $x > R$ würde bedeuten, dass das Blutkörperchen außerhalb des Blutgefäßes ist.

Die Formel ist deswegen eine Vereinfachung, weil das Blut am Innenrand des Blutgefäßes bestimmt nicht die Geschwindigkeit 0 hat.

Außerdem setzt die Formel voraus, dass das Blutgefäß an jeder Stelle einen kreisförmigen Querschnitt mit einem konstanten Radius R hat bzw. dass das Blutgefäß exakt zylinderförmig ist (Venen haben auch Venenklappen).

Schließlich strömt das Blut zeitlich nicht mit konstanter Geschwindigkeit, die Blutgeschwindigkeit verändert sich periodisch.

(b) Lösungsweg 1:

Umformen: $\frac{3}{4}v_m = v_m \cdot \left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right) \Rightarrow \frac{3}{4} = 1 - \frac{x^2}{R^2} \Rightarrow \frac{x^2}{R^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{R}{2}$

Lösungsweg 2:

$v\left(\frac{R}{2}\right) = v_m \cdot \left(1 - \frac{R^2}{4 \cdot R^2}\right) = v_m \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) = v_m \cdot \frac{3}{4}$

An der genannten Stelle ist der Funktionswert wieder 75 % von v_m.

(c) $x(v) = R \cdot \sqrt{1 - \frac{v}{v_m}}$

$x\left(\frac{v_m}{2}\right)$ ist jener Abstand vom Mittelpunkt des Blutgefäßes, bei dem die Strömungsgeschwindigkeit auf die Hälfte des Maximalwertes abgesunken ist.

(d) $v'(x) = -v_m \cdot \frac{2x}{R^2}$

Das negative Vorzeichen bedeutet, dass die Geschwindigkeitsfunktion im gesamten Definitionsbereich $[0; R]$ streng monoton fallend ist. Für die Blutströmung bedeutet das, dass die Geschwindigkeit des Blutes vom Mittelpunkt der Vene bis zum Rand der Vene abnimmt.

Auch eine kurze Formulierung ist als korrekt zu werten: Negatives Vorzeichen $\rightarrow$ Geschwindigkeit nimmt ab.

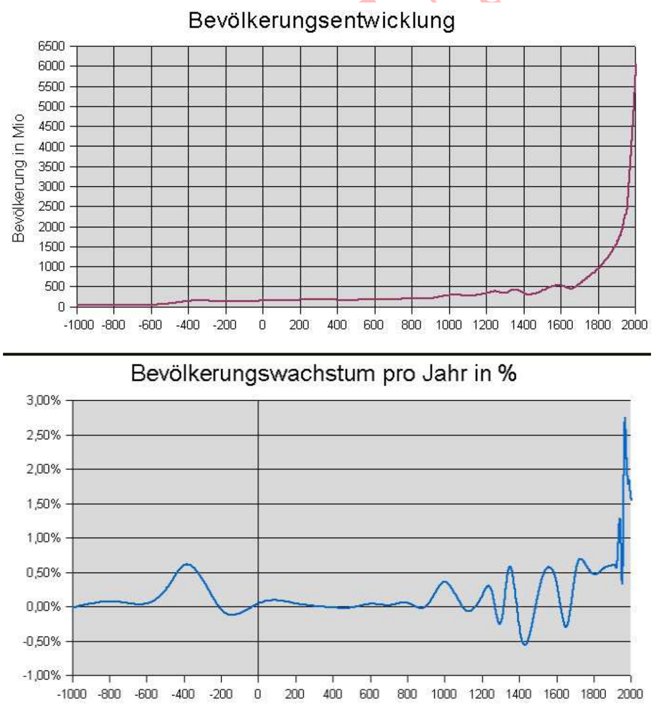
---

24 - MAT - AN 1.1, FA 2.2, FA 5.2, FA 5.3, FA 5.6, WS 1.1, WS 1.2 - Bevölkerungsentwicklung - BIFIE Aufgabensammlung

11. Die Weltbevölkerung ist in den vergangenen Jahrhunderten unterschiedlich stark gewachsen. Für die weitere Entwicklung bis zum Ende dieses Jahrhunderts gibt es unterschiedliche Prognosen. ____/0

    Abbildung 1 zeigt die Bevölkerungsentwicklung in den vergangenen 3 000 Jahren.
    Abbildung 2 zeigt die Bevölkerungsentwicklung von 1750 bis 2010.
    Abbildung 3 zeigt die Bevölkerungsentwicklung von 1950 bis 2010.

    Die untenstehende Tabelle zeigt die Bevölkerungsentwicklung nach Kontinenten und Subkontinenten von 1900 bis 2000.



Quelle: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/8a/World-pop-hist-de-2.png

Abbildung 1

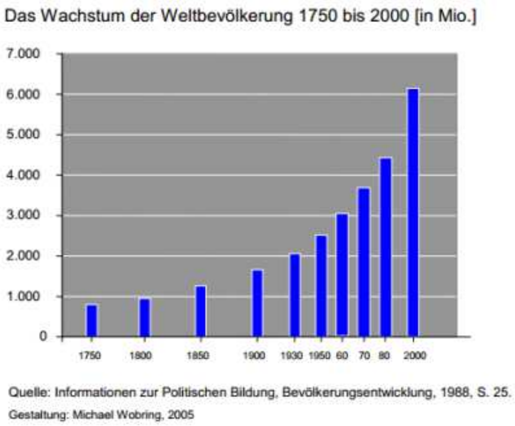


Abbildung 2

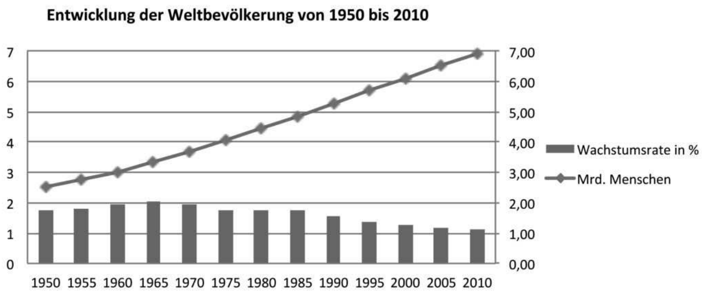


Abbildung 3

Jahr	Afrika	Asien	Europa	Lateinamerika	Nordamerika	Ozeanien
1900	133	925	430	74	82	6
1950	227	1 403	547	167	172	13
1975	419	2 379	676	323	242	21
2000	819	3 698	727	521	319	31

Aufgabenstellung:

(a) Ermittle anhand der Abbildungen, um wie viele Menschen die Weltbevölkerung von 1600 bis 18000 zugenommen hat!

Nenne zwei Zeiträume, in denen die Weltbevölkerung mindesten 100 Jahre lang abgenommen hat, und begründe ihre Antwort!

(b) Die Weltbevölkerung hat von 1930 bis 1980 annähernd exponentiell zugenommen. Berechne unter dieser Annahme für diesen Zeitraum die jährliche Wachstumsrate auf Zehntelprozent genau!

(c) Begründe anhand der jährlichen Wachstumsraten aus Abbildung 3, warum die Entwicklung der Weltbevölkerung von 1950 bis 2010 nicht durch eine Exponentialfunktion beschrieben werden kann!

Bei konstanter Zunahme der Bevölkerungszahl ab 2010 wird für das Jahr 2050 eine Bevölkerungszahl von 10,4 Milliarden prognostiziert.
Berechne, von welcher jährlichen Zunahme bei dieser Prognose ausgegangen wird! Gib die jährliche Zunahme in Millionen Menschen an!

(d) Angenommen, die absoluten Zahlen der Bevölkerungsentwicklung der Kontinente und Subkontinente im Zeitraum von 1900 bis 2000 werden in einem Säulendiagramm mit linearer Skalierung dargestellt.

Begründe, warum die starke Bevölkerungszunahme in Ozeanien von 1900 bis 2000 in einem solchen Diagramm nicht erkennbar ist!

Gegeben sind fünf Aussagen zur Bevölkerungsentwicklung nach Kontinenten und Subkontinenten von 1900 bis 2000.
Kreuze die zutreffende(n) Aussage(n) an!

Die Bevölkerung Asiens hat sich im 20. Jahrhundert annähernd vervierfacht.	⊠
Seit Beginn des 20. Jahrhunderts lebten in Lateinamerika mehr Menschen als in Nordamerika.	
Im Zeitraum von 1975 bis 2000 war die relative Bevölkerungszunahme in Afrika am größten.	⊠
In Europa war die Bevölkerungszunahme von 1975 bis 2000 ge- ringer als von 1950 bis 1975.	⊠
1950 lebten in Europa und Amerika zusammen bereits mehr als eine Milliarde Menschen.	

Lösungserwartung:

(a) Zunahme von 1600 bis 1800: ca. 500 Millionen Menschen

Die Weltbevölkerung hat mindestens 100 Jahre lang abgenommen in [250 v. Chr.; 50 v. Chr.] (bzw. $[-250; -50]$) und $[1400; 1500]$, da in diesen Zeitintervallen das jährliche Bevölkerungswachstum in % negativ ist.

(b) $N(t) = N_0 \cdot a^t$

$4{,}5 = 2 \cdot a^5 0$

$a \approx 1{,}016$, d.h. Zunahme um 1,6 % pro Jahr

(c) Bei einer exponentiellen Zunahme ist die jährliche Wachstumsrate konstant. Abbildung 3 zeigt, dass diese Voraussetzung im Zeitraum von 1950 bis 2010 nicht erfüllt ist.

Konstante jährliche Zunahme von 2010 bis 2050:
$\frac{10{,}4-6{,}9}{40} = 0{,}0874$ Milliarden $= 87{,}5$ Millionen

(d) Da die Bevölkerungszahl Ozeaniens von 1900 bis 2000 jeweils weniger als 1 % der Bevölkerungszahl Asiens betrug, sind die entsprechenden Säulen

für Ozeanien sehr niedrig (Höhe fast null).
Daher ist die Verfünffachung der Bevölkerungszahl Ozeaniens nicht erkennbar.
Lösung Multiple Choice siehe oben

---

25 - MAT - AN 4.3, AN 1.3, AN 3.3, FA 2.3, AG 2.3, AN 4.3 - Bewegung eines Fahrzeugs - BIFIE Aufgabensammlung

12. Im Folgenden wird die Bewegung eines Fahrzeugs beschrieben: ____/0

In den ersten fünf Sekunden seiner Bewegung fährt es mit einer Momentangeschwindigkeit (in m/s), die durch die Funktion v mit $v(t) = -0{,}8t^2 + 8t$ (mit t in Sekunden) modelliert werden kann. In den folgenden drei Sekunden sinkt seine Geschwindigkeit.
Ab der achten Sekunde bewegt es sich mit einer konstanten Geschwindigkeit von 15 m/s. Nach zehn Sekunden Fahrzeit erkennt der Lenker ein Hindernis in 90 m Entfernung und reagiert eine Sekunde später. Zu diesem Zeitpunkt beginnt er gleichmäßig zu bremsen und schafft es, rechtzeitig beim Hindernis anzuhalten.

Aufgabenstellung:

(a) Interpretiere den Ausdruck $\int_0^5 v(t)\,dt$ im Hinblick auf die Bewegung des Fahrzeugs!

Gib die Bedeutung des Ausdrucks $\frac{\int_0^5 v(t)dt - \int_0^2 v(t)dt}{3}$ im vorliegenden Kontext an!

(b) Interpretiere den Wert $v'(3)$ im Zusammenhang mit der Bewegung des Fahrzeugs! Die Ableitungsfunktion v' ist eine lineare Funktion.

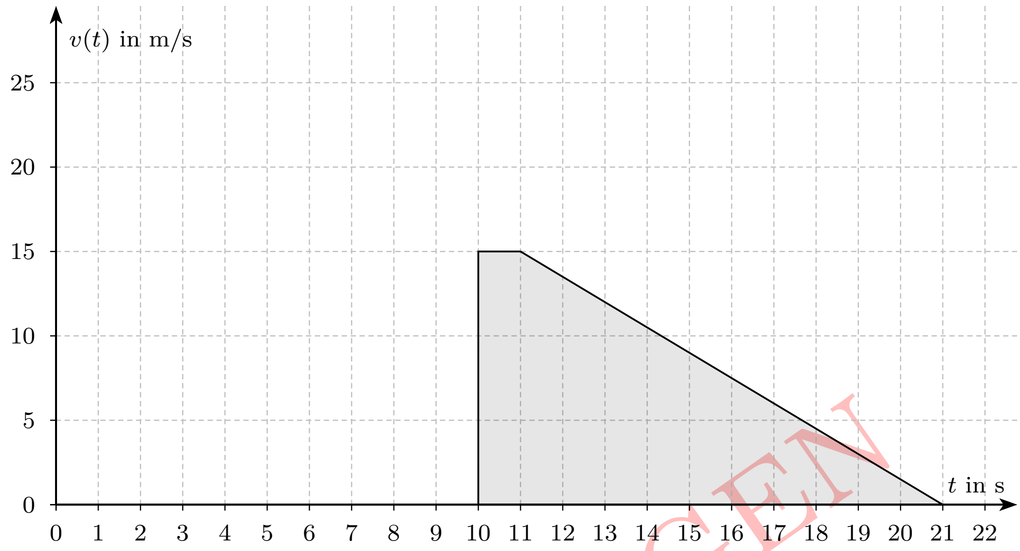
Bestimme ihren Anstieg und gib dessen Bedeutung im Hinblick auf die Bewegung des Fahrzeugs in den ersten fünf Sekunden an!

(c) Ermittle, nach wie vielen Sekunden das Fahrzeug eine Momentangeschwindigkeit von 20 m/s erreicht!

Beschreibe (verbal und/oder mithilfe einer Skizze) den Geschwindigkeitsverlauf in den ersten fünf Sekunden!

(d) Der Anhalteweg setzt sich aus dem Reaktionsweg und dem Bremsweg zusammen. Be- rechnen Sie die Zeit, die vom Einsetzen der Bremswirkung elf Sekunden nach Beginn der Bewegung bis zum Stillstand des Fahrzeugs verstreicht!

Stellen Sie den Geschwindigkeitsverlauf ab dem Zeitpunkt $t = 10$ in der angegebenen Ab- bildung graphisch dar und kennzeichnen Sie den Anhalteweg!



Lösungserwartung:

(a) Das Integral $\int_0^5 v(t)dt$ gibt die Länge des Weges in Metern an, den das Fahrzeug in den ersten fünf Sekunden seiner Bewegung zurücklegt.

Anmerkung: Die Antwort muss die Einheit m und das Zeitintervall beinhalten.

Der Ausdruck $\dfrac{\int_0^5 v(t)dt - \int_0^2 v(t)dt}{3}$ gibt die durchschnittliche Geschwindigkeit in m/s des Fahrzeugs im Zeitintervall $[2; 5]$ an.

Anmerkung: Äquivalente Formulierungen sind zu akzeptieren.

(b) $v(t) = -0{,}8t^2 + 8t$

$v'(t) = -1{,}6t + 8$

$v'(3) = 3{,}2$

Die Beschleunigung 3 Sekunden nach dem Beginn der Bewegung beträgt $3{,}2\,\mathrm{m/s^2}$.

Anmerkung: Der Zeitpunkt und der Begriff "'Beschleunigung"' müssen angegeben werden.

Die Beschleunigung nimmt pro Sekunde um $1{,}6\,\mathrm{m/s^2}$ ab.

Anmerkung: Die Einheit $\mathrm{m/s^2}$ muss angegeben werden.

(c) $v(t) = -0{,}8t^2 + 8t = 20$

$-0{,}8t^2 + 8t - 20 = 0 \qquad t_1 = t_2 = 5$

Die Geschwindigkeit steigt im gegebenen Zeitintervall an und erreicht nach 5 Sekunden ihr Maximum von 20 m/s.

Skizzen von Parabeln, die diese Aussage belegen, und äquivalente Formulierungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

Anmerkung: Die Beantwortung der ersten Frage kann auch auf anderem Wege erfolgen. Somit kann daraus auch umgekehrt auf die Anzahl der Lösungen der quadratischen Gleichung, ohne diese zu lösen, geschlossen werden.

(d) $A = 90 = 15 \cdot 1 + \frac{15 \cdot t}{2}$

Der Bremsweg wird in 10 Sekunden zurückgelegt.

Graphik: siehe oben

Auch andere Lösungswege (z.B. mit Formeln aus der Physik) sind zu akzeptieren.

---

26 - MAT - AG 2.1, FA 1.8, FA 1.7, FA 1.8, AG 2.1, FA 1.2 - Hohlspiegel - BIFIE Aufgabensammlung

13. In der Physik spricht man von einem kugelförmigen Hohlspiegel, wenn er Teil einer innenverspiegelten Kugel ist. Charakteristische Punkte beim Hohlspiegel sind der Mittelpunkt M der Kugel, der Scheitelpunkt S und der Brennpunkt F des Spiegels. ____/0

Es gelten folgende Relationen (siehe untenstehende Abbildungen):

Brennweite f des Spiegels: $f = \overline{FS} = \frac{\overline{MS}}{2} (f > 0)$
Radius der Kugel: $\overline{MS} = 2 \cdot f$

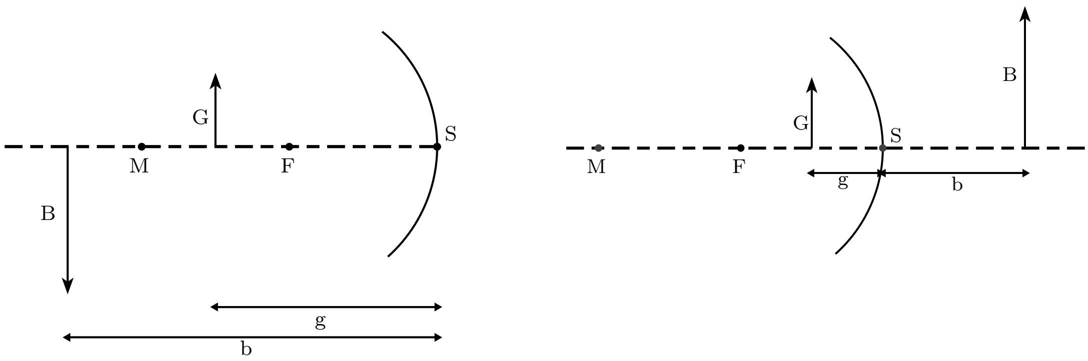
Die Entfernung eines Gegenstands G (mit der Höhe G) vom Scheitelpunkt S wird mit g $(g > 0)$ bezeichnet, die Entfernung des nach Reflexion der Strahlen am Spiegel entstehenden Bildes B (mit der Höhe B) vom Scheitel S mit b.

Das Vorzeichen von b hat dabei die folgenden Bedeutungen:

- $b > 0$: Es entsteht ein reelles Bild "'vor"' dem Spiegel, das auf einem Schirm aufgefangen werden kann.
- $b < 0$: Es entsteht ein virtuelles Bild "'hinter"' dem Spiegel.

Skizzen des Querschnitts:

- linke Grafik: reelles Bild B eines Gegenstandes G $(b > 0)$
- rechte Grafik: virtuelles Bild B eines Gegenstandes G $(b < 0)$



Aufgrund physikalischer Überlegungen gelten unter bestimmten Bedingungen die Beziehungen $\frac{G}{B} = \frac{g}{b}$ und $\frac{G}{B} = \frac{g-f}{f}$. Daraus ergibt sich der Zusammenhang $\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$.

Der Quotient $\frac{B}{G}$ bestimmt den Vergrößerungsfaktor; er ist bei einem reellen Bild positiv ($g > 0$ und $b > 0$) und bei einem virtuellen Bild negativ ($g > 0$ und $b < 0$).

Aufgabenstellung:

(a) Gib den Vergrößerungsfaktor $\frac{B}{G}$ für $f = 40\,\text{cm}$ und $g = 50\,\text{cm}$ an!

Gib ein Intervall für die Gegenstandsweite g an, damit ein virtuelles Bild entsteht!

Begründe deine Antwort durch eine mathematische Argumentation!

(b) Stellen Sie die Bildweite b als Funktion der Gegenstandsweite g bei konstanter Brennweite f dar! Betrachte die Fälle $g = 2f$ sowie $g = f$ und gib die jeweilige Auswirkung für b an!

Was kann mithilfe dieser Funktion über den Grenzwert von b ausgesagt werden, wenn $g > f$ ist und sich g der Brennweite f annähert? Tätige eine entsprechende Aussage und begründe diese durch Betrachtung von Zähler und Nenner!

(c) Leite aus den gegebenen Beziehungen $\frac{G}{B}$ die oben angeführte Formel $\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ her!
Gib die notwendigen Umformungsschritte an!

Der Ausdruck $\frac{1}{b}$ kann als Funktion in Abhängigkeit von g der Form $\frac{1}{b}(g) = a \cdot g^k + c$ betrachtet werden. Gib die Werte der Parameter a und c sowie des Exponenten k für diesen Fall an!

Lösungserwartung:

(a) $\frac{1}{b} = \frac{1}{40} - \frac{1}{50} = \frac{1}{200} \rightarrow$ Bildweite $200\,\text{cm} = 2\,\text{m}$
$\frac{B}{G} = \frac{200}{50} = 4 \rightarrow$ vierfache Vergrößerung

Bildweite negativ:

Intervall für g: $(0; f)$ bzw. Angabe des Intervalls durch: $0 < g < f$

Akzeptiert wird auch der Bezug zur ersten Fragestellung mit $f = 40$.

Intervall für g: $(0; 40)$ bzw. $0 < g < 40$

Begründung 1: Aus $b = \frac{g \cdot f}{g - f}$ folgt $g < f$.

Begründung 2: Aus $\frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{g}$ folgt $g < f$, da der Kehrwert von b dann größer ist als der Kehrwert von f.

(b) Funktion: $b(g) = \frac{f \cdot g}{g - f}$

$b(2f) = 2f$; Bildweite und Gegenstandsweite sind gleich groß und entsprechen dem Radius der Kugel. Erweiterung: Auch G und B sind gleich groß.

$b(f)$ existiert nicht; der Nenner hat den Wert 0.

(Auch die Form $b(g) = \dfrac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{g}}$ ist als richtig zu werten.)

Annäherung von g an f mit $g > f$:

Der Ausdruck $\frac{f \cdot g}{g - f}$ ist positiv; der Zähler ist eine positive Zahl (auch: nähert sich dem Wert f^2), der Nenner ist positiv und nähert sich dem Wert 0, daher wird b immer größer (der Grenzwert ist unendlich - oder ähnliche Aussagen).

Anmerkung: Wenn die Form $b(g) = \dfrac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{g}}$ verwendet wird, sind auch umgangssprachliche Formulierungen wie "'oben steht die positive Zahl 1, unten steht etwas Positives, das gegen 0 geht, daher ist der Grenzwert +1"' als richtig zu werten. Auch Argumente, bei denen teilweise oder immer "'oben"' statt "'Zähler"' und "'unten"' statt "'Nenner"' (oder Ähnliches) verwendet wird, sind als richtig zu werten.

(c) Zwei mögliche Umformungen werden angeführt:

Variante 1:

$\frac{g}{b} = \frac{g-f}{f} \rightarrow \frac{g}{b} = \frac{g}{f} - 1 \mid : g$
$\frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{g}$

Variante 2:

$\frac{g}{b} = \frac{g-f}{f} \mid \cdot (b \cdot f)$

$g \cdot f = b \cdot g - f \cdot b \mid : (b \cdot g \cdot f)$

$\frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{g}$

Daraus ergibt sich direkt der angegebene Zusammenhang.

$\frac{1}{b}(g) = \frac{1}{f} - \frac{1}{g} \Rightarrow a = -1, k = -1, c = \frac{1}{f}$

---

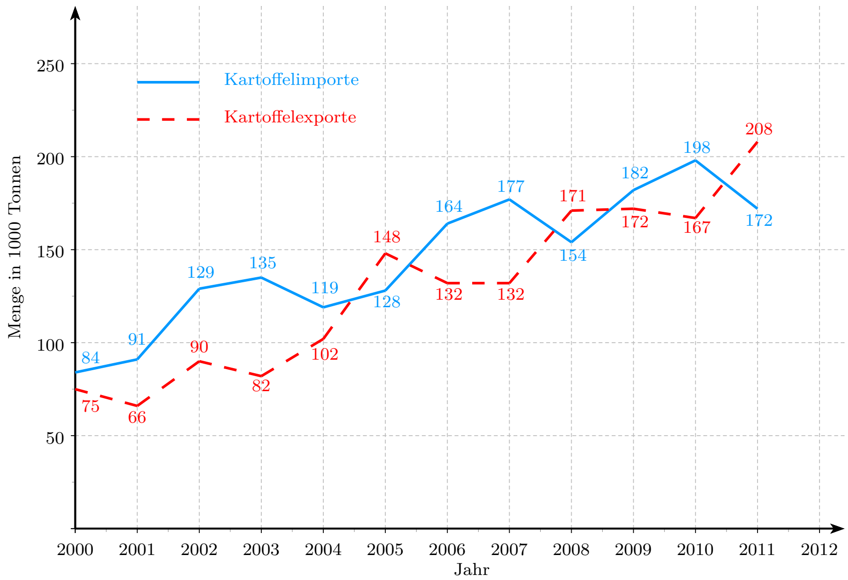
27 - MAT - AN 1.1, AN 1.3, FA 2.2, WS 1.2, WS 1.3, WS 1.1 - Kartoffeln in Österreich - BIFIE Aufgabensammlung

14. Die Kartoffel ist weltweit eines der wichtigsten Nahrungsmittel. ____/0

Die nachstehende Grafik zeigt die Entwicklung der Kartoffelerzeugung in Österreich vom Jahr 2000 bis zum Jahr 2011.

In der nachstehenden Abbildung werden Kartoffelexporte und -importe für den gleichen Zeitraum einander gegenübergestellt.

Außenhandel



Aufgabenstellung:

(a) Entnehmen Sie der entsprechenden Graphik, zwischen welchen (aufeinanderfolgenden) Jahren die absolute Zunahme (in Tonnen) und die relative Zunahme (in Prozent) der Erzeugung im Vergleich zum Vorjahr jeweils am größten war! Gib die entsprechenden Werte an!

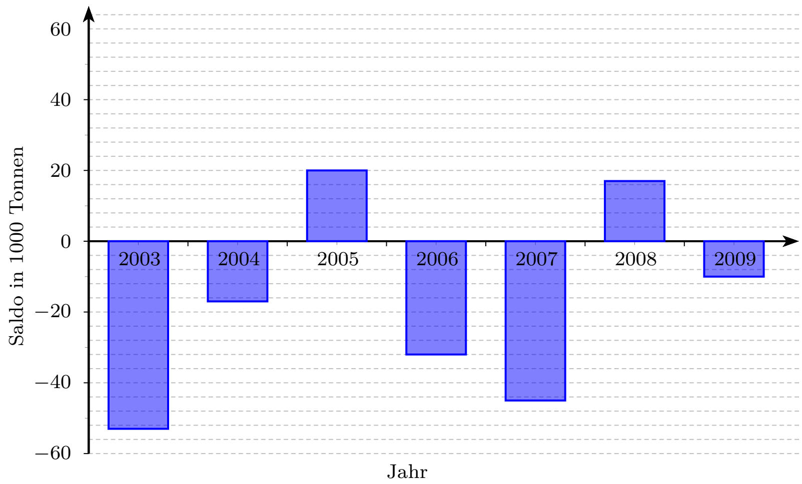
Im vorliegenden Fall fand die größte relative Zunahme der Erzeugung in einem anderen Zeitintervall statt als die größte absolute Zunahme.
Gib eine mathematische Begründung an, warum die größte relative Zunahme und die größte absolute Zunahme einer Größe oder eines Prozesses nicht im gleichen Zeitintervall stattfinden müssen!

(b) Berechne und interpretiere den Ausdruck $\frac{E_{2011}-E_{2000}}{11}$, wobei E_{Jahr} die Exportmenge in einem Kalenderjahr angibt! Gib bei der Interpretation auch die entsprechende Einheit an.

Die Exportentwicklung von 2000 bis 2011 soll durch eine lineare Funktion f approximiert werden, wobei die Variable t die Anzahl der seit 2000 vergangenen Jahre sein soll. Die Funktionswerte für die Jahre 2000 und 2011 sollen dabei mit den in der Graphik angeführten Werten übereinstimmen. Gib eine Gleichung dieser Funktion f an!

(c) Stelle in der nachstehenden Abbildung die Differenz "'Export minus Import"' der Mengen an Kartoffeln für die Jahre 2003 bis 2009 in einem Säulendiagramm dar!

Saldo Export-Import

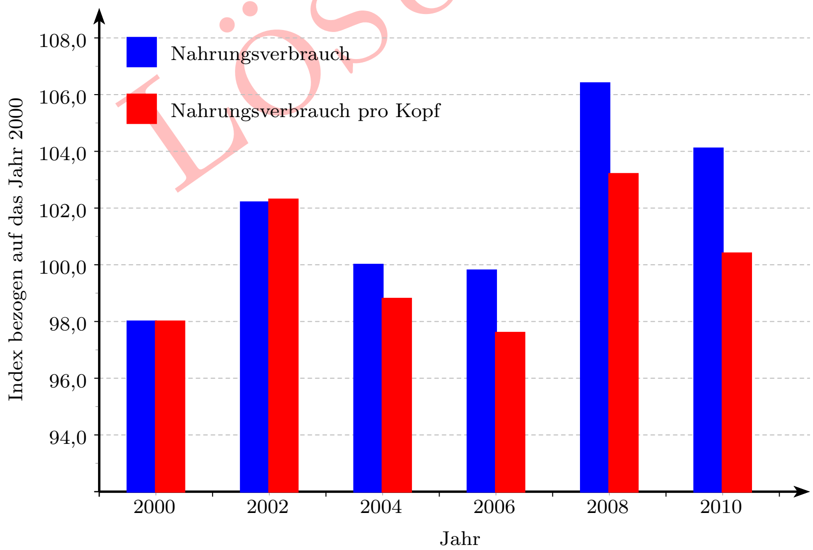


Berechne das arithmetische Mittel dieser Differenz für die genannten Jahre!

(d) Ein Index ist eine statistische Kennziffer, um die Entwicklung von Größen im Zeitverlauf darzustellen. Oft wird der Ausgangswert mit dem Basiswert 100 versehen. Ein Index von 120 bedeutet beispielsweise, dass eine Größe seit dem Basiszeitpunkt um 20 % gestiegen ist.

Die nachstehende Graphik zeigt die Entwicklung der in Österreich verzehrten Kartoffelmenge (Nahrungsverbrauch) bezogen auf das Jahr 2000.

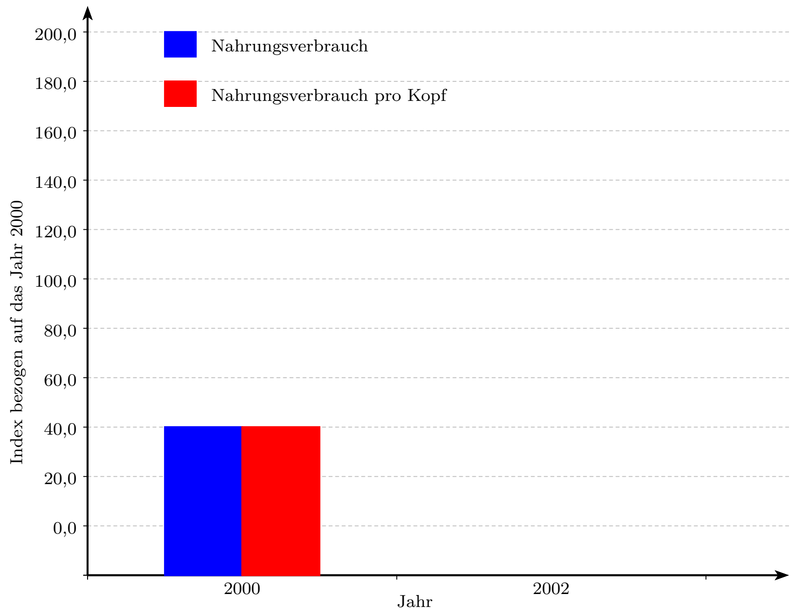
Nahrungsverbrauch



Geben Sie jeweils ein Jahr an, in dem die Einwohnerzahl in Österreich höher bzw. niedriger war als im Jahr 2000! Begründe deine Antwort!

Zeichne in die nachstehende Graphik zwei mögliche Säulen für ein Jahr, in dem der absolute Nahrungsverbrauch niedriger und die Bevölkerungszahl höher war als im Jahr 2000!

Nahrungsverbrauch



Lösungserwartung:

(a) absolute Zunahme zwischen 2003 und 2004: 133 000 Tonnen
absolute Zunahme zwischen 2010 und 2011: 144 000 Tonnen
Die größte absolute Zunahme war im Zeitintervall von 2010 bis 2011.
relative Zunahme zwischen 2003 und 2004: 23,75 %
Lösungsintervall in Prozent: $[23; 24]$
relative Zunahme zwischen 2010 und 2011: ca. 21,43 %
Lösungsintervall in Prozent: $[21; 22]$ Die größte relative Zunahme war zwischen 2003 und 2004.
Da für die Berechnung der relativen Zunahme einer Größe auch der Bezugswert entscheidend ist, müssen größte absolute Zunahme und größte relative Zunahme einer Größe oder eines Prozesses nicht im gleichen Zeitintervall stattfinden. Äquivalente Formulierungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

(b) $\frac{E_{2011}-E_{2000}}{11} \approx 12\,000$ Tonnen pro Jahr.
Die durchschnittliche Zunahme des österreichischen Kartoffelexports beträgt ca. 12 000 Tonnen pro Jahr.
Lösungsintervall: $[12000; 12100]$ Die richtige Einheit muss in der Interpretation vorhanden sein.
f mit $f(t) = 75000 + 12000 \cdot t$ oder $f(t) = 75 + 12 \cdot t$ oder $f(t) = \frac{133}{11} \cdot t + 75$
Jede jährliche Zunahme aus dem oben angeführten Lösungsintervall muss akzeptiert werden.

(c) Lösung Grafik siehe oben

Genauigkeit der Säulenlängen: Toleranzbereich $\pm 5\,000$ Tonnen

arithmetisches Mittel: $\frac{-53-17+20-32-45+17-10}{7} \approx -17$

Lösungsintervall: bei Berechnung in 1 000 Tonnen: $[-18; -16]$; bei Berechnung in Tonnen: $[-18\,000; -16\,000]$

(d)
- niedrigere Einwohnerzahl (als im Jahr 2000) in den Jahren: 2002 (prozentuelle Veränderung des Nahrungsverbrauchs kleiner als jene des Nahrungsverbrauchs pro Kopf)
- höhere Einwohnerzahl (als im Jahr 2000) in den Jahren: 2004, 2006, 2008 und 2010 (prozentuelle Veränderung des Nahrungsverbrauchs größer als jene des Nahrungsverbrauchs pro Kopf)

Die Angabe eines Jahres ist hier ausreichend.

Die Säule für den gesamten Nahrungsverbrauch muss niedriger sein als die Säule für 100% im Jahr 2000. Die Säule für den Nahrungsverbrauch pro Kopf muss bei einer steigenden Bevölkerungszahl niedriger als die Säule für den gesamten Nahrungsverbrauch sein.

---

28 - MAT - AG 2.1, FA 2.1, FA 4.3, AN 1.1, AN 1.3, AN 3.3, AN 4.3 - Saturn-V-Rakete - BIFIE Aufgabensammlung

15. Eine Mehrstufenrakete besteht aus mehreren, oft übereinander montierten "'Raketenstufen"'. Jede Raketenstufe ist eine separate Rakete mit Treibstoffvorrat und Raketentriebwerk. Leere Treibstofftanks und nicht mehr benötigte Triebwerke werden abgeworfen. Auf diese Weise werden höhere Geschwindigkeiten und somit höhere Umlaufbahnen als mit einstufigen Raketen erreicht. ____/0

    Die Familie der Saturn-Raketen gehört zu den leistungsstärksten Trägersystemen der Raumfahrt, die jemals gebaut wurden. Sie wurden im Rahmen des Apollo-Programms für die US- amerikanische Raumfahrtbehörde NASA entwickelt. Die Saturn V ist die größte jemals gebaute Rakete. Mithilfe dieser dreistufigen Rakete konnten in den Jahren 1969 bis 1972 insgesamt 12 Personen auf den Mond gebracht werden. 1973 beförderte eine Saturn V die US-amerikanische Raumstation Skylab in eine Erdumlaufbahn in 435 km Höhe.

    Eine Saturn V hatte die Startmasse $m_0 = 2{,}9 \cdot 10^6$ kg. Innerhalb von 160 s nach dem Start wurden die $2{,}24 \cdot 10^6$ kg Treibstoff der ersten Stufe gleichmäßig verbrannt. Diese ersten 160 s werden als Brenndauer der ersten Stufe bezeichnet. Die Geschwindigkeit $v(t)$ (in m/s) einer Saturn V kann t Sekunden nach dem Start während der Brenndauer der ersten Stufe näherungsweise durch die Funktion v mit

$$v(t) = 0{,}0000000283 \cdot t^5 - 0{,}00000734 \cdot t^4 + 0{,}000872 \cdot t^3 - 0{,}00275 \cdot t^2 + 2{,}27 \cdot t$$

beschrieben werden.

Aufgabenstellung:

(a) Berechne die Beschleunigung einer Saturn V beim Start und am Ende der Brenndauer der ersten Stufe!

Gib an, ob die Beschleunigung der Rakete nach der halben Brenndauer der ersten Stufe kleiner oder größer als die mittlere Beschleunigung (= mittlere Änderungsrate der Geschwindigkeit) während der ersten 160 Sekunden des Flugs ist! Begründe deine Antwort anhand des Graphen der Geschwindigkeitsfunktion!

(b) Berechnen Sie die Länge des Weges, den eine Saturn V 160 s nach dem Start zurückgelegt hat!

Begründe, warum in dieser Aufgabenstellung der zurückgelegte Weg nicht mit der Formel "‘Weg = Geschwindigkeit mal Zeit"’ berechnet werden kann!

(c) Berechne denjenigen Zeitpunkt t_1 für den gilt: $v(t_1) = \frac{v(0)-v(160)}{2}$.

Interpretiere t_1 und $v(t_1)$ im gegebenen Kontext!

(d) Beschreibe die Abhängigkeit der Treibstoffmasse m_T (in Tonnen) der Saturn V von der Flugzeit t während der Brenndauer der ersten Stufe durch eine Funktionsgleichung!

Gib die prozentuelle Abnahme der Gesamtmasse einer Saturn V für diesen Zeitraum an!

(e) Nach dem Gravitationsgesetz wirkt auf eine im Abstand r vom Erdmittelpunkt befindliche Masse m die Gravitationskraft $F = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$, wobei G die Gravitationskonstante und M die Masse der Erde ist.

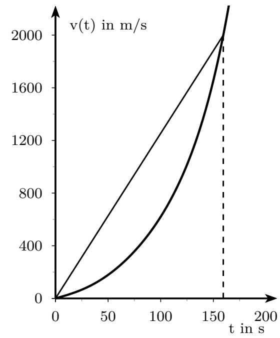
Deute das bestimmte Integral $\int_{r_1}^{r_2} F(r)\,\mathrm{d}r$ im Hinblick auf die Beförderung der Raumstation Skylab in die Erdumlaufbahn und beschreibe, welche Werte dabei für die Grenzen r_1 und r_2 einzusetzen sind!

Begründe anhand der Formel für die Gravitationskraft, um welchen Faktor sich das bestimmte Integral $\int_{r_1}^{r_2} F(r)\,\mathrm{d}r$ ändert, wenn ein Objekt mit einem Zehntel der Masse von Skylab in eine Umlaufbahn derselben Höhe gebracht wird.

Lösungserwartung:

(a) $a(0) = v'(0) = 2{,}27\,\mathrm{m/s}^2$
$a(160) = v'(160) = 40{,}83\,\mathrm{m/s}^2$

Bestimmt man die zur Sekante parallele Tangente, so liegt die Stelle des zugehörigen Berührpunktes rechts von $t = 80$. Aus der Linkskrümmung der Funktion v folgt daher, dass die Beschleunigung nach 80 Sekunden kleiner als die mittlere Beschleunigung im Intervall $[0\,s; 160\,s]$ ist.



Weitere mögliche Begründung:
Die mittlere Beschleunigung (= Steigung der Sekante) in $[0; 160]$ ist größer als die Momentanbeschleunigung (= Steigung der Tangente) bei $t = 80$.

(b) $s(160) = \int_0^{160} v(t)\,\mathrm{d}t \approx 93\,371$
zurückgelegter Weg nach $160\,s$: 93 371

$s = v \cdot t$ gilt nur bei konstanter Geschwindigkeit. Die Geschwindigkeit der Saturn V ändert sich allerdings mit der Zeit.

(c) $v(0) = 0\,m/s; \quad v(160) \approx 2\,022\,m/s$
$v(t_1) = 1\,011 \Rightarrow t_1 \approx 125\,s$

Die Geschwindigkeit ist nach $125\,s$ halb so groß wie nach $160\,s$.

(d) $m_T(t) = 2\,240 - 14 \cdot t$
$\frac{2{,}24}{2{,}9} \approx 0{,}77$
Die Gesamtmasse hat um 77 % abgenommen.

(e) Das Ergebnis gibt die Arbeit an, die nötig ist, um die Raumstation Skylab in die entsprechende Erdumlaufbahn zu bringen.
r_1 ist der Erdradius, r_2 ist die Summe aus Erdradius und Höhe der Umlaufbahn.

Die Gravitationskraft und somit auch die Arbeit sind direkt proportional zur Masse des Objekts. Die erforderliche Arbeit ist daher nur ein Zehntel des Vergleichswertes.

Lösungsschlüssel:

(a) Ein Punkt für die richtige Berechnung der beiden Beschleunigungswerte.
Toleranzintervall für $a(0)$: $[2{,}2\,m/s^2; 2{,}3\,m/s^2]$
Toleranzintervall für $a(160)$: $[40\,m/s^2; 42\,m/s^2]$
Ein Punkt für eine sinngemäß richtige Begründung laut Lösungserwartung.

(b) Ein Punkt für die richtige Berechnung des zurückgelegten Weges.
Toleranzintervall: $[93\,000\,m; 94\,000\,m]$
Ein Punkt für eine sinngemäß richtige Begründung laut Lösungserwartung.

(c) Ein Punkt für die richtige Berechnung des Zeitpunkts t_1.
Toleranzintervall: $[124\,s; 126\,s]$
Ein Punkt für eine sinngemäß richtige Deutung der beiden Werte laut Lösungserwartung.

(d) Ein Punkt für die Angabe einer richtigen Funktionsgleichung.
Äquivalente Schreibweisen sind als richtig zu werten.
Ein Punkt für die Angabe des richtigen Prozentsatzes.
Toleranzintervall: $[77\,\%; 78\,\%]$

(e) Ein Punkt für die richtige Deutung des bestimmten Integrals und die richtige Beschreibung der Werte der beiden Grenzen.
Ein Punkt für eine richtige Begründung, um welchen Faktor sich das Ergebnis ändert.
Die direkte Proportionalität zwischen Masse und Gravitationskraft muss dabei sinngemäß erwähnt werden.

---

35 - MAT - AN 1.2, AN 2.1, AN 4.2, AN 4.3, FA 2.1, FA 2.2 - Sportwagen - Matura 2013/14 Haupttermin

16. Ein Sportwagen wird von 0 m/s auf 28 m/s (≈ 100 km/h) in ca. 4 Sekunden beschleunigt. $v(t)$ beschreibt die Geschwindigkeit in Metern/Sekunde während des Beschleunigungsvorganges in Abhängigkeit von der Zeit t in Sekunden. Die Geschwindigkeit lässt sich durch die Funktionsgleichung $v(t) = -0{,}5t^3 + 3{,}75t^2$ angeben. ____/0

Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Gib die Funktionsgleichung zur Berechnung der momentanen Beschleunigung $a(t)$ zum Zeitpunkt t an! Berechne die momentane Beschleunigung zum Zeitpunkt $t = 2$!

(b) Gib einen Ausdruck zur Berechnung des in den ersten 4 Sekunden zurückgelegten Weges an! Ermittle diesen Weg $s(4)$ (in Metern)!

(c) Angenommen, dieser Sportwagen beschleunigt - anders als ursprünglich angegeben - gleichmäßig in 4 Sekunden von 0 m/s auf 28 m/s. Nun wird mit $v_1(t)$ die Geschwindigkeit des Sportwagens nach t Sekunden bezeichnet. Gib an, welcher funktionale Zusammenhang zwischen v_1 und t vorliegt! Ermittle die Funktionsgleichung für v_1!

(a) **Lösungserwartung:**

$a(t) = v'(t) = -1{,}5 \cdot t^2 + 7{,}5 \cdot t$
$a(2) = -1{,}5 \cdot 2^2 + 7{,}5 \cdot 2 = 0 \Rightarrow a(2) = 0\,m/s^2$

Auch die Berechnung über den Differenzenquotienten mit korrektem Grenzwertübergang ist zulässig.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt, wenn $a(t)$ als 1. Ableitung der Geschwindigkeitsfunktion korrekt bestimmt wurde.
- Ein Punkt für die korrekte Berechnung des Ergebnisses. Sollte $a(t)$ im Ansatz richtig (aber fehlerhaft) aufgestellt worden sein, die Berechnung aber in weiterer Folge korrekt sein, dann ist dieser Punkt zu geben.

(b) **Lösungserwartung:**

$s(4) = \int_0^4 v(t)\mathrm{d}t = \int_0^4 (-0{,}5 \cdot t^3 + 3{,}75 \cdot t^2)\mathrm{d}t$
$s(4) = \int_0^4 (-0{,}5 \cdot t^3 + 3{,}75 \cdot t^2)\mathrm{d}t = (-0{,}125 \cdot t^4 + 1{,}25 \cdot t^3)\Big|_0^4 = 48 \Rightarrow s(4) = 48$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt, wenn der Ansatz $s(4) = \int_0^4 v(t)\mathrm{d}t$ mit dem bestimmten Integral inklusive der richtigen Grenzen vorhanden ist
- Ein Punkt für das richtige Ergebnis. Sollte das bestimmte Integral im Ansatz richtig (aber fehlerhaft) aufgestellt worden sein, die Berechnung aber in weiterer Folge korrekt sein, dann ist dieser Punkt zu geben.

Lösungserwartung:

Es liegt ein linearer funktionaler Zusammenhang vor.

$v_1(t) = \frac{28}{4} \cdot t + 0 = 7 \cdot t$

Lösungsschlüssel:

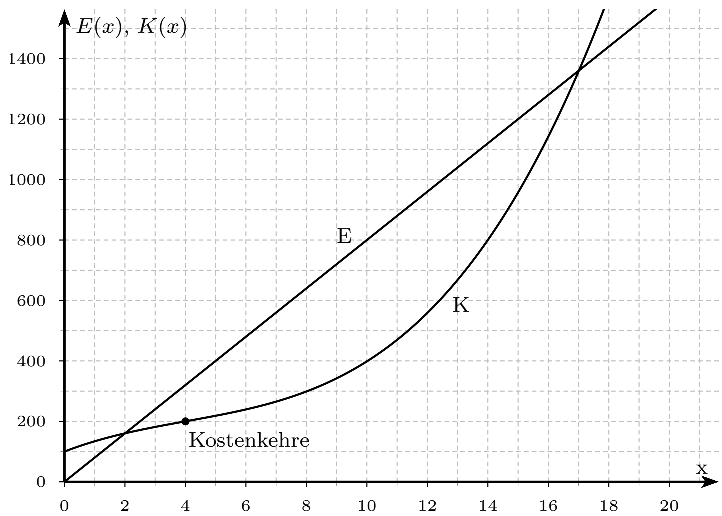
(c)
- Ein Punkt, wenn erkannt wurde, dass ein linearer Zusammenhang vorliegt, und dieser angegeben wurde (entweder textlich oder auch in Form einer Funktionsgleichung). Dieser Punkt ist auch zu geben, wenn zwar ein linearer Zusammenhang erkannt wurde, aber die Funktionsgleichung falsch aufgestellt wurde.
- Ein Punkt, wenn die Funktionsgleichung mit den korrekten Parametern aufgestellt wurde.

---

37 - MAT - AN 1.3, FA 1.5, FA 2.2, FA 2.1, FA 1.6 - Kosten und Erlös - Matura 2013/14 1. Nebentermin

17. Die für einen Betrieb anfallenden Gesamtkosten bei der Produktion einer Ware können annähernd durch eine Polynomfunktion K beschrieben werden. Die lineare Funktion E gibt den Erlös (Umsatz) in Abhängigkeit von der Stückzahl x an. ____/0

    Die Stückzahl x wird in Mengeneinheiten $[ME]$ angegeben, die Produktionskosten $K(x)$ und der Erlös $E(x)$ werden in Geldeinheiten $[GE]$ angegeben.



Man spricht von einer Kostendegression, wenn der Produktionskostenzuwachs bei einer Erhöhung der Anzahl der erzeugten Mengeneinheiten immer kleiner wird. Man spricht von einer Kostenprogression, wenn der Produktionskostenzuwachs bei einer Erhöhung der Anzahl der erzeugten Mengeneinheiten immer größer wird.

Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Berechne den durchschnittlichen Kostenanstieg pro zusätzlich produzierter Mengeneinheit im Intervall $[10; 14]$!

Gib dasjeniger Intervall an, in dem ein degressiver Kostenverlauf vorliegt!

(b) Gib den Verkaufspreis pro Mengeneinheit an!

Stelle eine Gleichung der Erlösfunktion E auf!

(c) Interpretiere die x-Koordinate der Schnittpunkte des Graphen der Kostenfunktion K mit dem Graphen der Erlösfunktion E und gib die Bedetung des Bereichs zwischen den beiden Schnittpunkten für das Unternehmen an!

Gib den Gewinn an, wenn 10 Mengeneinheiten produziert und verkauft werden!

(a) Lösungserwartung:

$K(10) = 400, K(14) = 800, \dfrac{K(14) - K(10)}{14 - 10} = 100$

Der durchschnittliche Kostenanstieg beträgt im Intervall $[10ME; 14ME]$ 100 GE/ME. Kostendegression im Intervall: $[0; 4)$.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für eine korrekte Berechnung des Differenzenquotienten.
- Ein Punkt für die Angabe des korrekten Intervalls (es sind sowohl offene, geschlossene als auch halboffene Intervalle zulässig).

(b) Lösungserwartung:

Der Verkaufspreis beträgt 80 GE pro ME.

$E(x) = 80 \cdot x$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die korrekte Angabe des Verkaufspreises.
- Ein Punkt, wenn $E(x)$ richtig angegeben ist.

(c) **Lösungserwartung:**

Die Kosten und der Erlös sind gleich hoch, daher wird kein Gewinn erzielt. Die x-Koordinaten der Schnittpunkte geben die Gewinnschwellen an. Bei einer Menge x, die sich zwischen den beiden Gewinnschwellen befindet, macht das Unternehmen Gewinn.

$K(10) = 400, E(10) = 800$; das Unternehmen macht einen Gewinn von 400 GE.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine richtige Interpretation der Schnittpunkte und des Bereiches zwischen den Stellen der Schnittpunkte. Sinngemäß gleichwertige Aussagen sind als richtig zu werten.
- Ein Punkt für die korrekte Berechnung des Gewinns.

---

42 - MAT - FA 5.1, FA 5.3, FA 2.2, AN 1.3, FA 1.5 - CO_2-Gehalt der Atmosphäre - Matura 2013/14 2. Nebentermin

18. Die Atmosphäre besteht zu ca. 78 % aus Stickstoff und zu ca. 21 % aus Sauerstoff. Kohlendioxid (CO_2) ist nur in Spuren vorhanden. Dennoch ist CO_2 zusammen mit Wasserdampf der Hauptverursacher des natürlichen Treibhauseffektes. Seit 250 Jahren ist der CO_2-Gehalt der Atmosphäre massiv gestiegen (siehe Abb. 1). Man vermutet, dass dadurch der Treibhauseffekt verstärkt wird. ____/0

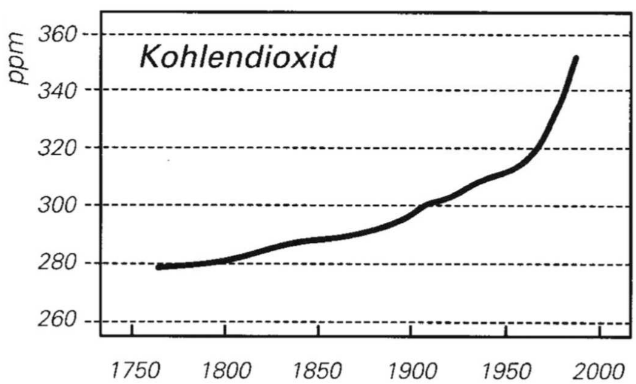


Abb. 1: Aufzeichnung der mittleren CO_2-Konzentration in der Atmosphäre von 1760 bis 1980

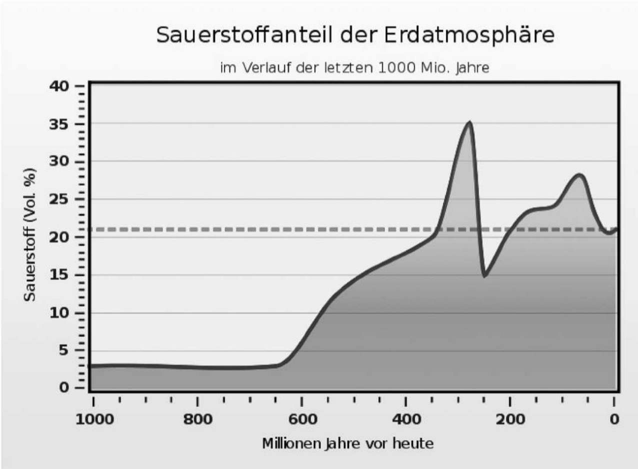


Abb. 2: Darstellung des Sauerstoffgehaltes in der Atmosphäre im Verlauf der letzten Milliarden Jahre

Aufgabenstellung:

(a) Stelle ein exponentielles Wachstumsgesetz der Form $K(t) = K_0 \cdot a^t$ auf, das die CO_2-Konzentration K in Abhängigkeit von der Zeit t in der Atmosphäre wiedergibt! Dabei gibt t die seit 1950 vergangene Zeit in Jahren an; K wird in ppm und t in Jahren gemessen. Lies zur Bestimmung der Parameter K_0 und a die auf Zehner gerundeten Konzentrationen der Jahre 1950 und 1980 (Endpunkt der Aufzeichnungen) aus der entsprechenden Grafik ab!

Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an!

Die CO_2-Konzentration steigt im beobachteten Zeitraum um ca. 0,4 % pro Jahr.	☒
Die CO_2-Konzentration steigt im beobachteten Zeitraum um ca. 4 ppm pro Jahr.	
Wäre der Wert von a (bei gleichbleibendem Wert von K_0) doppelt so groß, so wäre auch der jährliche prozentuelle Zuwachs doppelt so groß.	
Für das Jahr 2010 werden nach diesem Wachstumsgesetz ca. 395 ppm prognostiziert.	☒
Wäre der Wert von K_0 (bei gleichbleibendem Wert von a) doppelt so groß, so wäre auch die Verdopplungszeit doppelt so groß.	

(b) Von 1800 bis 1900 ist der CO_2-Gehalt der Atmosphäre annähernd linear gewachsen. Stelle einen funktionalen Zusammenhang $K(t)$ zwischen der CO_2-Konzentration K (gemessen in ppm) und der Zeit t (gemessen in Jahren) auf! Dabei gibt t die seit 1800 vergangene Zeit in Jahren an. Lese die auf Zehner gerundeten notwendigen Daten aus der Grafik ab! Weise nach, dass der im Jahr 2010 tatsächlich gemessene CO_2-Wert von 390 ppm nicht das Ergebnis einer linearen Zunahme der historischen CO_2-Werte sein kann!

(c) Der Sauerstoffgehalt der Atmosphäre ist in den letzten 1 000 Mio. Jahren massiven Schwankungen unterworfen gewesen. Von 300 Mio. Jahren vor unserer Zeit bis 250 Mio. Jahren vor unserer Zeit hat der Sauerstoffgehalt annähernd linear abgenommen (siehe Abb. 2).

$\boxed{\text{A}}$ Berechne den Ausdruck $\frac{35-15}{300-250}$ und deute das Ergebnis in diesem Zusammenhang!

Kreuze die zutreffende(n) Aussage(n) an!

In den letzten 1 000 Mio. Jahren war der Sauerstoffgehalt der Atmosphäre meistens niedriger als heute.	☒
Vor 250 Mio. Jahren war der Sauerstoffgehalt am absolut geringsten.	
In den letzten 600 Mio. Jahren ist der Sauerstoffgehalt der Atmosphäre nie unter 5 Volumsprozent gefallen.	☒
Vor 200 Mio. Jahren war der Sauerstoffgehalt der Atmosphäre etwa so groß wie heute.	☒
Vor 900 Mio. Jahren lag der Sauerstoffgehalt der Atmosphäre um 15 Volumsprozent niedriger als heute.	

(d) Die Funktionsgleichung $y(t) = 0{,}000128 \cdot t^3 + 0{,}01344 \cdot t^2 + 0{,}2304 \cdot t$ beschreibt die absoluten Schwankungen des Sauerstoffgehalts bezogen auf den heutigen Wert $y(0) = 0$ in der Atmosphäre in den letzten 100 Mio. Jahren. Dabei wird t in Mio. Jahren und y in Volumsprozent angegeben. Berechne, wann in diesem Zeitraum ein lokales Maximum des Sauerstoffgehaltes aufgetreten ist! Weise nach, dass es sich wirklich um ein lokales Maximum handelt!

(a) **Lösungserwartung:**

$K(t) = 310 \cdot \left(\sqrt[30]{\frac{350}{310}}\right)^t$

oder:

$K(t) = 310 \cdot 1{,}004^t$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für das korrekte Aufstellen von $K(t)$. Toleranzintervall für a: $[1{,}004; 1{,}0041]$.
- Multiple-Choice-Aufgabe: Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Antwortmöglichkeiten angekreuzt sind.

(b) **Lösungserwartung:**

1800: 280 ppm

1900: 300 ppm

$K(t) = k \cdot t + d$

$300 = k \cdot 100 + 280 \Rightarrow k = 0{,}2$

$K(t) = 0{,}2 \cdot t + 280$

$K(210) = 322\,\text{ppm} \neq 390\,\text{ppm}$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für das korrekte Aufstellen von $K(t)$.
- Ein Punkt für einen korrekten Nachweis.

(c) **Lösungserwartung:**

Der Ausdruck besagt, dass im angegebenen Zeitraum der Sauerstoffgehalt um 0,4 Prozentpunkte pro 1 Million Jahre abnimmt.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung und eine (sinngemäß) korrekte Deutung.

- Multiple-Choice-Aufgabe: Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich alle laut Lösungserwartung richtigen Antwortmöglichkeiten angekreuzt sind.

(d) **Lösungserwartung:**

$y'(t) = 0{,}000384t^2 + 0{,}02688t + 0{,}2304$
$y''(t) = 0{,}000768t + 0{,}02688$

$y'(t) = 0 \Rightarrow t_1 = -60, t_2 = -10$
$y''(-10) > 0 \Rightarrow$ Minimum
$y''(-60) < 0 \Rightarrow$ Maxmimum bei -60 Mio. Jahren
Vor 60 Millionen Jahren ist ein lokales Maximum des Sauerstoffgehaltes aufgetreten.

Alternative Möglichkeiten des Maximumnachweises:

Es wird nachgewiesen, dass die Ableitungsfunktion $y'(x)$ links vom lokalen Maximum positiv und dass sie rechts vom lokalen Maximum negativ ist.

oder:

Es wird nachgewiesen, dass gilt: $y(-60 - a) < y(-60)$ und $y(-60 + a) < y(-60)$ für eine reelle Zahl a.

oder:

Es wird argumentiert, dass bei einer Polynomfunktion dritten Grades mit positiven Koeffizienten die kleinere Nullstelle der ersten Ableitung eine lokale Maximumstelle ist.

oder:

Weil $y(-60) > y(-10)$ und y ein Polynom 3. Grades ist, muss das lokale Maximum bei $t = -60$ liegen.

oder:

Es gilt:

$$\lim_{t \to -\infty} y(t) = -\infty$$

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \infty$$

$$y(-60) \approx 6{,}91$$

$$y(-10) \approx -1{,}09$$

.

Deshalb ist bei $t = -60$ ein lokales Maximum des Sauerstoffgehaltes.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die korrekte Berechnung der Jahreszahl (es genügt, als Lösung -60 Mio. Jahre anzugeben).
- Ein Punkt für einen (sinngemäß) korrekten Nachweis.

---

43 - MAT - AN 1.1, FA 2.2, FA 2.5, AN 1.3, WS 2.2, WS 2.3 - Verkehrsunfälle - Matura 2013/14 2. Nebentermin

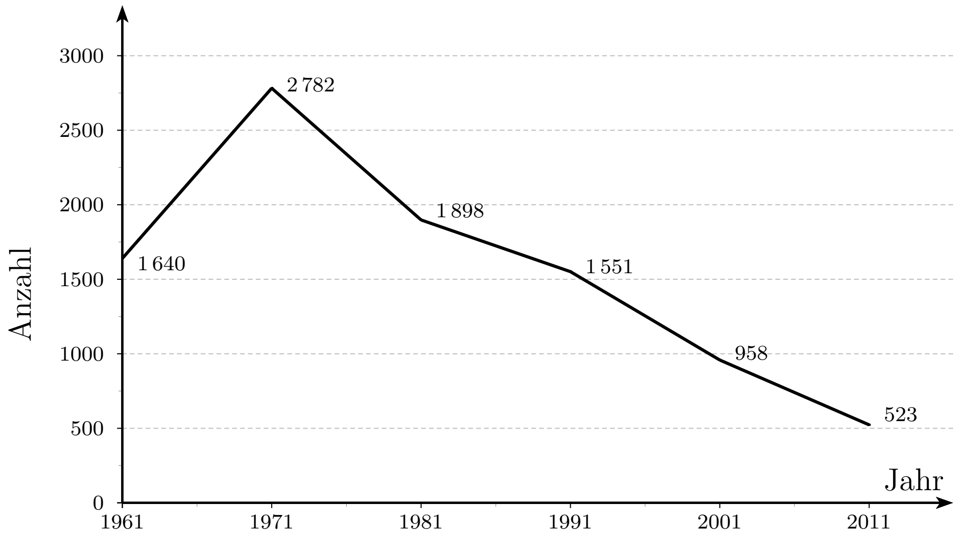
19. Die Verkehrsunfallstatistik in Österreich umfasst grundsätzlich alle Unfälle, die sich auf Österreichs Straßen mit öffentlichem Verkehr ereignen und bei denen Personen verletzt oder getötet werden. ____/0

Die bei Straßenverkehrsunfällen Verletzten und Getöteten werden unter dem Begriff Verunglückte zusammengefasst.

Einige der erhobenen Daten werden nachstehend in einer Tabelle und in zwei Grafiken angeführt.

Jahr	Anzahl der Verkehrsunfälle mit Personenschaden	Kraftfahrzeugbestand zu Jahresende
1961	42 653	1 426 043
1971	52 763	2 336 520
1981	46 690	3 494 065
1991	46 013	4 341 042
2001	43 073	5 684 244
2011	35 129	6 195 207

Anzahl der bei Verkehrsunfällen Getöteten



Prozentueller Anteil der Getöteten an der Gesamtzahl der bei Verkehrsunfällen verunglückten Personen

Aufgabenstellung:

(a) Entnimm der entsprechenden Grafik, in welchem Zeitintervall die absolute und die relative Abnahme (in Prozent) der bei Verkehrsunfällen getöteten Personen jeweils am größten waren, und gib die entsprechenden Werte an!

Im vorliegenden Fall fand die größte relative Abnahme der Anzahl der bei Verkehrsunfällen Getöteten in einem anderen Zeitintervall statt als die größte absolute Abnahme. Gib eine mathematische Begründung an, warum die größte relative Abnahme und die größte absolute Abnahme einer Größe oder eines Prozesses nicht im gleichen Zeitintervall stattfinden müssen!

(b) Die Entwicklung des prozentuellen Anteils der Getöteten gemessen an der Gesamtzahl der bei Verkehrsunfällen verunglückten Personen kann für den Zeitraum von Beginn des Jahres 1971 bis Ende 2011 durch eine lineare Funktion f angenähert werden, wobei die Variable t die Anzahl der seit Ende 1970 vergangenen Jahre bezeichnet.

Ermittle eine Gleichung dieser Funktion f auf Basis der Daten aus der entsprechenden Grafik im Zeitraum von Beginn des Jahres 1971 bis Ende 2011!

Gib den theoretisch größtmöglichen Zeitraum an, für den diese Funktion f ein unter der Annahme eines gleichbleibenden Trends geeignetes Modell darstellt!

(c) Im Jahr 1976 wurde in Österreich die Gurtenpflicht eingeführt. Seit diesem Zeitpunkt ist man dazu verpflichtet, auf den vorderen Sitzen eines PKW oder Kombis den Sicherheitsgurt anzulegen. Durch die Einführung der Gurtenpflicht kam es zu einer deutlichen Abschwächung der Unfallfolgen.

Berechne auf Basis der Tabellenwerte für die Jahre 1971 und 1981 die durchschnittliche jährliche Abnahme der Anzahl der Unfälle mit Personenschaden!

Ein "'Gurtenmuffel"' behauptet, dass es auch schon vor der Einführung der Gurtenpflicht im Zeitraum zwischen 1961 und 1971 zu einer relativen Abnahme der Verkehrsunfälle mit Personenschaden kam. Ermittle mithilfe des vorhandenen Datenmaterials Zahlen, die seine Aussage untermauern, und präzisieren Sie diese Aussage!

(d) Die nachstehende Tabelle enthält Daten über Verunglückte im Jahr 2001.

Verkehrsart	Anzahl der Verletzten	Anzahl der Getöteten
einspuriges KFZ	8 605	85
PKW	24 853	290
sonstige	11 567	148

Jemand ist im Jahr 2011 bei einem Verkehrsunfall verunglückt.

$\boxed{\text{A}}$ Gib die relative Häufigkeit als Schätzwert der Wahrscheinlichkeit, dass diese Person mit einem einspurigen KFZ oder einem PKW unterwegs war und den Unfall nicht überlebt hat, an!

Interpretiere die mit $\frac{24\,853}{25\,143} \approx 0{,}99$ angegebene Wahrscheinlichkeit im vorliegenden Zusammenhang!

(a) Lösungserwartung:

Die größte absolute Abnahme fand im Zeitintervall von 1971 bis 1981 statt (-884), die größte relative Abnahme war in den Jahren von 2001 bis 2011 (-0,454 bzw. -45,4 %).

Da für die Berechnung der relativen Abnahme einer Größe auch der Bezugswert entscheidend ist, müssen größte absolute Abnahme und größte relative Abnahme einer Größe oder eines Prozesses nicht im gleichen Zeitintervall stattfinden.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt wird für die korrekten Zeitintervalle und die richtigen Abnahmewerte vergeben. Toleranzintervall für relative Abnahme: $[-0{,}46; -0{,}45]$ bzw. $[-46\,\%; -45\,\%]$; die Vorzeichen müssen nicht angegeben sein

- Ein Punkt wird für eine (sinngemäß) richtige verbale Begründung vergeben. Dabei kann die Begründung auch anhand konkreter Zahlen erfolgen.

(b) **Lösungserwartung:**

$f(t) = -0{,}065t + 3{,}7$

Diese Funktion kann höchstens 57 Jahre, also bis zum Beginn des Jahres 2028, zur Modellbildung herangezogen werden.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt wird für die Angabe eines korrekten Funktionsterms vergeben. (Der Punkt kann auch vergeben werden, wenn eine andere Variable als t verwendet wird.) Toleranzintervall für die ersten Parameter: $[-0{,}08; -0{,}05]$.
- Ein Punkt wird für die Angabe der entsprechenden Zeitspanne und/oder des entsprechenden Jahres vergeben. Toleranzintervalle: [51 Jahre; 70 Jahre], [2022; 2042].

(c) **Lösungserwartung:**

Die Anzahl der Unfälle mit Personenschäden nahm durchschnittlich um 607,3 pro Jahr ab.

Anzahl der Unfälle mit Personenschaden pro tausend KFZ:

- 1961: 30 (berechneter Wert liegt bei $\approx 29{,}9$)
- 1971: 23 (berechneter Wert liegt bei $\approx 22{,}5$)

Bezogen auf die Anzahl der zugelassenen KFZ hat die Anzahl der Unfälle mit Personenschaden also tatsächlich abgenommen.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt wird für die korrekte Angabe der durchschnittlichen jährlichen Abnahme vergeben. Toleranzintervall: [600; 610].
- Ein Punkt wird für das Heranziehen des entsprechenden Datenmaterials und eine korrekte Berechnung vergeben. Die Aussage kann auch anhand der relativen Werte präzisiert werden.

(d) **Lösungserwartung:**

Verkehrsart	Anzahl der Verletzten	Anzahl der Getöteten	Summe
einspuriges KFZ	8 605	85	8 690
PKW	24 853	290	25 143
sonstiges	11 567	148	11 715
Summe	45 025	523	45 548

$\frac{(85+290)}{45\,548} \approx 0{,}008$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt ca. 0,8 %.

Die Wahrscheinlichkeit, den Unfall zu überleben, wenn man mit einem PKW verunglückt, beträgt 99 %.

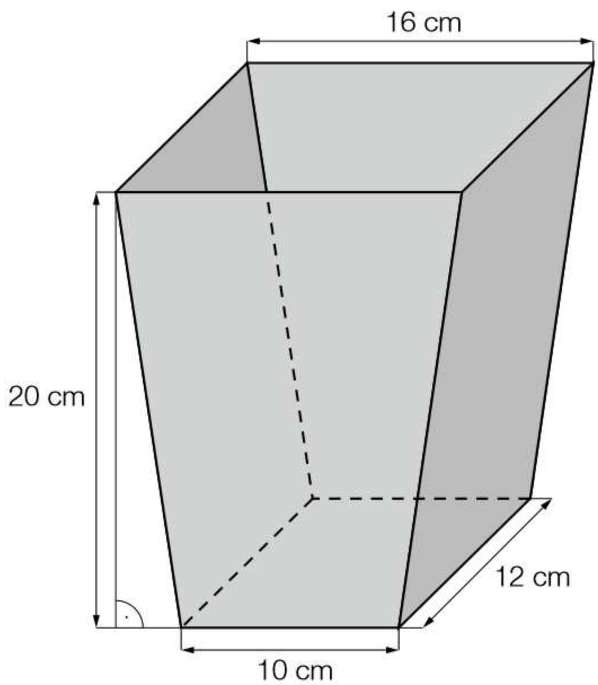
Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt wird für die richtige Angabe der Wahrscheinlichkeit vergeben. Toleranzintervall: [0,008; 0,0083] bzw. [0,8 %; 0,83 %].
- Ein Punkt wird für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation vergeben.

---

48 - MAT - FA 2.2, AN 4.3, AN 1.3, AN 4.2 - Füllen eines Gefäßes - Matura 2014/15 Haupttermin

20. Der Innenraum eines 20 cm hohen Gefäßes hat in jeder Höhe h eine rechteckige, horizontale Querschnittsfläche. Ihre Länge beträgt am Boden 10 cm und nimmt dann mit der Höhe linear bis auf 16 cm zu, ihre Breite beträgt in jeder Höhe 12 cm. ____/0



Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Gib eine Formel für die Länge $a(h)$ der rechteckigen Querschnittsfläche in der Höhe h an.

In das Gefäß wird Flüssigkeit gefüllt.

Gib an, was der Ausdruck $12 \cdot \int_0^{15} a(h)\mathrm{d}h$ in diesem Zusammenhang bedeutet!

(b) Das leere Gefäß wird bis zum Rand mit Flüssigkeit gefüllt.

Nach t Sekunden befindet sich die Wassermenge $q(t)$ (in ml) im Gefäß. Die Füllung dauert 39 Sekunden. Für $t \in [0; 39]$ gilt: $q'(t) = 80$.

Interpretiere $q'(t) = 80$ im gegebenen Zusammenhang!

Ermittle $\frac{q(t_2)-q(t_1)}{t_2-t_1}$ für beliebige t_1, t_2 mit $t_1 < t_2$ aus dem gegebenen Zeitintervall!

(c) Das Fassungsvermögen des Gefäßes (in ml) bis zur Höhe x kann durch das Integral $\int_0^x (3{,}6 \cdot h + 120)\mathrm{d}h$ dargestellt werden.

Ermittle, bei welcher Höhe x das Wasser im Gefäß steht, wenn man 2,5 Liter Wasser in das Gefäß gießt.

Interpretiere den im Integral vorkommenden Wert 3,6 im gegebenen Kontext!

(a) **Lösungserwartung:**

$a(h) = k \cdot h + d$

$a(0) = d = 10$

$a(20) = 20 \cdot k + 10 = 16 \Rightarrow k = 0{,}3$

$a(h) = 0{,}3 \cdot h + 10$

Das Integral gibt das Volumen der enthaltenen Flüssigkeit (in ml) an, wenn das Gefäß bis 5 cm unter dem Rand (bzw. bis zu einer Höhe von 15 cm) gefüllt ist.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für eine korrekte Formel. Äquivalente Formeln sind ebenfalls als richtig zu werten. Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation.

(b) **Lösungserwartung:**

Die momentane Änderungsrate der Wassermenge beträgt im gesamten Zeitintervall 80 Milliliter pro Sekunde.

$$\frac{q(t_2) - q(t_1)}{t_2 - t_1} = 80$$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation.
- Ein Punkt für die richtige Lösung.

(c) **Lösungserwartung:**

$2500 = \int_0^x (3{,}6 \cdot h + 120)\mathrm{d}h = 1{,}8x^2 + 120x$

$1{,}8x^2 + 120x - 2500 = 0$

$x_1 \approx 16{,}7, (x_2 < 0)$

Das Wasser steht ca. 16,7 cm hoch.

3,6 gibt diejenige Fläche in cm^2 an, um die die Querschnittsfläche mit jedem zusätzlichen cm Höhe zunimmt.

oder:

3,6 ist die Steigung der Funktion, die den Inhalt der Querschnittsfläche in der Höhe h angibt.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei weder die negative Lösung der quadratischen Gleichung noch die Einheit cm angeführt werden müssen.
  Toleranzintervall: [16,5; 17]
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation.

---

50 - MAT - AG 2.1, AN 1.3, AN 2.1, FA 2.2, FA 1.5 - Mehrkampf - Matura 2014/15 1. Nebentermin

21. Für die beiden Leichtathletikwettbewerbe *Zehnkampf der Männer* und *Siebenkampf der Frauen* gibt es eine international gültige Punktewertung für Großveranstaltungen (Weltmeisterschaften, Olympische Spiele). Die Einzelbewerbe werden nach den unten angeführten Formeln bepunktet. Die Summe der Punkte der Einzelbewerbe ergibt die Gesamtpunkteanzahl, die ein Sportler bzw. eine Sportlerin beim Zehn- bzw. Siebenkampf erreicht. ____/0

Für die Errechnung der Punkte P bei Laufwettberwerben gilt:

$P = a \cdot (b - M)^c$ für $M < b$, sonst $P = 0$.

Für die Errechnung der Punkte P bei Sprung- und Wurfwettbewerben gilt:

$P = a \cdot (M - b)^c$ für $M > b$, sonst $P = 0$.

In beiden Formeln beschreibt M die erzielte Leistung. Dabei werden Läufe in Sekunden, Sprünge in Zentimetern und Würfe in Metern gemessen. Die Parameter a, b und c sind vorgegebene Konstanten für die jeweiligen Sportarten. Die errechneten Punkte P werden im Allgemeinen auf zwei Dezimalstellen gerundet.

Aus den beiden folgenden Tabellen kann man die Werte der Parameter a, b und c entnehmen:

Tabelle 1: Zehnkamp der Männer

		Parameter		
		a	b	c
Disziplin	100m	25,4347	18	1,81
	400m	1,53775	82	1,81
	1 500m	0,03768	480	1,85
	110m Hürden	5,74352	28,5	1,92
	Weitsprung	0,14354	220	1,4
	Hochsprung	0,8465	75	1,42
	Stabhochsprung	0,2797	100	1,35
	Kugelstoß	51,39	1,5	1,05
	Diskurswurf	12,91	4	1,1
	Speerwurf	10,14	7	1,08

Tabelle 1: Siebenkampf der Frauen

		Parameter		
		a	b	c
Disziplin	200m	4,99087	42,5	1,81
	800m	0,11193	254	1,88
	100 m Hürden	9,23076	26,7	1,835
	Weitsprung	0,188807	210	1,41
	Hochsprung	1,84523	75	1,348
	Kugelstoß	56,0211	1,5	1,05
	Speerwurf	15,9803	3,8	1,04

Datenquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Punktewertung_(Leichtathletik) [26.06.2015]

Aufgabenstellung:

(a) Am 1. Mai 1976 gelang dem US-Amerikaner Mac Wilkins der erste Diskuswurf über 70 m. Wilkins erreichte eine Wurfweite von 70,24 m, also $M = 70{,}24$.

$\boxed{\text{A}}$ Berechne sein Punkteergebnis im Diskurswurf!

Gib eine Bedeutung des Parameters b der Punkteformel im Hinblick auf die erzielte Punktezahl für den Diskuswurf der Herren an!

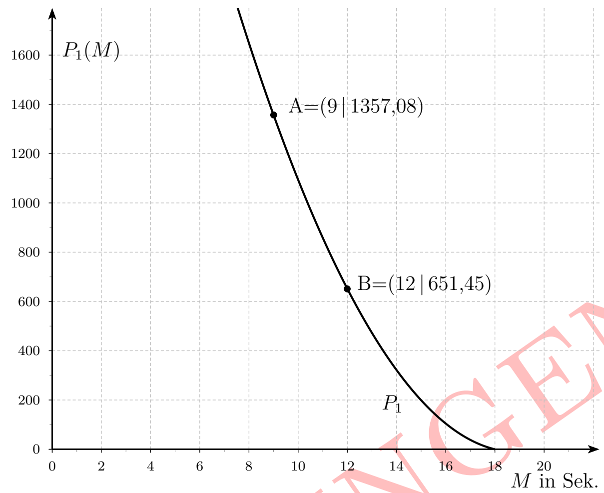
(b) Die Bulgarin Stefka Kostadinows übersprang am 30. August 1987 in Rom eine Höhe von 2,09 m und hät seitdem den Hochsprung-Weltrekord. Die

Funktion $P : M \mapsto P(M)$ beschreibt die Abhängigkeit der Punktezahl $P(M)$ von der Leistung M bei Hochsprungleistungen.

Berechne die Steigung der Tangente an die Funktion P bei dieser Weltrekordhöhe im Hochsprung!

Interpretiere den Wert der Steigung im gegebenen Kontext!

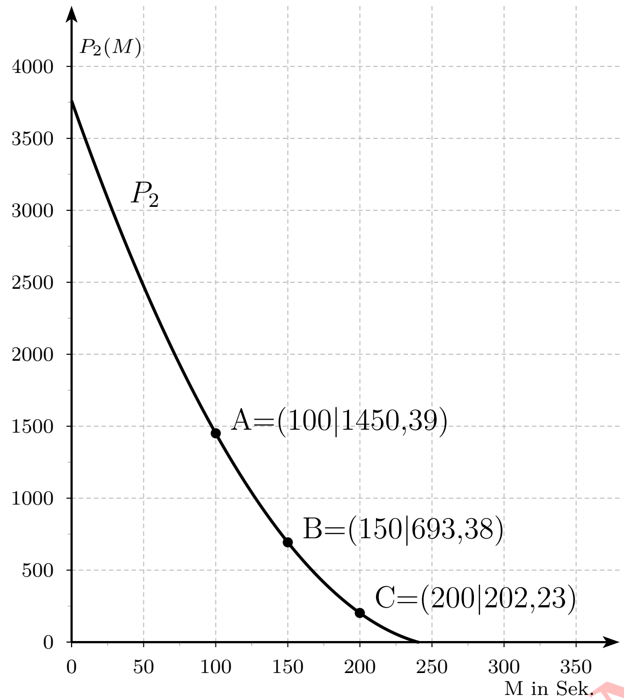
(c) Die folgende Grafik zeigt den funktionalen Zusammenhang $P_1(M)$ für den 100-m-Lauf beim Zehnkampf der Männer:



Näher den Graphen P_1 durch eine lineare Funktion an, deren Graph durch die Punkte A und B geht! Gib eine Gleichung dieser Näherungsfunktion an!

Gib an, wie viele Sekunden die Laufzeit bei dieser Näherung betragen dürfte, um Punkte zu erhalten!

(d) Die folgende Grafik zeigt den funktionalen Zusammenhang $P_2(M)$ für den 800-m-Lauf beim Siebenkampf der Frauen:



Berechne die mittlere Änderungsrate von P_2 sowohl zwischen den Stellen $M = 100$ und $M = 150$ als auch zwischen den Stellen $M = 150$ und $M = 200$ in Punkten pro Sekunde!

Begründe anhand der Grafik, warum sich eine Änderung der Leistung bei besserer Leistung stärker auf die Punktezahl auswirkt als bei schwächerer Leistung!

(a) **Lösungserwartung:**

$P = 12{,}91 \cdot (70{,}24 - 4)^{1{,}1} \approx 1\,300{,}64$

Eine mögliche Interpretation bon b:

b beschreibt die (Mindest-)Leistung (Wurfweite), die übertroffen werden muss, um Punkte zu erhalten.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall: $[1\,300; 1\,301]$
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation. Andere korrekte Interpretationen sind ebenfalls als richtig zu werten.

(b) **Lösungserwartung:**

$P(M) = 1{,}84523 \cdot (M - 75)^{1{,}348}$

$P'(M) = 2{,}48737004 \cdot (M - 75)^{0{,}348}$

$P'(209) \approx 13{,}68$

Der Wert der Steigung dieser Tangente gibt näherungsweise an, um wie viel sich die Punktezahl bei dieser Leistung pro Zentimeter Sprunghöhenänderung verändert.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall: $[13; 14]$
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation. Andere korrekte Interpretationen sind ebenfalls als richtig zu werten.

(c) **Lösungserwartung:**

$P_{1,\text{linear}}(M) = -235{,}21 \cdot M + 3\,473{,}97$

$P_{1,\text{linear}}(M) = 0 \Rightarrow M \approx 14{,}77$

Um Punkte zu erhalten, dürfte die Laufzeit maximal 14,77 s betragen.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine korrekte Funktionsgleichung. Äquivalente Funktionsgleichungen sind ebenfalls als richtig zu werten.
  Toleranzintervall für $k: [-236; -235]$
  Toleranzintervall für $d: [3\,473; 3\,474]$
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit nicht angegeben werden muss.
  Toleranzintervall: $[14{,}7\,s; 15\,s]$

(d) **Lösungserwartung:**

mittlere Änderungsrate zwischen $M = 100$ und $M = 150$: $-15{,}14$ Punkte pro Sekunde

mittlere Änderungsrate zwischen $M = 150$ und $M = 200$: $-9{,}82$ Punkte pro Sekunde

Da die Funktion linksgekrümmt ist, sind die Änderungsraten bei kürzeren Laufzeiten (betragsmäßig) größer als bei längeren Laufzeiten.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die korrekte Angabe beider Werte. Toleranzintervalle: $[-16; -14]$ und $[-10; -9]$
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

---

55 - MAT - FA 3.2, AN 3.2, FA 2.2, FA 2.3, AN 1.2 - Schiefer Turm von Pisa - Matura 2014/15 2. Nebentermin

22. Der Schiefe Turm von Pisa zählt zu den bekanntesten Gebäuden der Welt. Historisch nicht verbürgt sind Galileo Galileis (1564 - 1642) Fallversuche aus verschiedenen Höhen des Schiefen Turms von Pisa. Tatsache ist jedoch, dass Galilei die Gesetze des freien Falls erforscht hat. Die Fallzeit eines Körpers aus der Höhe h_0 ist bei Vernachlässigung des Luftwiderstandes (im Vakuum) unabhängig von seiner Form und seiner Masse. ____/0

Modellhaft kann die Höhe des fallenden Körpers in Abhängigkeit von der Zeit näherungsweise durch die Funktion h mit der Gleichung $h(t) = h_0 - 5t^2$ beschrieben werden.

Die Höhe $h(t)$ wird in Metern und die Zeit t in Sekunden gemessen.

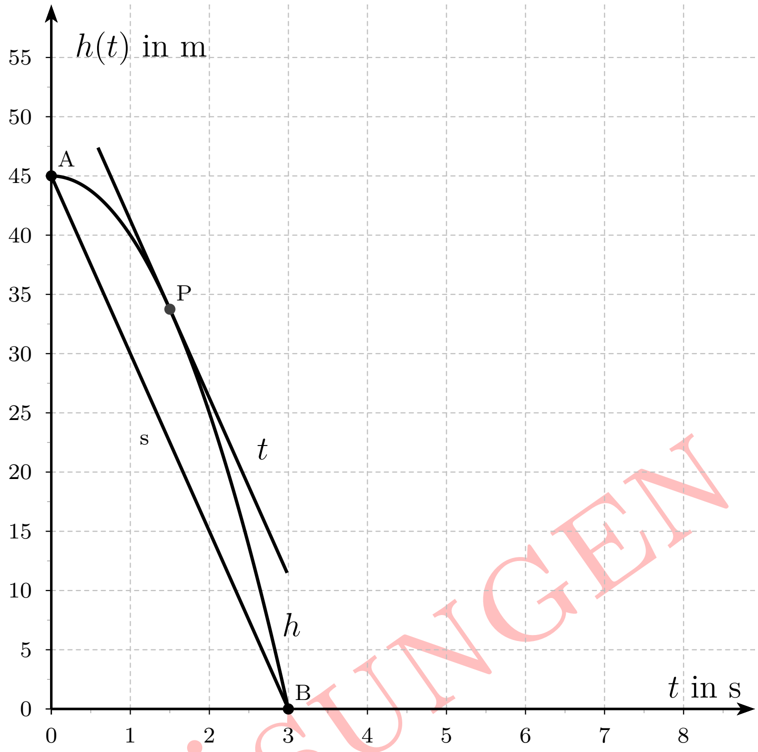
Aufgabenstellung:

(a) Ein Körper fällt im Vakuum aus einer Höhe $h_0 = 45\,\text{m}$.

$\boxed{\text{A}}$ Berechne seine Geschwindigkeit in m/s zum Zeitpunkt t_1 des Aufpralls!

Begründe, warum der Betrag der Geschwindigkeit dieses Körpers im Intervall $[0; t_1]$ monoton steigt!

(b) In der unten stehenden Abbildung ist der Graph der Funktion h für $h_0 = 45\,\text{m}$ dargestellt. Bestimmen Sie die Steigung der Sekante s durch die Punkte $A = (0|45)$ und $B = (3|0)$ und deuten Sie diesen Wert im Hinblick auf die Bewegung des Körpers!



Die Tangente t im Punkt $P = (1{,}5|h(1{,}5))$ ist parallel zur Sekante s. Interpretiere diese Tatsache im Hinblick auf die Bewegung des Körpers.

(a) **Lösungserwartung:**

Zeit-Weg-Funktion $h(t) = 45 - 5t^2$

$0 = 45 - 5t^2$

$t_1 = 3$

Geschwindigkeitsfunktion $v(t) = h'(t) = -10t$

$v(3) = h'(3) = -30$

Der Betrag der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt des Aufpralls beträgt $30\,\text{m/s}$.

Die Geschwindigkeitsfunktion ist eine lineare Funktion, die im Intervall $[0\,s; 3\,s]$ von $v(0) = h'(0) = 0$ ausgehend monoton fallend ist - daher wird der Betrag der Geschwindigkeit immer größer.

Die Bewegung ist gleichmäßig beschleunigt - das heißt, der Betrag der Geschwindigkeit ist monoton wachsend.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit "‘m/s"’ nicht angeführt sein muss und auch -30 m/s als korrekt zu werten ist. Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Begründung.

(b) **Lösungserwartung:**

Die Steigung der Sekante beträgt -15.

Das bedeutet, dass der Betrag der Durchschnittsgeschwindigkeit bei der Bewegung des Körpers im Zeitraum von 0 Sekunden bis 3 Sekunden 15 m/s beträgt.

Mögliche Interpretation:

Der Betrag der Momentangeschwindigkeit ist zum Zeitpunkt $t = 1{,}5$ gleich groß wie die Durchschnittsgeschwindigkeit des Körpers im Intervall $[0\,s; 3\,s]$.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine korrekte Bestimmung der Sekantensteigung und eine (sinngemäß) korrekte Deutung.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation.

---

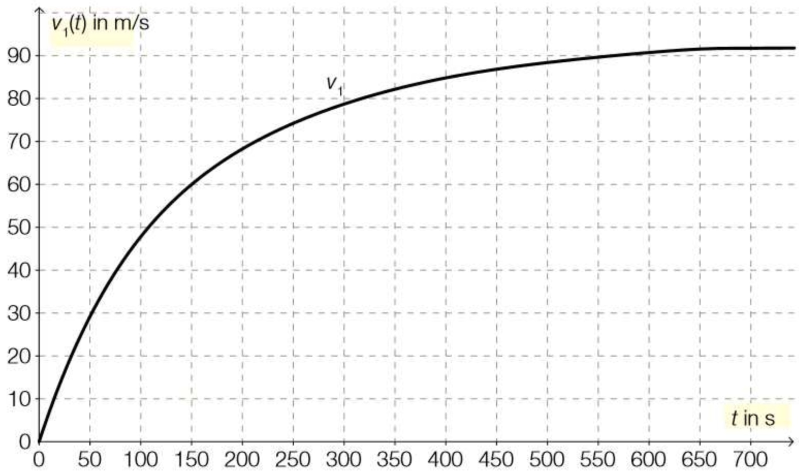
58 - MAT - AN 1.2, AN 4.3, AN 2.1, FA 2.3, FA 2.2, FA 4.3 - Intercity-Express (ICE) - Matura 2015/16 Haupttermin

23. Als ICE werden verschiedene Baureihen von Hochgeschwindigkeitszügen der Deutschen Bahn bezeichnet. Mit einer Höchstgeschwindigkeit von bis zu 330 km/h (rund 91,7 m/s) handelt es sich dabei um die schnellsten Züge Deutschlands. Sie sind ca. 200 Meter lang und ca. 400 Tonnen schwer und bestehen aus jeweils acht Wagen. Im Rahmen von Zulassungsfahrten müssen Beschleunigungs- und ____/0

Bremstests absolviert werden. Ergebnisse dieser Tests können grafisch dargestellt werden.

Aufgabenstellung:

(a) Die Daten eines Beschleunigungstests vom Stillstand bis zur Höchstgeschwindigkeit (die Geschwindigkeit $v_1(t)$ ist in Metern pro Sekunde und die Zeit t in Sekunden angegeben) sind im nachstehenden Zeit-Geschwindigkeit-Diagramm näherungsweise dargestellt.



Bestimme die mittlere Änderungsrate der Geschwindigkeit im Zeitintervall [0 s; 700 s] und gib einen Zeitpunkt an, zu dem die momentane Änderungsrate der Geschwindigkeit größer ist als die ermittelte mittlere Änderungsrate!

$\boxed{\text{A}}$ Interpretiere das bestimmte Intergral $\int_0^{700} v_1(t)\mathrm{d}t$ im gegebenen Kontext!

(b) Bei einem Bremstest werden Daten aufgezeichnet. Diesen Daten kann man für den zurückgelegten Weg $s(t)$ entnehmen: $s(t) = 70 \cdot t - 0{,}25 \cdot t^2$ mit t in Sekunden und $s(t)$ in Metern ab Bremsbeginn.

Gib die Zeit-Geschwindigkeit-Funktion v_2 für den Bremstest in Form von $v_2(t) = k \cdot t + d$ an und deute die auftretenden Parameter k und d im gegebenen Kontext!

Bestimme die Länge derjenigen Strecke, die der ICE vom Bremsbeginn bis zum Stillstand zurücklegt!

(a) **Lösungserwartung:**

mittlere Änderungsrate: 0,131 $\mathrm{m/s^2}$

möglicher Zeitpunkt für die momentane Änderungsrate: $t = 150\,\mathrm{s}$

Der Wert des angegebenen bestimmten Integrals entspricht dem im Zeitintervall $[0\,\mathrm{s}; 700\,\mathrm{s}]$ zurückgelegten Weg (in Metern).

Lösungsschlüssel:

- EEin Punkt für die Angabe sowohl einer korrekten mittleren Änderungsrate als auch eines entsprechenden Zeitpunkts, wobei die Einheiten "‘m/s²"’ bzw. "‘s"’ nicht angeführt sein müssen.
  Toleranzintervall für die mittlere Änderungsrate: $[0{,}130\,\mathrm{m/s^2}; 0{,}133\,\mathrm{m/s^2}]$
  Toleranzintervall für den Zeitpunkt: $[0\,\mathrm{s}; 230\,\mathrm{s}]$
- Ein Ausgleichspunkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation.

(b) **Lösungserwartung:**

$v_2(t) = 70 - 0{,}5 \cdot t$

Mögliche Deutungen von k:

Die Geschwindigkeit nimmt während des Bremsvorgangs in jeder Sekunde (konstant) um 0,5 m/s ab.

oder:

Die Beschleunigung (ist konstant und) beträgt $-0{,}5\,\mathrm{m/s^2}$.

oder:

Die Verzögerung durch das Bremsen (ist konstant und) beträgt $0{,}5\,\mathrm{m/s^2}$.

Mögliche Deutung von d:

Die Geschwindigkeit zu Beginn des Bremsvorgangs beträgt 70 m/s.

$v_2(t) = 0 \Rightarrow t = 140\,\mathrm{s} \Rightarrow s(140) = 4\,900\,\mathrm{m}$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine korrekte Gleichung und eine (sinngemäß) korrekte Deutung beider Parameter. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.

- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit "‘m"’ nicht angeführt sein muss.

---

59 - MAT - AN 1.1, FA 5.6, FA 2.2, FA 2.5 - ZAMG-Wetterballon - Matura 2015/16 Haupttermin

24. Ein Wetterballon ist ein mit Helium oder Wasserstoff befüllter Ballon, der in der Meteorologie zum Transport von Radiosonden (Messgeräten) verwendet wird. Die Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik (ZAMG) lässt an 365 Tagen im Jahr zwei Mal am Tag einen Wetterballon von der Wetterstation Hohe Warte aufsteigen. Während des Aufstiegs werden kontinuierlich Messungen von Temperatur, Luftfeuchtigkeit, Luftdruck, Windrichtung und Windgeschwindigkeit durchgeführt. ____/0

Die bei einem konkreten Aufstieg eines Wetterballons gemessenen Werte für den Luftdruck und die Temperatur in der Höhe h über dem Meeresspiegel liegen in der nachstehenden Tabelle vor.

Die Höhe h des Ballons über dem Meeresspiegel (in m)	Luftdruck p (in hPa)	Temperatur (in °C)
1 000	906	1,9
2 000	800	-3,3
3 000	704	-8,3
4 000	618	-14,5
5 000	544	-21,9
6 000	479	-30,7
7 000	421	-39,5
8 000	370	-48,3

Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Bestimme die relative (prozentuelle) Änderung des Luftdrucks bei einem Anstieg des Wetterballons von 1 000 m auf 2 000 m!

Die Abhängigkeit des Luftdrucks von der Höhe kann näherungsweise durch eine Exponentialfunktion beschrieben werden. Beschreibe, wie dies anhand obiger Tabelle begründet werden kann!

(b) Die Temperatur in Abhängigkeit von der Höhe lässt sich im Höhenintervall [5 000 m; 8 000 m] durch eine lineare Funktion T beschreiben.

Begründe dies anhand der in der obigen Tabelle angegebenen Werte!

Berechne für diese Funktion T mit $T(h) = k \cdot h + d$ die Werte der Parameter k und d!

(c) Das Volumen des Wetterballons ist näherungsweise indirekt proportional zum Luftdruck p. In 1 000 Metern Höhe hat der Wetterballon ein Volumen von 3 m³.

Beschreibe die funktionale Abhängigkeit des Volumens (in m³) vom Luftdruck (in hPa) durch eine Gleichung!

$V(p) =$ ________________________

Berechne die absolute Änderung des Ballonvolumens im Höhenintervall [1 000 m; 2 000 m]

(a) **Lösungserwartung:**

$\frac{800-906}{906} \approx -0{,}117$

Der Luftdruck nimmt bei diesem Anstieg um ca. 11,7 % ab.

Eine Exponentialfunktion eignet sich in diesem Fall, da eine gleiche Zunahme der Höhe h stets eine Verminderung des Luftdrucks um den annähernd gleichen Prozentsatz vom jeweiligen Ausgangswert bewirkt (z.B. Höhenzunahme um 1 000 m ⇔ Luftdruckabnahme um ca. 12 %).

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall: $[-0{,}12; -0{,}115]$ bzw. $[-12\,\%; -11{,}5\,\%]$
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Begründung.

(b) **Lösungserwartung:**

Eine lineare Funktion eignet sich in diesem Fall, da eine gleiche Zunahme der Höhe h stets eine gleiche Verminderung der Temperatur vom jeweiligen Ausgangswert bewirkt (z.B. Höhenzunahme um 1 000 m ⇔ Temperaturverminderung um 8,8 °C).

$k = -0{,}0088$

$d = 22{,}1$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Begründung.
- Ein Punkt die korrekte Angabe beider Parameterwerte k und d.
  Toleranzintervall für k : $[-0{,}009; -0{,}0088]$

(c) **Lösungserwartung:**

$V(p) = \frac{2\,718}{p}$

$V(800) - V(906) = 0{,}3975$

Die absolute Änderung des Ballonvolumens in diesem Höhenintervall beträgt $0{,}3975\,\mathrm{m}^3$.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine korrekte Gleichung. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit "‘m^3"’ nicht angeführt sein muss.
  Toleranzintervall: $[0{,}39\,\mathrm{m}^3; 0{,}4\,\mathrm{m}^3]$

---

60 - MAT - AG 2.1, FA 2.2 - Einkommensteuer - Matura 2015/16 Haupttermin

25. Erwerbstätige Personen müssen einen Teil ihrer Einkünfte in Form von Einkommensteuer an den Staat abführen. Im Steuermodell für das Kalenderjahr 2015 unterscheidet man vier Steuerklassen mit den sogenannten Steuersätzen: 0 %, 36,5 %, 43,2 % und 50 %. ____/0

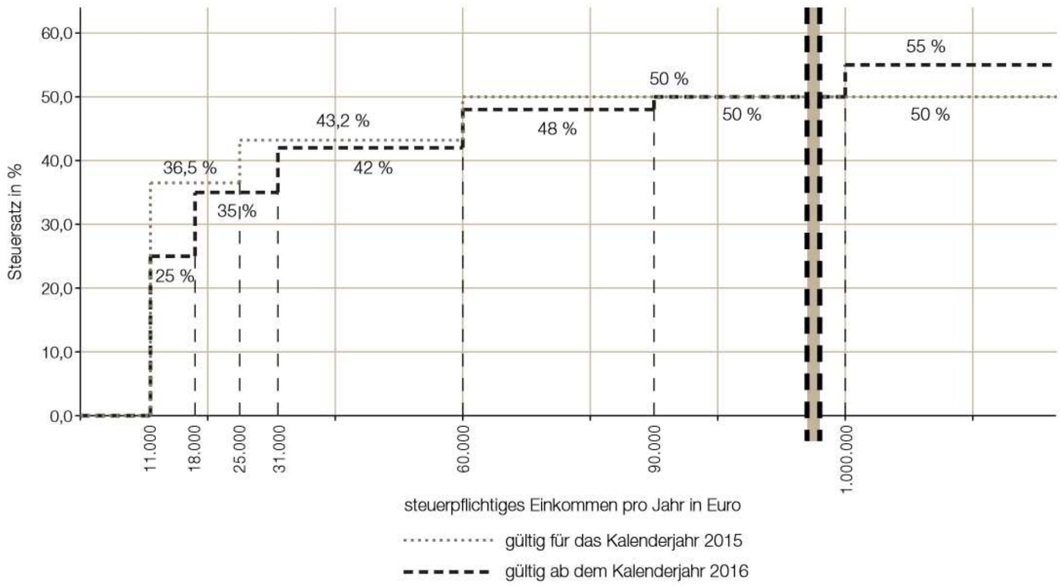
Modellhaft wird angenommen:

Jahresnettoeinkommen = steuerpflichtiges Jahreseinkommen - Einkommensteuer

Die Berechnung der Einkommensteuer bezieht sich auf das steuerpflichtige Jahreseinkommen und unterliegt für das Kalenderjahr 2015 den folgenden Regeln:

- Einkommen bzw. Einkommensteile bis € 11.000 sind steuerfrei.
- Einkommensteile über € 11.000 bis € 25.000 werden mit 36,5 % besteuert. Das heißt: Liegt das Einkommen über € 11.000, sind die ersten verdienten € 11.000 steuerfrei, die darüber hinausgehenden Einkommensteile bis € 25.000 werden mit 36,5 % besteuert.
- Einkommensteile über € 25.000 bis € 60.000 werden mit 43,2 % (genau: $43\frac{3}{14}$ %) besteuert.
- Einkommensteile über € 60.000 werden mit 50 % besteuert.

Am 7. Juli 2015 wurde vom Nationalrat das Steuerreformgesetz 2015/2016 beschlossen. Das ab dem 1. Jänner 2016 gültige Steuermodell ist ein Modell mit sieben Steuersätzen. Das 2015 gültige Modell (mit vier Steuerklassen) und das ab 2016 gültige Modell (mit sieben Steuerklassen) sind in der nachstehenden Grafik dargestellt.



Datenquelle: http://www.parlament.gv.at/ZUSD/BUDGET/BD_-_Steuerreform_2015_und_2016.pdf, S. 15 [11.11.2015]

Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Berechne mithilfe der 2015 geltenden Steuersätze das Jahresnettoeinkommen einer Person, deren steuerpflichtiges Jahreseinkommen € 20.000 beträgt!

Gib (für das Jahr 2015) eine Formel für das Jahresnettoeinkommen N einer Person an, deren steuerpflichtiges Jahreseinkommen E zwischen € 11.000 und € 25.000 liegt!

(b) Der sogenannte *Durchschnittssteuersatz* ist wie folgt definiert:

Durchschnittssteuersatz $= \frac{\text{gezahlte Einkommensteuer}}{\text{steuerpflichtiges Jahreseinkommen}}$

Jemand bezog im Jahr 2015 ein steuerpflichtiges Jahreseinkommen von € 40.000. Berechne für diese Person für das Jahr 2015 den Durchschnittssteuersatz!

Interpretiere unter Verwendung der gegebenen Grafik, was für diese Person mit dem Term $7\,000 \cdot 0{,}115 + 7\,000 \cdot 0{,}015 + 6\,000 \cdot 0{,}082 + 9\,000 \cdot 0{,}012$ berechnet wird!

(c) Jemand behauptet:

(i) "'Bei einem steuerpflichtigen Jahreseinkommen von € 100.000 tritt trotz der Gesetzesänderung keine Veränderung hinsichtlich der abzuführenden Einkommensteuer ein."'

(ii) "'Der Steuersatz für steuerpflichtige Jahreseinkommen von über € 11.000 bis € 18.000 ändert sich um 11,5 Prozent."'

Sind diese Behauptungen richtig? Formuliere jeweils eine mathematisch begründete Antwort!

(d) Das Bundesministerium für Finanzen gibt auf seiner Website die Berechnung der Einkommensteuer 2015 (ESt) für die Einkommensklasse über € 25.000 bis € 60.000 steuerpflichtiger Jahreseinkommen mit folgender Formel an:

$$\text{ESt} = \frac{(\text{steuerpflichtiges Jahreseinkommen} - 25\,000) \cdot 15\,125}{35\,000} + 5\,110$$

Deute den Faktor $\frac{15\,125}{35\,000}$ und den Summanden $5\,110$ im Hinblick auf die Berechnung der Einkommensteuer!

Stelle eine Formel zur Berechnung der Einkommensteuer (ESt_{neu}) für ein steuerpflichtiges Jahreseinkommen von über € 31.000 bis € 60.000 für das ab 2016 gültige Steuermodell auf!

$(\text{ESt}_{\text{neu}})=$ __________________________

(a) **Lösungserwartung:**

$20\,000 - 9\,000 \cdot 0{,}365 = 16\,715 \Rightarrow$ € 16.715

Mögliche Formeln:

$N = E - (E - 11\,000) \cdot 0{,}365$

oder:

$N = 11\,000 + (E - 11\,000) \cdot 0{,}635$

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit "‘€ "’ nicht angegeben sein muss.
  Toleranzintervall: [€ 16.700; € 16.720]
- Ein Punkt für die Angabe einer korrekten Formel für das Jahresnettoeinkommen. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.

(b) **Lösungserwartung:**

$\frac{14\,000 \cdot 0{,}365 + 15\,000 \cdot 0{,}432}{40\,000} \approx 0{,}29$, d.h. ca. 29 % Durschnittssteuersatz

Mit dem Term wird die Steuerersparnis (in Euro) dieser Person durch das neue Steuermodell (im Vergleich zum 2015 gültigen Modell) berechnet.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall: [0,28; 0,29] bzw. [28 %; 29 %]
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) richtige Interpretation.

(c) **Lösungserwartung:**

Beide Behauptungen sind falsch.

(i) Auch Bezieher/innen von einem steuerpflichtigen Jahreseinkommen von € 100.000 bezahlen beim neuen Steuermodell weniger Einkommensteuer, nämlich für die Einkommensanteile unter € 90.000.

(ii) Tatsächlich ändert sich der Steuersatz für das steuerpflichtige Jahreseinkommen um 11,5 *Prozentpunkte*, das sind $\frac{11{,}5}{36{,}5} \approx 31{,}5$ *Prozent.*

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine (sinngemäß) richtige Begründung, warum die Behauptung (i) falsch ist.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) richtige Begründung, warum die Behauptung (ii) falsch ist.

(d) **Lösungserwartung:**

$\frac{15\,125}{35\,000} \approx 0{,}432$ ist der Steuersatz für diese Einkommensklasse.

5 110 ist die Einkommensteuer für die ersten € 25.000 an steuerpflichtigem Jahreseinkommen.

$\text{ESt}_{\text{neu}} = (\text{steuerpflichtiges Jahreseinkommen} - 31\,000) \cdot 0{,}42 + 6\,300$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine (sinngemäß) richtige Interpretation beider Zahlenwerte.
- Ein Punkt für eine korrekte Formel. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.

---

63 - MAT - FA 5.1, AN 4.3, AN 1.3, FA 2.5, FA 2.3 - Bevölkerungswachstum in den USA - Matura 2015/16 1. Nebentermin

26. Die erste Volkszählung in den USA fand im Jahre 1790 statt. Seit diesem Zeitpunkt werden Volkszählungen im Abstand von zehn Jahren abgehalten. Zwischen den Volkszählungen wird die Zahl der Einwohner/innen durch die Meldeämter ermittelt. ____/0

Nachstehend wird ein Überblick über die Bevölkerungsentwicklung in den USA im Zeitraum von 1790 bis 1890 (Tabelle) bzw. 2003 bis 2013 (Grafik) gegeben.

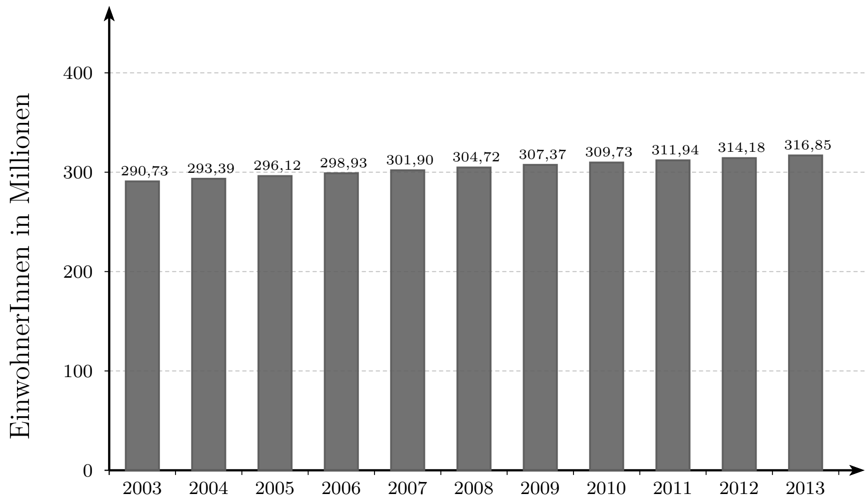
Tabelle: Bevölkerungsentwicklung in den USA von 1790 bis 1890

Jahr	Einwohnerzahl in Millionen
1790	3,9
1800	5,2
1810	7,2
1820	9,6
1839	12,9
1840	17,1

Jahr	Einwohnerzahl in Millionen
1850	23,2
1860	31,4
1870	38,6
1880	49,3
1890	49,3

Quelle: Keller, G. (2011). Mathematik in den Life Sciences. Stuttgart: Ulmer. S. 55.

Grafik: Bevölkerungsentwicklung in den USA von 2003 bis 2013



Datenquelle: http://de.statista.com/statistik/daten/studie/19320/umfrage/gesamtbevoelkerung-der-usa/ [19.09.2013] (adaptiert).

Für den Zeitraum von 1790 bis 1890 kann die Entwicklung der Zahl der Einwohner/innen der USA näherungsweise durch eine Exponentialfunktion B mit $B(t) = B_0 \cdot a^t$ beschrieben werden. Dabei gibt t die Zeit in Jahren, die seit 1790 vergangen sind, an. $B(t)$ wird in Millionen Einwohner/innen angegeben.

Aufgabenstellung:

(a) Ermittle eine Gleichung der Funktion B unter Verwendung der Daten aus den beiden Jahren 1790 und 1890!

Interpretiere das bestimmte Integral $\int_0^{50} B'(t)\mathrm{d}t$ im gegebenen Zusammenhang!

(b) Die erste Ableitung der Funktion B ist gegeben durch $B'(t) = B_0 \cdot \ln(a) \cdot a^t$.

Gib t^* so an, das $B'(t^*) = B_0 \cdot \ln(a)$ gilt!

Interpretiere $B'(t^*)$ im Zusammenhang mit dem Bevölkerungswachstum in den USA!

(c) $\boxed{\text{A}}$ Begründe, warum die Bevölkerungsentwicklung in den USA im Zeitraum von 2003 bis 2013 näherungsweise durch eine lineare Funktion N mit $N(t) = k \cdot t + d$ beschrieben werden kann (dabei gibt t die Zeit in Jahren, die seit 2003 vergangen sind, an)!

Interpretiere die Bedeutung des Parameters k dieser linearen Funktion! Eine Berechnung des Parameters k ist nicht erforderlich.

(a) **Lösungserwartung:**

Mögliche Berechnung:

$B_0 = 3{,}9$ und $B(100) = 62{,}9 \Rightarrow 62{,}9 = 3{,}9 \cdot a^{100} \Rightarrow a = \sqrt[100]{\frac{62{,}9}{3{,}9}} \Rightarrow a \approx 1{,}0282$

$B(t) = 3{,}9 \cdot 1{,}0282^t$

Das bestimmte Integral $\int_0^{50} B'(t)\mathrm{d}t$ gibt denjenigen Wert näherungsweise an, um den die Einwohnerzahl von 1790 bis 1840 gewachsen ist.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine korrekte Funktionsgleichung. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.
  Toleranzintervall für a : $[1{,}028; 1{,}029]$
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation.

(b) **Lösungserwartung:**

$t^* = 0$

$B_0 \cdot \ln(a)$ ist die Wachstumsgeschwindigkeit der Bevölkerung (momentane Änderungsrate der Einwohnerzahl) zum Zeitpunkt $t = 0$ in Millionen Einwohner/innen pro Jahr.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation.

(c) **Lösungserwartung:**

Mögliche Begründung:

Im Zeitraum von 2003 bis 2013 ist die (absolute) Zunahme der Bevölkerung pro Jahr annähernd konstant.

Der Parameter k entspricht der (durchschnittlichen) Zunahme der Bevölkerung pro Jahr.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für eine (sinngemäß) richtige Begründung.
- Ein Punkt für die (sinngemäß) richtige Interpretation des Parameters k.

72 - MAT - FA 5.1, FA 5.2, FA 2.2, FA 2.1, AN 4.3 - Zerstörung des Tropenwaldes - Matura 2016/17 Haupttermin

27. Unterschiedliche Studien befassen sich mit der Zerstörung des Tropenwaldes. ____/0

1992 wurde von einem Team um den US-amerikanischen Ökonomen Dennis Meadows die Studie Die neuen Grenzen des Wachstums veröffentlicht.

In dieser Studie wird der Tropenwaldbestand der Erde Ende 1990 mit 800 Millionen Hektar beziffert. Im Jahr 1990 wurden etwa 17 Millionen Hektar gerodet. Die nachstehenden drei "‘Katastrophenszenarien"’ werden in der Studie entworfen:

Szenario 1: Die jährliche relative Abnahme von ca. 2,1 % bleibt konstant.

Szenario 2: Die Abholzung von 17 Millionen Hektar jährlich bleibt konstant.

Szenario 3: Der Betrag der Abholzungsrate (in Millionen Hektar pro Jahr) wächst exponentiell.

In der nachstehenden Abbildung 1 sind die Graphen der Funktionen f_1 und f_3 dargestellt, die den Waldbestand der Tropen entsprechend den oben angeführten Szenarien 1 und 3 beschreiben.

Die nachstehende Abbildung 2 zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion f_3' der in der Abbildung 1 dargestellten Funktion f_3.

Abbildung 1:

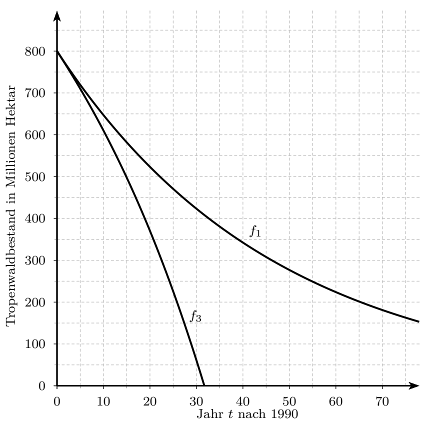
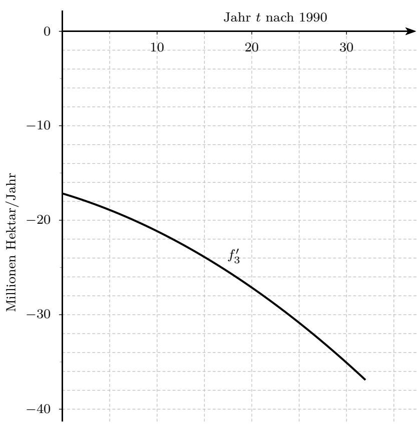


Abbildung 2:



Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Ermittle die Funktionsgleichung von f_1, wobei die Variable t die nach dem Jahr 1990 vergangene Zeit in Jahren angibt!

Berechne, wann gemäß Szenario 1 der Tropenwaldbestand auf weniger als 100 Millionen Hektar gesunken sein wird!

(b) Gib die Gleichung derjenigen Funktion f_2 an, die den Bestand t Jahre nach 1990 unter der Annahme einer konstanten Abnahme von 17 Millionen Hektar pro Jahr modelliert!

Gib an, in welchem Jahr entsprechend diesem Modell der Tropenwald von der Erdoberfläche verschwinden würde, und zeichne den Graphen dieser Funktion in der Abbildung 1 ein!

(c) Geh in den nachstehenden Aufgabenstellungen auf Meadows' Annahme einer exponentiell zunehmenden Abholzungsrate ein und beantworte mithilfe der gegebenen Abbildungen.

Gib näherungsweise denjenigen Zeitpunkt t_1 an, zu dem die momentane Abholzungsrate auf ca. 24 Millionen Hektar pro Jahr angewachsen ist!

Bestimme näherungsweise den Wert des Integrals $\int_0^{t_1} f'(t)\mathrm{d}t$ durch Ablesen aus den Abbildungen und gib seine Bedeutung im Zusammenhang mit der Abholzung der tropischen Wälder an!

(d) Ein internationales Forscherteam um den Geografen Matthew Hansen von der University of Maryland hat mithilfe von Satellitenfotos die Veränderung des Baumbestands des Tropenwaldes von 2000 bis 2012 ermittelt. Dabei wurde festgestellt, dass in jedem Jahr durchschnittlich um a Millionen Hektar ($a > 0$) mehr abgeholzt wurden als im Jahr davor.

Begründe, warum das von Meadows entworfene Szenario 3 am ehesten den Beobachtungen von Matthew Hansen entspricht!

Das Team von Hansen gibt für a den Wert 0,2101 Millionen Hektar pro Jahr an. Gib an, ob die im Modell von Meadows für den Zeitraum 2000 bis 2012 vorhergesagten Änderungsraten der Abholzungsrate größer oder kleiner als die von Hansen beobachteten sind, und begründe deine Entscheidung!

(a) **Lösungserwartung:**

$f_1(t) = 800 \cdot 0{,}979^t$

$800 \cdot 0{,}979^t < 100 \Rightarrow t > 97{,}977...$

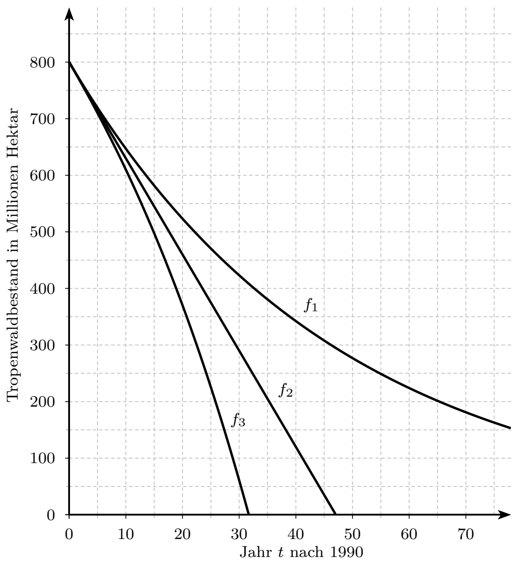
Nach Szenario 1 wird der Tropenwaldbestand nach ca. 98 Jahren auf weniger als 100 Millionen Hektar gesunken sein.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für eine korrekte Funktionsgleichung. Äquivalente Funktionsgleichungen sind als richtig zu werten.
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit "‘Jahre"’ nicht angegeben sein muss.
  Toleranzintervall: [93 Jahre; 104 Jahre]
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

(b) **Lösungserwartung:**

$f_2(t) = -17 \cdot t + 800$ (bzw. $f_2(t) = -17\,000\,000 \cdot t + 800\,000\,000$)



Entsprechend diesem Modell würde der Tropenwald im Laufe des Jahres 2037 verschwinden.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine korrekte Funktionsgleichung.
- Ein Punkt für die Angabe einer korrekten Jahreszahl sowie eines korrekten Graphen, wobei dieser als Gerade erkennbar sein muss, die durch $(0|800)$ verläuft und deren Schnittpunkt mit der Zeitachse im Toleranzintervall $[45; 50]$ liegt.
  Toleranzintervall für das gesuchte Jahr: $[2035; 2040]$

(c) **Lösungserwartung:**

$t_1 \approx 15$ (also im Jahr 2005)

$\int_0^{t_1} f_3'(t)\mathrm{d}t \approx -300$ (bzw. $-300\,000\,000$)

In den 15 Jahren nach 1990 wurden ca. 300 Millionen Hektar Tropenwald gerodet.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall: $[14; 16]$ bzw. $[2004; 2006]$
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei auch der Betrag der Lösung als richtig zu werten ist, sowie für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation.
  Toleranzintervall: $[-350; -250]$ (bzw. $[-350000000; -250000000]$)

(d) **Lösungserwartung:**

Eine Übereinstimmung ist am ehesten mit dem Szenario 3 festzustellen, da dieses Modell ebenso von einer jährlich zunehmenden Abholzungsrate ausgeht.

Das Modell von Meadows sagt für diesen Zeitraum eine deutlich größere Änderung der Abholzungsrate voraus.

Mögliche Begründung: Der Betrag der Steigung der Funktion f_3' ist im Zeitraum 2000 bis 2012 deutlich größer als 0,2101.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Begründung.

- Ein Punkt für eine richtige Entscheidung und eine korrekte Begründung.

---

74 - MAT - AG 2.1, AN 2.1, AN 3.3, FA 1.2, FA 1.5, FA 1.7 - Aufnahme einer Substanz ins Blut - BIFIE Aufgabensammlung

28. Wenn bei einer medizinischen Behandlung eine Substanz verabreicht wird, kann die Konzentration der Substanz im Blut (kurz: Blutkonzentration) in Abhängigkeit von der Zeit t in manchen Fällen durch eine sogenannte Bateman-Funktion $c(t) = d \cdot (e^{-a \cdot t} - e^{-b \cdot t})$ mit den personenbezogenen Parametern $a, b, d > 0, a < b$ modelliert werden. Die Zeit t wird in Stunden gemessen, $t = 0$ entspricht dem Zeitpunkt der Verabreichung der Substanz. ____/0

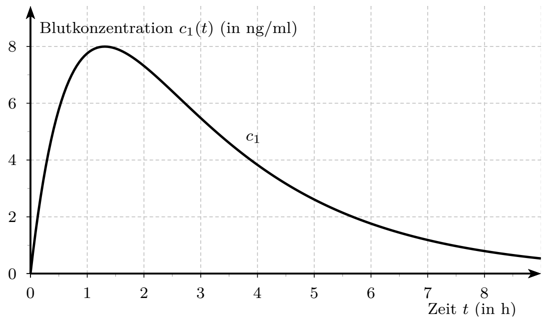
    Die Bioverfügbarkeit f gibt den Anteil der verabreichten Substanz an, der unverändert in den Blutkreislauf gelangt. Bei einer intravenösen Verabreichung (d.h. einer direkten Verabreichung in eine Vene) beträgt der Wert der Bioverfügbarkeit 1.

    Das Verteilungsvolumen V beschreibt, in welchem Ausmaß sich die Substanz aus dem Blut in das Gewebe verteilt.

    Der Parameter d ist direkt proportional zur verabreichten Dosis D und zur Bioverfügbarkeit f, außerdem ist d indirekt proportional zum Verteilungsvolumen V.

    Die Nachstehende Abbildung zeigt exemplarisch den zeitlichen Verlauf der Blutkonzentration in Nanogramm pro Milliliter (ng/ml) für den Fall der Einnahme einer bestimmten Dosis der Substanz Lysergsäurediethylamid und kann mit der Bateman-Funktion c_1 mit den Parametern $d = 19{,}5, a = 0{,}4$ und $b = 1{,}3$ beschrieben werden.

    Der Graph der Bateman-Funktion weist für große Zeiten t einen asymptotischen Verlauf gegen die Zeitachse auf.



Aufgabenstellung:

(a) Gib eine Gleichung an, mit der der Zeitpunkt der maximalen Blutkonzentration für die in der Einleitung beschriebene Bateman-Funktion c_1 berechnet werden kann, und ermittle diesen Zeitpunkt!

Begründe allgemein, warum der Wert des Parameters d in der Bateman-Funktion c nur die Größe der maximalen Blutkonzentration beeinflusst, aber nicht den Zeitpunkt, zu dem diese erreicht wird!

(b) Die Werte der Parameter a, b und d der Bateman-Funktion variieren von Patient zu Patient. Es wird im Folgenden angenommen, dass der Wert des Parameters d für drei untersuchte Patienten P_1, P_2, P_3 identisch ist.

Für den Patienten P_1 gelten die Parameter aus der Einleitung. Bei Patient P_2 ist der Wert des Parameters a etwas größer als bei Patient P_1.

Beschreibe, wie sich der Graph der Bateman-Funktion verändert, wenn der Wert des Parameters a erhöht wird, der Parameter b unverändert bleibt und $a < b$ gilt!

Interpretiere diese Veränderung im gegebenen Kontext.

Patient P_3 erreicht (bei gleicher verabreichter Dosis) die maximale Blutkonzentration zeitgleich mit Patient P_1, die maximale Blutkonzentration von Patient P_3 ist aber größer.

Ermittle, wie sich die Werte von a und b bei der Bateman-Funktion für Patient P_3 von jenen von Patient P_1 unterscheiden!

(c) Kreuze diejenige Formel an, die den Zusammenhang zwischen dem Parameter d der Bateman-Funktion und den in der Einleitung beschriebenen

Größen V, D und f korrekt beschreibt! Der Parameter λ ist dabei ein allgemeiner Proportionalitätsfaktor.

$d = \lambda \cdot \frac{D}{V \cdot f}$	
$d = \lambda \cdot \frac{D \cdot V}{f}$	
$d = \lambda \cdot \frac{V \cdot f}{D}$	
$d = \lambda \cdot \frac{D \cdot f}{V}$	☒
$d = \lambda \cdot \frac{V}{D \cdot f}$	
$d = \lambda \cdot \frac{f}{V \cdot D}$	

Bei einem konstanten Wert des Parameters d und der Bioverfügbarkeit f kann man die verabreichte Dosis $D(V)$ als Funktion D in Abhängigkeit vom Verteilungsvolumen V auffassen. Beziehe dich auf die von dir angekreuzte Formel und gib für die Parameterwerte der in der Einleitung dargestellten Bateman-Funktion und für den Fall einer intrevenösen Verabreichung die Funktionsgleichung $D(V)$ an! Gib weiters an, um welchen Funktionstyp es sich bei D handelt!

(a) **Lösungserwartung:**

$c_1(t) = 19{,}5 \cdot (e^{-0{,}4 \cdot t} - e^{-1{,}3 \cdot t})$

$c_1'(t) = 19{,}5 \cdot (-0{,}4 \cdot e^{-0{,}4 \cdot t} + 1{,}3 \cdot e^{-1{,}3 \cdot t}) = 0$

$t \approx 1{,}31$ Stunden

$c_1''(1{,}31) \approx -4{,}15 < 0$

Mögliche Begründungen:

Für die Berechnung des Zeitpunkts der (lokalen) maximalen Blutkonzentration muss die Gleichung $c'(t) = 0$ nach t gelöst werden. Der Parameter d fällt bei dieser Berechnung weg und beeinflusst somit nur die Höhe der maximalen Blutkonzentration zum ermittelten Zeitpunkt.

oder:

$c'(t) = d \cdot (-a \cdot e^{-a \cdot t} + b \cdot e^{-b \cdot t}) = 0 \Rightarrow t = \frac{\ln(a) - \ln(b)}{a - b} \Rightarrow$ Der Parameter d tritt in dieser Formel nicht auf. Der Zeitpunkt der maximalen Blutkonzentration t ist somit von d unabhängig.

(b) **Lösungserwartung:**

Bei einer Erhöhung des Wertes von a verschiebt sich das lokale Maximum der Funktion bei einem niedrigeren Funktionswert "‘nach link"’. Das bedeutet, dass die maximale Blutkonzentration früher erreicht wird und geringer ist.

Der Patient P_3 ist (bei der Bateman-Funktion) der Wert von a kleiner und der Wert von b größer als bei (der Bateman-Funktion von) Patient P_1.

(c) **Lösungserwartung:**

Multiple Choice - siehe oben.

Die Funktionsgleichung lautet $D(V) = \frac{19{,}5}{\lambda} \cdot V$.
Es handelt sich um eine lineare Funktion.

---

75 - MAT - AG 2.1, AN 1.3, FA 2.1, FA 2.2 - Stratosphärensprung - BIFIE Aufgabensammlung

29. Am 14.10.2012 sprang der österreichische Extremsportler Felix Baumgartner aus einer Höhe von 38 969 m über dem Meeresspiegel aus einer Raumkapsel. Er erreichte nach 50 s in der nahezu luftleeren Stratosphäre eine Höchstgeschwindigkeit von 1 357,6 km/h ($\approx$ 377,1 m/s) und überschritt dabei als erster Mensch im freien Fall die Schallgeschwindigkeit, die bei 20°C ca. 1 236 km/h ($\approx$ 343,3 m/s) beträgt, in der Stratosphäre wegen der niedrigen Lufttemperaturen aber deutlich geringer ist. ____/0

Die Schallgeschwindigkeit in trockener Luft hängt bei Windstille nur von der Lufttemperatur T ab. Für die Berechnung der Schallgeschwindigkeit in Metern pro Sekunde (m/s) werden nachstehend zwei Formeln angegeben, die - bis auf einen (gerundeten) Faktor - äquivalent sind.

Die Lufttemperatur T wird in beiden Formeln in °C angegeben.

$v_1 = \sqrt{401{,}87 \cdot (T + 273{,}15)}$

$v_2 = 331{,}5 \cdot \sqrt{1 + \frac{T}{273{,}15}}$

Aufgabenstellung:

(a) Die Fallbeschleunigung a eines Körpers im Schwerefeld der Erde ist abhängig vom Abstand des Körpers zum Erdmittelpunkt. Die Fallbeschleunigung an der Erdoberfläche auf Meeresniveau, d.h. bei einer Entfernung von $r = 6\,371\,000\,\mathrm{m}$ vom Erdmittelpunkt, beträgt bei vernachlässigbarem Luftwiderstand ca. $9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$.

Für die Fallbeschleunigung a gilt: $a(r) = \frac{G \cdot M}{r^2}$, wobei G die Gravitationskonstante, M die Erdmasse und r der Abstand des Körpers vom Erdmittelpunkt ist. Es gilt:

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2}$; $M = 5{,}97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$

Berechne den Wert der Fallbeschleunigung, die auf Felix Baumgartner beim Absprung aus der Raumkapsel wirkte!

$a =$ _______________ $\mathrm{m/s^2}$

Berechne die mittlere Fallbeschleunigung, die auf Felix Baumgartner bis zum Erreichen der Höchstgeschwindigkeit wirkte, wenn von konstanter Lufttemperatur während dieser Zeit ausgegangen wird!

(b) Als Felix Baumgartner seine Höchstgeschwindigkeit erreichte, bewegte er sich um 25 % schneller als der Schall in dieser Höhe.

Gib eine Gleichung an, mit der unter Verwendung einer der beiden in der Einleitung genannten Formeln die Lufttemperatur, die zu diesem Zeitpunkt geherrscht hat, berechnet werden kann, und ermittle diese Lufttemperatur!

Untersuche mithilfe der beiden Formeln den Quotienten der Schallgeschwindigkeiten im Lufttemperaturintervall $[-60\,°\mathrm{C}; 20\,°\mathrm{C}]$ in Schritten von $10\,°\mathrm{C}$ und gib eine Formel an, die in diesem Lufttemperaturintervall den Zusammenhang zwischen v_1 und v_2 beschreibt!

(c) Zeige mithilfe von Äquivalenzumformungen, dass die beiden Formeln für die Schallgeschwindigkeit in der Einleitung bis auf einen (gerundeten) Faktor äquivalent sind! Geh dabei von der Formel für v_1 aus!

Die Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit v_1 von der Lufttemperatur T kann im Lufttemperaturintervall $[-20\,°\mathrm{C}; 40\,°\mathrm{C}]$ in guter Näherung durch eine lineare Funktion f mit $f(T) = k \cdot T + d$ modelliert werden.

Ermittle die Werte der Parameter k und d und interpretiere diese Werte im gegebenen Kontext!

(a) **Lösungserwartung:**

$r_1 = 6\,371\,000 + 38\,969 = 6\,409969\,\text{m}$

$a(r_1) = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}}{6\,409\,969^2} = 9{,}69\,\text{m/s}^2$

mittlere Fallbeschleunigung: $a = \frac{377{,}1}{50} = 7{,}54\,\text{m/s}^2$

(b) **Lösungserwartung:**

$\frac{377{,}1}{1{,}25} = 301{,}7\,\text{m/s}$

$v_1(T) = 301{,}7 \Rightarrow T \approx -46{,}7\,°\text{C}$

bzw. $v_2(T) = 301{,}7 \Rightarrow T \approx -46{,}9\,°\text{C}$

T in °C	v_1 in m/s	v_2 in m/s	$\frac{v_2}{v_1}$
−60	292,67	292,84	1,00055
−50	299,46	299,63	1,00055
−40	306,10	306,27	1,00055
−30	312,59	312,77	1,00055
−20	318,96	319,13	1,00055
−10	325,20	325,38	1,00055
0	331,32	331,50	1,00055
10	337,33	337,51	1,00055
20	343,23	343,42	1,00055

$v_2 \approx 1{,}00055 \cdot v_1$ bzw. $v_1 \approx 0{,}99945 \cdot v_2$

(c) **Lösungserwartung:**

$v_1 = \sqrt{401{,}87 \cdot (T + 273{,}15)} = \sqrt{401{,}87 \cdot 273{,}15 \cdot (\frac{T}{273{,}15} + 1)} \approx$

$\approx \sqrt{109\,770{,}8 \cdot (\frac{T}{273{,}15} + 1)} \approx 331{,}3 \cdot \sqrt{\frac{T}{273{,}15} + 1}$

Der Faktor 331,3 unterscheidet sich nur geringfügig vom Faktor 331,5 in der Formel für v_2.

$k = \frac{v_1(40) - v_1(-20)}{60} \approx 0{,}6$ ... pro 1 °C nimmt die Schallgeschwindigkeit um ca 0,6 m/s zu

$d = v_1(0) \approx 331{,}3$ ... Schallgeschwindigkeit bei 0 °C

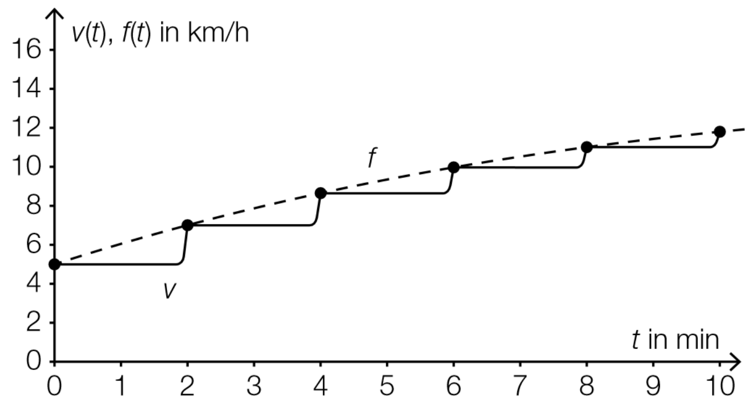
76 - MAT - AG 2.1, AN 1.3, AN 3.2, AN 3.3, AN 4.2, FA 1.4, FA 1.7, FA 2.6, WS 1.3 - Laufband - BIFIE Aufgabensammlung

30. Ein Laufband ist ein Sportgerät, auf dem verschiedene Lauftrainingsprogramme absolviert werden können. ____/0

Bei einem individuell erstellen, 30-minütigen Trainingsprogramm ändert sich die Laufbahngeschwindigkeit alle zwei Minuten. Die von der Zeit t (in min) abhängigen Laufbahngeschwindigkeiten (in km/h) sind Funktionswerte an bestimmten Stellen der Funktion f mit $f(t) = 0{,}0008 \cdot t^3 - 0{,}05 \cdot t^2 + 1{,}1 \cdot t + 5$.

Die Laufbahngeschwindigkeit während der ersten beiden Minuten entspricht dem Funktionswert $f(0)$, die Geschwindigkeit in den beiden darauffolgenden Minuten dem Wert $f(2)$ usw. Für die Berechnung wird vereinfacht angenommen, dass sich die Laufbandgeschwindigkeit innerhalb sehr kurzer Zeit ändert.

Die nachstehende Abbildung zeigt modellhaft die Entwicklung der Laufbahngeschwindigkeit in den ersten zehn Minuten des Trainings, wobei $v(t)$ die Geschwindigkeit des Laufbands zum Zeitpunkt t angibt. Das Training beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$.



Aufgabenstellung:

(a) Gib einen Ausdruck an, mit dem das arithmetische Mittel der Laufbandgeschwindigkeiten während des 30-minütigen Trainingsprogramms berechnet werden kann, und ermittle diesen Wert!

Begründe, warum das arithmetische Mittel der Laufbandgeschwindigkeiten der mittleren Geschwindigkeit $\bar{v}$ während des 30-minütigen Trainingsprogramms entspricht!

Berechne unter Verwendung der mittleren Geschwindigkeit $\bar{v}$ die während des 30-minütigen Trainingsprogramms bewältigte Strecke!

(b) Gib die minimale und die maximale Geschwindigkeit des Laufbands während des 30-minütigen Trainingsprogramms an!

$v_{\text{min}} =$ ____________________ km/h

$v_{\text{max}} =$ ____________________ km/h

Begründe, warum zu den Zeitpunkten t_{min} und t_{max}, zu denen die minimale bzw. die maximale Geschwindigkeit des Laufbands in dem 30-minptigen Trainingsprogramm erreicht wird, $f'(t_{\text{min}}) \neq 0$ und $f'(t_{\text{max}}) \neq 0$ gilt!

(c) Gib den Wert von $v'(1)$ an und interpretiere diesen Wert (mit Angabe der Einheit) im gegebenen Kontext!

$v'(1) =$ ____________________

Beschreibe anhand des Graphen in der Einleitung, wie der Graph der Ableitungsfunktion v' im Intervall $[0; 30]$ verlaufen müsste!

(d) Die in den ersten zehn Trainingsminuten zurückgelegte Weglänge kann näherungsweise mit dem Integral $\frac{1}{60} \cdot \int_0^{10} f(t)\mathrm{d}t$ berechnet werden.

Berechne diesen Näherungswert und erläuter die Bedeutung des Faktors $\frac{1}{60}$!

Gib die absolute Abweichung des berechneten Näherungswertes von der tatsächlich zurückgelegten Weglänge während der ersten zehn Minuten in Metern an!

(e) Unter bestimmten Voraussetzungen ist der Energiebedarf einer Person bei einem Lauftraining direkt proportional zur Masse der Person (in kg) und zur zurückgelegten Weglänge (in km).

Die nachstehende Tabelle zeigt den Energiebedarf (in kcal) einer 80 kg schweren Person bei einem Lauftraining in Abhängigkeit von der Dauer t des Trainings. Die Person läuft mit einer konstanten Geschwindigkeit von 10 km/h.

	$t = 15$ min	$t = 30$ min	$t = 45$ min	$t = 60$ min
Energiebedarf in kcal	194	388	582	776

Zeige anhand der Tabellenwerte die direkte Proportionalität des Energiebedarfs zur zurückgelegten Wegstrecke und berechne den Proportionalitätsfaktor k!

Beim Lauftraining wird die Geschwindigkeit häufig als "‘Tempo"’ in min/km umschrieben. Berechne für die unten angeführten Geschwindigkeiten unter Verwendung des Proportionalitätsfaktors k für eine 90 kg schwere Person jeweils das Tempo und den Energiebedarf (in kcal) für die angegebene Zeitdauer!

Geschwindigkeit in km/h	Tempo in min/km	Energiebedarf in 15 min	Energiebedarf in 30 min
7,5	8		
10			
12			

(a) **Lösungserwartung:**

$\bar{v} = \frac{1}{15} \cdot (f(0) + f(2) + f(4) + ... + f(28) \approx 11{,}57$

Das arithmetische Mittel der Laufbahngeschwindigkeiten beträgt 11,57 km/h

Das Arithmetische Mittel entspricht der mittleren Geschwindigkeit während des 30-minütigen Trainingsprogramms, weil die Geschwindigkeiten $v(0), ..., v(28)$ in gleich langen Zeitintervallen (2 min) jeweils konstant sind.

zurückgelegte Weglänge: $0{,}5\,\text{h} \cdot 11{,}57\,\text{km/h} = 5{,}785\,\text{km}$

(b) **Lösungserwartung:**

$v_{\text{min}} = 5\,\text{km/h}$

$v_{\text{max}} = 14{,}16\,\text{km/h}$

t_{min} und t_{max} sind keine lokalen Extremstellen der Funktion f, weshalb die 1. Ableitung von f an diesen Stellen nicht null ist.

(c) **Lösungserwartung:**

$v'(1) = 0$

Mögliche Interpretationen:

Die Beschleunigung (momentane Geschwindigkeitsänderung) des Laufbands nach 1 Minute beträgt $0\,\text{m/s}^2$.

oder:

Das Laufband (die Läuferin/der Läufer) bewegt sich während der ersten 2 Minuten mit konstanter Geschwindigkeit, d.h., seine Beschleunigung ist zum Zeitpunkt $t = 1\,\text{min}$ gleich null.

Der Graph von v' würde auf der 1. Achse verlaufen und nur zu den Zeitpunkten der Geschwindigkeitsänderungen ($t = 2, t = 4, t = 6, \ldots$) sehr hohe Werte annehmen.

(d) **Lösungserwartung:**

$\frac{1}{60} \cdot \int_0^{10} f(t)\mathrm{d}t \approx 1{,}506$

zurückgelegte Weglänge: ca. $1{,}51\,\text{km}$

Mögliche Begründungen:

Der Faktor $\frac{1}{60}$ ist erforderlich, um die Geschwindigkeiten von km/h in km/min umzurechnen, da die Zeiten (Intervallgrenzen) in Minuten gegeben sind ($1\,\text{h}=60\,\text{min}$).

oder:

Der Faktor $\frac{1}{60}$ ist erforderlich, um die pro Stunde zurückgelegten Wegstrecken auf die pro Minute zurückgelegten Wegstrecken umzurechnen.

Für die tatsächlich zurückgelegte Weglänge gilt:

$\frac{2}{60} \cdot (f(0) + f(2) + f(4) + f(6) + f(8)) \approx 1{,}388\,\text{km}$

$\Rightarrow$ Der Näherungswert für die Weglänge weicht um ca. $118\,\text{m}$ vom exakten Wert ab.

(e) **Lösungserwartung:**

$194 = k \cdot 80 \cdot 2{,}5$

$k = 0{,}97$

Bei der doppelten/dreifachen/vierfachen Laufzeit wird die doppelte/dreifache/vierfache Strecke zurückgelegt und auch der Energiebedarf ist doppelt/dreimal/viermal so groß.

Geschwindigkeit in km/h	Tempo in min/km	Energiebedarf in 15 min	Energiebedarf in 30 min
7,5	8	163,7	327,4
10	6	218,25	436,5
12	5	261,9	523,8

---

77 - MAT - AG 2.5, AN 1.1, AN 1.3, FA 1.4, FA 1.5, FA 1.7, FA 3.2 - Kettenlinie - BIFIE Aufgabensammlung

31. Hängt man ein Seil (oder beispielsweise eine Kette) an zwei Punkten auf, so kann der Verlauf des Seils unter bestimmten Bedingungen durch eine Funktion der Form $x \mapsto \frac{a}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ modelliert werden. ____/0

Der Wert der Konstanten a hängt dabei von der Seillänge und vom Abstand der beiden Aufhängepunkte ab.

Der vertikale Abstand zwischen dem tiefsten Punkt des Seils und seinen Aufhängepunkten wird als Durchhang bezeichnet.

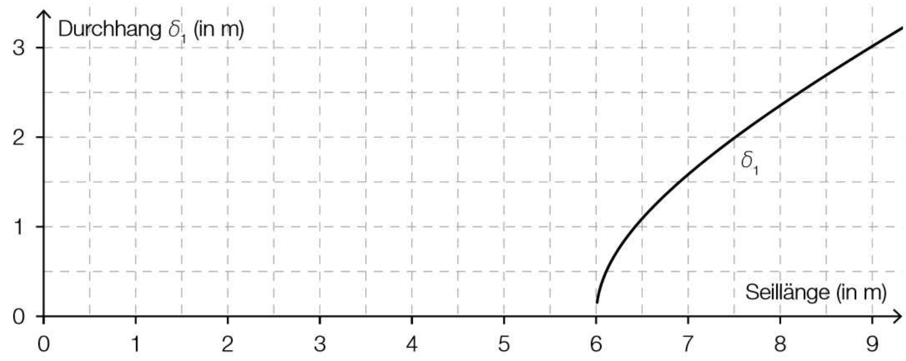
Ein bestimmtes Seil kann modellhaft durch eine Funktion f der obigen Form mit $a = 4$ beschrieben werden (x und $f(x)$ in Metern). Die beiden Aufhängepunkte P_1 und P_2 befinden sich in gleicher Höhe und ihr Abstand beträgt $d = 6$ cm.

Aufgabenstellung:

(a) Gib eine Gleichung an, mit der die Stelle mit dem maximalen Durchhang des durch f beschriebenen Seils berechnet werden kann, und ermittle diese Stelle!

Gib eine Funktionsgleichung f_1 an, mit der ein Seil modelliert werden kann, welches an jeweils 1 m tieferen Aufhängepunkten montiert ist und denselben Durchhang wie das durch f beschriebene Seil aufweist!

(b) Gib eine Gleichung an, mit der der Durchhang δ_1, der die Abhängigkeit des Durchhangs von der Länge des Seils zwischen den Aufhängepunkten P_1 und P_2 beschreibt.



Gib mithilfe der oben dargestellten Abbildung die Länge des in der Einleitung beschriebenen Seils an! Ermittle weiters, um wie viele Meter der Durchhang zunimmt, wenn das Seil durch ein zwei Meter längeres Seil (gleicher Beschaffenheit) ersetzt wird, das an denselben Aufhängepunkten montiert ist!

(c) Der Graph der Funktion f kann durch den Graphen einer quadratischen Funktion g mit $g(x) = b \cdot x^2 + c$ mit $b, c \in \mathbb{R}^+$ angenähert werden. Der Graph von g verläuft durch die Aufhängepunkte P_1 und P_2 und den Tiefpunkt des Graphen von f.

Gib alle Gleichungen an, die für die Berechnung von b und c notwendig sind, und ermittle die Werte dieser Parameter!

Gib eine Gleichung an, mit der der größte vertikale Abstand von f und g zwischen den beiden Aufhängepunkten berechnet werden kann!

(d) Der Graph der Funktion f kann auch durch den Graphen einer Polynomfunktion f vierten Grades angenähert werden. Für den Graphen von h gelten folgende Bedingungen: er verläuft durch die Aufhängepunkte P_1 und P_2 und den Tiefpunkt des Graphen von f und hat in den beiden Aufhängepunkten dieselbe Steigung wie der Graph von f.

Drücke <u>alle</u> gegebenen Bedingungen mithilfe von Gleichungen aus!

Ermittle anhand dieser Gleichungen eine Funktionsgleichung von h!

(a) **Lösungserwartung:**

$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{4}} + e^{-\frac{x}{4}}\right) = 0 \Rightarrow x = 0$

$f_1(x) = f(x) - 1 = \frac{4}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{4}} + e^{-\frac{x}{4}}\right) - 1$

(b) **Lösungserwartung:**

$\delta = f(3) - f(0)$

$\delta = 1{,}2\,\mathrm{m}$

Die Seillänge beträgt ca. 6,6 m.

$\delta_1(8{,}6) \approx 2{,}8 \Rightarrow$ Der Durchhang nimmt um ca. 1,6 m zu.

(c) **Lösungserwartung:**

$g(0) = 4 = c$

$g(3) = f(3) \approx 5{,}18 = 9 \cdot b + 4 \Rightarrow b \approx 0{,}13$

größter vertikaler Abstand:

$(g(x) - f(x))' = 0$

(d) **Lösungserwartung:**

$h(-3) = f(-3)$

$h(0) = f(0)$

$h(3) = f(3)$

$h'(-3) = f'(-3)$

$h'(3) = f'(3)$

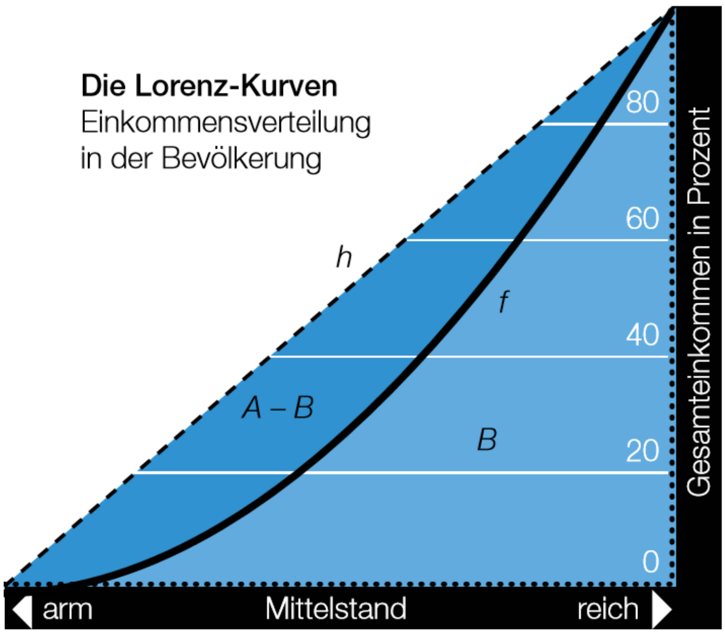
$h(x) \approx 0{,}0007 \cdot x^4 + 0{,}125 \cdot x^2 + 4$

78 - MAT - AG 2.4, AN 4.2, AN 4.3, FA 1.4, FA 1.7, FA 3.2, FA 4.1, FA 5.6, WS 1.1, WS 1.2 - Einkommensverteilung - BIFIE Aufgabensammlung

32. Der Statistiker Max Lorenz beschrieb bereits im Jahr 1905 statistische Verteilungen mithilfe der nach ihm benannten Lorenz-Kurve. Eine Lorenz-Kurve f kann z.B. zur Beschreibung er Einkommensverteilung in einem Staat herangezogen werden. Je ausgeprägter ihr "‘Bauch"’ ist, desto größer ist der Einkommensunterschied zwischen niedrigem und hohem Einkommen. ____/0

Die Lorenz-Kurve der Einkommensverteilung eines Staates, in dem alle Personen bis auf eine Person nichts verdienen und diese eine Person alles bekommt, wird in der nachstehenden Grafik durch die punktrierten Linien (Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks) dargestellt. Das andere Extrem ist ein Staat, in dem alle Personen gleich viel verdienen. In diesem Fall die die Lorenz-Kurve zu einer Geraden h, welche durch die strichlierte Linie dargestellt ist. Zwischen den beiden Extremen verläuft die Lorenz-Kurve f eines Staates.

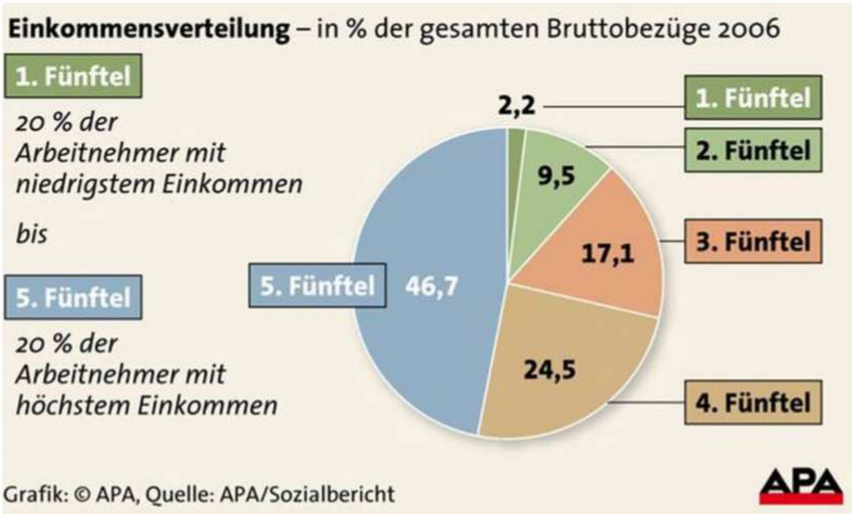
Jeder Punkt $P = (x|f(x))$ auf der Kurve f steht für folgende Aussage: Die einkommensschwächsten $x\,\%$ aller Haushalte beziehen $f(x)\,\%$ des Gesamteinkommens."’



Der Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks wird mit A bezeichnet. Der Graph der Lorenz-Kurve f schließt mit den beiden Katheten des rechtwinkeligen Dreiecks eine Fläche mit Inhalt B ein. Setzt man den Inhalt der Fläche zwischen der

Lorenz-Kurve f und der Geraden h mit der Dreiecksfläche A in Bezug, erhält man den Gini-Ungleichheitskoeffizienten $GUK = \frac{A-B}{A}$, eine Zahl zwischen null und ein. Je kleiner der GUK ist, desto gleichmäßiger ist das Gesamteinkommen auf die Bevölkerung verteilt.

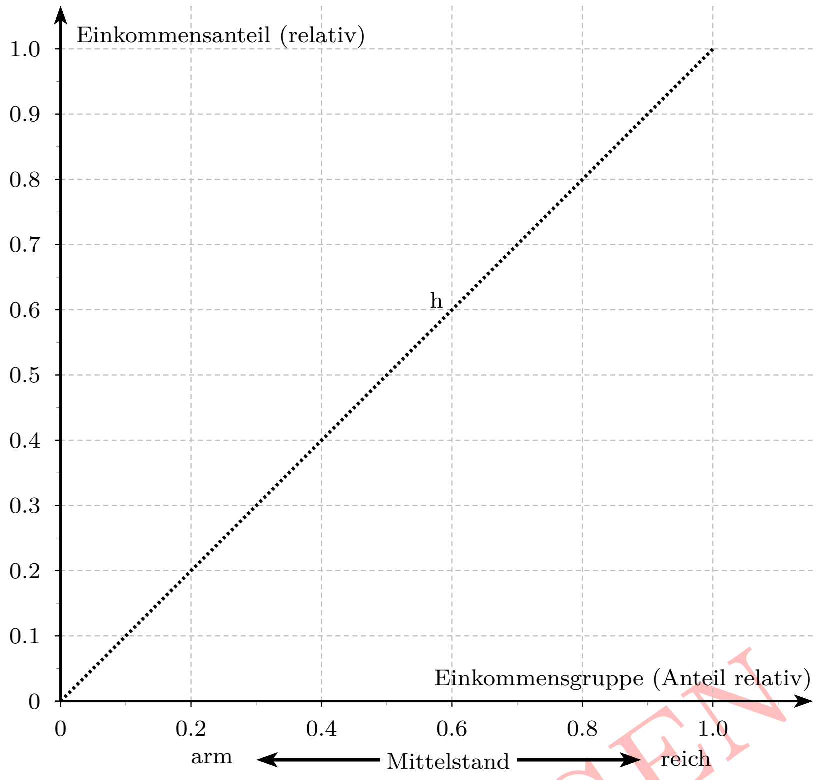
In der nachstehenden Grafik ist die Einkommensverteilung in Österreich in Prozent der gesamten Bruttobezüge im jahr 2006 dargestellt. Daraus ist z.B. abzulesen, dass jene 20 % der Bevölkerung mit den niedrigsten Bruttoeinkommen nur 2,2 % des Gesamtbruttoeinkommens erhalten haben.



Quelle: http://diepresse.com/home/wirtschaft/economist/446997/Sozialbericht_Einkommen-in-Oesterreich-ungleicher-verteilt [04.05.2017].

Aufgabenstellung:

(a) Zeichne die Lorenzkurve für die Einkommensverteilung der Bruttobezüge in Österreich im Jahr 2006 in den nachstehenden Grafik als Streckenzug ein!



Berechne mithilfe des eingezeichneten Streckenzuges den GUK für die Bruttobezüge in Österreich für das Jahr 2006!

(b) Die Verteilung der Bruttoeinkommen in Österreich im Jahr 2006 soll durch eine Polynomfunktion p so modelliert werden, dass alle Daten, die aus dem Kreisdiagramm aus der Einleitung abgelesen werden können mit Funktionswerten dieser Polynomfunktion übereinstimmen.

Begründe, welchen Grad die Polynomfunktion p bei konkreter Berechnung (maximal) hat!

Begründe, warum eine Exponentialfunktion e mit $e(x) = a \cdot b^x (a, b \in \mathbb{R}^+$ nicht für die Modellierung einer Lorenz-Kurve geeignet ist!

(c) Um politische Maßnahmen abschätzen zu können, werden verschiedene Szenarien entworfen. So soll beispielsweise für die Bruttoeinkommen langfristig eine Lorenz-Kurve angestrebt werden, die durch die Funktion g mit der Funktionsgleichung $g(x) = 0{,}245 \cdot x^3 + 0{,}6 \cdot x^2 + 0{,}155 \cdot x$ beschrieben werden kann.

Gib eine Gleichung an, mit der der GUK für die angestrebte Einkommensverteilung berechnet werden kann, und ermittle diesen GUK!

Gib mithilfe konkreter Zahlenwerte an, wie sich in diesem Fall die Einkommensverteilung der "‘20 % der Arbeitnehmer/innen mit den niedrigsten Bruttoeinkommen"’ und die Einkommensverteilung der "‘20 % der Arbeitnehmer/innen mit den höchsten Bruttoeinkommen"’ im Vergleich zu den Bruttobezügen im Jahr 2006 in Österreich ändern würde!

(d) Für das Jahr 2007 kann die Einkommensverteilung für Österreich mit einem GUK von 0,26 beschrieben werden.

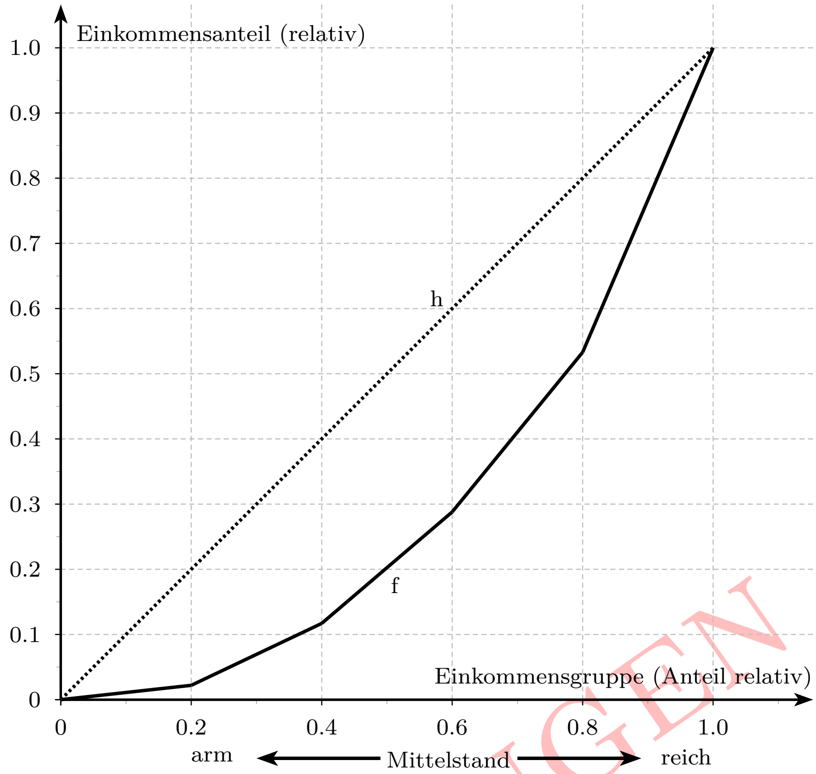
Datenquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Liste_der_L%C3%A4nder_nach_Einkommensverteilung [04.05.2017].

Angenommen, die Lorenz-Kurve für die Einkommenverteilung kann für ein bestimmtes Land, das eine ausgeglichenere Einkommensverteilung als Österreich aufweisen soll, durch eine Potenzfunktion h mit $h(x) = a \cdot x^z + b$ mit $a, b, z \in \mathbb{R}$ beschrieben werden.

Gib an, welche Werte die Parameter a und b haben müssen, und begründe deine Wahl!

Gib eine Ungleichung an, die für das Jahr 2007 einen Zusammenhang zwischen dem GUK von Österreich und dem GUK von demjenigen Land, das eine ausgeglichenere Einkommensverteilung als Österreich aufweisen soll, beschreibt! Ermittle für diesen Fall einen möglichen Wert für den Exponenten z mit $z > 1$!

(a) **Lösungserwartung:**



Der Inhalt der Fläche zwischen dem Polygonzug f und der Strecke h beträgt 0,208 Flächeneinheiten (die Ermittlung des Flächeninhalts zwischen der waagrechten Achse und dem Streckenzug kann z.B. aus zwei Dreiecksflächen und drei Trapezflächen erfolgen).

$\Rightarrow GUK = \frac{0{,}208}{0{,}5} = 0{,}416$

(b) **Lösungserwartung:**

Aus den Daten des Kreisdiagramms ergeben sich (für die Argumente $x = 0, x = 0{,}2, x = 0{,}4, x = 0{,}6, x = 0{,}8, x = 1$) sechs Funktionswerte von p und somit sechs "‘Bedingungen"’ für die Koeffizienten der Funktionsgleichung. Eine Polynomfunktion fünften Grades hat sechs Koeffizienten und ist daher geeignet.

(Anmerkung: Bei "‘besonderer"’ Lage der Punkte kann auch ein Grad kleiner als fünf ausreichend sein.

Jede Lorenz-Kurve verläuft durch den Punkt $(0|0)$. Da eine Exponentialfunktion e mit $e(x) = a \cdot b^x$ $(a, b \in \mathbb{R}^+)$ nicht durch den Koordinatenursprung verläuft, ist sie nicht für die Modellierung geeignet.

(c) **Lösungserwartung:**

$$GUK = \frac{0{,}5 - \int_0^1 (0{,}245x^3 + 0{,}6x^2 + 0{,}155x)dx}{0{,}5} = 0{,}3225$$

$g(0{,}2) \approx 0{,}057$

$g(0{,}8) \approx 0{,}633$

Der Einkommensanteil der "‘20 % mit den niedrigsten Bruttoeinkommen"’ würde (um ca. 3,5 Prozentpunkte) von 2,2 % auf ca. 5,7 % steigen.

Der Einkommensanteil der "‘20 % mit den höchsten Bruttoeinkommen"’ würde (um ca. 10 Prozentpunkte) von 46,7 % auf 36,7 % sinken.

(d) **Lösungserwartung:**

$b = 0$, da der Graph durch den Punkt $(0|0)$ verlaufen muss

$a = 1$, da der Graph durch den Punkt $(1|1)$ verlaufen muss

$$\frac{0{,}5 - \int_0^1 x^z dx}{0{,}5} < 0{,}26$$

$z \in \left(1; \frac{63}{37}\right)$

---

79 - MAT - AN 1.3, AN 2.1, AN 4.3, FA 1.5, FA 1.6, FA 1.7 - Abkühlungsprozesse - BIFIE Aufgabensammlung

33. Wird eine Tasse mit heißem Kaffe am Frühstückstisch abgestellt, kühlt der Kaffee anfangs rasch ab, bleibt aber relativ lange warm. ____/0

Die Temperatur einer Flüssigkeit während des Abkühlens kann nach dem Newton'schen Abkühlungsgesetz durch eine Funktion der Form $t \mapsto T_U + (T_0 - T_U) \cdot e^{-k \cdot t}$ beschrieben werden. Dabei gibt T_0 die Anfangstemperatur der Flüssigkeit (in °C) zum Zeitpunkt $t = 0$ an, T_U ist die konstante Umgebungstemperatur (in °C) und $k \in \mathbb{R}^+$ (in s^{-1}) ist eine von den Eigenschaften der Flüssigkeit und des Gefäßes abhängige Konstante.

Ein zu untersuchender Abkühlungsprozess wird durch eine Funktion T der obigen Form beschrieben. Dabei beträgt die Anfangstemperatur $T_0 = 90$ °C und die Umgebungstemperatur $T_U = 20\,°\text{C}$. Die Abkühlungskonstante hat den Wert $k = 0{,}002$. Die Zeit t wird in Sekunden gemessen, die Temperatur $T(t)$ in °C.

Aufgabenstellung:

(a) Berechne den Wert des Differenzenquotienten der Funktion T im Intervall $[0\,\text{s}; 300\,\text{s}]$ und interpretiere den berechneten Wert im Hinblick auf den beschriebenen Abkühlungsprozess!

Beschreibe den Verlauf des Graphen von T für große Werte von t und interpretiere den Verlauf im gegebenen Kontext!

(b) Der Wert $T'(t)$ kann als "'Abkühlungsgeschwindigkeit"' der Flüssigkeit zum Zeitpunkt t gedeutet werden.

Gib für den zu untersuchenden Abkühlungsprozess eine Funktionsgleichung für T' an!

Gib weiters denjenigen Zeitpunkt an, zu dem der Betrag der Abkühlungsgeschwindigkeit am größten ist!

Der Graph von T' und die $t-$Achse schließen im Intervall $[0\,\text{s}; 600\,\text{s}]$ eine Fläche von ca. 49 Flächeneinheiten ein.

Interpretiere diesen Wert unter Verwendung der entsprechenden Einheit im gegebenen Kontext!

(c) Eine zweite Flüssigkeit in einem anderen Gefäß hat zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Temperatur von $95\,°\text{C}$. Nach einer Minute ist die Temperatur auf $83{,}4\,°\text{C}$ gesunken, die Umgebungstemperatur beträgt $T_U = 20\,°\text{C}$. Die Funktion T_2 beschreibt den Abkühlungsprozess dieser Flüssigkeit.

Gib eine Gleichung an, mit der die Abkühlungskonstante k_2 für diesen Abkühlungsprozess berechnet werden kann, und ermittle diesen Wert!

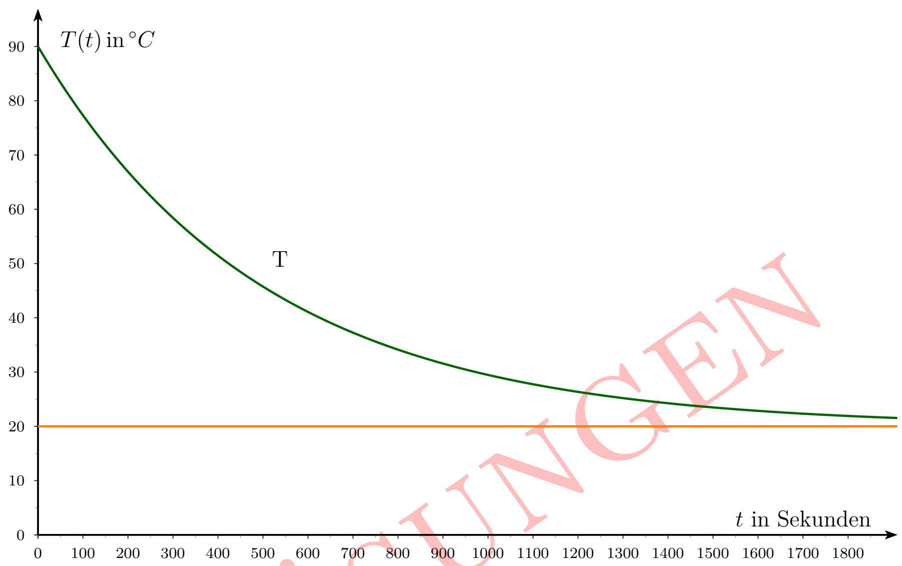
Ermittle den Schnittpunkt der Graphen der Funktionen T und T_2 und interpretiere die Koordinaten des Schnittpunkts im gegebenen Kontext!

(a) **Lösungserwartung:**

$\frac{T(300-T(0)}{300} \approx -0{,}1053$

In den ersten fünf Minuten kühlt die Flüssigkeit durchschnittlich um ca. 0,1 °C pro Sekunde ab.

Der Graph von T nähert sich im Laufe der Zeit der Umgebungstemperatur (20 °C an.



(b) **Lösungserwartung:**

$T'(t) = -0{,}14 \cdot e^{-0{,}002 \cdot t}$

Der Betrag der Abkühlungsgeschwindigkeit ist zum Zeitpunkt $t = 0$ am größten.

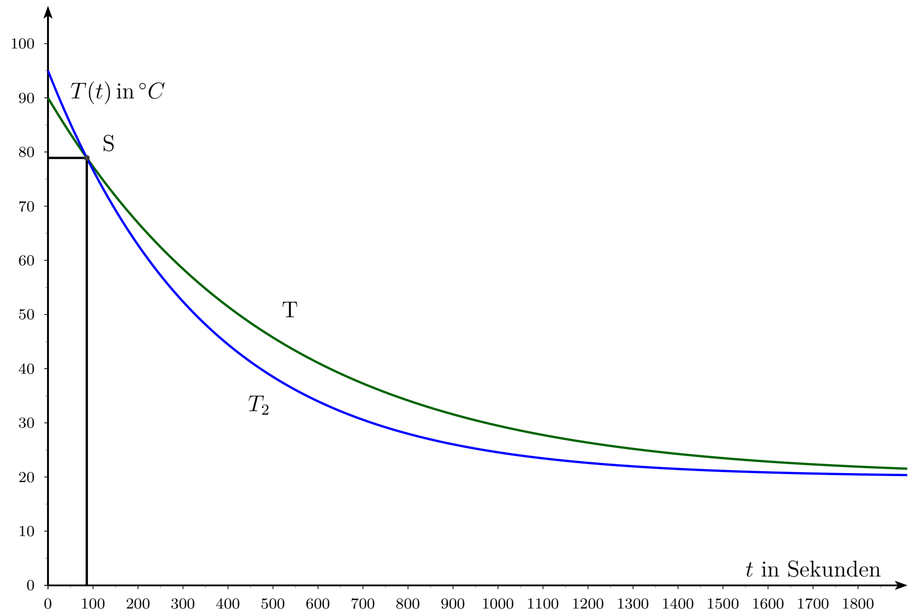
Die Flüssigkeit kühlt in den ersten zehn Minuten insgesamt um ca. 49 °C ab.

(c) **Lösungserwartung:**

$T_2(t) = 20 + 75 \cdot e^{-k_2 \cdot t} \Rightarrow$

$T_2(60) = 20 + 75 \cdot e^{-k_2 \cdot 60} = 83{,}4$

$k_2 \approx 0{,}0028\,\mathrm{s}^{-1}$



Schnittpunkt: $S \approx (86{,}2|78{,}9)$

Nach ca. 86,2 Sekunden haben beide Flüssigkeiten eine Temperatur von ca. 78,9 °C.

---

82 - MAT - FA 5.1, FA 5.3, FA 5.6, FA 2.2, AN 1.4 - Brasilien - Matura NT 1 16/17

34. Brasilien ist der größte und bevölkerungsreichste Staat Südamerikas. ____/6

Im Jahr 2014 hatte Brasilien eine Einwohnerzahl von 202,74 Millionen.

Aufgrund von Volkszählungen sind folgende Einwohnerzahlen bekannt:

Jahr	Einwohnerzahl
1970	94 508 583
1980	121 150 573
1991	146 917 459
2000	169 590 693
2010	190 755 799

Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Gib die Bedeutung der nachstehend angeführten Werte im Kontext der Entwicklung der Einwohnerzahl an!

$$\sqrt[10]{\frac{121\,150\,573}{94\,508\,583}} \approx 1{,}02515$$

$$\sqrt[9]{\frac{169\,590\,693}{146\,917\,459}} \approx 1{,}01607$$

Begründe anhand der beiden angeführten Werte, warum man die Entwicklung der Einwohnerzahl im gesamten Zeitraum von 1970 bis 2010 nicht angemessen durch eine Exponentialfunktion beschreiben kann!

(b) Gib unter Annahme eines linearen Wachstums anhand der Einwohnerzahlen von 1991 und 2010 eine Gleichung derjenigen Funktion f an, die die Einwohnerzahl beschreibt! Die Zeit t wird dabei in Jahren gemessen, der Zeitpunkt $t = 0$ entspricht dem Jahr 1991.

Berechne, um wie viel Prozent die Vorhersage des linearen Modells für das Jahr 2014 von dem in der Einleitung angegebenen tatsächlichen Wert abweicht!

(c) Für Brasilien wird für die Jahre 2010 bis 2015 jeweils eine konstante Geburtenrate $b = 14{,}6$ sowie eine konstante Sterberate $d = 6{,}6$ angenommen. Das bedeutet, dass es jährlich 14,6 Geburten pro 1 000 Einwohner/innen und 6,6 Todesfälle pro 1 000 Einwohner/innen gibt.

Die Entwicklung der Einwohnerzahl kann in diesem Zeitraum mithilfe der Differenzengleichung $x_{n+1} = x_n + x_n \cdot \frac{1}{1\,000} \cdot (b-d) + m_n$ beschrieben werden, wobei x_n die Anzahl der Einwohner/innen im Jahr n beschreibt und m_n die Differenz aus der Anzahl der zugewanderten und jener der abgewanderten Personen angibt. Diese Differenz wird als Wnaderungsbilanz bezeichnet.

Gib die Bedeutung des Ausdrucks $x_n \cdot \frac{1}{1\,000} \cdot (b-d)$ im Kontext der Entwicklung der Einwohnerzahl an!

Berechne die maximale Größe der Wanderungsbilanz für den Fall, dass die Einwohnerzahl im Jahr 2015 gegenüber der Einwohnerzahl des Vorjahres maximal um 1 % größer ist!

(a) Lösungserwartung:

Im Zeitintervall [1970; 1980] steigt die Einwohnerzahl pro Jahr um ca. 2,515 %, im Zeitintervall [1991; 2000] steigt die Einwohnerzahl pro Jahr um ca. 1,607 %.

Damit eine Beschreibung durch eine Exponentialfunktion angemessen ist, müsste die relative jährliche Zunahme der Einwohnerzahl in den beiden betrachteten Zeitintervallen annähernd gleich sein. Im Zeitintervall [1970; 1980] ist die relative jährliche Zunahme der Einwohnerzahl mit ca. 2,5 % deutlich größer als im Zeitintervall [1991; 2000], wo es nur mehr ca. 1,6 % beträgt. Daher wäre eine Beschreibung der Entwicklung der Einwohnerzahl durch eine Exponentialfunktion nicht angemessen.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für eine (sinngemäß) korrekte Deutung der beiden Werte.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Begründung.

(b) **Lösungserwartung:**

Mögliche Vorgehensweise:

$f(t) = 146\,917\,459 + k \cdot t$

$k = \frac{190\,755\,799 - 146\,917\,459}{19} \approx 2\,307\,281$

$f(t) = 146\,917\,459 + 2\,307\,281 \cdot t$

Mögliche Vorgehensweise:

$f(23) = 199\,984\,922$

$\frac{199\,984\,922}{202\,740\,000} \approx 0{,}986$

Die Abweichung zur Vorhersage beträgt ca. 1,4 %

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine korrekte Funktionsgleichung. Äquivalente Funktionsgleichungen sind als richtig zu werten.
  Toleranzintervall für k : $[2\,305\,000; 2\,310\,000]$
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Abweichung auch als negativer Wert angegeben sein kann.
  Toleranzintervall: $[1\,\%; 2\,\%]$ bzw. $[0{,}01; 0{,}02]$

(c) **Lösungserwartung:**

Mögliche Duetung:

Der angeführte Ausdruck gibt die Anzahl derjenigen Personen an, die die Einwohnerzahl x_n im Zeitintervall $[n; n+1]$ aufgrund von Geburten und/oder Todesfällen erhöhen (bzw. verringern).

Mögliche Vorgehensweise:

$x_{2015} \leq 1{,}01 \cdot x_{2014}$

$x_{2014} + x_{2014} \cdot \frac{14{,}6-6{,}6}{1\,000} + m_{2014} \leq 1{,}02 \cdot x_{2014}$

daher

$m_{2014} \leq \left(1{,}01 - 1 - \frac{14{,}6-6{,}6}{1\,000}\right) \cdot x_{2014}$

$m_{2014} \leq 0{,}002 \cdot 202\,740\,000 = 405\,480$

Damit die Einwohnerzahl im Jahr 2015 gegenüber der Einwohnerzahl im Jahr davor maximal um 1 % größer wird, dürfen höchstens 405 480 Personen mehr zuwandern als abwandern.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine korrekte Deutung.
- Ein Punkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall: [405 000 Personen; 406 000 Personen]
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

---

85 - MAT - AN 1.2, FA 2.2, AG 2.3, FA 4.2, FA 4.3 - Funktion - Matura 2016/17 2. NT

35. Gegeben ist eine quadratische Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ mit den Koeffizienten $a, b, c \in \mathbb{R}$. ____/3

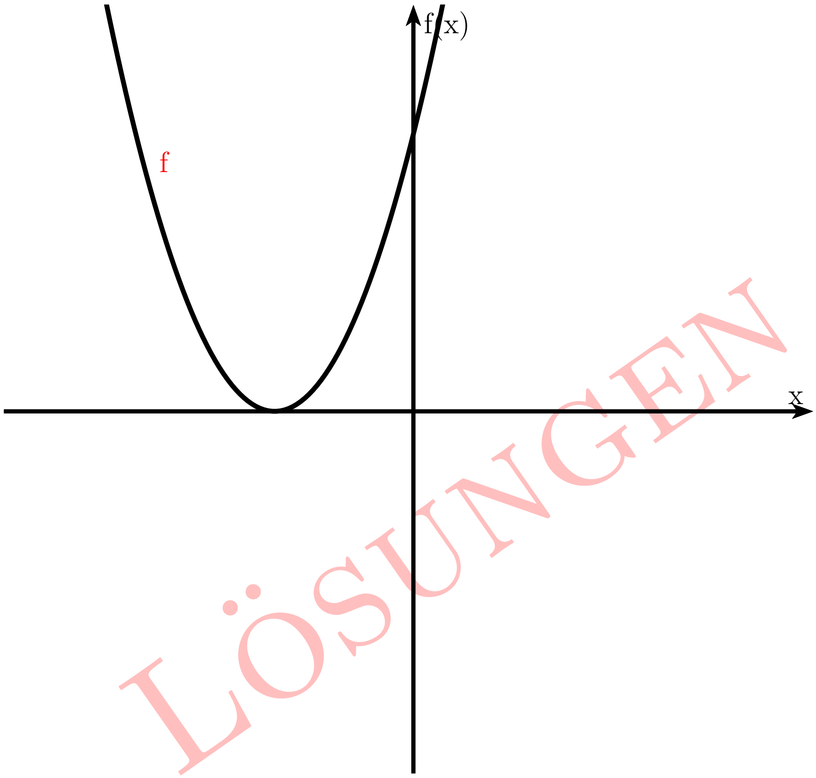
Aufgabenstellung:

(a) Bestimme die Koordinaten desjenigen Punktes P des Graphen einer solchen Funktion f, in dem der Anstieg der Tangente an den Graphen der Funktion f den Wert b hat, und gib weiter eine (allgemeine) Gleichung dieser Tangente f an!

Der Graph einer solchen Funktion f verläuft durch den Punkt $A = (-1|20)$ und hat im Punkt P eine Tangente t mit $t(x) = 9 \cdot x + 4$. Gib für diese Funktion f die Werte von a, b und c an!

(b) Gib a in Abhängigkeit von b und c so an, dass die Funktion f genau eine Nullstelle hat!

Skizziere im nachstehenden Koordinatensystem einen möglichen Graphen einer solchen Funktion f mit genau einer Nullstelle und $a > 0, b > 0, c > 0$!



(c) $\boxed{\text{A}}$ Gib für $a = 16$ und $c = 9$ sowohl die Stelle des lokalen Extremums der Funktion f als auch zu den zugehörigen Funktionswert in Abhängigkeit von b an!

Zeig, dass dieser Extrempunkt unabhängig von der Wahl von b auf dem Graphen der Funktion g mit $g(x) = 9 - 16 \cdot x^2$ liegt!

(a) **Lösungserwartung:**

Mögliche Vorgehensweise:

$f'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$

$f'(0) = b,\ x_P = 0,\ f(x_P) = x \Rightarrow P = (0|c)$

Steigung der Tangente: b, Abschnitt auf der senkrechten Achse: c

$\Rightarrow t(x) = b \cdot x + c$

$b = 9$ und $c = 4$, $f(-1) = a - 9 + 4 = 20 \Rightarrow a = 25$

$\Rightarrow a = 25, b = 9, c = 4$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die Angabe der richtigen Koordinaten von P und einer korrekten Gleichung von t. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu wertden.
- Ein Punkt für die Angabe der richtigen Werte von a, b und c.

(b) **Lösungserwartung:**

Mögliche Vorgehensweise:

$b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0 \Rightarrow a = \frac{b^2}{4 \cdot c}$

Mögliche Skizze: siehe oben

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung.
- Ein Punkt für eine korrekte Skizze, wobei der Scheitel erkennbar auf der negativen x-Achse liegen und die Parabel nach oben geöffner sein muss.

(c) **Lösungserwartung:**

$f(x) = 16 \cdot x^2 + b \cdot x + 9$, $f'(x) = 32 \cdot x + b = 0$

$\Rightarrow$ Stelle des loaklen Extremumgs: $x_E = -\frac{b}{32}$

Funktionswert an der Stelle $x_E : f\left(-\frac{b}{32}\right) = 9 - \frac{b^2}{64}$

$g\left(-\frac{b}{32}\right) = 9 - 16 \cdot \frac{b^2}{32^2} = 9 - \frac{b^2}{64}$, dieser Ausdruck stimmt mit dem Funktionswert an der Stelle des lokalen Extremums der Funktion f überein.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die Angabe der beiden korrekten Werte.
- Ein Punkt für einen korrekten Nachweis. Andere korrekte Nachweise sind ebenfalls als richtig zu werten.

86 - MAT - AG 2.1, FA 1.4, FA 2.2, FA 2.4, WS 1.1, WS 1.4 - Human Development Index - Matura 2016/17 2. NT

36. Der Human Development Index (HDI) der Vereinten Nationen ist ein Wohlstandsindikator für Länder, der eine Messung des Entwicklungsstandes des jeweiligen Landes ermöglichen sollte. Der HDI beinhaltet drei dimensionslose Größen (Lebenserwartungsindex (LEI), Bildungsindex (BI) und Einkommensindex (EI)) und wird mit der Formel $HDI = \sqrt[3]{LEI \cdot BI \cdot EI}$ berechnet. ____/0

Dimensionslos bedeutet, dass diese Größen keine Einheiten haben.

Für die Berechnung des Indizes LEI und EI gilt seit 2010:

$LEI = \frac{LE-20}{85-20}$, wobei LE die Lebenserwartung zum Zeitpunkt der Geburt in Jahren beschreibt

$EI = \frac{\ln(B)-\ln(100)}{\ln(75\,000)-\ln(100)}$, wobei B das Bruttonationaleinkommen pro Kopf in US-Dollar (immer zu Jahresbeginn) beschreibt.

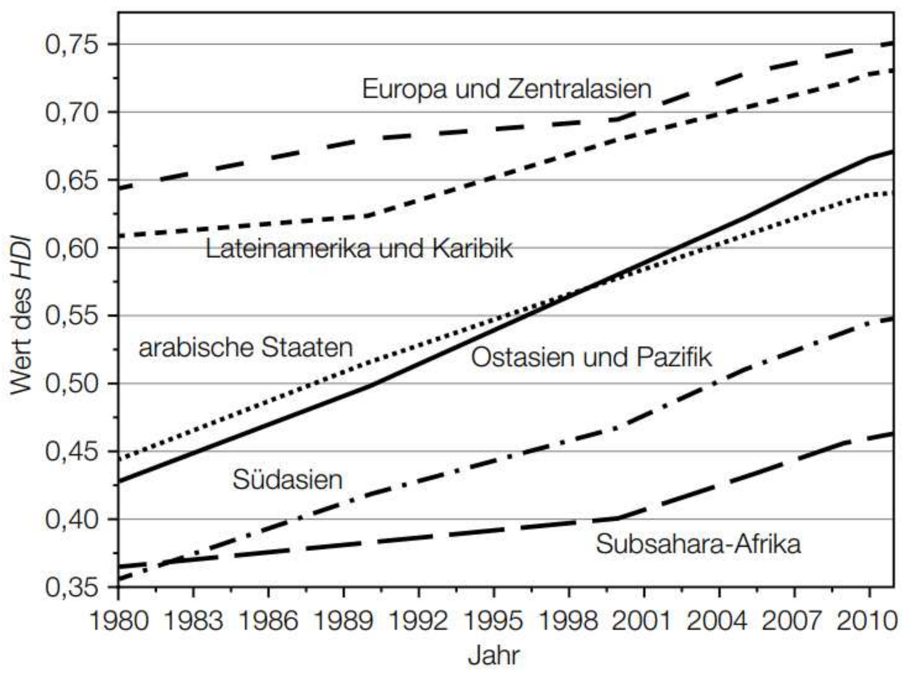
Das Entwicklungsprogramm der Vereinten Nationen unterteilt die Länder nach dem Wert des HDI seit 2009 in vier Entwicklungskategorien:

Entwicklungskategorie eines Landes	Wert des HDI
E_1	$\leq 0{,}8$
E_2	$[0{,}7; 0{,}8)$
E_3	$[0{,}55; 0{,}7)$
E_4	$< 0{,}55$

Datenquelle: Deutsche Gesellschaft für die Vereinten Nationen (Hrsg.): Bericht über die menschliche Entwicklung 2015. Arbeit und menschliche Entwicklung. Berlin: Berliner Wissenschafts-Verlag 2015, S. 240

Der HDI einer Region in einem bestimmten Jahr ergibt sich aus dem arithmetischen Mittel der HDIs der zu dieser Region zählenden Länder.

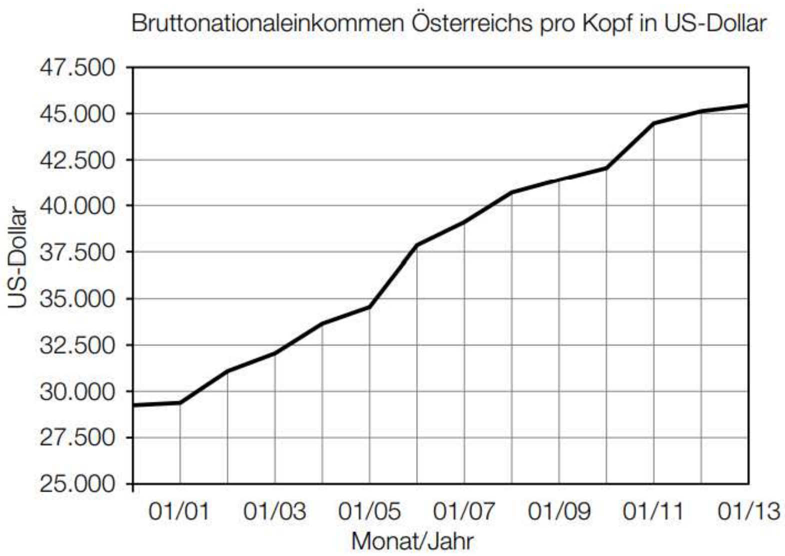
Die Entwicklung des HDI verschiedener Regionen zwischen 1980 und 2011 ist nachstehend abgebildet.



Datenquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/ Index__der__menschlichen__Entwicklung#/ media/File:Human-Development-IndexTrends-2011.svg [08.06.2017].

Aufgabenstellung:

(a) Für Österreich wurde im Human Development Report für das Jahr 2013 die Lebenserwartung mit $LE = 81{,}1$ Jahren und der Bildungsindex mit $BI = 0{,}819$ angegeben. Die nachstehende Abbildung zeigt für die Jahre 2000 bis 2013 (jeweils zu Jahresbeginn) das Bruttonationaleinkommen Österreichs pro Kopf in US-Dollar.



Datenquelle: http://www.factfish.com/de/statistik/bruttonationaleinkommen [08.06.2017].

Ermittle für das Jahr 2013 den HDI von Österreich ($= HDI_{2013}$)!

Der HDI von Österreich für das Jahr 2013 (HDI_{2013}) war um ca. 2,5 % größer als der HDI von Österreich für das Jahr 2008 (HDI_{2008}). Gib eine Gleichung an, die diesen Zusammenhang beschreibt, und berechne den HDI_{2008}!

(b) Die jährliche Entwicklung des HDI der Region "'arabische Staaten"' kann im Zeitraum von 1980 bis 2010 näherungsweise durch eine lineare Funktion H mit der Gleichung $H(t) = k \cdot t + d$ mit $k, d \in \mathbb{R}$ und t in Jahren beschrieben werden, wobei $H(0)$ dem Wert des Jahres 1980 entspricht.

Bestimme die Werte der Parameter k und d!

Begründen Sie anhand der entsprechenden Abbildung, in welcher Region/in welchen Regionen die mittlere jährliche Zunahme des HDI im Zeitraum von 1980 bis 2010 am ehesten jener der Region "'arabische Staaten"' entsprach!

(c) $\boxed{\text{A}}$ Ermittle aus der entsprechenden Abbildung diejenige Jahreszahl, ab der die Region "'Lateinamerika und Karibik"' die Entwicklungskategorie E_2 aufweist!

Gilt ab diesem Zeitpunkt sicher, dass ungefähr die Hälfte der zu dieser Region zählenden Länder eine Entwicklungskategorie E_2 aufweist? Begründe deine Antwort!

(a) **Lösungserwartung:**

$$LEI = \frac{81{,}1 - 20}{85 - 20} = 0{,}94$$

$$EI \approx \frac{\ln(45\,400) - \ln(100)}{\ln(75\,000) - \ln(100)} \approx 0{,}924$$

$$HDI_{2013} = \sqrt[3]{0{,}94 \cdot 0{,}819 \cdot 0{,}924} \approx 0{,}893$$

$$HDI_{2013} = HDI_{2008} \cdot 1{,}025$$

$$HDI_{2008} \approx 0{,}871$$

Lösungsschlüssel

- Ein Punkt für die richtige Lösung. Toleranzintervall: [0,88; 0,91] Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist. - Ein Punkt für eine korrekte Gleichung und die richtige Lösung. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten. Toleranzintervall: $[0{,}85; 0{,}89]$

(b) **Lösungserwartung:**

$k = \dfrac{0{,}64 - 0{,}44}{30} = 0{,}006\dot{6}$
$d = 0{,}44$

In der Region "'Südasien"' entsprach die mittlere jährliche Zunahme des HDI im Zeitraum 1980 bis 2010 am ehesten jener der Region "'arabische Staaten"'.

Mögliche Begründung:
Die Sekanten durch die Punkte (1980|0,44) und (2010|0,64) sowie (1980|0,36) und (2010|0,54) verlaufen annähernd parallel zueinander.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die Angabe der beiden korrekten Werte. Toleranzintervall für k: $[0{,}005; 0{,}01]$ Toleranzintervall für d: $[0{,}43; 0{,}45]$ - Ein Punkt für die Angabe der Region "'Südasien"' und für eine (sinngemäß) korrekte Begründung.

(c) **Lösungserwartung:**

Ab dem Jahr 2004 weist die Region "'Lateinamerika und Karibik"' die Entwicklungskategorie E_2 auf.

Nein, es gilt nicht als sicher, dass ab diesem Zeitpunkt ungefähr die Hälfte der zu dieser Region zählenden Länder die Entwicklungskategorie E_2 aufweist.

Mögliche Begründung: Wenn eine sehr kleine Anzahl an Ländern mit sehr hohen HDI-Werten einer großen Anzahl an Ländern mit niedrigen HDI-Werten ($< 0{,}7$) gegenübersteht, kann dennoch das arithmetische Mittel der HDIs größer als 0,7 sein, ohne dass ungefähr die Hälfte der zu dieser Region zählenden Länder die Entwicklungskategorie E_2 aufweist.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung. Toleranzintervall: $[2003; 2005]$
- Ein Punkt für eine richtige Antwort und eine korrekte Begründung. An-

dere korrekte Begründungen (z.B. anhand sinnvoller Zahlenbeispiele oder mit der Feststellung, dass das arithmetische Mittel nicht notwendigerweise der Median sein muss) sind ebenfalls als richtig zu werten.

---

90 - MAT - AN 1.1, AN 3.3, AN 3.2, FA 2.1, FA 2.2, FA 5.3 - Hopfen - Matura 2017/18

37. Hopfen ist eine schnell wachsende Kletterpflanze. Die Modellfunktion $h : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^+$ mit $h(t) = \dfrac{a}{1 + b \cdot e^{k \cdot t}}$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+, k \in \mathbb{R}^-$ gibt näherungsweise die Pflanzenhöhe einer bestimmten Hopfensorte zum Zeitpunkt t an, wobei $h(t)$ in Metern und t in Wochen angegeben wird. ____/8

In der nachstehenden Tabelle sind die gemessenen Höhen einer Hopfenpflanze ab Anfang April ($t = 0$) zusammengefasst.

Zeit (in Wochen)	0	2	4	6	8	10	12
Höhe (in m)	0,6	1,2	2,3	4,2	5,9	7,0	7,6

Anhand dieser Messwerte wurden für die Modellfunktion h die Parameterwerte $a = 8, b = 15$ und $k = -0{,}46$ ermittelt.

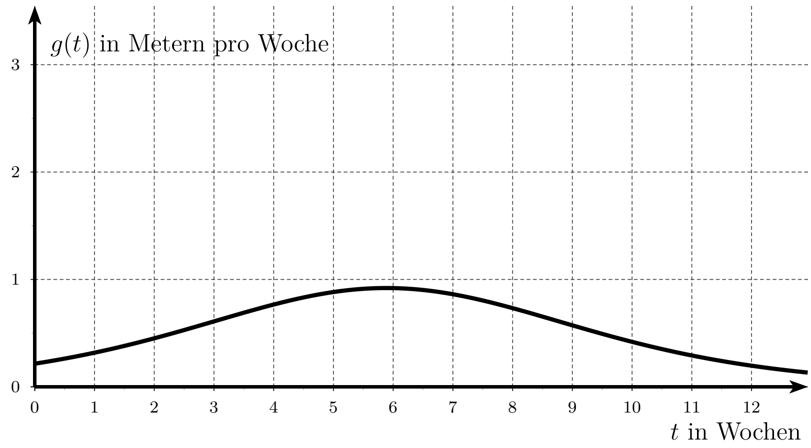
Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Gib unter Verwendung der Modellfunktion h einen Ausdruck an, mit dem berechnet werden kann, um wie viele Meter die Hopfenpflanze im Zeitintervall $[0; t_1]$ gewachsen ist!

Berechne unter Verwendung der Modellfunktion h mithilfe deines Ausdrucks, wie viele Meter die Pflanze in den ersten 10 Wochen gewachsen ist und gib die prozentuelle Abweichung vom tatsächlichen gemessenen Wert an!

(b) Wird das Wachstum der Pflanze mithilfe der Funktion h modelliert, gibt es einen Zeitpunkt t_2, zu dem sie am schnellsten wächst. Gib eine Gleichung an, mit der dieser Zeitpunkt berechnet werden kann, und ermittle diesen Zeitpunkt!

Berechne die zugehörige maximale Wachstumsgeschwindigkeit und skizziere im nachstehenden Koordinatensystem unter Berücksichtigung des von dir ermittelten Maximums den Verlauf des Graphen derjenigen Funktion g, die basierend auf der Modellfunktion h die Wachstumsgeschwindigkeit der Hopfenplfanze in Abhängigkeit von t beschreibt!



(c) Ermittle eine lineare Funktion h_1, deren Werte bei $t = 0$ und $t = 12$ mit den gemessenen Höhen aus der angegebenen Tabelle übereinstimmen, und interpretiere die Steigung dieser linearen Funktion im gegebenen Kontext!

$h_1(t) = 0{,}58\dot{3} \cdot t + 0{,}6$

Begründe anhand des Verlaufs der Graphen von h und h_1, warum es mindestens zwei Zeitpunkte gibt, in denen die Wachstumsgeschwindigkeit der Pflanze denselben Wert hat wie die Steigung von h_1!

(d) Für größer werdende t nähert sich $h(t)$ einem Wert an, der als $h_{\max}$ bezeichnet wird. Weise anhand der gegebenen Funktionsgleichung der Modellfunktion h rechnerisch nach, dass der Parameter k (mit $k < 0$) keinen Einfluss auf $h_{\max}$ hat, und gib $h_{\max}$ an!

Günstige Witterungsverhältnisse können dazu führen, dass die Hopfenpflanze schneller und höher wächst, d.h., dass sie sich früher einem größeren Wert von $h_{\max}$ annähert. Gib für ein derartiges Pflanzenwachstum an, wie a und k verändert werden müssen!

(a) Lösungserwartung:

Mögliche Ausdruck: $h(t_1) - h(0)$

$h(10) - h(0) = 6{,}45$

Die Pflanze ist in den ersten 10 Wochen um ca. 6,45 m gewachsen.

Die mit der Modellfunktion h berechnete Zunahme der Höhe der Pflanze im Zeitintervall $[0; 10]$ ist um ca. 0,8 %größer als die in diesem Zeitintervall tatsächlich beobachtete Zunahme (6,4 m)

Toleranzintervall: $[6{,}4\,m; 6{,}5\,m]$

(b) Lösungserwartung:

Mögliche Gleichung: $h''(t) = 0 \Rightarrow t_2$

$t_2 \approx 5{,}9$ Wochen Toleranzintervall: [5,4 Wochen; 6,3 Wochen]

$h'(t) \approx 0{,}92$

Die maximale Wachstumsgeschwindigkeit beträgt ca. 0,92 Meter pro Woche. Toleranzintervall: [0,90 Meter pro Woche; 1 Meter pro Woche]

Graph: siehe oben!

(c) **Lösungserwartung:**

h_1: siehe oben

Mögliche Intepretation:

Die Pflanze wächst in den ersten 12 Wochen durchschnittlich um ca. 58 cm pro Woche. Toleranzintervall: $[0{,}58; 0{,}59]$

Mögliche Begründung:

Die Steigung von h ist anfangs kleiner als jene von h_1, dann größer und dann wieder kleiner. Es gibt daher mindestens zwei Zeitpunkte, in denen sie gleich ist.

(d) **Lösungserwartung:**

Möglicher Nachweis:

Für alle $k < 0$ gilt: $\lim\limits_{t\to\infty} h(t) = \frac{a}{1+b\cdot 0} = a$, also ist $h_{\max}$ unabhängig von k.

$h_{\max} = a$

Für das beschriebene Pflanzenwachstum muss a vergrößert werden und k verkleinert werden.

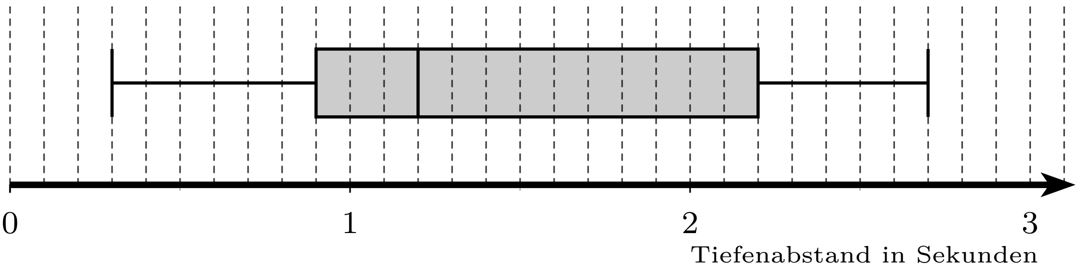
---

91 - MAT - WS 1.1, WS 1.3, WS 3.3, WS 3.2, FA 2.1, FA 2.2 - Abstandsmessung - Matura 2017/18

38. Im Rahmen der polizeilichen Kontrollmaßnahmen des öffentlichen Verkehrs werden Abstandsmessungen vorgenommen. Im Folgenden beschreibt der Begriff Abstand eine Streckenlänge und der Begriff Tiefenabstand eine Zeitspanne. ____/6

Beträgt der Abstand zwischen dem hinteren Ende des voranfahrenden Fahrzeugs und dem vorderen Ende des nachfahrenden Fahrzeugs Δs Meter, so versteht man unter dem Tiefenabstand diejenige Zeit t in Sekunden, in der das nachfahrende Fahrzeug die Strecke der Länge Δs zurücklegt.

Nachstehend sind Tiefenabstände, die im Rahmen einer Schwerpunktkontrolle von 1 000 Fahrzeugen ermittelt wurden, in einem Kastenschaubild (Boxplot) dargestellt. Alle kontrollierten Fahrzeuge waren mit einer Geschwindigkeit von ca. 130 km/h unterwegs.



Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Gib das erste Quartil q_1 und das dritte Quartil q_3 der Tiefenabstände an und deute den Bereich von q_1 bis q_3 im gegebenen Kontext!

Nach den Erfahrungswerten eines österreichischen Autofahrerclubs halten ungefähr drei Viertel der Kraftfahrer/innen bei einer mittleren Fahrgeschwindigkeit von ca. 130 km/h einen Abstand von mindestens 30 Metern zum voranfahrenden Fahrzeug ein. Gib an, ob die im Kastenschaubild dargestellten Daten in etwa diese Erfahrungswerte bestätigen oder nicht und begründe deine Entscheidung!

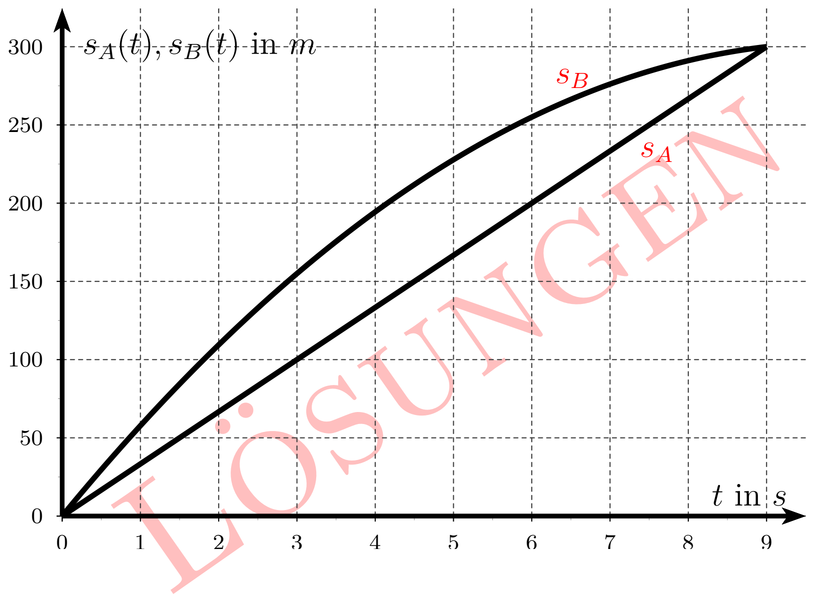
(b) Einer üblichen Faustregel zufolge wird auf Autobahnen generell ein Tiefenabstand von mindestens zwei Sekunden empfohlen. Jemand behauptet, dass aus dem dargestellten Kastenschaubild ablesbar ist, dass mindestens 20 % der Kraftfahrer/innen diesen Tiefenabstand eingehalten haben. Gib einen größeren Prozentsatz an, der aus dem Kastenschaubild mit Sicherheit abgelesen werden kann, und begründe deine Wahl!

Nimm den von dir ermittelten Prozentsatz als Wahrscheinlichkeit an, dass der empfohlene Tiefenabstand eingehalten wird. Gib an, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass bei zehn zufällig und unabhängig voneinander ausgewählten Messungen dieser Schwerpunktkontrolle zumindest sechs Mal der empfohlene Tiefenabstand von mindestens zwei Sekunden eingehalten wurde!

(c) Bei einer anderen Abstandsmessung wird ein kontrolliertes Fahrzeug auf den letzten 300 Metern vor der Messung zusätzlich gefilmt, damit die Messung nicht verfälscht wird, wenn sich ein anderes Fahrzeug vor das kontrollierte Fahrzeug drängt.

Fahrzeug A fährt während des Messvorgangs mit konstanter Geschwindigkeit und benötigt für die gefilmten 300 Meter eine Zeit von neun Sekunden. Stelle den zurückgelegten Weg $s_A(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t im unten stehenden Zeit-Weg-Diagramm dar ($s_A(t)$ in Metern, t in Sekunden) und gib an, mit welcher Geschwindigkeit in km/h das Fahrzeug unterwegs ist!

Ein Fahrzeug B legt die 300 Meter ebenfalls in neun Sekunden zurück, verringert dabei aber kontinuierlich seine Geschwindigkeit. Skizziere ausgehend vom Ursprung einen möglichen Graphen der entsprechenden Zeit-Weg-Funktion s_B in das unten stehende Zeit-Weg-Diagramm!



(a) **Lösungserwartung:**

$q_1 = 0{,}9$

$q_3 = 2{,}1$

Etwa die Hälfte der kontrollierten Fahrzeuge halten einen Tiefenabstand von mindestens 0,9 Sekunden und höchsten 2,1 Sekunden ein.

Die im Kastenschaubild dargestellten Daten bestätigen etwa diese Erfahrungswerte.

Mögliche Begründung:

$130\,\text{km/h} = 36{,}\dot{1}\,\text{m/s}$

$36{,}\dot{1}\,\text{m/s} \cdot 0{,}9\,\text{s} = 32{,}5\,\text{m}$ $\Rightarrow$ Mindestens drei Viertel der Kraftfahrer/innen halten einen Abstand von 30 m und mehr ein.

(b) **Lösungserwartung:**

ein möglicher Prozentsatz: 25 %
Toleranzintervall: (20 %; 25 %]
Mögliche Begründung:
Der Tiefenabstand von zwei Sekunden liegt zwischen dem Median und dem dritten Quartil.

Mögliche Vorgehensweise:
Zufallsvariable X = Anzahl der Kraftfahrlenker/innen, die den empfohlenen Mindestabstand eingehalten haben
$p = 0{,}25$ ... Wahrscheinlichkeit, dass der empfohlene Mindestabstand eingehalten wurden
$n = 10$ ... Anzahl der ausgewählten Messungen
$P(X \geq 6) \approx 0{,}0197$

(c) **Lösungserwartung:**

Fahrzeug A fährt mit einer Geschwindigkeit von 120 km/h.
Grafik: siehe oben!

1015 - K7 - DR - FA 1.7, FA 1.6, FA 1.4, AN 1.2, AN 1.3, FA 2.2 - Kostenfunktion - Thema Mathematik Schularbeiten 7. Klasse

39. Für eine Produktion einer Firma gilt die Nachfragefunktion p mit $p(x) = 60 - 0{,}4x$. Die Nachfragefunktion gibt den Preis p in Euro in Abhängigkeit von der produzierten Menge x in Stück an. ____/0

Die zugehörige Kostenfunktion K mit $K(x) = 20x + 500$ gibt die Kosten in Euro für die Produktion von x Stück an.

Aufgabenstellung:

(a) Bestimme, für welche Produktionsmengen x (in Stück) die Firma Gewinn macht. Ermittle die zugehörigen Preisgrenzen.

(b) Bei welchem Preis ist der Gewinn der Firma maximal? Gib den maximalen Gewinn der Firma an!

(c) Wie groß sind die Fixkosten der Firma? Wie groß dürfen die Fixkosten der Firma höchstens sein, damit sie bei gleicher Nachfragefunktion gerade noch ohne Verlust arbeiten kann?

(a) **Lösungserwartung:**

$E(x) = x \cdot p(x)$ $\qquad$ $G(x) = E(x) - K(x) = -0{,}4x^2 + 40x - 500$

Gewinngrenzen bei $G(x) = 0 \Rightarrow$ Mindestens 15 und maximal 85 Stück müssen produziert (und verkauft) werden.

Preisgrenzen: $p(15) = 54$ und $p(85) = 26 \Rightarrow$ Der Preis liegt zwischen € 26 und € 54.

(b) **Lösungserwartung:**

Maximaler Gewinn bei $G'(x) = 0 \Rightarrow x = 50$ Stück $\Rightarrow$ Der Gewinn beträgt $G(50) = 500$ € .

(c) **Lösungserwartung:**

Fixkosten: € 500, maximale Fixkosten: 500 + maximaler Gewinn = 1000 €
.

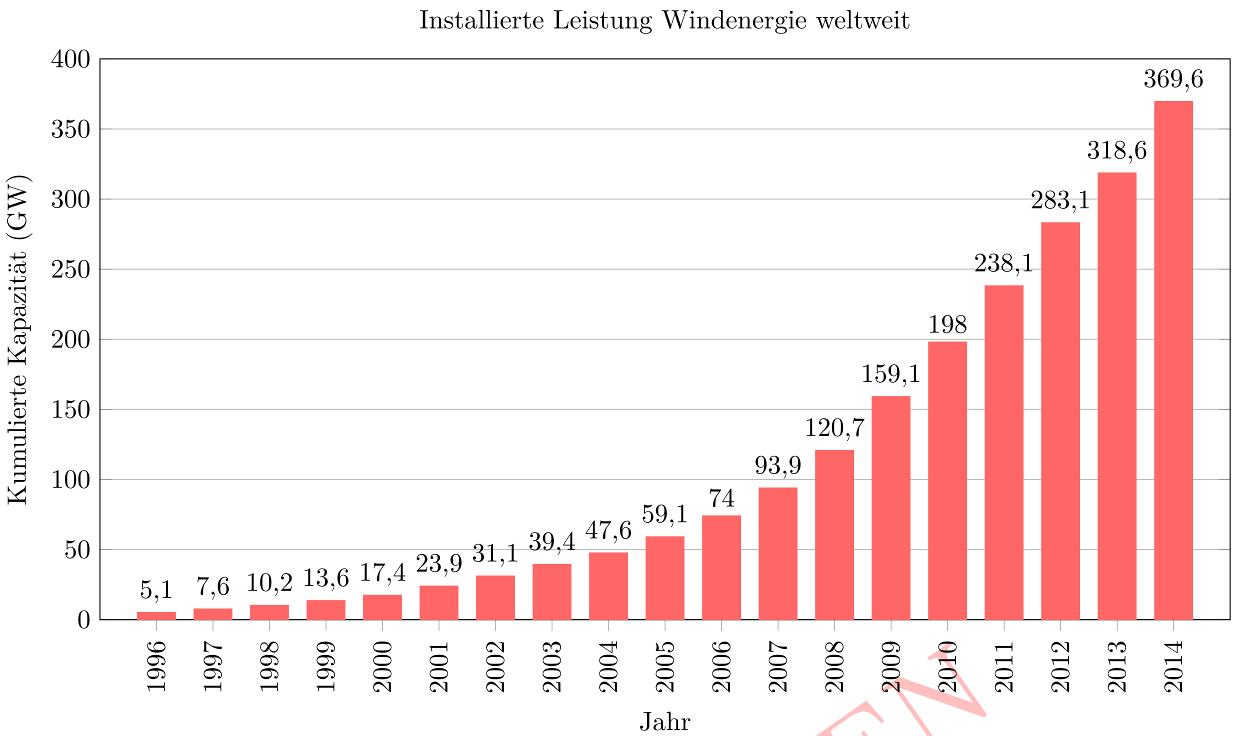
Alternative:

$K(x) = 20x + F \Rightarrow G(x) = x \cdot p(x) - K(x) = -0{,}4x^2 + 40x - F = 0$

Wenn die Firma gerade noch ohne Verlust arbeitet, ist ihr Gewinn null. Der Graph der Gewinnfunktion ist eine nach unten offene Parabel, die in diesem Fall die x-Achse berührt. Daher hat die Gleichung $G(x) = 0$ eine Doppellösung und ihre Diskriminante muss null sein: $1600 - 1{,}6F = 0 \Rightarrow F = 1000$ € .

1025 - K6 - RF - AN 1.1, AN 1.2, AN 1.3, FA 5.6, FA 5.1, FA 5.5, FA 2.5, FA 2.2 - Windenergie weltweit - Thema Mathematik Schularbeiten 6. Klasse

40. Die Windenergie zählt zu den umweltschonendsten Energieformen zur Erzeugung von Elektrizität. Das folgende Diagramm zeigt die Entwicklung der Leistung P in Gigawatt (GW) der weltweit installierten Windkraftwerke von 1996 bis zum Jahr 2014. ____/0



Daten nach: Global Wind Energy Council: Global Wind Statistics 2014

Aufgabenstellung:

(a) Sei $P(x)$ die im Jahr x weltweit installierte Leistung an Windenergie.

Berechne die Werte der folgenden Terme: $\frac{P(2014)-P(2010)}{P(2010)}$ und $\frac{P(2014)-P(2010)}{2014-2010}$

$\boxed{\text{A}}$ Interpretiere diese Werte im Kontext!

(b) Die weltweit installierte Leistung ist von 2000 bis 2005 und von 2005 bis 2010 jeweils auf etwa das 3,7-fache gestiegen.

Begründe, dass im Zeitraum von 2000 bis 2010 die weltweit installierte Leistung P (in GW) von der Zeit t (in Jahren) exponentiell abhängt und beschreibe diese Abhängigkeit durch eine Exponentialfunktion der Form $P(t) = P_0 \cdot a^t$.

(c) Für die weltweit installierte Leistung P (in GW) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Jahren) gilt für den Zeitraum von 2000 bis 2010:
$P(t) = 17{,}4 \cdot e^{0{,}24295 \cdot t}$.

Berechne die Verdopplungszeit der installierten Leistung!

Begründe rechnerisch, dass dieses Modell nicht bis 2014 gültig ist!

(d) Die installierte Leistung ist vom Jahr 2010 bis zum Jahr 2014 von 198 GW auf 369,6 GW gestiegen. Verwende auch die Daten der Jahre 2011, 2012 und 2013!

Wähle ein geeignetes Modell, das das Wachstum von 2010 bis 2014 beschreibt und begründe deine Wahl!

Berechne mit diesem Modell, welche weltweit installierte Leistung 2015 zu erwarten wäre!

(a) **Lösungserwartung:**

$\frac{P(2014)-P(2010)}{P(2010)} = \frac{369{,}6-198{,}0}{198{,}0} \approx 0{,}867$

$\frac{P(2014)-P(2010)}{2014-2010} = \frac{171{,}6}{4} \approx 42{,}9$

Von 2010 bis 2014 ist die installierte Leistung um 86,7 % gestiegen.

Im Zeitraum von 2010 bis 2014 ist die installierte Leistung im Mittel um 42,9 GW pro Jahr gestiegen.

(b) **Lösungserwartung:**

Steigerung um denselben Faktor von 3,37 in jeweils Fünfjahresschritten ist eine Eigenschaft exponentiellen Wachstums.

$P(t) = P_0 \cdot a^t$ mit $P_0 = 17{,}4; a \approx 3{,}37^{\frac{1}{5}} \approx 1{,}275 \Rightarrow P(t) \approx 17{,}4 \cdot 1{,}275^t$

(c) **Lösungserwartung:**

$P(t) = 17{,}4 \cdot e^{0{,}24295 \cdot t} \Rightarrow$ Verdopplungzeit $\approx 2{,}85$ Jahre

2014: $P(14) = 17{,}4 \cdot e^{0{,}24295 \cdot 14} \approx 522$, der Realwert nach der Tabelle ist aber nur 369,6 GW.

(d) **Lösungserwartung:**

Von 2010 bis 2014 jeweils konstante Steigerung um etwa 42,9 GW pro Jahr, daher lineares Modell.

Vorhersage für 2015: 412,5 GW

1032 - K5 - FU - FA 2.1, FA 2.2, FA 2.3 - Wertverlust von Maschinen - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

41. Maschinen verlieren ab dem Kaufzeitpunkt auf Grund von Abnutzung und Alterung an Wert. Dies wird in der Wirtschaft als (lineare) Abschreibung bezeichnet. ____/0

Die Abhängigkeit des Maschinenwertes von der Zeit t (in Jahren) wird durch eine lineare Funktion f beschrieben.

Der Wert einer Baumaschine ist 2 Jahre nach dem Kaufpreis auf 45 000 € gesunken. Weitere 3 Jahre später beträgt der Wert nur mehr 27 000 € .

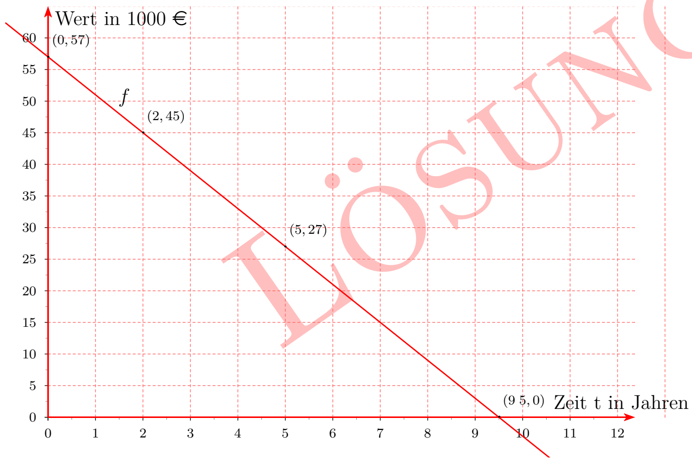
(a) Ermittle anhand des Graphen der Funktion f den Anschaffungswert der Baumaschine.

(b) Gib den zugehörigen Funktionsterm $f(t)$ an und interpretiere die Werte k und d im Kontext.

(c) Gib einen geeigneten Definitionsbereich für die Funktion f an und interpretiere diesen.

Lösungserwartung:

(a) Graph:



Anschaffungswert: 57 000 €

(b) $f(t) = 57\,000 - 6000t$

$k = -6000 \Rightarrow$ Die Maschine verliert jährlich 6 000 € an Wert (jährliche Abschreibung)

$d = 57\,000 \Rightarrow$ Die Maschine kostete bei ihrer Anschaffung 57 000 € (Anschaffungswert)

(c) Definitionsbereich: $0 \leq t \leq 9{,}5$

Bis 9,5 Jahre nach der Anschaffung ist der Wert der Maschine nicht negativ.

1033 - K5 - FU - FA 1.6, FA 1.7 - Steinwurf - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

42. (a) Vom Rand der Aussichtsterrasse des Donauturms wird ein Stein mit einer Geschwindigkeit von $v = 20\,\text{m/s}$ senkrecht nach oben geworfen. Die zugehörige Bewegungsgleichung beschreibt, wie sich die Höhe h (in m) des Steines in Abhängigkeit von der Zeit t (in s) verändert: $h(t) = 160 + 20t - 5t^2$ ____/0

    (i) Berechne, aus welcher Höhe der Stein hochgeworfen wird und wann er diese Höhe wieder erreicht.

    (ii) Berechne, wann der Stein am Boden aufschlägt.

    (iii) Zeichne den Graphen der Funktion. Lies aus dem Graphen die maximale Höhe ab, die der Stein erreicht, und den zugehörigen Zeitpunkt.

    (b) Die Betragsfunktion f mit $f(x) = |x|$ ist definiert durch: $|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$

    Zeichne anhand dieser Definition den Graphen der Betragsfunktion f und löse damit grafisch die Gleichung $|x| = \frac{x}{2} + 3$.

Lösungserwartung:

(a) (i) $h(0) = 160 \Rightarrow$ Abwurfhöhe $= 160\,\text{m}$

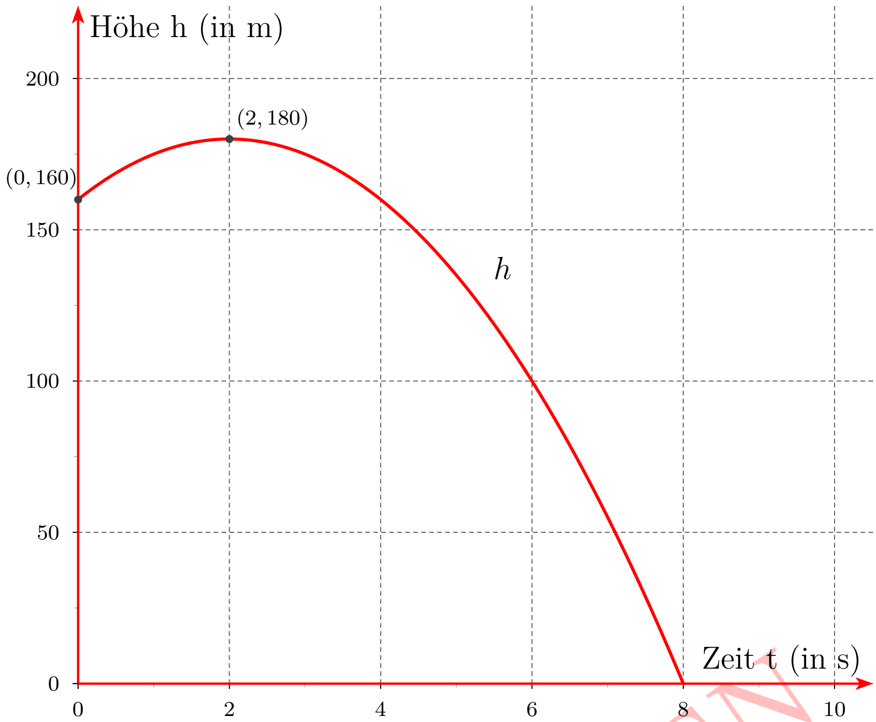
$h(t) = 160 \Rightarrow t = 0$ oder $t = 4$

Der Stein erreicht die gleiche Höhe wieder nach $4\,\text{s}$.

(ii) $h(t) = 0 \Rightarrow t = -4$ oder $t = 8$

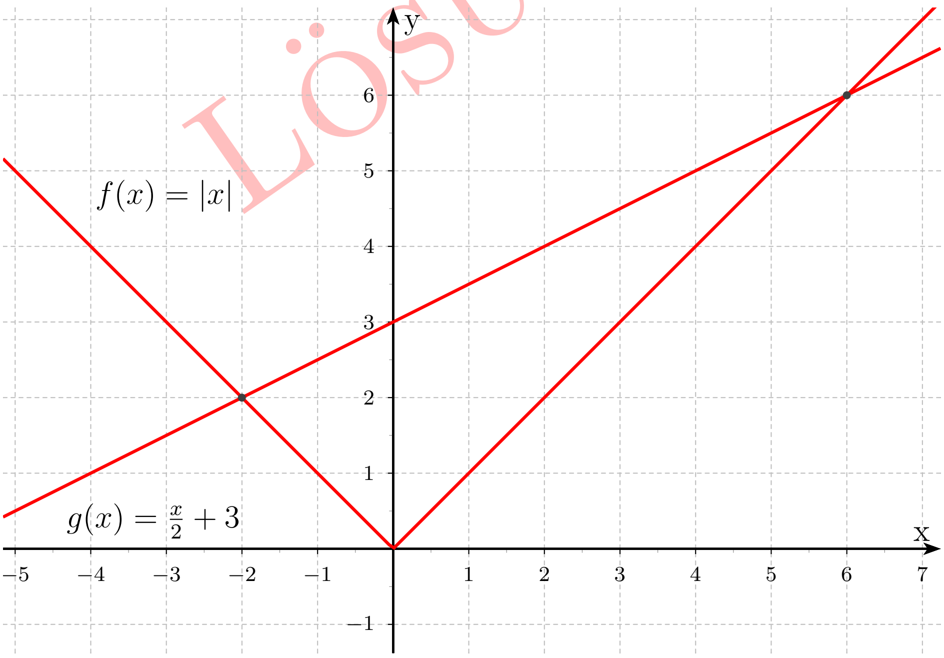
Der Stein schlägt nach $8\,\text{s}$ am Boden auf.

(iii) Graph:



Die maximale Höhe von 180 m erreicht der Stein nach 2 s.

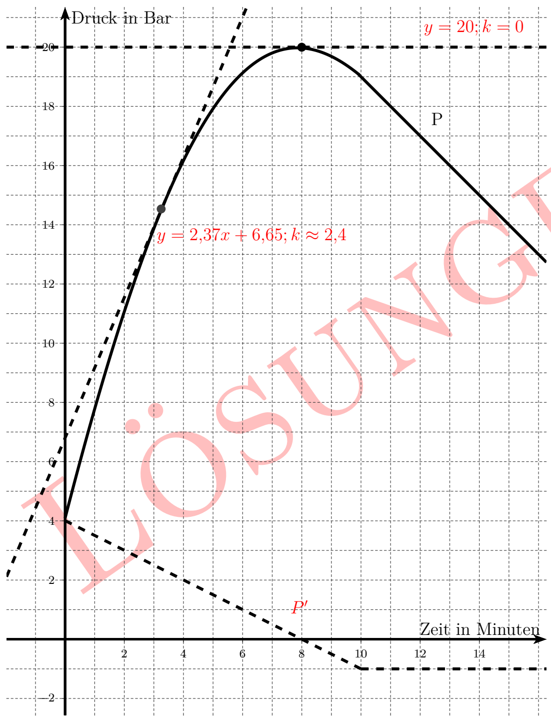
(b) Graph:



$x_1 = -2$; $x_2 = 6$

1039 - K7 - DR - AN 3.2, AN 1.1, AN 1.3, FA 1.4, FA 2.2 - Druck in einem Behälter - Dimensionen Mathematik, Schularbeiten-Trainer 7. Klasse

43. Im Zuge eines 15 Minuten dauernden Experiments wird der Druck P in einem Behälter gezielt verändert. Die nebenstehende Abbildung zeigt die Entwicklung des Drucks während der Versuchszeit. Die für die Lösung der anschließenden Aufgabenstellungen abzulesenden Werte sind ganzzahlig. Der Druck wird im Weiteren in Bar angegeben, die Zeit t in Minuten. Die Zeitmessung startet am Beginn des Experiments. ____/6



Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Skizziere in der obenstehenden Abbildung die momentane Druckänderungsrate während des Versuchszeitraums.

Welche der folgenden Informationen über die Entwicklung des Drucks während des Experiments sind korrekt? Kreuze die zutreffende(n) Aussage(n) an!

Am Beginn beträgt der Druck 4 bar.	☒
Innerhalb der ersten 10 Minuten beschreibt eine Funktion f zweiten Grades mit $P = f(t)$ die Höhe des Drucks P zur Zeit t.	☒
Ab dem Zeitpunkt $t = 8$ verändert sich der Druck nicht mehr.	
Die mittlere Änderungsrate des Drucks innerhalb der ersten vier Minuten beträgt 3 bar.	☒
Die absolute Änderung des Drucks im Zeitintervall $[4; 6]$ beträgt 3 bar.	☒

(b) Ab dem Zeitpunkt $t = 10$ verändert sich der Druck mit der zu diesem Zeitpunkt gerade gegebenen momentanen Änderungsrate gleichmäßig, linear weiter und es gilt: $P = g(t)$.

Ermittle $g(t)$ und berechne, nach wie vielen Minuten der Druck auf 0 bar gesunken wäre, wenn sich der Druck ab dem Zeitpunkt $t = 10$ gemäß der Funktion g weiter entwickeln würde.

(c) Nach Beendigung des Experiments stellt eine Person fest, dass innerhalb der ersten 10 Minuten die Zunahmegeschwindigkeit des Drucks zu einem bestimmten Zeitpunkt gleich der Abnahmegeschwindigkeit des Drucks zu einem anderen Zeitpunkt war. Erläutere, um welche Zeitpunkte es sich handeln kann, und begründe deine Antwort mittels Rechnung, wenn für das Zeitintervall $[0; 10]$ gilt: $P = f(t) = -\frac{1}{4}t^2 + 4t + 4$.

(a) Lösungserwartung:

Lösung Grafik: siehe oben

Lösung MC: siehe oben

(b) Lösungserwartung:

$P'(10)$ aus der Grafik ermitteln: $P'(10) = -1$ und damit die Gleichung für g mit $g(t) = -t + 29$ aufstellen.

Nullstelle von g berechnen und interpretieren: $0 = -t + 29 \Rightarrow t = 29$. Nach 29 Minuten ist der Druck auf 0 bar gesunken.

(c) **Lösungserwartung:**

Aufgrund der Symmetrieeigenschaften der quadratischen Funktion f kommen für die gleiche Abnahme- und Zunahmegeschwindigkeit nur die Intervalle $[6; 8]$ und $[8; 10]$ für die Lösung in Betracht. Z.B. $f'(7) = 0{,}5$; $f'(9) = -0{,}5$.

D.h. die Zunahmegeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 7$ ist gleich der Abnahmegeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 9$.

1069 - K7 - RF, DR - FA 1.5, AG 2.3, FA 1.7, FA 1.4, FA 4.3 - Vulkaninsel - Handlungsorientierte Aufgabenbeispiele für den Mathematikunterricht SB

44. Durch vulkanische Aktivitäten haben sich im Laufe der Jahrtausende in der Karibik zwei neue Inseln gebildet. Das Relief der Inseln wird unter und über dem Meeresspiegel annähernd beschrieben durch folgende Funktion: ____/5

$$f(x) = -\frac{2}{55}x^4 + \frac{25}{88}x^2 - \frac{11}{160}$$

Hierbei ist x die Entfernung in 100 m und f die Höhe über dem Meeresspiegel in 100 m. Daraus folgt, dass der Ausdruck $f(1) \approx 0{,}1789..$ bedeutet, dass nach 100 Metern rechts von der Mitte der beiden Inseln die rechte Insel bereits eine Höhe von 17,89 m über dem Meeresspiegel hat.

Ein Überlebender einer Flugzeugkatastrophe ist auf einer der beiden Inseln gestrandet, auf der es kein Süßwasser gibt.

Beurteile die Überlebenschance des Gestrandeten für den Fall, dass es auf der anderen Insel Süßwasser gibt. Beantworte dafür folgende Fragestellungen:

Aufgabenstellung:

(a) Wie weit sind die beiden Inseln voneinander entfernt? Berechne ohne technische Hilfsmittel! (Tipp: Nullstellen)

(b) Wie lange würde man brauchen, um von einer zu anderen Insel zu schwimmen?

(c) $\boxed{\text{A}}$ Wie tief ist das Wasser zwischen den beiden Inseln? Könnte ein Nichtschwimmer "'zu Fuß"' die Entfernung zwischen beiden Inseln überwinden?

(d) Wie hoch sind die Inseln?

Lösungserwartung:

(a) Nullstellen: $x_1 = -\frac{11}{4}, x_2 = -\frac{1}{2}, x_3 = \frac{1}{2}, x_4 = \frac{11}{4}$
Abstand zwischen den beiden Inseln: $(0{,}5 - (-0{,}5)) * 100 = 100\,\text{m}$

(b) Annahme einer Schwimmgeschwindigkeit eines normalen Menschen (z.B. $2\,\text{km/h}$) $\Rightarrow$ $100\,\text{m}$ in 3 min.

(c) $f(0) = -0{,}07 \Rightarrow$ tiefster Punkt zwischen den beiden Inseln liegt bei $0{,}07 * 100 = 7\,\text{m}$. Ein Nichtschwimmer kann also NICHT auf die andere Insel gelangen.

(d) Da der Graph der Funktion symmetrisch zur y-Achse ist, sind beide Inseln gleich hoch. Der höchste Punkt liegt jeweils bei $49\,\text{m}$.

1072 - K7 - RF - FA 1.5, FA 1.7 - Hammerwurf - Handlungsorientierte Aufgabenbeispiele für den Mathematikunterricht SB

45. Das Kugelstoßen ist eine olympische Disziplin der Leichtathletik. Ziel ist es, die 4 kg (bzw. 7,25 kg bei den Männern) schwere Kugel möglichst weit zu stoßen. Der Ringe mit einem Durchmesser von 2,135 m dient hierbei als Anlauffläche. ____/5

Sportwissenschaftler stellten kürzlich folgende These auf: "'Je höher der höchste Punkt der Flugkurve der Kugel beim Kugelstoßen ist, desto weiter fliegt die Kugel."'

Überprüfe diese These anhand der folgenden Funktionen, die drei unterschiedliche Versuche einer amerikanischen Kugelstoßerin beschreiben:

$f_1(x) = -0{,}05x^2 + 0{,}8x + 1{,}78$

$f_2(x) = -0{,}08x^2 + 1{,}2x + 1{,}78$

$f_3(x) = -0{,}12x^2 + 1{,}7x + 1{,}78$

Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Wie weit waren die einzelnen Stöße?

(b) Wo hoch wurden die Kugeln jeweils geworfen?

(c) Die Kugeln werden ungefähr auf Schulterhöhe abgeworfen. Wie hoch wird die Schulterhöhe der besagten Kugelstoßerin sein?

Lösungserwartung:

(a) 1. Stoß: 17,98 m; 2. Stoß: 16,36 m; 3. Stoß: 16,36 m

(b) 1. Stoß: 4,98 m; 2. Stoß: 6,28 m; 3. Stoß: 7,80 m

(c) Ungefähr 1,78 m

1073 - K7 - RF - FA 1.5, FA 1.7 - Freistoß - Handlungsorientierte Aufgabenbeispiele für den Mathematikunterricht SB

46. Freistoß! Der 1. FC Albertgasse liegt im 1:2 hinter den Sportfreunden Feldgasse zurück. Schafft der FC den Ausgleich? ____/3

Die Flugkurve des Balles wird von der ganzrationalen Funktion f beschrieben:

$$f(x) = -0{,}0015x^3 + 0{,}045x^2$$

Die Mauer steht 12 m vor dem Tor.

Laut den Spielregeln des Weltfußballverbands (FIFA) beträgt der Abstand zwischen den Innenkanten der Pfosten 7,32 m, die Unterkante der Querlatte ist 2,44 m vom Boden entfernt.

Bei Freistößen müssen alle Spieler der verteidigenden Mannschaft (insbesondere die Mauer) in einem Abstand von (mindestens) 9,15 m zum Ball oder auf der eigenen Torlinie zwischen den Pfosten befinden.

Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Wie weit vom Tor entfernt liegt der Ball bevor der Schütze den Freistoß schießt?

(b) Wie hoch müsste ein 2,05 m großer Spieler in der Mauer springen um den Ball aufhalten zu können?

(c) Angenommen der Ball wird genau in Richtung Tor geschossen - könnte es ein Tor werden oder schießt der Spieler übers Tor drüber? Begründe deine Antwort!

Lösungserwartung:

(a) $9{,}15 + 12 = 21{,}15\,\text{m}$

(b) $P = (9{,}15/2{,}62)$ Das heißt ein 2,05 m hoher Spieler müsste 0,57 cm hoch springen.

(c) $P(21{,}15/5{,}92)$ Nein, da das Tor lediglich 2,44 m hoch ist, der Ball aber auf einer Höhe von 5,92 m wäre.

1077 - K5 - FU - FA 1.7, FA 2.1, FA 2.3 - Temperatur im Erdinneren - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

47. Die Temperatur im Erdinneren steigt ungefähr um 30 °C pro 1000 m an. Die Ausgangstemperatur an der Erdoberfläche beträgt 10 °C. ____/0

Stelle den Temperaturverlauf in einem linearen Modell in einem geeigneten Ausschnitt dar. Gib dazu eine Funktionsgleichung an und zeichne den Graphen der Funktion.

Beantworte mithilfe deines Modells die folgenden Fragen:

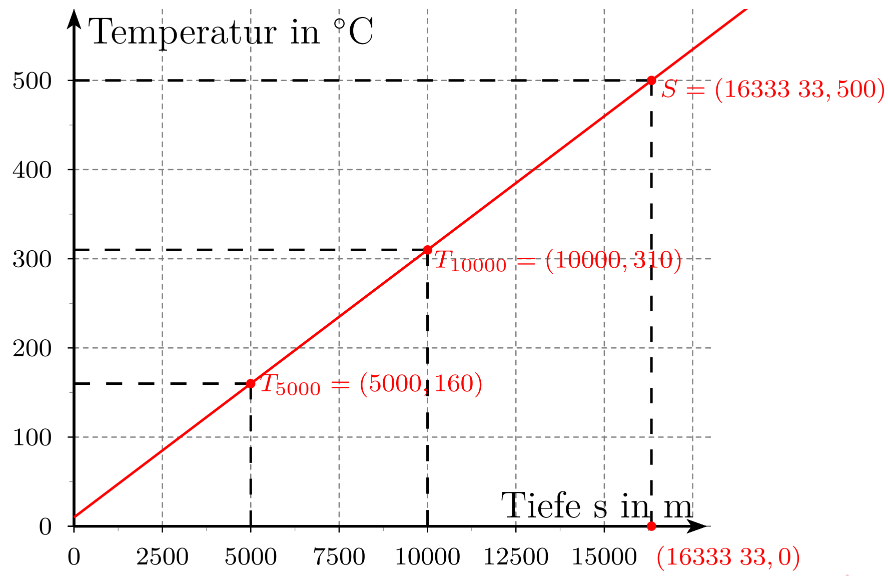
(a) Was bedeuten die Werte der Parameter k und d in diesem Kontext?

(b) Wie hoch ist die Temperatur in 5 km und in 10 km Tiefe?

(c) In welcher Tiefe steigt die Temperatur erstmals über 500 °C?

Hinweis: Die Gefragten Werte sind zu berechnen und im Diagramm einzuzeichnen.

Lösungserwartung:



(a) $T(s) = 10 + 0{,}03 \cdot s$ ($T \dots$ Temperatur in °C; $s \dots$ Tiefe in m)

Der Parameter k gibt an, dass pro Tiefenzunahme um 1 m die Temperatur um 0,03 °C steigt.

Der Parameter d gibt den Startwert von 10 °C in Tiefe null (=Erdoberfläche) an.

(b) $T(5000) = 10 + 0{,}03 \cdot 5000 = 160\,°C$; $T(10\,000) = 310°C$

(c) $500 = 10 + 0{,}003 \cdot s \Rightarrow s = 490 : 0{,}03 \approx 16\,333{,}33 \Rightarrow$ In mehr als 16,3 km Tiefe steigt die Temperatur nach diesem (sehr einfachen) Modell auf über 500 °C.

1078 - K5 - FU - FA 1.7, FA 2.1, FA 2.2, FA 2.3 - Bevölkerung Indien - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

48. Im Jahr 1994 gab es in Indien 820 Millionen Menschen, fünf Jahre später waren es 880 Millionen Menschen. ____/0

(a) Diese Bevölkerungsentwicklung kann näherungsweise durch ein lineares Modell beschrieben werden. Gib die Gleichung einer entsprechenden linearen Funktion an.

(b) Was bedeuten die Werte der beiden Parameter k und d in diesem Kontext?

(c) Wann leben gemäß dem linearen Modell 1,5 Milliarden Menschen in Indien? Nenne ein Argument, warum dieses Modell nur eine sehr grobe Schätzung ermöglicht.

Lösungserwartung:

(a) $y = 12x + 820$ ($x \ldots$ Zeitspanne in Jahren ab 1994, $y \ldots$ Bevölkerung in Millionen)

(b) $k \ldots$ Die Bevölkerung wächst jährlich um 12 Millionen Menschen.
$d \ldots$ Im Jahr 1994 lebten 820 Millionen Menschen in Indien

(c) $1500 = 12x + 820 \Rightarrow x \approx 56{,}67 \Rightarrow$ Im Jahr 2051 sind 1,5 Milliarden Menschen erreicht. Das lineare Modell beruht auf zwei Werten in einer Zeitspanne von 5 Jahren. Es wird aber über eine Zeitspanne von mehr als 50 Jahren extrapoliert.

1079 - K5 - FU - FA 1.7, FA 2.1, FA 2.2, FA 2.3 - Taschenproduktion - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

49. Ein Betrieb erzeugt Taschen. Für die Erzeugung von x Taschen in einem Monat betragen die Gesamtkosten K €. Für diese Kostenfunktion gilt: ____/0

$K(x) = 55x + 8600$

Eine Tasche wird um 75 € verkauft.

(a) Interpretiere die Werte k und d der linearen Kostenfunktion K im Kontext. Stelle die Erlösfunktion $E(x)$ und die Gewinnfunktion $G(x)$ auf. Berechne die Gewinnschwelle und interpretiere diesen Wert im Kontext.

(b) Berechne, wie viele Taschen mindestens verkauft werden müssen, damit der Betrieb mit einem Gewinn von 10 000 € rechnen kann.

(c) Die Firma überlegt die Produktion zu verdoppeln. Muss sie mit doppelt so hohen Gesamtkosten rechnen? Darf sie – vorausgesetzt es können alle Taschen verkauft werden – mit einem doppelt so hohen Erlös rechnen?

(d) Die Firma hätte gerne, dass die Gewinnschwelle schon bei 300 verkauften Taschen erreicht ist. Was würdest du der Firma raten? Gib einen konkreten Vorschlag.

Lösungserwartung:

(a) Der Wert $k = 55$ stellt die Kosten für die Erzeugung einer Tasche dar, der Wert $d = 8600$ bedeutet die Größe der Fixkosten.

$E(x) = 75x$; $G(x) = E(x) - K(x) = 20x - 8600$

Gewinnschwelle $G(x) = 0 \Rightarrow x = 430 \Rightarrow$ Die Firma muss mehr als 430 Taschen verkaufen um Gewinn zu machen.

(b) $G(x) = 10\,000 \Rightarrow x = 930 \Rightarrow$ Mindestens 930 Taschen müssen verkauft werden.

(c) Doppelte Produktion hat nicht doppelte Gesamtkosten zur Folge, da die Fixkosten nicht von der Produktionsmenge abhängen. Der Erlös würde auf das Doppelte steigen.

(d) Möglich sind Verkaufspreiserhöhung, Fixkostensenkung und/oder Senkung der Herstellungskosten pro Tasche. Konkret: Verkaufspreis auf ca. 83,50 € erhöhen, Fixkosten auf 6000 € senken oder Herstellungskosten pro Tasche auf ca. 46,50 € senken.

1080 - K5 - FU - FA 1.6, FA 1.7, FA 2.1, FA 2.2, FA 2.3 - Eintritt im Hamari-Kraxl-Park - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

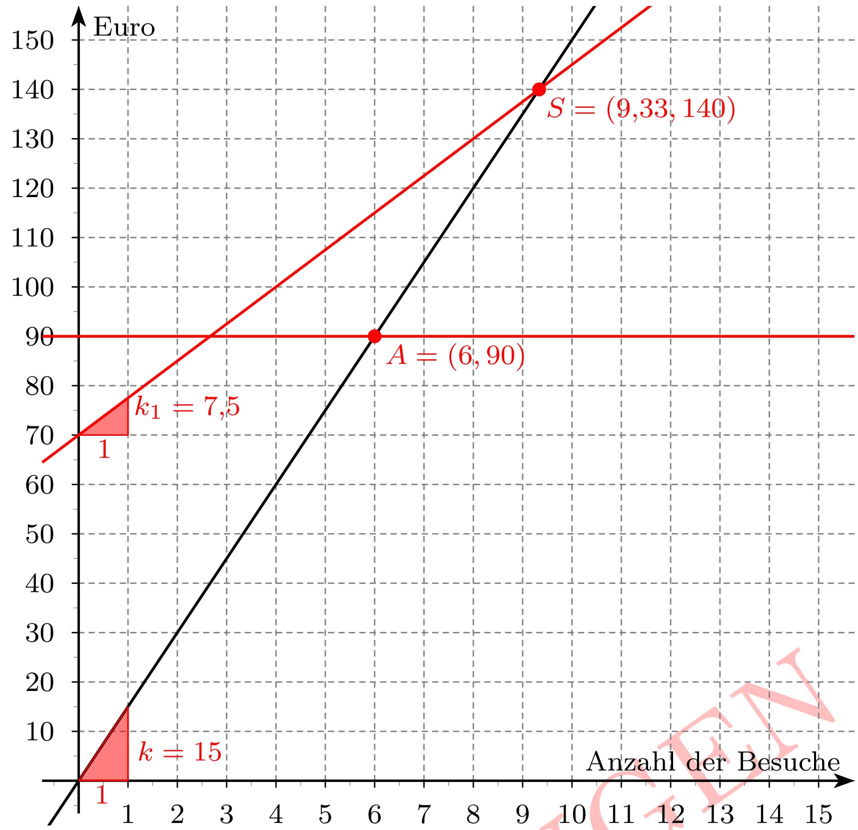
50. Der Zusammenhang zwischen der Anzahl der Besuche des Hamari-Kraxl-Parks in Mönichkirchen am Wechsel und dem dafür zu bezahlenden Eintritt für Kinder von 12 bis 15 Jahren wird durch eine lineare Funktion modelliert (siehe Grafik). ____/0

Eine Saisonkarte für diese Altersstufe kostet 90 €. Wenn ein Kind dieser Altersstufe Mitglied eines alpinen Vereins ist, zahlt es dort zwar einen Jahresmitgliedsbeitrag von 70 €, aber jeder Besuch des Hamari-Kraxl-Parks kostet dann nur die Hälfte.

(a) Veranschauliche in der gegebenen Grafik den Zusammenhang zwischen der Anzahl der Besuche des Hamari-Kraxl-Parks und dem insgesamt zu bezahlenden Betrag für ein Mitglied eines alpinen Vereins.

(b) Lies aus der Grafik ab, ab wie vielen Besuchen des Hamari-Kraxl-Parks es für Mitglieder von alpinen Vereinen günstiger ist, als für Nicht-Mitglieder.

(c) Ab wie vielen Besuchen des Hamari-Kraxl-Parks lohnt sich eine Saisonkarte?



Lösungserwartung:

(a) siehe Abbildung

(b) Für Mitglieder eines alpinen Vereins ist es ab 10 Besuchen günstiger.

(c) Eine Saisonkarte lohnt sich ab 7 Besuchen.

1081 - K5 - FU - FA 1.7, FA 1.8 - Luftwiderstand - Thema Mathematik Schularbeiten 5. Klasse

51. Der Luftwiderstand F_L ist eine Kraft, die bewegte Körper bremst und in Newton (N) gemessen wird. Er ist durch die Formel $F_L = 0{,}5c_W \cdot \rho_L \cdot v^2 \cdot A$ gegeben. ____/0

c_W ist der Widerstandsbeiwert. Er hängt von der Form des Gegenstands ab: Ist der Gegenstand stromlinienförmig, ist c_W klein. Die zweite Größe in der Formel ist die Dichte ρ_L der Luft. Für sie gilt etwa $\rho_L \approx 1{,}2\,\text{kg/m}^3$. Mit v wird die relative Geschwindigkeit des Gegenstands in Bezug auf die umgebende Luft bezeichnet: Bei Rückenwind subtrahiert sich die Eigen- und die Windgeschwindigkeit, bei Gegenwind werden die Werte addiert. Schließlich bezeichnet A die Querschnittsfläche des Gegenstands.

(a) Für einen PKW gilt: $c_W = 0{,}26$ und $A = 2{,}3\,\mathrm{m}^2$. Der PKW bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von $30\,\mathrm{m/s}$. Es herrscht Gegenwind von $10\,\mathrm{m/s}$. Berechne den Luftwiderstand des Autos.

(b) Die Dichte der Luft nimmt mit zunehmender Seehöhe ab. Ist der Luftwiderstand auf Meeresniveau oder auf ein Seehöhe von 2000 m größer? Begründe mithilfe der oben angegebenen Formel!

(c) Wenn man die Geschwindigkeit des PKWs um ein Viertel erhöht, um wie viel Prozent steigt der Luftwiderstand?

(d) Gib an um welchen Funktionstyp es sich jeweils handelt:
- Luftwiderstand in Abhängigkeit von der Querschnittsfläche
- Luftwiderstand in Abhängigkeit von der Relativgeschwindigkeit

(e) Gib an, ob die Größen direkt proportional, indirekt proportional oder keines von beiden sind:
- der Luftwiderstand und der Widerstandsbeiwert
- der Luftwiderstand und die Relativgeschwindigkeit
- der Widerstandsbeiwert und die Querschnittsfläche

Lösungserwartung:

(a) $F_L = 0{,}5 \cdot 0{,}26 \cdot 1{,}2 \cdot 40^2 \cdot 2{,}3 \approx 574\,\mathrm{N}$

(b) In größerer Höhe nimmt die Dichte ab, deshalb sinkt der Luftwiderstand.

(c) $(1{,}25)^2 = 1{,}5625$; Der Luftwiderstand steigt um $56{,}25\,\%$.

(d) $F_L(A) \ldots$ lineare Funktion
$F_L(v) \ldots$ quadratische Funktion

(e) Der Luftwiderstand ist direkt proportional zum Widerstandsbeiwert.
Luftwiderstand und Relativgeschwindigkeit sind weder direkt noch indirekt proportional.
Der Widerstandsbeiwert ist indirekt proportional zur Querschnittsfläche.

1094 - K7 - KZ - AG 2.3, AG-L 1.5, FA 2.4, FA 2.2, FA 2.1, AG-L 4.4 - Quadratische Gleichungen im Zsh. mit komplexen Zahlen - Dimensionen Mathematik Schularbeiten Trainer 7

52. Gegeben ist die quadratische Gleichung $x^2 + u \cdot x = w$ mit $u, w \in \mathbb{R}$. ____/3

Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Wenn die Parameter die Werte $u = 6$ und $w = -13$ annehmen, besitzt die Gleichung in der Grundmenge $\mathbb{C}$ die beiden Lösungen x_1 und x_2. Gib diese beiden Lösungen an.

(b) Bei der nachfolgenden Aufgabenstellung gilt $u = 4$. Bestimme, welchen Wert der Parameter w annehmen muss, damit die in der Einleitung angeführte quadratische Gleichung genau eine Lösung besitzt. Diese eine Lösung wird mit x_3 bezeichnet. Gib x_3 an.

(c) Für eine Zahlenmenge $M \in \mathbb{C}$, mit $x_3 \in M$, gilt: Zwischen Realteil a und Imaginärteil b der zu M gehörenden Zahlen besteht ein funktionaler Zusammenhang, der sich folgenderweise äußert: Ist $a+b\cdot i$ eine in M liegende Zahl, dann muss auch $(a+1)+(b+2)\cdot i$ eine in M liegende Zahl sein.

Zeichne M in der Gauß'schen Zahlenebene ein und beschreiben den oben angesprochenen Zusammenhang zwischen Real- und Imaginärteil mithilfe einer Gleichung.

(d) Weise nach, dass genau eine der beiden Zahlen x_1 oder x_2 zu M gehört, und gib diese Zahl in Polardarstellung an.

Lösungserwartung:

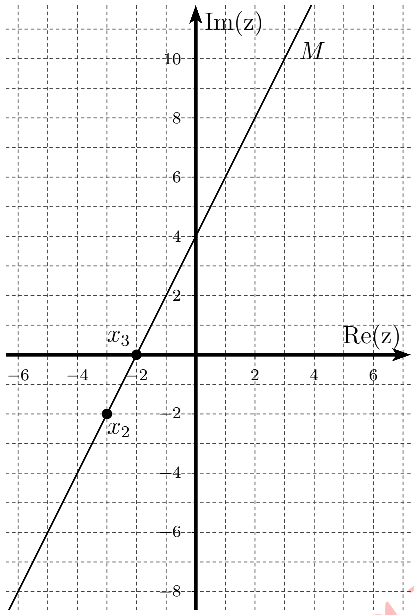
(a) $x^2 + 6x + 13 = 0 \Rightarrow x_1 = -3 + 2i$ und $x_2 = -3 - 2i$

(b) $x^2 + 4x - w = 0 \Rightarrow x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 + w}$

Damit nur eine Lösung herauskommt, muss $w = -4$ gelten $\Rightarrow x_3 = -2$

(c) Zahlenmenge M in der Gauß'schen Zahlenebene:

$a + b \cdot i \in M \Rightarrow (a+1) + (b+2) \cdot i \in M$: Vergrößert man den Realteil um 1, so vergrößert sich der Imgaginärteil um 2. Somit liegen alle $z \in M$ auf einer Geraden mit der Steigung 2 bzw. dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ in der Gauß'schen Zahlenebene durch x_3.



Zusammenhang zwischen Real- und Imaginärteil:

Der Zusammenhang zwischen a und b kann aus der obenstehenden Zeichnung abgelesen werden: $b = 2a + 4$

(d) Nachweis der Zugehörigkeit zu M:

$x_1 = -3 + 2i$ und $x_2 = -3 - 2i$

Setzt man für x_1 den Realteil $a = -3$ und den Imaginärteil $b = 2$ in die Gleichung $b = 2a + 4$ ein, so erhält man mit $2 = 2 \cdot (-3) + 4$ eine falsche Aussage. Somit ist x_1 kein Element von M.

Für x_2 erhält man: $-2 = 2 \cdot (-3) + 4$ bzw. $-2 = -2 \Rightarrow x_2 \in M$.

Polardarstellung von x_2 :

Da sich x_2 im 3. Quadranten befindet, muss gelten: $180° < \varphi < 270°$

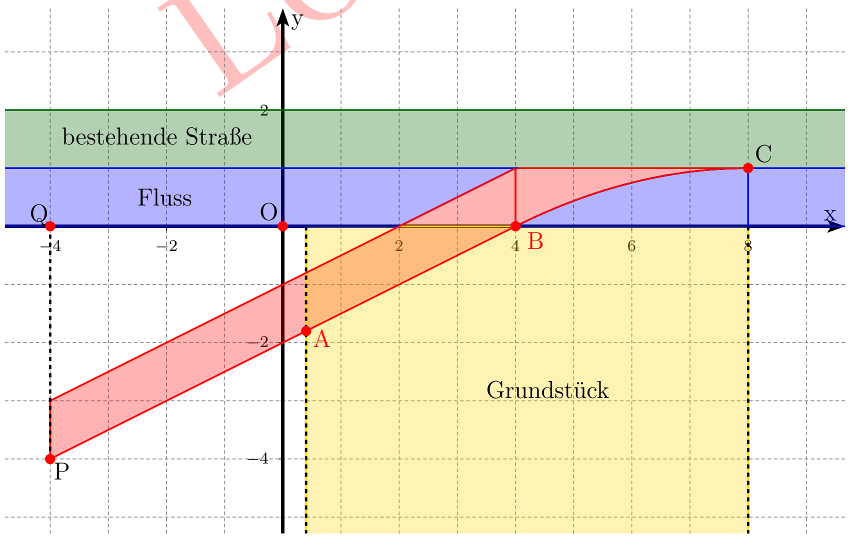
$x_2 = (\sqrt{13}|213{,}69°)$

1099 - K7 - VAG2, DR, RF - FA 2.2, AG 4.1, AG-L 4.3, AG 4.2, AN 3.3 - Ein neues Verkehrskonzept - Dimensionen Mathematik Schularbeiten Trainer 7

53. Ein Plan wird in einem Koordinatensystem dargestellt, die Längeneinheit entspricht auf beiden Achsen in Wirklichkeit 5 m, die positive y-Achse zeigt genau nach Norden. Der Koordinatenursprung O wurde in einen bekannten, direkt an einem Flussufer gelegenen Vermesseungspunkt gelegt. ____/3

Wie in der provisorischen Skizze unten dargestellt, schließt südlich des Flusses ein rechteckiges Grundstück an, dessen westliche Grenzlinie durch den Punkt A verläuft. Es ist bekannt, dass der Abstand zwischen O und A in Wirklichkeit 10 m, im Plan also 2 LE beträgt, die exakten Koordinaten von A im Plan sind aber unbekannt.

Im Zuge eines neuen Verkehrskonzepts ist eine durch $P = (-4|-4)$ verlaufende, geradlinige Straße geplant, die zwischen A und $B = (4|0)$ durch das Grundstück führt. Den nördlichen der Strecke AB gelegenen Teil des Grundstücks muss der Eigentümer gegen eine Ablöse abtreten. Im Anschluss an den Punkt B geht die Straße knickfrei in einen Kurvenbogen über, bis sie im Punkt $C = (8|1)$ wiederum knickfrei in eine bereits bestehende, direkt längs des nördlichen Flussufers verlaufende Straße einmündet.



Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Beschreibe jene Gerade im Plan, längs der die Straße durch die Punkte P, A und B verläuft, durch eine Gleichung.

Der zwischen Flussufer und Straße gelegene Winkel wird mit α bezeichnet. Berechne α, gib das Ergebnis im Gradmaß an, runde dabei auf zwei Dezimalen.

(b) Eine Person argumentiert: "'Die beiden Dreiecke PBQ und ABO weisen einen gleichen Winkel (nämlich α) auf und das Verhältnis der beiden 'Katheten' ist gleich (nämlich $4 : 8 = 2 : 4$). Somit muss das Dreieck ABO ähnlich dem Dreieck PBQ sein. Folglich ist auch das Dreieck ABO rechtwinklig, woraus wiederum geschlossen werden kann, dass A genau südlich von O liegt und sich für die abzulösende Fläche $(4 \cdot 5\,\text{m} \cdot 2 \cdot \text{m}) \cdot 0{,}5 = 100\,\text{m}^2$ ergibt."'

Dies widerspricht aber den Tatsachen, denn in der Realität ist die abzulösende Fläche deutlich geringer und der Punkt A liegt eindeutig - wie im Plan angedeutet - in südöstlicher Richtung von O!

Kläre diesen Irrtum auf und ermittle die tatsächliche Position von A im Plan sowie die Größe der tatsächlich abzulösenden Fläche.

(c) $\boxed{\text{A}}$ Der Kurvgenbogen zwischen B und C kann durch eine Polynomfunktion f modelliert werden. Erläutere, welche Annahme über den Grad von f aufgrund der vorliegenden Information zweckmäßig erscheint.

Tatsächlich stellt sich heraus, dass bereits eine Funktion zweiten Grades alle zu berücksichtigenden Bedingungen erfüllt. Begründe die Richtigkeit dieses Sachverhalts und gib die Gleichung der Funktion f an.

Lösungserwartung:

(a) $\overrightarrow{PB} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow g : X = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow g : x - 2y = 4$

Für den Winkel α zwischen Straße und Fluss gilt: $\tan(\alpha) = \frac{4}{8} \Rightarrow \alpha = 26{,}57°$

(b) Gemäß der Angabe gilt im Dreieck ABO im Sinne des Sinussatzes:
$\frac{2}{\sin(26{,}57°)} = \frac{4}{\sin(\beta)} \Rightarrow \sin(\beta) = 0{,}895$
Unter Berücksichtigung der Definition des Sinus im Einheitskreis gibt es für β zwei Lösungen: $\beta_1 = 63{,}43°$ und $\beta_2 = 116{,}57°$.

Da der Punkt A von O aus in südöstlicher Richtung liegt, muss der Winkel $\beta_1 = 180° - \beta$ berechnet werden: $\beta = 90° - \alpha = 63{,}43° \Rightarrow \beta_1 = 116{,}57°$, $\gamma = \measuredangle A_1OB = 180° - \alpha - \beta_1 = 36{,}87°$

Die Fläche des Dreiecks A_1BO kann mithilfe der trigonometrischen Flächenformel für ein Dreieck ermittelt werden: $A = \frac{a \cdot b}{2} \cdot \sin(\gamma) = 60\,\text{m}^2$

Für die Koordinaten des Punktes A gilt: $x = 2 \cdot \cos(36{,}87°) = 1{,}6$ und $y = -2\sin(36{,}87°) = -1{,}2 \Rightarrow A = (1{,}6| - 1{,}2)$

(c) Der Graph der gesuchten Polynomfunktion f verläuft durch den Punkt $B = (4|0)$ und hat an der Stelle $x = 4$ die Tangentensteigung $\frac{1}{2}$. Weiters verläuft er durch den Punkt $C = (8|1)$ und hat hier eine waagrechte Tangente. Für diese vier Bedingungen scheint ein Ansatz der Form $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ zweckmäßig.

Sollte sich herausstellen, dass bereits eine Funktion zweiten Grades alle Bedingungen erfüllt, so muss der Koeffizient a den Wert 0 annehmen, also $f(x) = b \cdot x^2 + c \cdot x + d$.

$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d,\ f'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x^2 + c$

$$\begin{array}{lrcl} f(4) = 0: & 64a + 16b + 4c + d & = & 0 \\ f(8) = 1: & 512a + 64b + 8c + d & = & 1 \\ f'(4) = \frac{1}{2}: & 48a + 8b + c & = & \frac{1}{2} \\ f'(8) = 0: & 192a + 16b + c & = & 0 \end{array}$$

$a = 0, b = -\frac{1}{16}, c = 1, d = -3 \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{16}x^2 + x - 3$

1119 - K7 - DWV - WS 3.3, WS 3.2, WS 1.1, WS 1.3, FA 1.7, FA 1.9, AG-L 4.3 - Kugelstoßen - Dimensionen Mathematik Schularbeiten Trainer 7

54. Eine Kugelstoßerin hat im Laufe des letzten Jahres vier (unterschiedlich lange) Trainingslager absolviert und dabei jeweils auch mehrere Versuche unternommen, bei denen die Stoßweite (gerundet auf dm genau) ermittelt wurde. ____/3

Die folgende Tabelle informiert über das jeweilige arithmetische Mittel aller beim betreffenden Trainingslager absolvierten Würfe, die Anzahl der gemessenen Versuche sowie die Anzahl jener Versuche, bei denen die erzielte Weite über 15 m liegt.

Trainingslager	Anzahl der protokollierten Versuche	Arithmetisches Mittel	Anzahl der Würfe über 15 m
Nr. 1	35	$\overline{x}(1) = 13{,}9$	6
Nr. 2	24	$\overline{x}(2) = 14{,}6$	5
Nr. 3	12	$\overline{x}(3) = 14{,}9$	5
Nr. 4	7	$\overline{x}(1) = 15{,}1$	4

Aufgabenstellung:

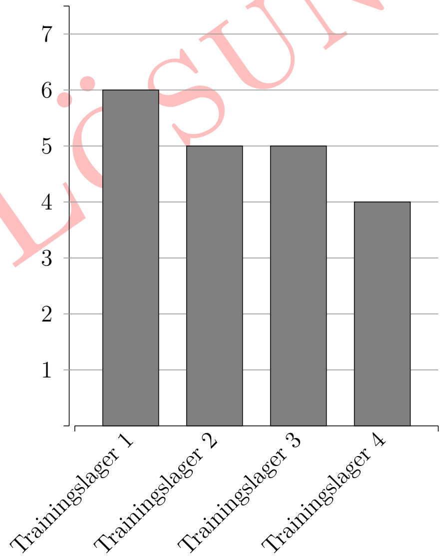
(a) Die Athletin geht davon aus, dass die relative Häufigkeit jener Versuche während des Trainingslagers, bei denen die Stoßweite über 15 m liegt, der Wahrscheinlichkeit dafür entspricht, dass sie bei einem unmittelbar auf das vierte Trainingslager folgenden Wettkampf bei einem Versuch die 15-m-Marke übertrifft.

Erläutere, inwieweit diese Annahme der Athletin unter Umständen problematisch ist.

Berechne unter der genannten Annahme die Wahrscheinlichkeit, dass die Athletin bei diesem Wettkampf während der ersten drei Versuche mindestens einmal die 15-m-Marke übertrifft.

(b) Der Trainer einer Konkurrentin veranschaulicht die Entwicklung der Anzahl jener Würfe im Verlauf der vier Trainingslager, bei denen die Stoßweite der Athletin über 15 m liegt, durch das abgebildete Säulendiagramm. Erläutere, warum diese Grafik tatsächliche Leistungsentwicklung nicht objektiv beschreibt. Erstelle eine besser geeignete Darstellung.

Anzahl dere Versuche mit einer Weite über 15 m



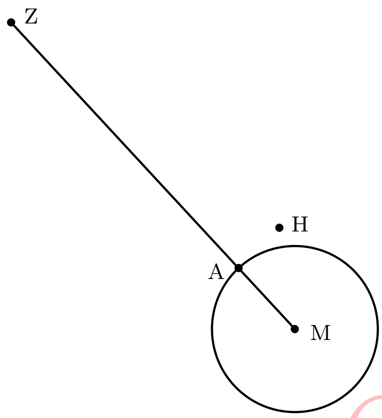
(c) Erläutere, warum die zeitliche Entwicklung der in der Tabelle angeführten arithmetischen Mittel im Verlauf der Trainingslager weder durch ein lineares, noch durch ein exponentielles Modell angemessen beschrieben werden kann.

Gib einen Funktionstyp an, der für die Beschreibung der Abhängigkeit $n \mapsto \overline{x}(n)$ (n = Nummer des Trainingslagers) besser geeignet ist. Begründe deine Wahl.

(d) Betrachte die (nicht maßstabsgetreue) Abbildung unten.

Der Kugelstoß erfolgt aus einem Kreis mit einem Durchmesser von 2,13 m. Als Stoßweite wird die Länge der Strecke AZ festgehalten, wobei die Punkte M, A und Z auf einer Geraden liegen. Angenommen, bei einem konkreten Versuch verlässt die Kugel die Hand im Punkt H, wobei gilt: $MH = 1{,}24\,\text{m}$, $\measuredangle HMA = 18°$.

Berechne die Differenz zwischen der "‘tatsächlichen Stoßweite HZ"’ und der "‘gemessenen Stoßweite"’ AZ, wenn $AZ = 10{,}2\,\text{m}$ gilt.



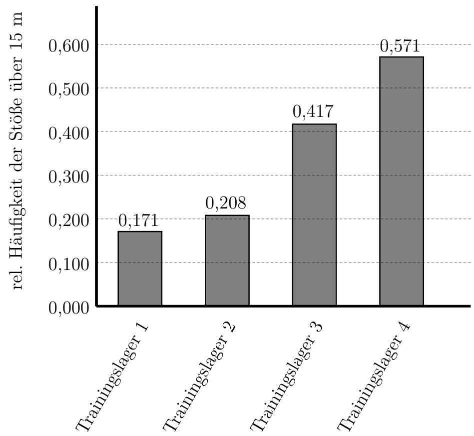
Lösungserwartung:

(a) Prinzipiell stellt eine relative Häufigkeit immer nur einen Schätzwert für eine "‘theoretische"’ Wahrscheinlichkeit dar. Die Annahme der Athletin ist insofern problematisch, da es viele Faktoren gibt, die die Ausgangssituation verändern können. Tagesform, Verletzungen, Motivation, Zuseher, Wichtigkeit des Wettkampfes und Nervosität sind nur einige Beispiele dafür.

Beträgt die Wahrscheinlichkeit für einen Stoß über 15 m tatsächlich $\frac{4}{7}$, so lautet die Wahrscheinlichkeit, dass die Athletin bei diesem Wettkampf während der ersten drei Versuche mindestens einmal die 15-m-Marke übertrifft:
$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{3}{7}\right)^3 \approx 0{,}921$

Der Zufallsvariable X ordnet dabei jeder Versuchsreihe von 3 Stößen die Anzahl jener Versuche zu, bei denen die 15-m-Marke übertroffen wird.

(b) Die Grafik stellt nur die absoluten Häufigkeiten der Stöße über 15 m dar, ohne zu zeigen, wie viele Versuche dafür benötigt wurden. Dies wäre nur sinnvoll, wenn es in jedem Trainingslager gleich viele Versuche gegeben hätte. Eine Darstellung der relativen Häufigkeiten spiegelt die Leistungsentwicklung der Athletin besser wider.



(c) Eine konstante Verbesserung im Sinne der Steigung einer linearen FUnktion, ebenso ständig ansteigende Verbesserungen der Leistung einer Athletin sind nicht realistisch.

Es bieten sich eher folgende Funktionstypen für die Abhängigkeit n von $\overline{x}(n)$ an: Logarithmusfunktion oder Wurzelfunktion bzw. Funktionen mit asymptotischem Verhalten. (Beachte: Mit zunehmenden x-Werten werden die momentanen Änderungsraten kleiner.)

(d) $MZ = MA + AZ = 1{,}065\,m + 10{,}2\,m = 11{,}265\,m$, $MH = 1{,}24\,m$, $\measuredangle HMA = 18°$

Vom Dreieck MHZ kennt man somit die Länge zweier Seiten und den eingeschlossenen Winkel.

$HZ^2 = MH^2 + MZ^2 - 2 \cdot MH \cdot MZ \cdot \cos(\measuredangle HMA)$ (Cosinussatz)

$HZ^2 = 1{,}24^2 + 11{,}265^2 - s \cdot 2{,}14 \cdot 11{,}265 \cdot \cos(18^{c}irc) \Rightarrow HZ \approx 10{,}1\,m$

Die Differenz zwischen der "'tatsächlichen Stoßweite HZ"' umd der "'gemessenen Stoßweite"' beträgt ca. 1 dm.

1130 - K7 - DR, RF - Gartenpflege - AG 2.1, FA 1.4, AN 1.2, AN 1.3, FA 1.7, FA 4.3 - Dimensionen Mathematik 7 Schularbeitentrainer

55. In einer Gartenpflege-Firma machen sich die Mitarbeiter/-innen Gedanken darüber, wie oft der Rasen eines bestimmten Grundstücks während einer Saison gemäht werden soll. Den Überlegungen liegen folgende Beobachtungen bzw. Annahmen zugrunde: ____/6

Während einer Saison wächst der Rasen insgesamt (ca.) 80 cm.

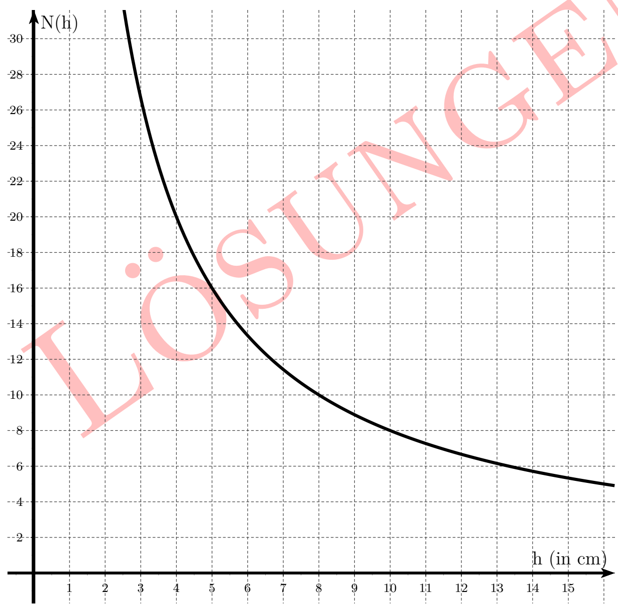
Es kann davon ausgegangen werden, dass der Rasen bei jeweils gleicher Grashöhe gemäht wird. Je höher das Grad ist, desto länger dauert ein Mähvorgang. Es wird angenommen, dass die Abhängigkeit der für einen Mähvorgang benötigten Zeit t (in Minuten) von der aktuellen Grashöhe h (in cm) näherungsweise durch die Funktion f mit der Gleichung $t = f(h) = 0{,}5 \cdot h^2 + 30$ beschrieben wird.

Die Variable N gibt an, wie oft der Rasen während einer Saison gemäht wird.

Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Beschreibe die Abhängigkeit $N(h)$ mithilfe einer Formel.

Einer Person veranschaulicht die Abhängigkeit $N(h)$ für $8 \leq h \leq 12$ wie im Diagramm unten dargestellt. Erläutere inwieweit diese Darstellung den tatsächlichen Sachverhalt nicht korrekt beschreibt, und veranschauliche exemplarisch welche Korrekturen am Diagramm vorzunehmen sind.



(b) T bezeichnet die insgesamt während einer Saison für das Mähen aufgewendete Zeit. Diese hängt davon ab, bei welcher (konstanten) Grashöhe h der Rasen jeweils gemäht wird. Beschreibe die Abhängigkeit $T(h)$ mithilfe einer Formel.

Um eine bestimmte Fragestellung zu beantworten, läst eine Person die Gleichung $T'(0) = 0$ und erhält als Lösung den Wert h_1. Berechne h_1 und interpretiere die Lösung im Kontext.

Eine andere Person schlägt für die entsprechende Fragestellung einen anderen Lösungsweg vor, der über die abgebildete Tabelle führt, und erhält als Lösung den Wert h_2.

N	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$h(N)$	40,0	26,7	20,0	16,0	13,3	11,4	10,0	8,9	8,0	7,3	6,7	6,2	5,7
$T(h)$	1660	1157	920	790	713	667	640	626	620	621	627	636	649

Ergänze die Tabelle (mithilfe eines Tabellenkalkulations-Programms), bestimme h_2 und nimm einen bewertenden Vergleich der beiden Lösungen h_1 bzw. h_2 vor.

(c) Erläutere, inwieweit die eingangs angeführte Gleichung $t = f(h) = 0{,}5 \cdot h^2 + 30$ den tatsächlichen Sachverhalt nur bedingt zutreffend beschreiben kann.

Angenommen, die Person macht folgende Beobachtungen: Bei einer Grashöhe von 11 cm benötigt sie pro Mähvorgang zwischen 3 und 4 Minuten länger als bei einer Grashöhe von 10 cm. Bei einer Grashöhe von 12 cm nimmt der Mähvorgang hingegen zwischen 5 und 6 Minuten mehr Zeit in Anspruch als bei einer Grashöhe von 10 cm.

Erläutere, warum diese Beobachtung im Widerspruch zur Annahme von $t = 0{,}5 \cdot h^2 + 30$ stehen.

(a) Lösungserwartung:

$N(h) = \frac{80}{h}$

Wird der Rasen immer in gleicher Höhe gemäht, so gilt folgende Beziehung: $80 = h \cdot N(h)$, wobei $N(h)$ nur natürliche Zahlenwerte annehmen darf.

Für das Höhenintervall $[8; 12]$ erhält man folgende gültige Zahlenpaare:

h (in cm)	8	8,8	10	11,4
$N(h)$	10	9	8	7

Der Graph der Funktion ist also keine zusammenhängende Kurve, sondern besteht aus einzelnen Punkten $(h \mid N(h))$, mit $N(h) \in \mathbb{N}$.

(b) Lösungserwartung:

$T(h) = \frac{80}{h} \cdot (0{,}5h^2 + 30) = 40h + \frac{2400}{h} = 40h + 2400^{-1}$

[(Anzahl der Mähvorgänge)·(benötigte Zeit pro Mähvorgang)]

$T'(h) = 40 - 2400 \cdot h^{-2} = 40 - \frac{2400}{h^2}$

$T'(h) = 0$

$40 - \frac{2400}{h^2} = 0 \Rightarrow h^2 = 60$ bzw. $h_1 = \pm 7{,}75$

Wird der Rasen immer bei einer Höhe von $h_1 = 7{,}75\,\text{cm}$ gemäht, so ist die insgesamt während einer Saison aufgewendete Zeit minimal. $T(7{,}75) \approx 620\,\text{min}$

Tabelle: siehe oben

Aus der Tabelle geht hervor, dass bei einer Rasenhöhe von $h_2 = 8\,\text{cm}$ und 10 Mähvorgängen die aufgewendete Gesamtzeit einem minimalen Wert annimmt.

Der Unterschied der beiden Lösungen h_1 und h_2 ergibt sich daraus, dass in der Berechnung von h_1 keine Rücksicht darauf genommen wird, dass die Anzahl der Mähvorgänge ganzzahlig sein muss. Insofern ist der zweite Lösungsansatz vorzuziehen.

(c) **Lösungserwartung:**

Die Funktion als Modell funktioniert nicht unbegrenzt. Die nach der Funktion für einen Mähvorgang benötigte Zeit wird ab einer gewissen Rasenhöhe unrealistisch. So würde z.B. der Mähvorgang bei einer Rasenhöhe von 30 cm 6 Stunden dauern.

Die Beobachtungen stehen im Widerspruch zur Annahme von $t = 0{,}5 \cdot h^2 + 30$, weil bei diesem Funktionstyp die Differenzenquotienten $\frac{\Delta f}{\Delta h}[h; h+1]$ mit größer werdendem h ansteigen. Anders ausgedrückt müsste der zeitliche Mehraufwand pro cm Rasenhöhe mit der Rasenhöhe ansteigen.

1133 - K7 - DR, RF - Temperaturveränderung in einem Treibhaus - FA 1.4, AN 3.3, FA 2.1, FA 2.2 - Dimensionen Mathematik 7 Schularbeitentrainer

56. Im Rahmen eines biologischen Experiment wird die Temperatur T in einem Treibhaus im Laufe von 10 Stunden gezielt verändert. Die Abhängigkeit der Temperatur von der Zeit t kann modellhaft durch eine Funktion T mit der Gleichung $T(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$ beschrieben werden: $T(t)$ wird dabei in °C angegeben, die Zeit t in Stunden. Die Zeitmessung startet am Beginn des Experiments. ____/6

Über die Entwicklung der Temperatur liegen nachfolgende Informationen vor:

- Die momentane Änderungsrate der Temperatur am Beginn beträgt 4 °C/Stunde.

- Innerhalb der ersten acht Stunden steigt die Temperatur, anschließend fällt sie.
- Am Ende der 10 Stunden beträgt die Temperatur 35 °C.

Aufgabenstellung:

(a) Einige der nachfolgend angeführten Bedingungen stehen im Widerspruch zur Angabe. Erläutere, um welche Bedingungen es sich handelt, und begründe deine Auswahl stichhaltig.

$T''(3) > 0$	$T'(8) = 0$	$T'(9) > 0$	$T''(7) < 0$	$T(10) = 35$
$T''(8) = 0$	$T'(5) > 0$	$T'(6) = -T'(10)$	$T(8) = 32$	$T'(0) = 4$

(b) Nicht alle der zutreffenden Bedingungen eigenen sich bei beliebiger Kombination für die Erstellung eines Gleichungssystems zur Berechnung der Parameter a, b und c. Gib drei zwar zutreffende Bedingungen an, die sich aber - zu einem System zusammengefasst - nicht für eine eindeutige Bestimmung der Parameter eigenen, und interpretiere den Sachverhalt.

Wähle anschließend eine geeignete Kombination von Bedingungen und berechne die Werte der Parameter.

(c) Die Temperatur T beeinflusst die Luftfeuchtigkeit L im Treibhaus. Nimm modellhaft an, dass unter den gegebenen Bedingungen eine Erhöhung der Temperatur um 1 °C eine Erhöhung der Luftfeuchtigkeit um 0,5 g/m^3 bewirkt. Bei einer Temperatur von 10 °C beträgt die Luftfeuchtigkeit 6 g/m^3.

Weise durch eine Rechnung nach, dass unter den genannten Annahmen die Höhe der Luftfeuchtigkeit in Abhängigkeit von der Zeit durch nachfolgende Funktionsgleichung beschrieben werden kann:

$L(t) = -\frac{1}{8}t^2 + 2t + 11$

Berechne, wie hoch die maximale Luftfeuchtigkeit im Rahmen des Experiments ist und bei welcher Temperatur t_1 diese maximale Luftfeuchtigkeit auftritt.

Berechne den Wert $T'(t_1)$ und erläutere, warum das Ergebnis auch ohne Verwendung der Funktionsgleichung der Ableitungsfunktion T' angegeben werden kann.

(a) **Lösungserwartung:**

$T''(3) > 0$	Falsch! Der Graph der Funktion T ist eine nach unten offene Parabel und überall rechtsgekrümmt, d.h. $T''(t) < 0$, für alle t.
$T''(8) = 0$	Falsch! s.o.
$T'(8) = 0$	Richtig! Da die Temperatur innerhalb der ersten acht Stunden steigt und anschließend fällt, liegt an der Stelle $t = 8$ eine lokale Maximumstelle vor.
$T'(5) > 0$	Richtig! Die Temperatur steigt innerhalb der ersten 8 Stunden, d.h., zu jedem Zeitpunkt in diesem Intervall liegt eine positive momentane Änderungsrate vor.
$T'(9) > 0$	Falsch! Da die Temperatur nach acht Stunden zu sinken beginnt, liegt für jeden Zeitpunkt $t > 8$ eine negative Änderungsrate vor.
$T'(6) = -T'(10)$	Richtig! Der Graph der Funktion T verläuft symmetrisch zur Geraden $x = 8$ und steigt an der Stelle $t = 6$ im selben Maße, wie er an der Stelle $t = 10$ fällt.
$T''(7) < 0$	Richtig! Der Graph der Funktion T ist überall rechtsgekrümmt.
$T(8) = 32$	Falsch! Da die Temperatur nach 8 Stunden zu sinken beginnt und nach 10 Stunden 35 °C beträgt, kann sie 2 Stunden vorher nicht 32 °C betragen.
$T(10) = 35$	Richtig! Laut Angabe beträgt die Temperatur am Ende der 10. Stunde 35 °C.
$T'(0) = 4$	Richtig! Laut Angabe beträgt die momentane Änderungsrate der Temperatur am Beginn 4 °C/Stunde.

(b) **Lösungserwartung:**

$T(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$

$T'(t) = 2a \cdot t + b$

Wählt man z.B. die 3 richtigen Bedingungen aus,

$$\begin{array}{llll}
\text{I.} & T(10) = 35: & 35 = 100a + 10b + c & \\
\text{II.} & T'(8) = 0: & 0 = 16a + b & \Rightarrow b = -16a \\
\text{III.} & T'(6) = -T'(10): & 12a + b = -20a - b & \Rightarrow 32a = -2b \text{ bzw. } b = -16a
\end{array}$$

so können daraus die Parameter a, b und c nicht eindeutig bestimmt werden.

Folgende Kombination führt zu einer eindeutigen Festlegung von a, b und c:

$$\begin{array}{lll}
\text{I:} & T'(0) = 4: & 4 = b \\
\text{II:} & T'(8) = 0: & 0 = 16a + b \\
\text{III:} & T(10) = 35: & 35 = 100a + 10b + c
\end{array}$$

$a = -\frac{1}{4}, b = 4, c = 20$

$T(t) = -\frac{1}{4}t^2 + 4t + 20$

(c) **Lösungserwartung:**

Die Funktion $L(T)$ ist eine lineare Funktion der Form $L(T) = k \cdot T + d$ mit einer Steigung von $k = 0{,}5\,\text{g/m}^3$ und $L(10) = 6\,\text{g/m}^3$.

$L(T) = 0{,}5 \cdot T + d$

$6 = 0{,}5 \cdot 10 + d \Rightarrow d = 1$

$L(T) = 0{,}5 \cdot T + 1$
$L(T) = 0{,}5 \cdot \left(-\frac{1}{4}t^2 + 4t + 20\right) + 1 = -\frac{1}{8}t^2 + 2t + 11$

Für den Zeitpunkt der maximalen Luftfeuchtigkeit muss gelten $L'(t) = 0$

$L'(t) = -\frac{1}{4}t + 2$

$0 = -\frac{1}{4}t + 2$

$t_1 = 8, T(8) = 36\,[°\text{C}]$

Bei einer Temperatur von 36 °C nimmt die Luftfeuchtigkeit mit $L(8) = 19\text{g/m}^3$ einen maximalen Wert an.

Da die Luftfeuchtigkeit mit steigender Temperatur zunimmt, muss ein maximaler Wert der Luftfeuchtigkeit zum Zeitpunkt der maximalen Temperatur auftreten.

1135 - K7 - DR, RF - Modellierung eines Firmenumsatzes - FA 5.1, FA 2.1, FA 2.4, FA 5.2, FA 2.2, FA 1.7, AN 1.2 - Dimensionen Mathematik 7 Schularbeitentrainer

57. Der Umsatz U in einer Firma betrug vor vier Jahren 5,1 Millionen Euro, vor einem Jahr 5,7 Millionen Euro. Zur Beschreibung der Umsatzentwicklung werden zwei Modelle verwendet: ____/8

Modell 1: Es wird angenommen, dass der Umsatz U pro Jahr um den gleichen Eurobetrag gesteigert werden kann. Die entsprechende Funktionsgleichung lautet: $U = f(t)$, (t in Jahren, beginnend vor vier Jahren).

Modell 2: Es wird angenommen, dass der Umsatz U pro Jahr um den gleichen Prozentsatz gesteigert werden kann. Die entsprechende Funktionsgleichung lautet: $U = g(t)$, (t in Jahren, beginnend vor vier Jahren).

Aufgabenstellung:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Bestimme die Funktionsgleichung $U = f(t)$ und $U = g(t)$.

(b) Berechne, wann im Sinne der beiden Modelle jeweils ein Umsatz von 6 Millionen Euro zu erwarten ist. Diskutiere Fragen der Angemessenheit der beiden Modelle.

(c) Angenommen, für dieses Jahr zeichnet sich ein Gewinn von 5,9 Millionen Euro ab.

"'*Anhand des insgesamt vorliegenden Datenmaterials kann eindeutig entschieden werden, welches der beiden Modelle die Umsatzentwicklung besser beschreibt.*"'

Erläutere, inwieweit du dieser Aussage zu- bzw. nicht zustimmst. Begründe deine Antwort.

(d) Überprüfe den Wahrheitsgehalt nachfolgender Aussage: "'*Beim Modell $U = g(t)$ ist die Wachstumsgeschwindigkeit des Umsatzes stets größer als beim Modell $U = f(t)$.*"' Begründe deine Antwort mithilfe einer Rechnung.

(a) **Lösungserwartung:**

$U(0) = 5{,}1$ und $U(3) = 5{,}7$:

Modell 1: Die Funktion f wird durch eine lineare Funktion der Form $f(t) = k \cdot t + d$ dargestellt, wobei der jährliche Zuwachs $k = \frac{5{,}7-5{,}1}{3} = 0{,}2$ lautet und der Anfangswert bei $d = 5{,}1$ liegt.

$f(t) = 0{,}2 \cdot t + 5{,}1$

Modell 2: Die Funktion g ist eine Exponentialfunktion der Form $g(t) = a \cdot b^t$. Der Anfangswert liegt ebenso bei $a = 5{,}1$, der Wachstumsfaktor beträgt $b = \sqrt[3]{\frac{5{,}7}{5{,}1}} = 1{,}03777$.

$g(t) = 5{,}1 \cdot 1{,}03777^t$

(b) **Lösungserwartung:**

Modell 1: $6 = 0{,}2 \cdot t + 5{,}1 \Rightarrow t = 4{,}5$

Bei diesem Modell wird der Umsatz in einem halben Jahr 6 Millionen Euro betragen.

Modell 2: $6 = 5{,}1 \cdot 1{,}03777^t$

$\frac{6}{5{,}1} = 1{,}03777^t$

$\ln\left(\frac{6}{5{,}1}\right) = t \cdot \ln(1{,}03777) \Rightarrow t = 4{,}38$

Nach Modell 2 wird der Umsatz von 6 Millionen Euro schon nach 0,38 Jahren ($\approx 4{,}5$ Monaten) erreicht.

Da nur eine sehr geringe Menge von Daten vorhanden ist, kann man nicht mit Sicherheit festlegen, ob ein lineares oder ein exponentielles Wachstum des Umsatzes vorliegt.

Grenzen beider Modelle sind darin zu sehen, dass beide ein unbegrenztes Anwachsen des Umsatzes beschreiben, $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty} g(t) = \infty$.
Beide Modelle können die Entwicklung des Umsatzes bestenfalls zeitlich begrenzt angemessen beschreiben.

(c) **Lösungserwartung:**

$f(4) = 0{,}2 \cdot 4 + 5{,}1 = 5{,}9$
$g(4) = 5{,}1 \cdot 1{,}03777^4 = 5{,}915$
Auch wenn durch das Modell der linearen Funktion der Wert 5,9 genau getroffen wird, kann man nicht eindeutig festlegen, welches der beiden Modelle die Umsatzentwicklung besser beschreibt. Es handelt sich dabei um eine Momentaufnahme und aufgrund der geringen Datenmenge kann man nur schwer Prognosen abgeben.

(d) **Lösungserwartung:**

$f(t) = 0{,}2 \cdot t + 5{,}1 \Rightarrow f'(t) = 0{,}2$
$g(t) = 5{,}1 \cdot 1{,}03777^t \Rightarrow g'(t) = 5{,}1 \cdot 1{,}03777^t \cdot \ln(1{,}03777)$
Die Wachstumsgeschwindigkeit (momentane Änderungsrate, Tangentensteigung) beträgt beim Modell stets 0,2, während sie beim Modell 2 zu Beginn einen kleineren Wert ($g'(0) \approx 0{,}19$) und nach 3 Jahren einen größeren Wert ($g'(3) \approx 0{,}21$) annimmt.

1136 - K7 - RF - Windkraft - FA 1.7, FA 1.9, FA 6.4, FA 6.5, FA 6.2, FA 6.3, AG 4.1 - Dimensionen Mathematik 7 Schularbeitentrainer

58. *Einflügler* sind Windkraftanlagen mit nur einem einzigen Rotorblatt. Da sie im Vergleich mit Zwei- bzw. Dreiblattrotoren eine größere Geräuschbelastung verursachen, werden sie vor allem im Meer (oder in großen Seen) auf schwimmenden ____/8

Fundamenten errichtet. Im Bild rechts sind die Spitze S des Rotorblatts und die Nabe N eines bestimmten Einflüglers zu erkennen. Die Nabe verbindet das Rotorblatt mit dem Rest der Windkraftanlage, bei der Rotation beschreibt S einen Kreis mit dem Mittelpunkt N. Im betrachteten Fall kann angenommen werden, dass die Entfernung $NS = 25\,\text{m}$ beträgt. Die Nabe befindet sich (ca.) 45 m über dem Meeresspiegel.

Während eines 5-minütigen Beobachtungszeitraums bläst ein Wind mit konstanter, nicht zu großer Stärke (ab einer gewissen Windstärke wird die Anlage abgeschaltet und das Rotorblatt "‘aus dem Wind gedreht"’, um Beschädigungen zu vermeiden). Das Rotorblatt weist bei der gegebenen Windstärke eine konstante Rotationsgeschwindigkeit von 12 Umdrehungen pro Minute auf. Die Funktion h beschreibt während dieses Zeitintervalls die Höhe $h(t)$ der Spitze S über dem Meeresspiegel in Abhängigkeit von der Zeit t. Die jeweilige Höhe $h(t)$ wird dabei in Meter gemessen, die Zeit t in Sekunden. Am Beginn des Zeitintervalls (also zum Zeitpunkt $t = 0$) befindet sich die Spitze senkrecht über der Nabe.

Aufgabenstellung:

(a) Eine Person schlägt vor, die Funktion h als Polynomfunktion zweiten Grades anzusetzen und begründet ihren Vorschlag wie folgt: *"‘Am Beginn befindet sich S in großer Höhe, diese nimmt bis zu einem Minimum ab, bevor sie dann wieder monoton zunimmt. Am Ende einer Rotation weist sie wieder die gleiche Höhe wie am Anfang auf. Dieser Ablauf kann grafisch mithilfe einer nach oben offenen Parabel modelliert werden.*

Begründe, warum diese Sichtweise den Sachverhalt nicht zutreffend wiedergibt. Schlage einen angemesseneren Funktionstyp für h vor, begründe deine Wahl.

(b) Beschreibe die Funktion h gemäß des vorgeschlagenen Funktionstyps mithilfe einer Gleichung und skizziere den Graphen der Funktion h für einen Zeitintervall, in dem das Rotorblatt eine Umdrehung vollzieht.

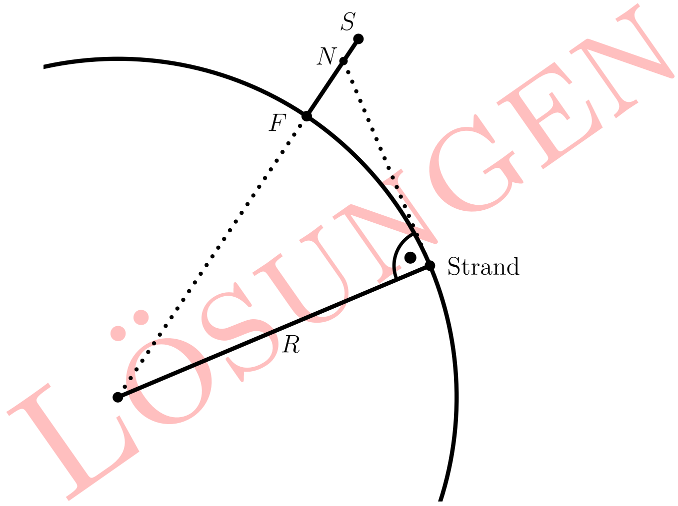
Berechne die Höhe der Spitze S über dem Meeresniveau, nachdem 160 Sekunden ab dem Beginn des Beobachtungszeitraums vergangen sind.

(c) Um die Funktion h an die Situation mit unterschiedlichen Windstärken anpassen zu können, muss eine in der soeben bestimmten Gleichung von h vorkommende Konstante als veränderbarer Parameter vorgesehen werden.

Beschreibe die Monotoniebeziehung zwischen diesem Parameter und der Windstärke. Erläutere, welche Annahmen du deinen Überlegungen zugrunde legen musst.

(d) Die Anlage ist so weit vom Strand entfernt positioniert, dass sie aufgrund der Erdkrümmung vom Stand aus (in liegender Position) genau ab der Nabenhöhe sichtbar ist.

Berechne unter Bezugnahme auf die abgebildete (nicht maßstabsgetreue) Skizze die Entfernung zwischen dem Strand und dem Fußpunkt F der Anlage längs der Wasseroberfläche (Erdradius $R = 6\,371\,\text{km}$).



(a) **Lösungserwartung:**

Die Spitze S benötigt für eine Umdrehung 5 Sekunden. Die Höhe des Punktes S nimmt zuerst langsam, dann immer schneller ab, wobei sich nach 1,25 s (nach 90°) die Höhe am schnellsten ändert, um nachher wieder langsamer abzunehmen. Ab 2,5 s (nach 180°) nimmt die Höhe in gleicher Weise wieder zu um nach 5 s wieder den maximalen Wert anzunehmen.

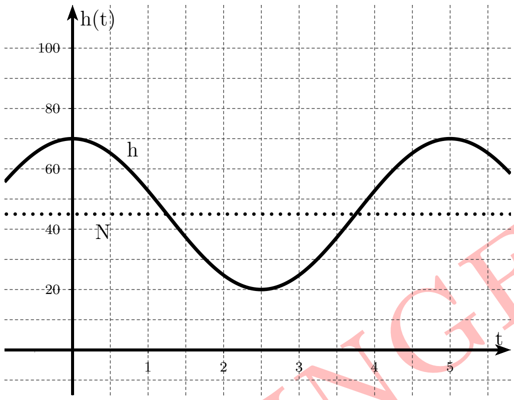
Diese Veränderung der Höhe wird am besten durch eine bestimmte Sinus- oder Cosinusfunktion beschrieben. Vergleiche die Bewegung der Spitze S mit der Bewegung eines Punktes $P(\cos(x) \mid \sin(x))$ auf dem Einheitskreis. Dieser Vorgang wiederholt sich periodisch!

(b) **Lösungserwartung:**

$h(t) = 25 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{5} \cdot t\right) + 45$
bzw.
$h(t) = 25 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{5} t + \frac{\pi}{2}\right) + 45$
Beachte: $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$h(160) = 70\,\text{m}$

Da das Rotorblatt für eine Runde 5 Sekunden benötigt, d.h. die Spitze sich alle 5 Sekunden wieder in der Maximalhöhe von 70 m befindet, muss das auch nach 160 Sekunden der Fall sein.



(c) **Lösungserwartung:**

Eine Vergrößerung der Windstärke bewirkt eine schnellere Drehung der Rotorblätter, somit verkürzt sich das Intervall für eine volle Umdrehung. Für die Funktion h bedeutet dies eine Erhöhung der Frequenz.

Eine entsprechende Funktionsgleichung wird durch
$h(t) = 25 \cdot \cos\left[a \cdot \left(\frac{2\pi}{5} \cdot t\right)\right] + 45$ beschrieben.

Eine Vergrößerung der Windstärke bewirkt also eine entsprechende Vergrößerung des Parameters a. Bestimmte Werte von a setzen konstante Windstärken voraus.

(d) **Lösungserwartung:**

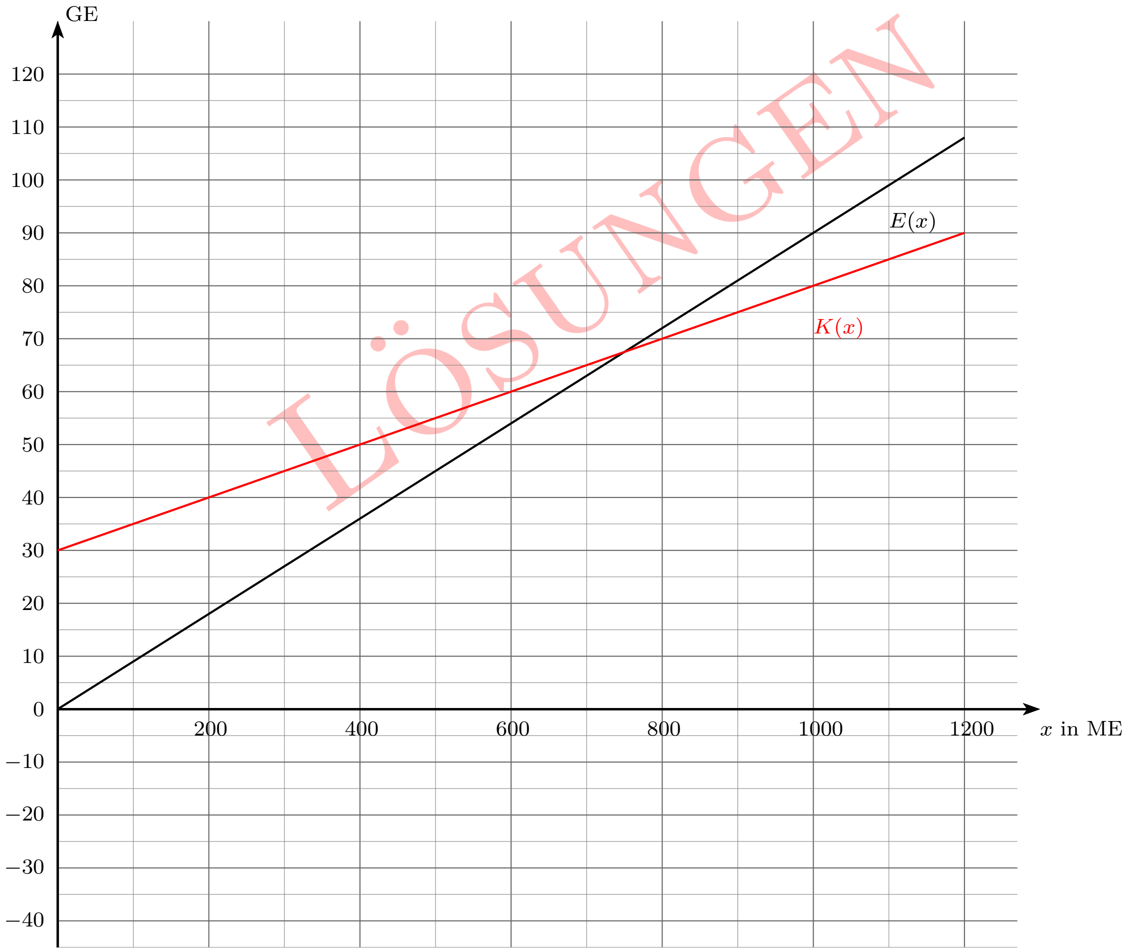
Für den in der Abbildung ersichtlichen Zentriwinkel α gilt:
$\cos(\alpha) = \frac{R}{R+0{,}045} = \frac{6\,371}{6\,371{,}045} \Rightarrow \alpha = 0{,}2153°$

Der zugehörige Bogen auf der Meeresoberfläche hat die Länge
$b = \frac{R \cdot \pi \cdot \alpha}{180} = \frac{6\,271 \cdot \pi \cdot 0{,}2153}{180} \approx 23{,}9\,\text{km}$

1146 - K5 - FA 2.1, FA 2.2, FA 2.3, FA 1.6 - Kunststoffproduktion - ChWe

59. Die Chemie-AG produziert einen Kunststoff. Über diese Produktion liegen folgende Informationen vor: Pro Monat kann eine Menge von maximal 1200 Mengeneinheiten (ME) produziert werden. Die Produktionskosten $K(x)$ in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x können durch eine lineare Funktion modelliert werden. ____/1

Die Erlösfunktion $E(x)$, die jeder verkauften Kunststoffmenge x (in ME) den Erlös $E(x)$ (0,09 Geldeinheiten GE/Stück) zuordnet, ist in der Abbildung veranschaulicht:



(a) Lineare Kostenfunktion

(i) Betrachte die unten angegebene Tabelle, die jeder Produktionsmenge die Produktionskosten zuordnet. (1P)

Produktionsmenge x in ME	200	500
Produktionskosten K(x) in GE	40	55

Gib eine lineare Funktion an, die das beschreibt!

(ii) Interpretiere k und d dieser Funktion im Sachzusammenhang. (2P)

(iii) Zeichne den Graphen der Funktion K in der obigen Abbildung ein. (1P.)

(b) Schnittpunkt von E und K

(i) Ermittle graphisch die Koordinaten des Schnittpunktes der Graphen der Funktionen E und K. (1P)

(ii) Interpretiere die Koordinaten des Schnittpunktes im Kontext. (1P)

Lösungserwartung:

(a) (i) $K: \ y = 0{,}05x + 30$

(ii) k: gibt die Produktionskosten pro Stück an.
d: Die Fixkosten bei einer Produktionsmenge von 0 betragen 30 GE.

(iii) siehe Abbildung

(b) (i) $S = (750 \mid 67{,}5)$

(ii) Ab einer Produktionsmenge von 750 Stück pro Monat macht die Chemie-AG Gewinn.

1147 - K5 - FA 2.1, FA 2.2, FA 2.3, FA 2.4, FA 2.5 - Züge - ChWe

60. Die folgende Abbildung zeigt die Entfernung s (in km) zweier Züge X und Y vom Bahnhof B in Abhängigkeit von der Zeit t (in Stunden). Beide Züge fahren mit konstanter Geschwindigkeit auf der selben Strecke und fahren um 08:30 Uhr weg. ____/8

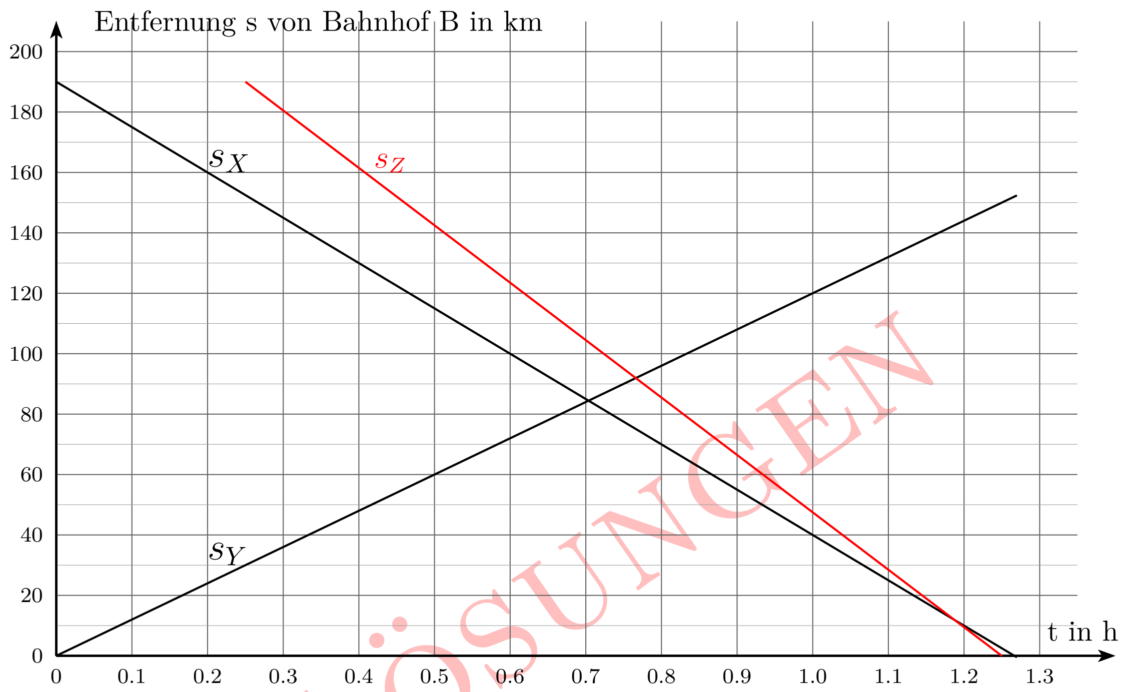
(a) Gib an, mit welcher Geschwindigkeit der Zug Y fährt (in km/h)! (1P)

(b) Gib die Funktionsgleichung für die Entfernung s_X des Zuges X vom Bahnhof B nach t Stunden an! (2P)

(c) Ermittle, um welche Uhrzeit die Züge X und Y einander begegnen! (1P)

(d) Bestimme die Entfernungen der beiden Züge von Bahnhof B um 09:00 Uhr! (2P)

(e) Ergänze in der Abbildung den Graphen der Funktion s_Z, die die Entfernung eines Zuges Z vom Bahnhof B nach t Stunden beschreibt, wenn Z um 08:45 Uhr vom selben Bahnhof wie X wegfährt und mit einer gleichbleibenden Geschwindigkeit von 190 km/h fährt. (2P)



Lösungserwartung:

(a) Der Zug fährt 120 km/h.

(b) $s_X: \ y = -150x + 190$

(c) $S = (0{,}7|84{,}44) \rightarrow$ Die beiden Züge treffen sich nach 42 min, also um 9:12.

(d) $E_X = (0{,}5|115)$ und $E_Y = (0{,}5|60) \rightarrow$ Um 9:00 ist Zug X 115 km und der Zug Y 60 km vom Bahnhof B entfernt

(e) siehe Abbildung

1148 - K5 - FA 1.4, FA 1.5, FA 1.6, FA 1.7 - Gewinnfunktion - ChWe

61. Ein Verkäufer analysiert seine Einnahmen und Ausgaben und beschreibt danach seinen Gewinn mit folgender Funktion: ____/10

$$G(p) = -50 \cdot p^2 + 8\,000 \cdot p - 140\,000$$

Dabei entspricht G dem Gesamtgewinn in €, der bei einem Stückpreis von p € erzielt wird. (Tipp: Zeichne die gegebene Funktion mit Geogebra!)

(a) Gib die abhängige und die unabhängige Größe an. (1P)

(b) Gib für den Definitionsbereich $D = [0; 160]$ die passende Wertemenge an. (1P)

(c) Bestimme den Gewinn, den der Verkäufer bei einem Stückpreis von 110 € erzielt. (1P)

(d) Gib an, bei welchem Stückpreis der Verkäufer den maximalen Gewinn erzielt. (1P)

(e) Welche Stückpreise liefern einen Gewinn von über 100 000 Euro? Gib ein Intervall an! (2P)

(f) Gib jene Stellen an, bei denen gilt $G(p) = 0$. Beschreibe die Lösungen im Kontext. (2P)

(g) Der Verkäufer legt 80 000 € seines Gewinns für ein Jahr auf ein Sparbuch, das mit p % verzinst wird. Anschließend hebt er 12 500 € ab. Nach einem weiteren Jahr hat er insgesamt 71 000 € auf dem Sparbuch. Stelle eine Gleichung auf, um den Sachverhalt zu beschreiben und berechne den jährlichen Zinssatz p %. (2P)

Lösungserwartung:

(a) abhängige Größe: G, unabhängige Größe: p

(b) $W = [-140\,000; 180\,000]$

(c) $G(110) = 135\,000$

(d) Bei einem Stückpreis von 80 € macht der Verkäufer den maximalen Gewinn.

(e) $x \in (40; 120)$

(f) $x_1 = 20$ und $x_2 = 140$; Bei diesen Stückpreisen macht der Verkäufer weder Gewinn noch Verlust.

(g) $(80\,000 \cdot p - 12\,500) \cdot p = 71\,000 \Rightarrow (p_1 = -0{,}87), p_2 = 1{,}02$. Der jährliche Zinssatz beträgt ca. 2 %
