Ising 模型上的 Glauber 动力链浅析

李骏驰
北京大学数学科学学院
指导教师: 陈大岳教授　　章复熹副教授

2009 年 6 月

摘　要

Ising 模型是统计力学中最具典型意义的模型，概率意义是有限图上的一个概率测度，而它在物理、化学、生物等许多领域中都有应用与代表性。Ising 模型的 Glauber 动态链指的是上面的一类随机过程（马氏链），相应的 Ising 测度是其上平稳分布。本文讨论的对象是有限完全图上的 Ising 模型，介绍了切割（cutoff）现象，和根据温度系数 β 不同得到的一些结果。本文把重点放在一些有用的引理及其证明上，作者认为其中的概率思想具有典型性，值得研读、体味。篇幅所限，本文没有给出最终结果的证明。感兴趣的读者可以参考文献 [4]。

关键词： Ising 模型，Glauber 动态链，磁化链，标准磁化量，切割（cutoff）现象

An Introduction to Ising Models and their Glauber Dynamics

Junchi Li
School of Mathematical Sciences, Peking University
Supervisor: Dayue Chen and Fuxi Zhang

Abstract

Ising model, which is a model of most typical use in Statistical Mechanics and a probability measure on finite graph in probabilistic sense, has many useful representing applications in physics, chemistry and biology. The Glauber Dynamics of Ising model is referred to as a type of stochastic processes (Markov chains to be exact) on it, with Ising measure the corresponding equilibrium one. This article focus on Ising model of finite and complete graphs, introducing the cutoff phenomenon and some results according to various temperature coefficient β. The article put our highlight on some useful lemmas and their proofs, and author believes the probabilistic thoughts are classical and worth careful reading and tasting. Limited by length, proofs of final results have not been provided. Interested readers could look up for [4] as a reference.

Key Words: Ising model, Glauber Dynamics, magnetization chain, normalized magnetization, cut-off phenomenon

1 Ising 模型及其上 Glauber 动态链

1.1 Ising 模型介绍

我们来考虑有限图 $G=(V,\mathcal{E})$ ，其中 V 表示顶点集，$\mathcal{E}$ 表示边集。状态空间 $\Omega=\{-1,1\}^V$ 被称作一个组态，并对于 $\sigma\in\Omega$ ，值 $\sigma(v)$ 被称为 v 的旋度值。定义组态 $\sigma\in\{-1,1\}^V$ 上的紧邻能量 $H(\sigma)$ 为

$$
\begin{aligned}
H(\sigma) &= -\frac{J}{2}\sum_{\substack{v,w\in V\\ v\sim w}}\sigma(v)\sigma(w)\\
&= -J\sum_{\{v,w\}=e\in\mathcal{E}}\sigma(v)\sigma(w)
\end{aligned}
$$

其中 $w\sim v$ 表示 $\{w,v\}\in\mathcal{E}$ 。这里我们认为粒子间相互作用力相同，参数 J 衡量了顶点间的相互作用力。

对于 $\beta\geq 0$, 图 G 上参数为 β 的 Ising 模型是 Ω 上的概率测度 μ :

$$
\mu(\sigma)=\frac{e^{-\beta H(\sigma)}}{Z(\beta)} \tag{1}
$$

其中 $Z(\beta)=\sum_{\sigma\in\Omega}e^{-\beta H(\sigma)}$ 是归一化常数。
参数 β 在物理中的含义是逆温度（温度的倒数），它度量了能量函数 H 于概率分布的影响。一个极端的情形是 $\beta=0$ ，即无穷大温度时，测度 μ 是 Ω 上面的离散均匀分布，且随机变量族 $\{\sigma(v)\}_{v\in V}$ 是独立的。

1.2 Ising 模型上的 Glauber 动态链

对于给定上述测度 μ 的 Ising 模型，其上 Glauber 动态链指的是 Ω 上的一条转移机制如下的马氏链 (X_t) ：当模型组态为 σ 时，均匀随机选取一个顶点 $\tilde{v}$ ，然后在 $\{\eta\in\Omega:\eta(w)=\sigma(w),w\neq\tilde{v}\}$ 中按照测度 μ 在其上的条件概率转移到一个新的组态。

命题 1.1. 在选好顶点 $\tilde{v}$ 的情形下，新的组态与 σ 在 $\Omega\backslash\{\tilde{v}\}$ 中旋度值相同，并且在 $\tilde{v}$ 点，旋度值为 $+1$ 的概率为

$$
p(\sigma;\tilde{v}):=\frac{e^{\beta S^{\tilde{v}}(\sigma)}}{e^{\beta S^{\tilde{v}}(\sigma)}+e^{-\beta S^{\tilde{v}}(\sigma)}} \tag{2}
$$

其中 $S^{\tilde{v}}(\sigma):=J\sum_{w:w\sim\tilde{v}}\sigma(w)$ 。由此看出，新组态在 $\tilde{v}$ 点的旋度值只由原组态中 $\tilde{v}$ 相邻点的旋度值确定。

证明：为排版方便，我们也有时将指数函数记作 exp(.) 以看出，$\{\eta\in\Omega:\eta(w)=\sigma(w),w\neq\tilde{v}\}$ 中只有两个元素 σ_1,σ_2 ，它们在 $\tilde{v}$ 点的旋度

分别是 +1 与 -1 ，其他点旋度相同。设边集 $\mathcal{E}_1$ 为顶点不含 $\tilde{v}$ 的边集，$\mathcal{E}_2$ 为顶点含 $\tilde{v}$ 的边集，则有

$$\begin{aligned}\exp\left(-\beta H\left(\sigma_1\right)\right) &= \exp\left(J \sum_{\{v,w\}=e\in\mathcal{E}_1} \sigma(v)\sigma(w) + J \sum_{\{v,w\}=e\in\mathcal{E}_1} \sigma(w)\right) \\ &= \exp\left(J \sum_{\{v,w\}=e\in\mathcal{E}_1} \sigma(v)\sigma(w) + J \sum_{w:w\sim\tilde{v}} \sigma(w)\right) \\ &= \exp\left(J \sum_{\{v,w\}=e\in\mathcal{E}_1} \sigma(v)\sigma(w) + S^{\tilde{v}}(\sigma)\right)\end{aligned}$$

类似计算可得 $\exp\left(-\beta H\left(\sigma_2\right)\right) = \exp\left(J \sum_{\{v,w\}=e\in\mathcal{E}_1} \sigma(v)\sigma(w) - S^{\tilde{v}}(\sigma)\right)$ ，从而转移到 σ_1 与 σ_2 两者的概率测度比为

$$\exp\left(\beta S^{\tilde{v}}(\sigma)\right) : \exp\left(-\beta S^{\tilde{v}}(\sigma)\right)$$

可一步导出所需结论。

命题 1.2. (X_t) 作为马氏链是可逆的，可逆分布 μ 如（1）式定义。

证明：只需证明马氏链对 μ 满足相应的细致平衡条件。由于转移只能发生在一节点旋度不同的组态之间，不妨设马氏链从组态 σ_1 转移到 σ_2 ，它们在 $\tilde{v}$ 点的旋度分别是 +1 与 -1 ，其他节点旋度相同。对于 σ 与它在 $\tilde{v}$ 点的对偶元素 σ' ，利用定义式（1）和（2）易证

$$\mu\left(\sigma_1\right)\left(1 - p(\sigma, \tilde{v})\right) = \mu\left(\sigma_2\right) p\left(\sigma_2, \tilde{v}\right)$$

从而细致平衡条件成立.

1.3 完全图上的 Ising-Glauber 动态链

我们重点研究完全图上的 Glauber 动态链模型。由 n 个顶点组成的完全图记作 K_n, 任意两顶点间有 (唯一) 边相连, 从而这样的图是唯一的. 记顶点

为 $\{1, 2, \cdots, n\}$ ，并取作用系数 $J = 1/n$ ，此时

$$\mu(\sigma) = \mu_n(\sigma) = \frac{1}{Z(\beta)} \exp\left(\frac{\beta}{n} \sigma_{1\le i<j\le n} \sigma(i)\sigma(j)\right)$$

在物理文献中，它常常被称作 Curie-Weiss 模型。对于一个组态 σ ，定义标准磁化量 $S(\sigma)$ 为

$$S(\sigma) := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma(j)$$

给定组态 σ 和所选择更新的节点 i，按照转移法则，转移后该节点旋度为 +1 的概率 $p(\sigma;i)$ 如（2）所示。容易验证完全图的情形下有 $p(\sigma;i) = p_+\left(S(\sigma) - n^{-1}\sigma(i)\right)$，其中 p_+ 定义为

$$p_+(s) := \frac{e^{\beta s}}{e^{\beta s} + e^{-\beta s}} = \frac{1 + \tanh(\beta s)}{2} \tag{3}$$

类似地，i 节点旋度更新为 -1 的概率为

$$p_-(s) := \frac{e^{-\beta s}}{e^{\beta s} + e^{-\beta s}} = \frac{1 - \tanh(\beta s)}{2} \tag{4}$$

证明从略。

2 马氏链的耦合

本节我们介绍对于马氏链耦合的相关概念。简单地说，耦合提供了一种把初状态不同但转移机制相同的马氏链放在一起研究的方法，它是随机过程研究中处理问题的一种典型而有效的手法。

2.1 耦合的概念

定义 2.1. 随机过程 $\left(X_t, \tilde{X}_t\right)_{t\geq 0}$ 称为以 P 为转移矩阵的马氏耦合链，若它是一个马氏过程, 并且分量过程 X_t 和 $\tilde{X}_t$ 都是以 P 为转移矩阵的马氏链, 初始状态分别为 $X_0=\sigma$ 及 $\tilde{X}_0=\tilde{\sigma}$ 。

首次相遇后，可以让两条马氏链按照转移矩阵 P 每步进行完全吻合的转移。用数学语言说，就是若 $X_s=Y_s$ ，则对于 $t>s$ 都有 $X_t=Y_t$ 。这种耦合使问题更容易研究，我们可以修正所有马氏耦合使它满足上述条件。

定义 2.2. 我们称如下的马氏链 $(X_t^x)_{x\in\Omega}$ 为一个完全耦合，如果对于每个 $x\in\Omega$, 上述马氏链的分量 (X_t^x) 都是一个版本的转移矩阵为 P 的马氏链。

完全耦合考虑的是从样本空间 Ω 中的耦合，它考虑从所有点出发开始的马氏链的全体。建立完全耦合的一种方法是用一个随机变量作为转移机制，让这些马氏链以相同的方式转移。在接下来的讨论中，我们采用了这一方法。

2.2 Glauber 动态链的单调耦合

我们在完全图的 Ising 模型上考虑 Glauber 动态链 $(X_t)_{t=0}^{\infty}$ ，它的样本空间中每个点都是一个组态。它的完全耦合转移机制为：令 I 为服从 $\{1,2,\ldots,n\}$ 上离散均匀分布的随机变量，它表示转移时所选取的节点，而 U 为服从区间 $[0,1]$ 上（连续）均匀分布的随机变量，它与 I 独立。对于每个 $\sigma\in\Omega$ ，令

$$S^{\sigma}=\begin{cases}+1 & \text{若}0<U\leq p_+\left(S(\sigma)-n^{-1}\sigma(I)\right)\\ -1 & \text{若}p_+\left(S(\sigma)-n^{-1}\sigma(I)\right)<U\leq 1\end{cases}$$

对于完全耦合链初始状态 σ 的每个分量 σ, 置新状态为

$$X_1^{\sigma}(i)=\begin{cases}\sigma(i) & \text{若}i\neq I\\ S^{\sigma} & \text{若}i=I\end{cases}$$

为方便标记，后文中我们分别用 $\mathbf{P}_\sigma$ 与 $\mathbf{E}_\sigma$ 分别表示概率测度在初始状态 $X_0=\sigma$ 下的条件概率及相应的期望算子，并用 $\mathbf{P}_{\sigma,\tilde{\sigma}}$ 与 $\mathbf{E}_{\sigma,\tilde{\sigma}}$ 分别表示耦合链在初状态为 $\left(X_0,\tilde{X}_0\right)=(\sigma,\tilde{\sigma})$ 的概率及相应期望。对于完全耦合，算符 $\mathbf{P}_{\tilde{\sigma}}$ 和 $\mathbf{E}_{\tilde{\sigma}}$ 也有类似的含义。

定义 2.3. 称完全耦合链 (X_t^σ) 在初态分量为 $(\sigma,\tilde{\sigma})$ 的两分量 $\left(X_t^\sigma,X_t^{\tilde{\sigma}}\right)$ 为从 σ 和 $\tilde{\sigma}$ 出发的单调堣合。

为叙述以下 Glauber 动态链期望上界的命题，定义两组态的 Hamming 距离为

$$\operatorname{dist}(\sigma,\sigma'):=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}|\sigma(i)-\sigma'(i)| \tag{5}$$

命题 2.1. 从 σ 和 $\tilde{\sigma}$ 出发的单调耦合 $\left(X_t,\tilde{X}_t\right)$ 满足

$$\mathbf{E}_{\tilde{\sigma}}\left[\operatorname{dist}\left(X_t,\tilde{X}_t\right)\right]\leq\rho^t\operatorname{dist}(\sigma,\tilde{\sigma}) \tag{6}$$

其中

$$\rho:=1-n^{-1}(1-n\tanh(\beta/n)) \tag{7}$$

证明: (I) $t=1,\operatorname{dist}\left(X_t,\tilde{X}_t\right)=1$ 。
此时组态 σ 与 $\tilde{\sigma}$ 之间恰有一个节点的旋度值不同，设该节点为 i 。不妨设 $\sigma(i)=-1\ \sigma(i)=+1$ 。在转移机制下，两马氏链的 Hamming 距离与随机变量 I,U 的取值有关。具体地：若 $I=i$ ，即更新节点恰选为旋度值不同的那个（概率为 $1/n$ ），经过一步耦合两者相同，距离减 1 ；不然当 $I\neq i$ 时，令

$$B(j):=\{\omega:p_+(S(\sigma)-\sigma(j)/n)<U(\omega)\leq p_+(S(\tilde{\sigma})-\tilde{\sigma}(j)/n)\}$$

则事件 $B(I)$ 发生时（即 $\omega\in B(I(\omega))$ ），更新节点的旋度值从相同变为不同，距离加 1 ；对于其他情况，两马氏链的 Hamming 距离不变。总结起来有

$$\operatorname{dist}\left(X_1,\tilde{X}_1\right)=1-\mathbf{1}_{\{I=i\}}+\sum_{j\neq i}\mathbf{1}_{\{I=j\}}\mathbf{1}_{B(j)} \tag{8}$$

对于 $j\neq i$ ，由于 $\tilde{\sigma}(j)=\sigma(j)$ ，可得到 $S(\tilde{\sigma})-\tilde{\sigma}(j)/n=S(\sigma)-\sigma(j)/n+2/n$ 。令 $\hat{s}_j=nS(\sigma)-\sigma(j)$, 则有

$$\mathbf{P}_{\vec{\sigma}}(B(j))=\frac{1}{2}\left[\tanh\left(\beta\left(\hat{s}_j+2\right)/n\right)-\tanh\left(\beta\hat{s}_j/n\right)\right]\leq\tanh(\beta/n)$$

上面的最后一个不等式可用求导法证明。由此对（8）两边取期望，并结合随机变量 U 与 I 的独立性，可得

$$\mathbf{E}_{\vec{\sigma}}\left[\operatorname{dist}\left(X_1,\tilde{X}_1\right)\right]\leq 1-\frac{1}{n}+\tanh(\beta/n)=\rho$$

从而在 $t=1,\operatorname{dist}\left(X_t,\tilde{X}_t\right)=1$ 的条件下证明了 (6).

(II) $t=1$ ，初始态 Hamming 距离无限制.

对于该种情况，可以找到 $k+1$ 个组态 $\sigma_0,\sigma_1,\ldots,\sigma_k$ ，使得 $\sigma_0=\sigma,\sigma_k=\tilde{\sigma}$ ，并且相邻两组态间有且仅有一个节点旋度值不同。利用（I）中已证的结论以及 Hamming 距离的三角不等式，有

$$\mathbf{E}_{\vec{\sigma}}\left[\operatorname{dist}\left(X_1^{\sigma},X_1^{\tilde{\sigma}}\right)\right]\leq\sum_{i=1}^{k}\mathbf{E}_{\vec{\sigma}}\left[\operatorname{dist}\left(X_1^{\sigma_i},X_1^{\sigma_{i+1}}\right)\right]\leq\rho k=\rho\operatorname{dist}(\sigma,\tilde{\sigma})$$

(III) 最一般情形

马氏性表明，对任意组态组 $\vec{\sigma}_t$

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}_{\vec{\sigma}}\left[\operatorname{dist}\left(X_{t+1}^{\sigma},X_{t+1}^{\tilde{\sigma}}\right)\mid\left(\{X_t^{\sigma}\}_{\sigma\in\Omega}\right)=\vec{\sigma}_t\right]\\=&\mathbf{E}_{\vec{\sigma}_t}\left[\operatorname{dist}\left(X_1^{\sigma_t},X_1^{\tilde{\sigma}}\right)\right]\end{aligned}$$

由 (II) 的结论，上式不超过 $\rho\operatorname{dist}(\sigma,\tilde{\sigma})$ ，结合条件数学期望的定义，有

$$\mathbf{E}_{\vec{\sigma}}\left[\operatorname{dist}\left(X_{t+1}^{\sigma},X_{t+1}^{\tilde{\sigma}}\right)\mid\left(\{X_t^{\sigma}\}_{\sigma\in\Omega}\right)\right]\leq\rho\operatorname{dist}(\sigma,\tilde{\sigma})$$

两边同时取期望，改记 $t+1$ 为 t 即得

$$\mathbf{E}_{\vec{\sigma}}\left[\operatorname{dist}\left(X_t^{\sigma},X_t^{\tilde{\sigma}}\right)\right]\leq\rho\operatorname{dist}(\sigma,\tilde{\sigma})$$

最终证明了命题。

注 1. 单调耦合还有以下性质：记 $\sigma\leq\sigma'$ 表示对每个节点 i 都有旋度关系 $\sigma(i)\leq\sigma'(i)$ 成立，从前面 Glauber 动态链定义看出，对于单调耦合 $\left(X_t,\tilde{X}_t\right)$ ，若 t 时刻有 $X_t\leq\tilde{X}_t$ 成立，则 $X_s\leq\tilde{X}_s$ 对所有 $s\geq t$ 都成立。单调耦合的名称就来源于它的这个”单调”性质。

3 磁化链

上面讨论的完全图 Ising 模型的 Glauber 动态链时，有一个特点不容忽视：旋度为 +1 或 -1 的数量决定了 Ising 模型的整体性质。受此启发我们令 $S_t := S\left(X_t\right)$, 其中 $S(\sigma)$ 表示组态 σ 的标准磁化量。可以验证 S_t 是一个马氏链，转移概率为

$$P_M\left(s, s'\right)=\begin{cases}\frac{1+s}{2} p_-\left(s-n^{-1}\right) & \text{若} s'=s-2/n \\ \frac{1-s}{2} p_+\left(s+n^{-1}\right) & \text{若} s'=s+2/n \\ 1-\frac{1+s}{2} p_-\left(s-n^{-1}\right)-\frac{1-s}{2} p_+\left(s+n^{-1}\right) & \text{若} s'=s\end{cases} \tag{9}$$

其中 $s, s' \in \Omega_S, p_+(s)$ 与 $p_-(s)$ 由上式定义。

定义 3.1. 上面定义的 S_t 被称作 X_t 的磁化链。

注 2. 容易证明 $P_M\left(-s,-s'\right)=P_M\left(s, s'\right)$, 即从 s 出发的 $\left(S_t\right)$ 与从 $-s$ 出发的 $\left(-S_t\right)$ 可看做相同的马氏链。

下面我们来证明磁化链的一些性质。我们分别简记 Glauber 动态链 $S\left(X_t\right)$ 和 $S\left(\tilde{X}_t\right)$ 为 S_t 和 $\tilde{S}_t$ 。

引理 3.1. 若 $\left(X_t, \tilde{X}_t\right)$ 是从 σ 和 $\tilde{\sigma}$ 出发的单调耦合, 则有

$$\mathbf{E}_{\sigma, \tilde{\sigma}}\left[\left|S_t-\tilde{S}_t\right|\right] \leq\left(\frac{2}{n}\right) \rho^t \operatorname{dist}(\sigma, \tilde{\sigma}) \leq 2 \rho^t \tag{10}$$

其中 ρ 如 (7) 式所定义。

证明：由三角不等式可得 $\left|S_t-\tilde{S}_t\right| \leq(2/n) \operatorname{dist}\left(X_t, \tilde{X}_t\right)$, 再应用命题 2.1 即得证明。

引理 3.2. 对于磁化链 $\left(S_t\right)$ 及 Ω_S 上两个状态 s 与 $\tilde{s}, s \geq \tilde{s}$, 有

$$0 \leq \mathbf{E}_s\left[S_1\right]-\mathbf{E}_{\tilde{s}}\left[S_1\right] \leq \rho(s-\tilde{s}) \tag{11}$$

更一般地，对 Ω_S 任意两个状态 s 与 $\tilde{s}$,

$$\left|\mathbf{E}_s\left[S_1\right]-\mathbf{E}_{\tilde{s}}\left[S_1\right]\right| \leq \rho|s-\tilde{s}| \tag{12}$$

证明: 在假设 $s \geq \tilde{s}$ 下可以找到从 $(\sigma, \tilde{\sigma})$ 出发的单调耦合 $\left(X_t, \tilde{X}_t\right)$, 其中 $\sigma \geq \tilde{\sigma}$ 且 $S(\sigma)=s, S(\tilde{\sigma})=\tilde{s}$ 。这种情况下一定有 $s-\tilde{s}=(2/n) \operatorname{dist}(\sigma, \tilde{\sigma})$ ，且

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\sigma,\tilde{\sigma}}\left[\left|S_1-\tilde{S}_1\right|\right] &= \frac{2}{n}\mathbf{E}_{\sigma,\tilde{\sigma}}\left[\operatorname{dist}\left(X_1,\tilde{X}_1\right)\right] \\
&\leq \frac{2}{n}\rho\operatorname{dist}(\sigma,\tilde{\sigma}) \\
&= \rho(s-\tilde{s})
\end{aligned}
$$

由耦合的单调性（注记 1 ）知 $S_1 \geq \tilde{S}_1$ 。从而

$$
\mathbf{E}_\sigma\left[S_1\right]-\mathbf{E}_{\tilde{\sigma}}\left[\tilde{S}_1\right]=\mathbf{E}_{\sigma,\tilde{\sigma}}\left[\left|S_1-\tilde{S}_1\right|\right]
$$

再由引理 3.1 即得

$$
\mathbf{E}_\sigma\left[S_1\right]-\mathbf{E}_{\tilde{\sigma}}\left[\tilde{S}_1\right]
$$

由磁化链 S_t 的马氏性, 上式左端就等于 $\mathbf{E}_s\left[S_1\right]-\mathbf{E}_{\tilde{s}}\left[\tilde{S}_1\right]$, 它与所选取的单调耦合无关。这即证得 (11) 式。

再对 $S(\tilde{\sigma}) \geq S(\sigma)$ 的情形利用上述结论，即知（12）式成立。

引理 3.3. 设 $(Z_t)_{t\geq 0}$ 关于自然 $\sigma-$ 域流 $(\mathcal{F}_t)$ 是非负上鞅, τ 是停时, 满足

(i) $Z_0=k$

(ii) $|Z_{t+1}-Z_t| \leq B$

(iii) $\omega \in \{\tau>t\}$ 时，有 $\operatorname{Var}\left(Z_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right) \geq \sigma^2>0$,

如果常数 u 满足 $u>12B^2/\sigma^2$ ，则

$$
\mathbf{P}_k(\tau>u) \leq \frac{4k}{\sigma\sqrt{u}}
$$

证明：本引理援引自参考文献 [5] 中命题 17.19，而文献证明有谬，改变条件（ii）以及常数 u 的限制条件则为正确，如上所述。为明晰起见于本文附修正版的证明，见附录 A。

引理 3.4. 设 $\beta \leq 1, n$ 是偶数, 则存在 c 和 t_0, 对所有的 $s, u \geq 0, t \geq t_0$ 满足

$$
\mathbf{P}\left(|S_u|>0,\cdots,|S_{u+t}|>0 \mid S_u=s\right) \leq \frac{cn|s|}{\sqrt{t}}
$$

证明：由对称性，我们只需对 $s>0$ 的情形进行证明。定义停时

$$
\tau_0:=\inf\{t \geq 0:|S_t| \leq 1/n\}
$$

当 n 是偶数时，$|S_{\tau_0}|=0$ ，否则它等于 $1/n$ 。考虑下式

$$\mathbf{E}\left(S_{t+1}-S_t \mid S_t=s\right)=\frac{2}{n}\left(\frac{1-s}{2}\right) p_{+}\left(s+n^{-1}\right)-\frac{2}{n}\left(\frac{1+s}{2}\right) p_{-}\left(s-n^{-1}\right)$$

从而

$$\mathbf{E}\left(S_{t+1}-S_t \mid S_t=s\right)=\frac{1}{n}\left[f_n(s)-s+\theta_n(s)\right]$$

其中

$$\begin{aligned} f_n(s) &:= \frac{1}{2}\left\{\tanh\left[\beta\left(s+n^{-1}\right)\right]+\tanh\left[\beta\left(s-n^{-1}\right)\right]\right\} \\ \theta_n(s) &:= \frac{-s}{2}\left\{\tanh\left[\beta\left(s+n^{-1}\right)\right]-\tanh\left[\beta\left(s-n^{-1}\right)\right]\right\} \end{aligned}$$

$f_n(s)$ 的上凸性以及由 tanh 函数的递增性知 $s \geq 0$ 时

$$f_n(s) \leq \tanh(\beta s), \quad \theta_n(s) \leq 0$$

故我们有

$$\mathbf{E}\left(S_{t+1}-S_t \mid S_t=s\right)=\frac{1}{n}[\tanh(\beta s)-s] \leq \frac{s(\beta-1)}{n}$$

最后一步是根据 $\tanh x \leq x, x \geq 0$. 当 $\beta \leq 1$ 时我们立即得到

$$\mathbf{E}\left(S_{t+1}-S_t \mid S_t\right) \leq 0, \text{若} S_t \geq 0.$$

根据磁化链的转移概率 (9) 式，存在与 n 无关的常数 $b>0$ ，使

$$\mathbf{P}\left(S_{t+1}-S_t \neq 0 \mid S_t\right) \geq b, \forall t$$

现在定义 $W_t := nS_{t \wedge \tau_0}$ ，则在 $\{\tau > t\}$ 上满足下鞅定义式，它具有有界增量. 并有 $\sigma^2 > 0$ ，使得在 $\{\tau > t\}$ 上

$$\operatorname{Var}\left(W_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right) \geq \sigma^2$$

结合引理（3.3）及马氏性，存在正常数 c 使得 $s>0$ 时有

$$\mathbf{P}\left(S_{u+1}>0, \cdots, S_{u+t}>0 \mid S_u=s\right)=\mathbf{P}_s\left(\tau_0>t\right) \leq \frac{cns}{\sqrt{t}}$$

得证。

4 深入讨论

本节我们针对磁化链的一些深入问题进行讨论，包括方差控制、平均旋度值以及等磁化量链的耦合。

4.1 方差控制

命题 4.1. 对于 Glauber 动态链的相应磁化链 S_t, 当 $n \to \infty$, 若 $\beta < 1$ 则 $\operatorname{Var}(S_t) = O(n^{-1})$ ；而若 $\beta = 1$ 则有 $\operatorname{Var}(S_t) = O(t/n^2)$

为证明这个命题，我们先介绍以下更一般的引理:

引理 4.2. 设 (Z_t) 是转移矩阵为 $\mathbf{P}$ 的马氏链。若存在 $\rho \in (0,1]$ 使得

$$|\mathbf{E}_z[Z_t] - \mathbf{E}_{\tilde{z}}[Z_t]| \leq \rho^t |z - \tilde{z}|$$

则最大方差 $v_t := \sup_{z_0} \operatorname{Var}_{z_0}(Z_t)$ 满足

$$v_t \leq v_1 \sum_{i=0}^{t-1} \rho^{2(i-1)} \leq v_1 \min\left\{t, \left(1-\rho^2\right)^{-1}\right\}$$

证明：设 (Z_t) 和 (Z_t^*) 是两条独立且有限维分布相同的马氏链，$Z_0 = Z_0^* = z_0$ 。根据马氏性和假设，有

$$\begin{aligned}
|\mathbf{E}_{z_0}[Z_t \mid Z_1 = z_1] - \mathbf{E}_{z_0}[Z_t^* \mid Z_1^* = z_1^*]| &= \left|\mathbf{E}_{z_1}[Z_{t-1}] - \mathbf{E}_{z_1^*}\left[Z_{t-1}^*\right]\right| \\
&\leq \rho^{t-1} |z_1 - z_1^*|
\end{aligned}$$

从而令 $\phi(z) = \mathbf{E}_z[Z_{t-1}] = \mathbf{E}_z\left[Z_{t-1}^*\right]$, 知 $\phi(Z_1) = \mathbf{E}[Z_t \mid Z_1]$ 与 $\phi(Z_1^*) = \mathbf{E}[Z_t^* \mid Z_1^*]$ 分别关于两个独立的 $\sigma-$ 域 $\sigma(Z_1, \cdots, Z_t)$ 和 $\sigma(Z_1^*, \cdots, Z_t^*)$ 可测，故两者独立。我们再利用独立随机变量的一个性质：若 X, Y 是两个独立同分布的随机变量，并且二阶矩存在，则 $\operatorname{Var}(X) = \frac{1}{2}\mathbf{E}|X-Y|$ 。结合马氏性

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}_{z_0}(\mathbf{E}_{z_0}[Z_t \mid Z_1]) &= \frac{1}{2}\mathbf{E}_{z_0}[\phi(Z_1) - \phi(Z_1^*)]^2 \\
&\leq \frac{1}{2}\rho^{2(t-1)}\mathbf{E}_{z_0}|Z_1 - Z_1^*|^2 \\
&\leq v_1 \rho^{2(t-1)}
\end{aligned}$$

根据方差的公式（参见 [2] 中 Chap. 4 Exercise 1.9）

$$\operatorname{Var}_{z_0}(Z_t) = \mathbf{E}[\operatorname{Var}_{z_0}(Z_t \mid Z_1)] + \operatorname{Var}_{z_0}(\mathbf{E}_{z_0}[Z_t \mid Z_1])$$

从而

$$v_t \leq \sup_{z_0} \left\{ \mathbf{E}\left[\operatorname{Var}_{z_0}\left(Z_t \mid Z_1\right)\right] + \operatorname{Var}_{z_0}\left(\mathbf{E}_{z_0}\left[Z_t \mid Z_1\right]\right) \right\}$$

由于对每个 $z_1, \operatorname{Var}_{z_0}\left(Z_t \mid Z_1 = z_1\right) \leq v_{t-1}$ ，从而

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}\left[\operatorname{Var}_{z_0}\left(Z_t \mid Z_1\right)\right] \leq v_{t-1} \\ \Rightarrow \quad & v_t \leq v_{t-1} + v_1 \rho^{2(t-1)}, \quad \forall t \geq 1 \end{aligned}$$

迭代使用上式，最终得

$$v_t \leq v_1 \sum_{i=0}^{t-1} \rho^{2(i-1)} \leq v_1 \min\left\{ \left(1-\rho^2\right)^{-1}, t \right\}$$

命题 4.1 的证明: 磁化链的增量有界 $2/n$, 由方差的极小性 $\operatorname{Var}_z\left(S_1\right) \leq \mathbf{E}\left(S_1 - z\right)^2 \leq (2/n)^2 = 4/n^2$, 该上界与出发点 z 无关。由引理 3.1 可知, 磁化链 (S_t) 满足引理 4.2 所述条件，故当 $\beta < 1$ 时

$$\operatorname{Var}_z\left(S_t\right) \leq \frac{4}{n^2}\left(1-\rho^2\right)^{-1}$$

又

$$\rho = 1 - \frac{1}{n} + \tanh\frac{\beta}{n} = 1 - \frac{1-\beta}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

故

$$1-\rho^2 \sim \frac{2(1-\beta)}{n} \Longrightarrow \operatorname{Var}_z\left(S_t\right) = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

而当 $\beta < 1$ 时, $\tanh(\beta/n) \leq 1/n$

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}_z\left(S_t\right) & \leq v_1 \sum_{i=0}^{t-1} \rho^{2(i-1)} \leq \frac{4}{n^2} t \\ & = O\left(\frac{t}{n^2}\right), \quad n \to \infty \end{aligned}$$

即得证。□

4.2 平均旋度值

在讨论过热状态 $\beta < 1$ 下的 Glauber 动态链时，我们常常需要估算给定顶点集总旋度值的数字特征（例如期望、方差）。我们不加证明地引述以下引理:

引理 4.3. 设 $\beta < 1$ 。

(i) 对于所有 $\sigma \in \Omega$ 和 $i = 1, 2, \cdots, n$,

$$|\mathbf{E}_\sigma [S_t]| \leq 2e^{-(1-\beta)t/n} \text{ 且 } |\mathbf{E}_\sigma [X_t(i)]| \leq 2e^{-(1-\beta)t/n}.$$

(ii) 对于任何顶点集 $A \subset V$, 定义 $M_t(A) := \frac{1}{2}\sum_{i\in A} X_t(i)$, 则有

$$|\mathbf{E}_\sigma [M_t(A)]| \leq |A| e^{-(1-\beta)t/n}$$

且如果 $t \leq [2(1-\beta)]^{-1} n \log n$, 那么对于某个正常数 c,

$$\operatorname{Var}(M_t(A)) \leq cn$$

(iii) 对于任何顶点集 A 和所有 $\sigma \in \Omega$,

$$\mathbf{E}_\sigma |M_t(A)| \leq ne^{-(1-\beta)t/n} + O(\sqrt{n})$$

4.3 等磁化量链的耦合

以下引理表明，从两 Glauber 动态链耦合到磁化量相等到各点旋度值完全匹配，所花的时间是 $O(n \log n)$ 。这在说明相对低温情形 $(\beta \geq 1)$ 的混合现象中扮演着一定角色。

引理 4.4. 设 $\sigma, \tilde{\sigma} \in \Omega$ 的标准磁化量相同 $S(\sigma) = S(\tilde{\sigma})$, 则存在正常数 $c_0(\beta)$, 以及 Glauber 动态链的一个耦合链 $\left(X_t, \tilde{X}_t\right)$, 它从 (σ, σ_0) 出发, 使得

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}_{\sigma,\tilde{\sigma}} (\tau > c_0(\beta) n \log n) = 0$$

证明: 我们的任务是要构造一个耦合。在 t 时刻, 首先更新 X_t 的组态: 先均匀随机选取节点 $I \in \{1, 2, \cdots, n\}$ ，按如下操作生成一个随机的旋度值

$$\mathcal{S} = \begin{cases} +1 & \text{w.p.} \quad p_+ (S_t - X_t(I)/n) \\ -1 & \text{w.p.} \quad p_- (S_t - X_t(I)/n) \end{cases}$$

之后令

$$X_{t+1}(i) = \begin{cases} X_t(i) & i \neq I \\ \mathcal{S} & i = I \end{cases}$$

其次再来考虑 $\tilde{X}_t$ 。若 $X_t(I) = \tilde{X}_t(I)$ ，则令

$$\tilde{X}_{t+1}(i) == \begin{cases} \tilde{X}_t(i) & i \neq I \\ \mathcal{S} & i = I \end{cases}$$

若 $X_t(I) = \tilde{X}_t(I)$, 则在

$$\left\{ i : \tilde{X}_t(i) \neq X_t(i), \text{且} \tilde{X}_t(i) = X_t(i) \right\},$$

中均匀随机选取节点 $\tilde{I}$ ，之后令

$$\tilde{X}_{t+1}(i) = \begin{cases} \tilde{X}_t(i) & i \neq \tilde{I} \\ \mathcal{S} & i = \tilde{I} \end{cases}$$

容易验证，这样的链可成为一个马氏耦合。
接下来考虑两马氏链的 Hamming 距离 $D_t = \operatorname{dist}\left(X_t, \tilde{X}_t\right)$ 。存在一个常数 $c_1 = c_1(\beta) > 0$ 使得 $p_+(s) \wedge p_-(s) \geq c_1$ 对于 $s \in \{-1, \cdots, 1\}$ 成立。若 $X_t(I) = \tilde{X}_t(I)$ 则 $D_{t+1} - D_t = 0$ ，否则当 $X_t(I) \neq \tilde{X}_t(I)$ 时则有 $D_{t+1} - D_t = -2$ 。由此得到

$$\mathbf{E}\left[D_{t+1} - D_t \mid X_t, \tilde{X}_t\right] \leq -\frac{2c_1 D_t}{n}$$

从而 $Y_t = D_t\left(1 - 2c_1/n\right)^{-t}$ 是一个非负上鞅，从而

$$\mathbf{E}\left[D_t\right] \leq \mathbf{E}\left[D_0\right]\left(1 - \frac{2c_1}{n}\right)^t \leq n e^{-2c_1 t/n}$$

取 $t = c_0 n \log n$ 。对充分大的 $c_0 = c_0(\beta)$ 可保证 $t < 1/n$ ，再利用 Markov 不等式

$$\mathbf{P}_\sigma\left(\tau > c_0 n \log n\right) \leq \mathbf{P}_\sigma\left(D_{c_0 n \log n \geq 1}\right) \leq \mathbf{E}_\sigma\left[D_{c_0 n \log n}\right] \leq \frac{1}{n}$$

证毕.

5 结果简述

转移矩阵为 $\mathbf{P}$ 有限维马氏链的混合时定义为

$$t_{\text{mix}} := \sup_{x \in V} \min_t \left\{ t : \left\| \mathbf{P}^t(x, \cdot) - \pi(\cdot) \right\| \leq \frac{1}{4} \right\}$$

其中 $\|\mu - \nu\|_{TV} = \max_{A \subset V} \|\mu(A) - \nu(A)\|$. 固于篇幅，我们不加证明地给出以下三个定理，它们讨论的对象都是完全图 K_n 上 Ising 模型的 Glauber 动态链。

定理 5.1. 当 $\beta < 1$ 时, Glauber 动态链的混合时 $t_{\text{mix}}(n) = [2(1-\beta)] n \log n$, 并且有窗宽为 n 的切割（cut-off）现象，即

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \liminf_{n \to \infty} d_n \left(t_{\text{mix}}(n) - \alpha w_n \right) = 1$$

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \limsup_{n \to \infty} d_n \left(t_{mix}(n) + \alpha w_n \right) = 0$$

以下定理给出了过渡情形 $\beta = 1$ 的情况

定理 5.2. 当 $\beta = 1$ 时, 存在常数 $C_1, C_2 > 0$ 使 Glauber 动态链的混合时 $t_{\text{mix}}(n)$ 满足

$$C_1 n^{\frac{3}{2}} \leq t_{\text{mix}}(n) \leq C_2 n^{\frac{3}{2}}$$

对于温度较低 ($\beta > 1$) 的情形，Griffiths 等人用 Cheeger 不等式证明了 Glauber 动态链的混合时间 $t_{\text{mix}}(n)$ 为指数阶，收攻十分缓慢。为使得问题变得更有意义，我们考虑”限制”在 $\Omega^+ := \{\omega \in X : S(\sigma) \geq 0\}$ 上的 Glauber 动态链，其中 $S(\ 。)$ 为组态的标准磁化量。

这里”限制”的含义是：如果按照正常转移步骤，动态链从组态 $\sigma : S(\sigma) \geq 0$ 将要转移到 $\eta : S(\eta) < 0$ ，此时则将对应”限制”后的链从 σ 转移到 $-\eta$ ，这样保证组态还在 Ω^+ 内。这种模型对应在热力学里面的现象称为”亚稳态”(metastability)。我们叙述本文的最后一个定理

定理 5.3. 当 $\beta > 1$ 时, 存在与 β 相关的常数 $C_3(\beta), C_4(\beta) > 0$ 使应用”限制”条件后, Glauber 动态链的混合时 $t_{\text{mix}}(n)$ 满足

$$C_3(\beta) n \log n \leq t_{\text{mix}}(n) \leq C_4(\beta) n \log n$$

A 引理 3.3 的证明

为方便起见，我们把引理 3.3 重新叙述如下：

引理 A.1. 设 $(Z_t)_{t \geq 0}$ 关于自然 $\sigma-$ 域流 $(\mathcal{F}_t)$ 是非负上鞅, τ 是停时, 满足

(i) $Z_0 = k$,
(ii) $|Z_{t+1} - Z_t| \leq B$,
(iii) $\omega \in \{\tau > t\}$ 时, 有 $\operatorname{Var}(Z_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) \geq \sigma^2 > 0$,

如果常数 u 满足 $u > 12B^2/\sigma^2$, 则

$$\mathbf{P}_k(\tau > u) \leq \frac{4k}{\sigma\sqrt{u}}$$

在证引理前, 我们先来介绍两个命题:

命题 A .2 (条件方差的性质). 若 σ-域 $\mathcal{G} \in \mathcal{F}, X \in \mathcal{F}$-meas,$Y \in \mathcal{G}$-meas, 则 $\operatorname{Var}(X + Y \mid \mathcal{G}) = \operatorname{Var}(X \mid \mathcal{G})$(记号 $\mathcal{F}$-meas 表示关于 $\mathcal{F}$ 可测的随机变量全体组成的空间, 等等)。

证明：条件方差的定义式为

$$\operatorname{Var}(X \mid \mathcal{F}) = \mathbf{E}\left(X^2 \mid \mathcal{F}\right) - [\mathbf{E}(X \mid \mathcal{F})]^2$$

从而待证式左边等于

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}(X+Y \mid \mathcal{F}) =& \mathbf{E}\left((X+Y)^2 \mid \mathcal{F}\right) - [\mathbf{E}(X+Y \mid \mathcal{F})]^2 \\
=& \left\{\mathbf{E}\left(X^2 \mid \mathcal{F}\right) - [\mathbf{E}(X \mid \mathcal{F})]^2\right\} \\
& + 2\{\mathbf{E}(XY \mid \mathcal{F}) - \mathbf{E}(X \mid \mathcal{F})\mathbf{E}(Y \mid \mathcal{F})\} + \left\{\mathbf{E}\left(Y^2 \mid \mathcal{F}\right) - [\mathbf{E}(Y \mid \mathcal{F})]^2\right\}
\end{aligned}$$

由 Y 的可知性, 上式就等于 $\operatorname{Var}(X \mid \mathcal{F})$, 即待证式右端, 命题得证.

命题 A.3. 若 X_n 是 $(\mathcal{F}_n)$ 适应的, N 是关于 $(\mathcal{F}_n)$ 的停时, 并且在 $\{N > n\}$ 上有

$$\mathrm{E}\left(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right) \geq X_n$$

那么 $(W_{n \wedge N})$ 是下鞅.

证明：只需证对自然数 n 有

$$\mathbf{E}\left(X_{(n+1)\wedge N} - X_{n\wedge N} \mid \mathcal{F}_n\right) \geq 0$$

对 $n \geq 1, X_{n\wedge N}$ 有分解式

$$X_{n\wedge N} = \sum_{j=0}^{n-1}\left(X_{j+1} - X_j\right)\mathbf{1}_{\{N>j\}}$$

根据题设在 $\{N > n\}$ 上，$\mathbf{E}\left(X_{n+1} - X_n \mid \mathcal{F}_n\right) \geq 0$ ，从而

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\left(X_{(n+1)\wedge N}-X_{n\wedge N}\mid\mathcal{F}_n\right)\\=&\mathbf{E}\left(\left(X_{n+1}-X_n\right)\mathbf{1}_{\{N>n\}}\mid\mathcal{F}_n\right)\geq 0\end{aligned}$$

得证。

引理 3.3 的证明: (I) 由于 $(-Z_t)$ 是下鞅, 它有如下 Doob 分解: $-Z_t=-M_t+A_t$ 其中 (M_t) 是关于 $(\mathcal{F}_t)$ 的鞅; (A_t) 满足 $A_0=0$ ，对于几乎所有样本点 ω 关于 t 单调递增, 且 A_t 是可料过程 (即对于每个 $t\geq 1, A_t\in\mathcal{F}_{t-1}$)。注意到 $M_t=Z_t+A_t$ ，由 Z_t 和 A_t 的非负性可推出 M_t 非负，且

$$\begin{aligned}A_{t+1}-A_t&=\mathbf{E}\left(A_{t+1}-A_t\mid\mathcal{F}_t\right)\\&=\mathbf{E}\left(Z_t-Z_{t+1}\mid\mathcal{F}_t\right)-\mathbf{E}\left(M_t-M_{t+1}\mid\mathcal{F}_t\right)\\&=\mathbf{E}\left(Z_t-Z_{t+1}\mid\mathcal{F}_t\right)\leq B\end{aligned}$$

从而

$$M_{t+1}-M_t=Z_{t+1}-Z_t+A_{t+1}-A_t\leq 2B \tag{13}$$

说明 M_t 的增量可以被常数 $2B$ 控制.

(II) 利用已知和命题 $A.2,\{\tau>t\}$ 上有

$$\begin{aligned}&\operatorname{Var}\left(Z_{t+1}\mid\mathcal{F}_t\right)=\operatorname{Var}\left(M_{t+1}-A_{t+1}\mid\mathcal{F}_t\right)\geq\sigma^2>0\\&\Rightarrow\operatorname{Var}\left(M_{t+1}\mid\mathcal{F}_t\right)\geq\sigma^2\end{aligned} \tag{14}$$

我们取 $h\geq 2B$ ，并考虑停时

$$\tau_h=\inf\{t:M_t\geq h\}\wedge\tau\wedge u$$

由于 τ_h 被常数 u 控制，故而是有界停时。选择停时定理表明

$$\begin{aligned}k=\mathbf{E}\left(M_{\tau_h}\right)&\geq\mathbf{E}\left(M_{\tau_h}\mathbf{1}_{M_{\tau_h}\geq h}\right)\\&\geq h\mathbf{P}\left(M_{\tau_h}\geq h\right)\end{aligned}$$

移项则得到 M_{τ_h} 的控制

$$\mathbf{P}\left(M_{\tau_h}\geq h\right)\leq\frac{k}{h} \tag{15}$$

(III) 令 $W_t=M_t^2-hM_t-\sigma^2 t$ ，利用 (14) 式，知在 $\{\tau>t\}$ 上

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(W_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right) &= \mathbf{E}\left(M_{t+1}^2 \mid \mathcal{F}_t\right) - h\mathbf{E}\left(M_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right) - \sigma^2(t+1) \\ &\geq \sigma^2 + \left[\mathbf{E}\left(M_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right)\right]^2 - h\mathbf{E}\left(M_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right) - \sigma^2(t+1) \\ &= M_t^2 - hM_t - \sigma^2 t = W_t\end{aligned}$$

命题（A.3）表明 $(W_{t\wedge\tau})$ 是下鞅，再使用选择停时定理：

$$\begin{aligned}-kh \leq \mathbf{E}\left(W_0\right) &\leq \mathbf{E}\left(W_{\tau_h}\right) \\ &= \mathbf{E}\left(M_{\tau_h}\left(M_{\tau_h} - h\right)\right) - \sigma^2 \mathbf{E}\tau_h \end{aligned} \tag{16}$$

由于 $M_{\tau_h}\left(M_{\tau_h} - h\right)$ 在 $\{M_{\tau_h} \leq h\}$ 上非正，结合（I）中结论知 $M_{\tau_h} \leq h + 2B$ （过程达到 h 之上前那一步，增量不超过 $2B$ ，按停时 τ_h 定义即得），根据（II）中选取的 $h \geq 2B$ ，我们有

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\left(M_{\tau_h}\left(M_{\tau_h} - h\right)\right) \\ \leq &\mathbf{E}\left(M_{\tau_h}\left(M_{\tau_h} - h\right)\mathbf{1}_{\left\{M_{\tau_h} > h\right\}}\right) \\ \leq &(h+2B)(2B)\mathbf{P}\left(M_{\tau_h} > h\right) \leq 2h^2\mathbf{P}\left(M_{\tau_h} > h\right)\end{aligned}$$

代入 (16) 式，得到结论

$$\sigma^2\mathbf{E}\tau_h \leq 2h^2\mathbf{P}\left(M_{\tau_h}\right) + kh$$

再将 (15) 代入上式，移项即得

$$\mathbf{E}\tau_h \leq \frac{3kh}{\sigma^2} \tag{17}$$

(IV) 根据 τ_h 的定义，我们有

$$\mathbf{P}(\tau > u) \leq \mathbf{P}\left(M_{\tau_h} \geq h\right) + \mathbf{P}\left(\tau_h \geq u\right)$$

(15) 表明第一项可被 k/h 控制。对第二项应用 Markov 不等式，有

$$\mathbf{P}\left(\tau_h \geq u\right) \leq \frac{\mathbf{E}\tau_h}{u} \leq \frac{3kh}{u\sigma^2}$$

从而

$$\mathbf{P}(\tau > u) \leq \frac{k}{h} + \frac{3kh}{u\sigma^2}$$

选 $h = \sqrt{u\sigma^2/3}$, 引理中假设常数 $u > 12B^2/\sigma^2$, 故 $h \geq 2B$. 代入上式得

$$\mathbf{P}(\tau > u) \leq \frac{2\sqrt{3}k}{\sigma\sqrt{u}} \leq \frac{4k}{\sigma\sqrt{u}}$$

得证.

参考文献

[1] Diaconis, P.: The cutoff phenomenon in finite Markov chains. Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. 93(4), 1659 - 1664 (1996) 8

[2] Durrett, R., Probability: Theory and Examples (3rd ed.), Duxbury Press, 2004

[3] Diaconis, P., Saloff-Coste, L.: Separation cut-offs for birth and death chains. Ann. Appl. Probab. 16(4), 2098 - 2122 (2006)

[4] Levin, D. A., M. J. Luczak, and Y. Peres. Glauber dynamics for the meanfield Ising model: cut-off, critical power law, and metastability, 2007. Available at arxiv:math.PR/0712.0790

[5] Levin, D., Peres, Y., Wilmer, E., Markov Chains and Mixing Times. American Mathematical Society, 2009

[6] 钱敏平, 龚光鲁, 应用随机过程. 北京: 北京大学出版社, 1998

[7] Saloff-Coste, L.: Lectures on finite Markov chains, Lectures on Probability Theory and Statistics, Ecole d’ Ete de Probabilites de Saint-Flour XXVI, 1996. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1665, pp. 301 - 413. Springer, Berlin, 1997