

# Forelesning nr.5 IN 1080 Mekatronikk

**RC-kretser** 

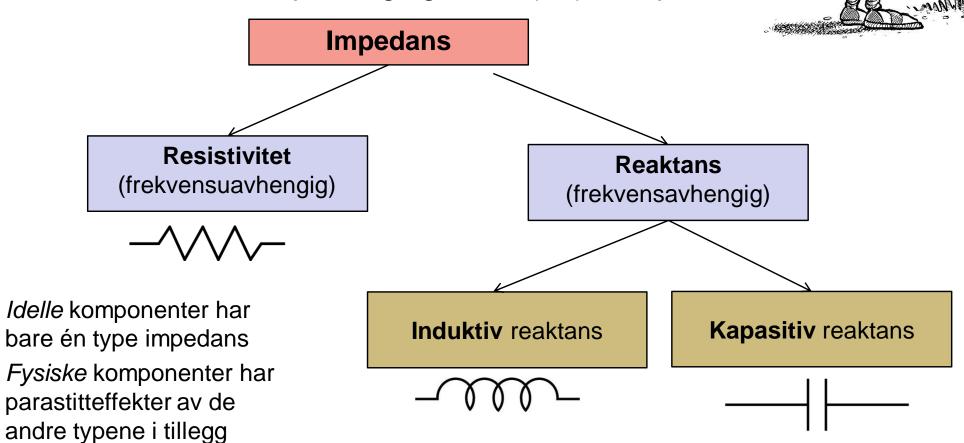


#### Dagens temaer

- Ulike typer impedans og konduktans
- Kondensatorer i serie og parallell
- Ulike typer respons
- RC-kretser
  - Impedans og fasevinkler
  - Serielle RC-kretser
  - Parallelle RC-kretser
- Temaene hentes fra kapittel 9.5-9.7, 10.1-10.3

#### **Impedans**

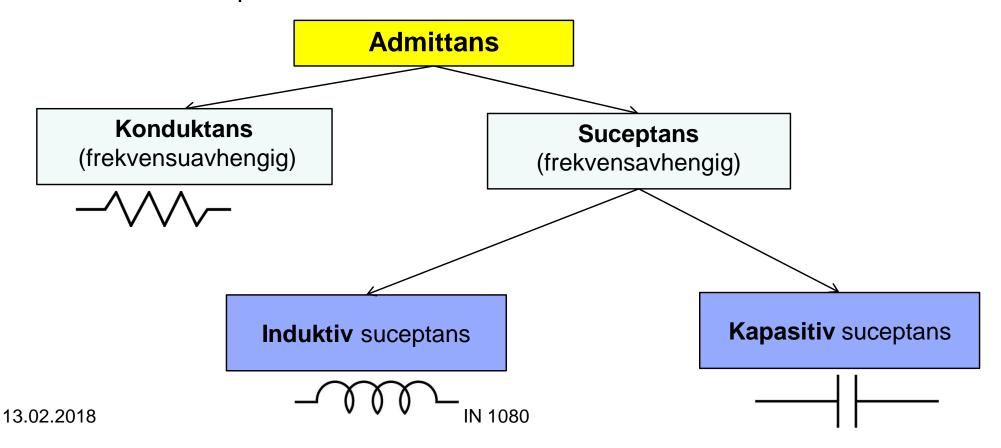
Forholdet mellom spenning og strøm (V/I) er impedans



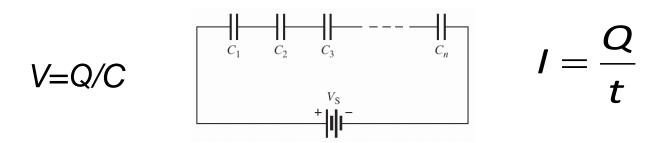
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

#### **Admittans**

• Forholdet mellom strøm og spenning (I/V) heter admittans, og er det inverse av impedans.



#### Kapasitans for seriekoblede kondensatorer

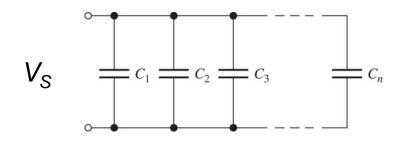


- Hver kondensator lagrer samme ladning fordi strømmen mellom hvert element er den samme:  $Q_{Tot} = Q_{C1} = Q_{C2} = \cdots = Q_{Cn}$
- KVL gir at  $V_S = V_{C1} + V_{C2} + \cdots + V_{Cn}$
- Dermed blir

$$\frac{Q}{C_{Tot}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \dots + \frac{Q}{C_n} \Rightarrow \frac{1}{C_{Tot}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \Rightarrow C_{Tot} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}}$$

• Utrykket har samme form som resistansen til resistorer i parallell

#### Kapasitans for parallellkoblede kondensatorer



- Den totale ladningen er lik summen av ladningene over hver kondensator:  $Q_{Tot} = Q_{C1} + Q_{C2} + \cdots + Q_{Cn}$
- Siden Q=CV, blir  $C_{Tot}V_S = C_1V_S + C_2V_S + \cdots + C_nV_S \Rightarrow C_{Tot} = C_1 + C_2 + \cdots + C_nV_S$
- Uttrykket har samme form som resistansen til resistorer i serie

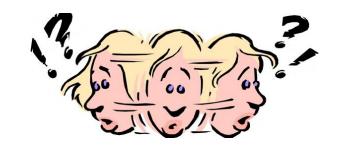
#### Kapasitiv reaktans

- En kondensator har frekvensavhengig impedans mot strøm
- . Impedansen heter *kapasitiv reaktans*  $X_c$  og er definert ved

$$X_c = \frac{1}{2\pi fC}$$

- Ut fra formelen ser man at
  - .Jo større frekvens, desto mindre reaktans
  - .Jo større kapasitans, desto mindre reaktans

 NB: I en ohmsk motstand er R et mål for resitivitet. Kapasitansen C angir derimot ikke kapasitiv reaktans



#### Kapasitiv reaktans seriell krets

 Den totale kapasitive reaktansen er summen av de individuelle reaktansene

$$X_{c(tot)} = X_{C1} + X_{C2} + \dots + X_{Cn}$$

 Formelen for den totale kapasitive reaktansen har samme form som den totale resistansen til seriekoblede ohmske motstander

#### Kapasitiv reaktans parallellkrets



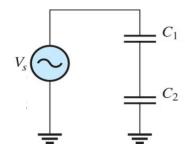
Det kan vises at den totale kapasitive reaktansen er lik

$$\frac{1}{X_{c(tot)}} = \frac{1}{X_{C1}} + \frac{1}{X_{C2}} + \dots + \frac{1}{X_{Cn}} \Leftrightarrow X_{c(tot)} = \frac{1}{\frac{1}{X_{C1}} + \frac{1}{X_{C2}} + \dots + \frac{1}{X_{Cn}}}$$

 Formelen for totale kapasitive reaktansen har sammen form som for den totale resistansen av parallellkoblede resistorer

#### Kapasitiv spenningsdeler

 En kapasitiv spenningsdeler er en spenningsdeler konstruert med kondensatorer istedenfor ohmske motstander:



Ved å bruke KVL kan man vise at spenningsdelingen er gitt av

$$V_{x} = \frac{X_{Cx}}{X_{C(tot)}} V_{S}$$

#### Respons

- En krets' oppførsel kalles også *respons*, dvs hvordan oppfører den seg for ulike former for *stimuli* eller *input*
- Avhengig av hva slags stimuli kretsen påtrykkes oppfører den seg ulikt, dvs ulik respons
- Skal se nærmere på (for RC-kretser):
  - Naturlig respons
  - Pulsrespons
  - Sinusrespons
- Det finnes andre typer respons også (ikke pensum)

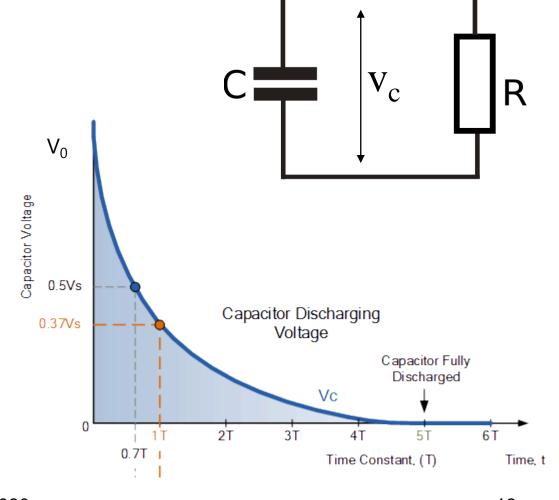
#### Naturlig respons

- Naturlig respons er oppførselen når kretsen ikke lenger er utsatt ekstern påvirkning fra strøm/spenningskilder
- Men: Vi må forutsette at det har vært en påvirkning som gjør at det f.eks fortsatt går en strøm eller at en kondensator er oppladet.
- Ved tidspunkt t=0 utsettes ikke kretsen lenger for påvirkning fra strøm/spenningskilder; responsen er bare bestemt av kretsens "nautrlige" oppførsel

### Naturlig respons for RC-krets

- Antar at kondensatoren er oppladet ved tiden t=0 og har spenningen V<sub>0</sub>
- Ønsker å finne et uttrykk for hvordan v<sub>c</sub> endrer seg over tid
- Benytter Kirchhoffs strømlov på strømmene gjennom R og V

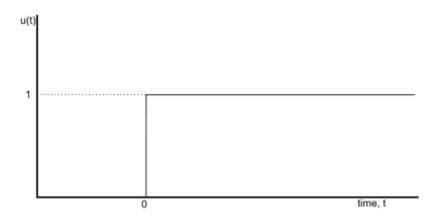
$$v_c = V_0 e^{-\frac{t}{RC}} = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$



## Pulsrespons for RC-krets (1)

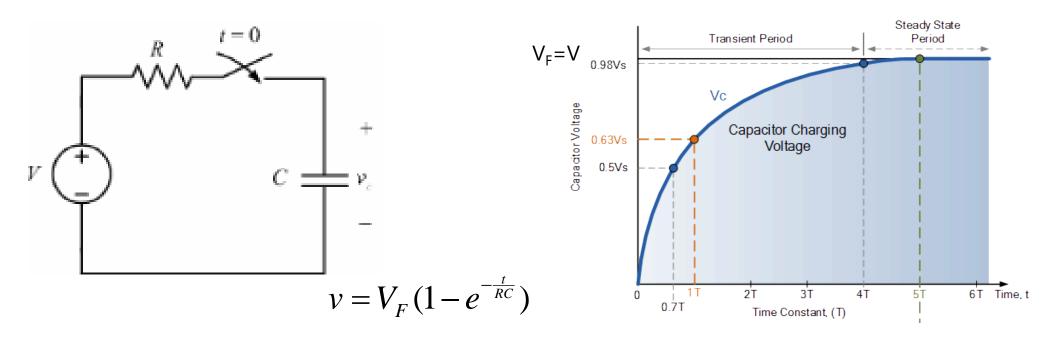
- Basert på den naturlige responsen kan vi finne pulsresponsen til en RC-krets
- Pulsresponsen er responsen på en spenningskilde som lager følgende spenning:

$$V = 0, t < 0$$
$$V = V_{s}, t \ge 0$$



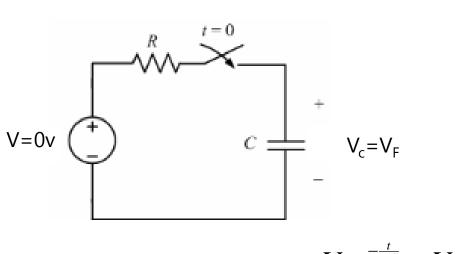
### Pulsrespons for RC-krets (2)

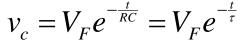
 Step-respons kan lages ved en ideel bryter som kobler en dc-kilde med spenning V til kretsen ved tidspunkt t=0. Antar v<sub>c</sub>=0v over kondensatoren for t<0</li>

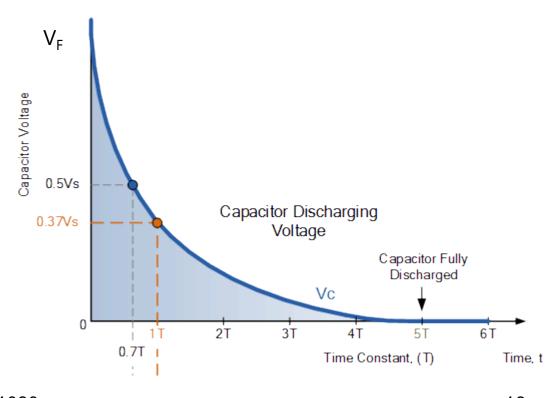


## Pulsrespons for RC-krets (3)

- Vi kan også lage en step-respons som går fra V<sub>F</sub> til 0 ved t=0
- Dette gir samme respons som for "naturlig respons"-tilfellet

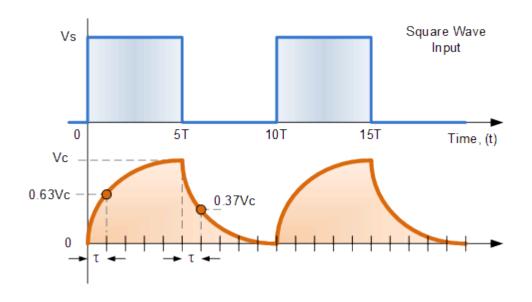






### Pulsrespons for RC-krets (4)

 Vi kan nå generalisere til en generell puls og ta hensyn til at kondensatoren eventuelt ikke lades helt opp/helt ut



$$v = V_F + (V_i - V_F)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i = I_F + (I_i - I_F)e^{-\frac{t}{\tau}}$$
Generelt

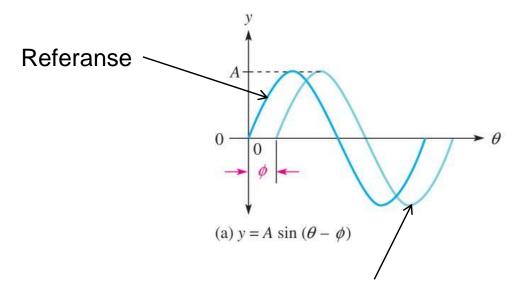
$$v = V_F (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$
 Oppladning fra 0 til  $V_F$ 

$$v = V_F e^{-\frac{t}{RC}} = V_F e^{-\frac{t}{\tau}}$$
 Utladning fra  $V_F$  til 0

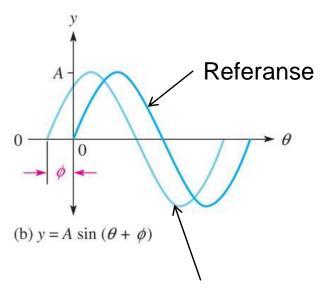
13.02.2018 IN 1080 17

## Fasedreining

• Hvis et sinussignal forskyves i tid oppstår en faseforskyvning eller fasedreining  $\varphi$ 



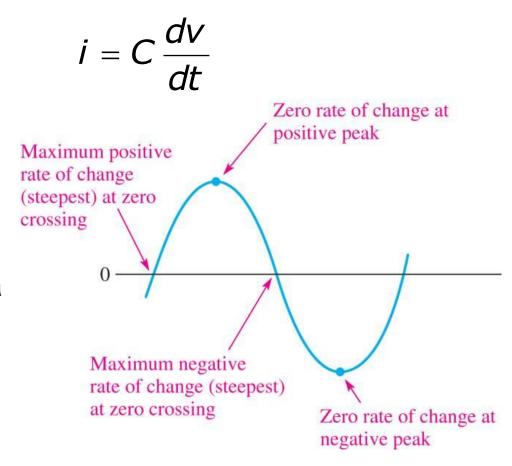
Kurven er forskjøvet til høyre, φ er negativ og forsinket (eng: "lags") i forhold til referansen



Kurven er forskjøvet til venstre, φ er positiv og *leder (eng: "leads")* i forhold til referansen

#### Faseforhold mellom strøm og spenning

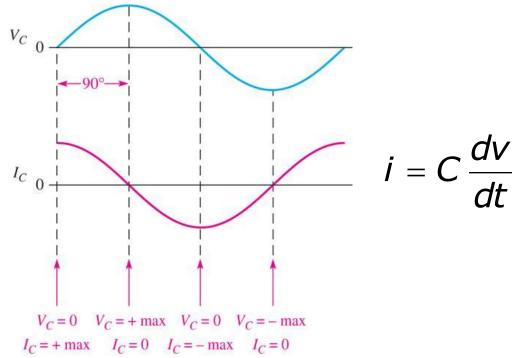
- I en resistor er strømmen
  gjennom og spenningen over i
  fase, dvs φ=0
- I en kondensator er det fasedreining mellom strøm og spenning
- Fasedreiningen kan forstås ved å se på når endringen i en sinuskurve er størst og minst



#### Faseforhold mellom strøm og spenning (forts)

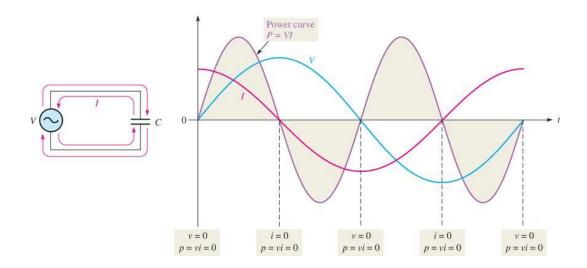
 Strømmen gjennom en kondensator er størst når endringen i spenningen over den er størst, og minst når endringen i spenningen er minst

- Når spenningen er på det største (minste) er endringen lik 0, dvs strømmen lik 0
- Når spenningen er 0, er endringen størst, dvs strømmen er størst
- Strømmen er derfor faseforskøvet med +90 grader i forhold til spenningen (dvs. til høyre)



#### Effekt i kondensatorer

- En ideel kondensatoer vil ikke forbruke energi, men kun lagre og deretter avgi energi
- Effekten som lagres når strøm og spenning har samme polaritet vil avgis når strøm og spenning har motsatt polaritet



#### **RC-kretser**

 RC-kretser består av én eller flere resistorer og én eller flere kondensatorer

- RC-kretser er enten serielle eller parallelle, dvs en resistor og en kondensator i serie eller i parallell
- Større og mer kompliserte kretser kan deles opp i mindre serielle og/eller parallelle kretser som analyseres separat
- Lettest å analysere oppførselen for sinussignaler

#### Serielle RC-kretser

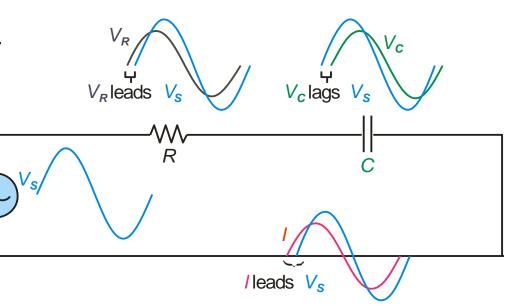


- I en ren resistiv krets er strøm og spenning i fase, dvs  $\varphi=0$
- I en seriell RC-krets vil det være faseforskyvning mellom
  - Spenningen over hvert element i forhold til de andre elementene
  - Spenningene over elementene i forhold til strømmen
- Strømmen gjennom alle elementene vil være i fase
- Avhengig av forholdet mellom resistansen og den kapasitive reaktansen, vil faseforskyvningen ligge mellom 0° og 90°

### Serielle RC-kretser (forts)

En seriell RC-krets består av minst én resistor og minst én kondensator

 Spenningen V<sub>R</sub> over motstanden R er i fase med strømmen I, og leder over V<sub>s</sub>, dvs φ>0

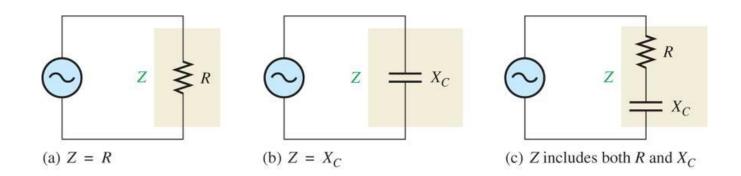


.  $V_R$  og  $V_C$  har 90° fasedreining

. For å finne fasedreiningen mellom  $V_S$  og  $V_C$  eller mellom  $V_S$  og I må man beregne den totale impedansen i kretsen

#### Total impedans i seriell RC-krets

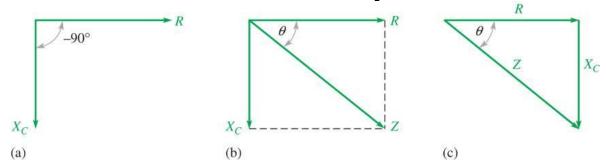
- Z er den samlede impedansen mot vekselstrøm i en krets
- Impedansen har en frekvensuavhengig resistiv del R og en frekvensavhengig reaktiv del X<sub>C</sub>



 Den resistive og reaktive delen har en fasedreining på -90° i forhold til hverandre

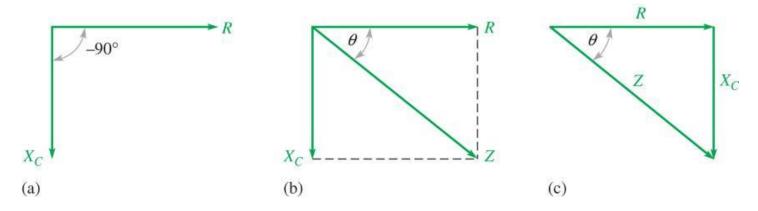
### Total impedans i seriell RC-krets (forts)

- Den totale impedansen er gitt av Z=R+X<sub>c</sub>, R og X<sub>c</sub> er vektorer («phasors»).
- **Z** finner man ved vektorsummasjon



- Siden Z er en vektor har den både en fasevinkel θ og en magnitude
- $\boldsymbol{Z}$  har fortsatt Ohm ( $\Omega$ ) som enhet
- Skal senere se hvordan bla total impedans enklere beregnes i det komplekse planet

#### Total impedans i seriell RC-krets (forts)



Magnituden er lengden til Z og finnes ved Pythagoras:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$$

Fasen θ finnes ved å beregne invers tangens til vinkelen

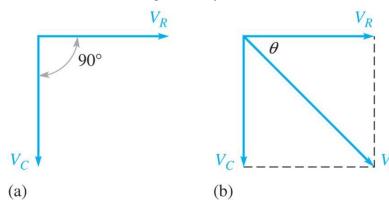
$$\theta = \tan^{-1}(\frac{X_C}{R})$$

#### Serielle kretser og Ohms lov, KVL og KCL

- Når strøm, spenning og impedans er på vektorform, vil fortsatt Ohms lov, KVL og KCL gjelde
  - Forutsatt at det er korte ledere/lave frekvenser
- Når man beregner faktiske ampere-, volt- og Ohmverdier samt fasedreining gjelder disse kun for en bestemt frekvens
- Andre frekvenser gir andre Z-, I- og V-verdier og ulik fasedreining  $\varphi$

### Faseforskjell strøm - spenning

- I en seriell RC-krets er strømmen gjennom resistoren og kondensatoren den samme
- For å finne sammenhengen mellom  $V_s$ ,  $V_R$  og  $V_C$  bruker man KVL og vektoraddisjon (samme som for å finne Z)

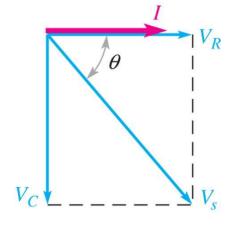


$$V_S = \sqrt{V_R^2 + V_C^2} \qquad \theta = \tan^{-1}(\frac{V_C}{V_R})$$

## Faseforskjell strøm - spenning (forts)

• Siden strømmen I og resistorspenning  $V_R$  er i fase, er fasedreiningen mellom I og  $V_S$  lik den mellom  $V_R$  og  $V_S$  eller  $X_C$ 

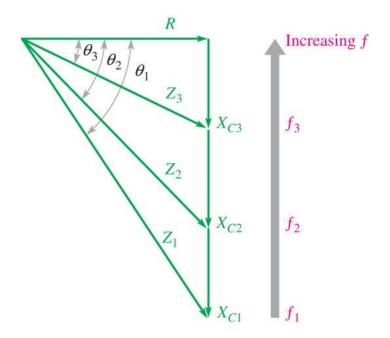
og **R** 



$$\theta = \tan^{-1}(\frac{X_C}{R}) = \tan^{-1}(\frac{V_C}{V_R})$$

#### Impedans, fasedreining og frekvens

 Diagrammet under oppsummerer sammenhengen mellom impedans, frekvens og fasedreining



#### UiO: Institutt for informatikk

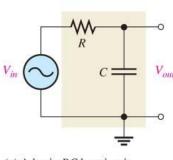
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

#### RC lead/lag kretser

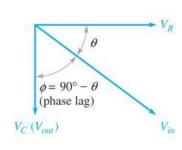
RC «lead»- og «lag»-kretser er faseskiftkretser

• I en RC «lag»-krets er utspenningen  $V_{out}$  forskjøvet  $\varphi$  grader i

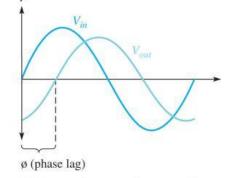
forhold til  $V_{in}$ 



(a) A basic RC lag circuit



(b) Phasor voltage diagram showing the phase lag between  $V_{in}$  and  $V_{out}$ 



(c) Input and output voltage waveforms

- $V_{out}$  er lik  $V_c$ ,  $V_{in}$  lik  $V_s$  og  $\varphi=90^{\circ}-\theta$
- Kretsen kan også ses på som en spenningsdeler hvor

$$\varphi = 90^{\circ} - \tan^{-1}(\frac{X_C}{R})$$

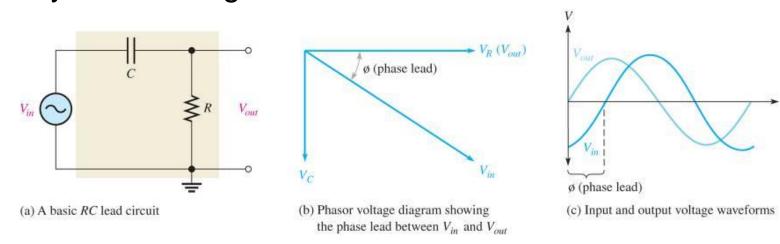
IN 1080

$$V_{out} = \left(\frac{X_C}{\sqrt{R^2 + X_C^2}}\right) V_{in}$$

13.02.2018

## RC lead/lag kretser (forts)

Ved å bytte om R og C får man en RC-«lead»-krets



Utspenningen tas over resistoren og  $\varphi$  og  $V_{out}$  er her gitt av

$$R \log X_C$$

$$\varphi = \tan^{-1}(\frac{X_C}{R})$$

$$V_{out} = \left(\frac{R}{\sqrt{R^2 + X_C^R}}\right) V_{in}$$

UiO: Institutt for informatikk

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

## Oppsummeringsspørsmål

• Spørsmål fra forelesningene 4 og 5