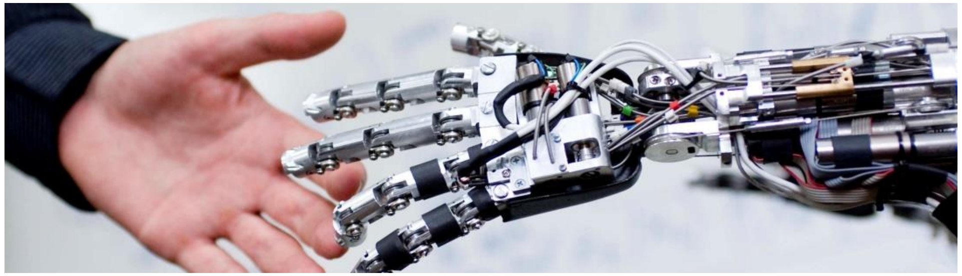
UiO : Institutt for informatikk
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet



Forelesning nr.3 IN 1080 Mekatronikk

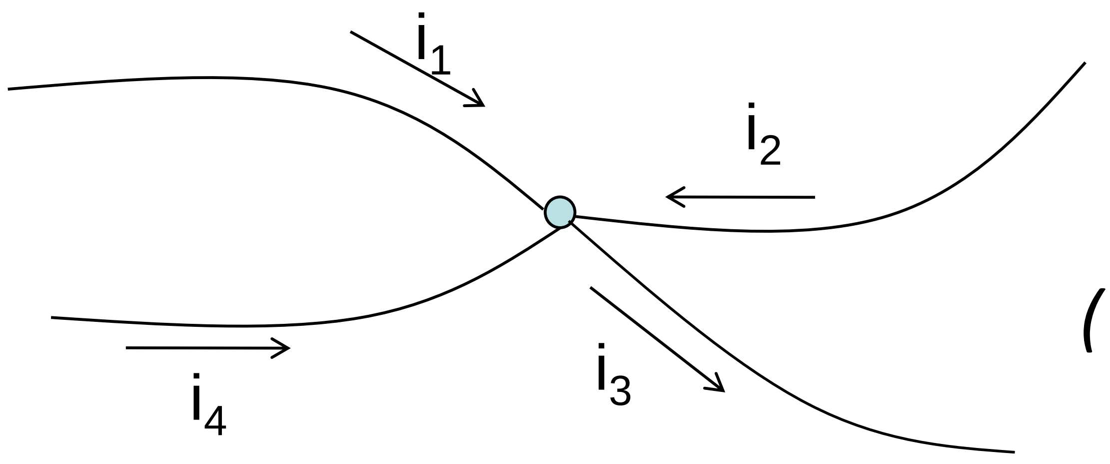
Parallelle og parallell-serielle kretser
Kirchhoffs strømlov

Dagens temaer

- Kirchhoffs strømlov
- Parallelle kretser
- Kretser med parallelle og serielle stier
- Effekt i parallelle kretser
- Temaene hentes fra Kapittel 5.1-5.7 og 6.1-6.5

Kirchhoffs strømlov (KCL)

- Den algebraiske summen av alle strømmene som går inn mot (eller ut av) en node er lik 0
  - Hva er den fysiske begrunnelsen for at dette må være riktig?



$$i_1 + i_2 + (-i_3) + i_4 = 0$$

$$(-i_1) + (-i_2) + i_3 + (-i_4) = 0$$

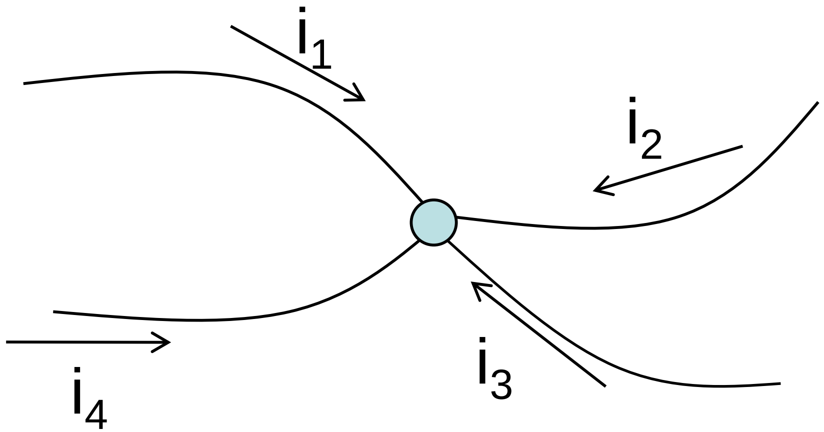
Kirchhoffs strømlov (KCL) forts.

- Det generelle tilfellet er gitt av

$$\sum_{n=1}^{N} i_n = 0$$

- Forutsetningen er at det er definert en referanseretning på strømmene
  - Enten peker alle strømmene inn mot noden, eller ut av noden
  - Strømmer som går motsatt av referanseretningen må multipliseres med -1

Spørsmål

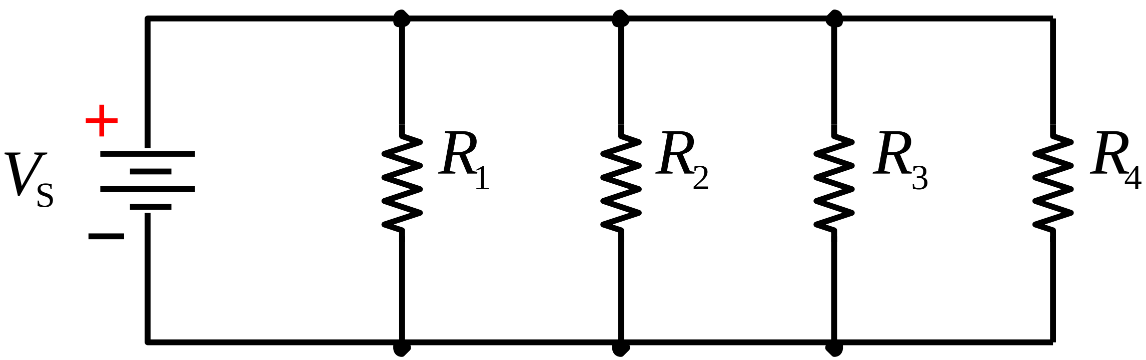


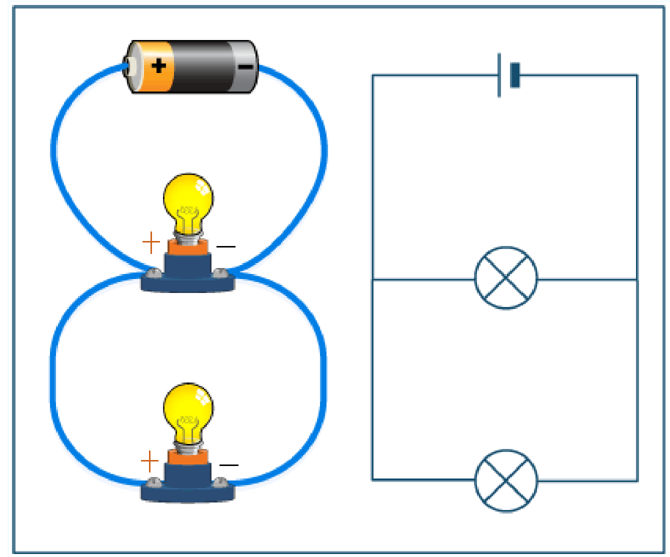
1) Finn verdien til i_1 når $i_2 = 2A$, $i_3 = -3A$ og $i_4 = 0,5A$

2) Anta nå at strømretningene på bildet er korrekte: Hvilke verdier har i_1 ,i_2, i_3 og i_4 i dette tilfellet?

Parallellkrets

- En *parallellkrets* har mer enn én strømvei mellom terminalene på en spenningskilde

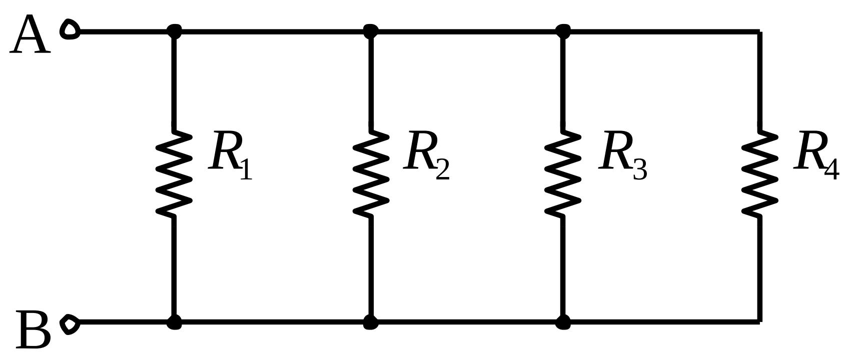




- Derimot: Alle elementene har samme spenning over seg

Resistorer i parallell

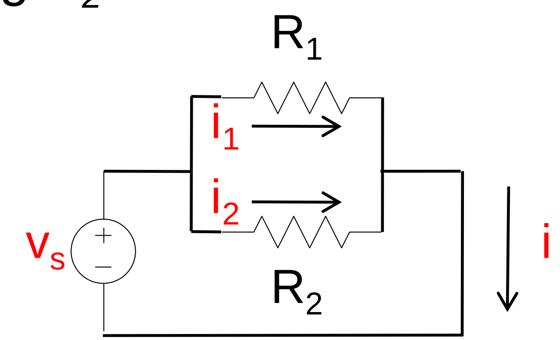
- Resistorer er koblet i *parallell* hvis endepunktene er koblet sammen i det samme nodeparet



- En krets kan ha resistorer som *lokalt sett* er parallelle (eventuelt serielle), og del av en sammensatt topologi som verken er parallell eller seriell

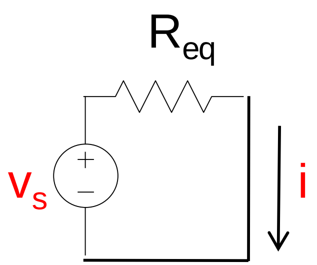
Ekvivalent parallellmotstand – 2 resistorer

- Ønsker å finne samlet motstand R_{eq} uttrykt ved R_1 og R_2
- Hvis R_{eq} skal være lik $R_1 \parallel R_2$, må spenningen over R_{eq} være lik spenningen over R_1 og R_2



$$i = i_1 + i_2 \wedge i_1 = \frac{v_s}{R_1} \wedge i_2 = \frac{v_s}{R_2}$$

$$i = \frac{v_s}{R_1} + \frac{v_s}{R_2} = v_s\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

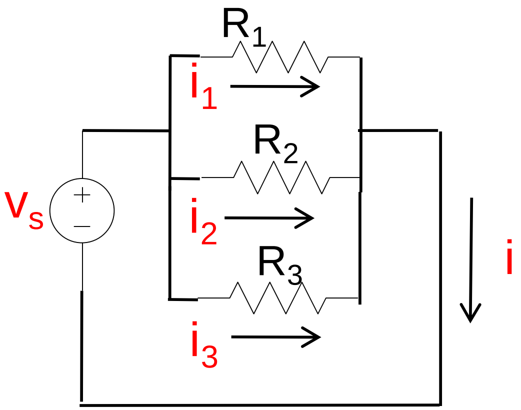


$$i = \frac{v_s}{R_{eq}} = v_s\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow \boldsymbol{R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$$

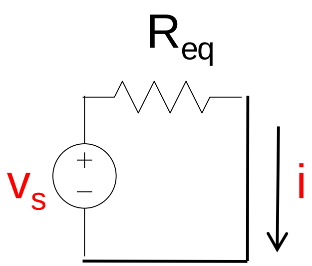
Ekvivalent parallellmotstand – 3 resistorer

- Benytter samme teknikken som for 2 parallelle resistorer:



$$i = i_1 + i_2 + i_3 \wedge i_1 = \frac{v_s}{R_1} \wedge i_2 = \frac{v_s}{R_2} \wedge i_3 = \frac{v_s}{R_3}$$

$$i = \frac{v_s}{R_1} + \frac{v_s}{R_2} + \frac{v_s}{R_3} = v_s\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)$$



$$i = \frac{v_s}{R_{eq}} = v_s\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \Rightarrow \boldsymbol{R_{eq}} = \frac{\boldsymbol{R_1 R_2 R_3}}{\boldsymbol{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}}$$

Samlet resistans i en parallellkrets

- Den samlede *resistansen* R_T i en parallellkrets med *n* resistorer er lik summen av den *inverse* av resistansen til hvert enkelt element

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}$$

- K*onduktansen* til en parallellkrets er lik summen av konduktansen til enkeltelementene:

$$G_T = G_1 + G_2 + \cdots + G_n$$

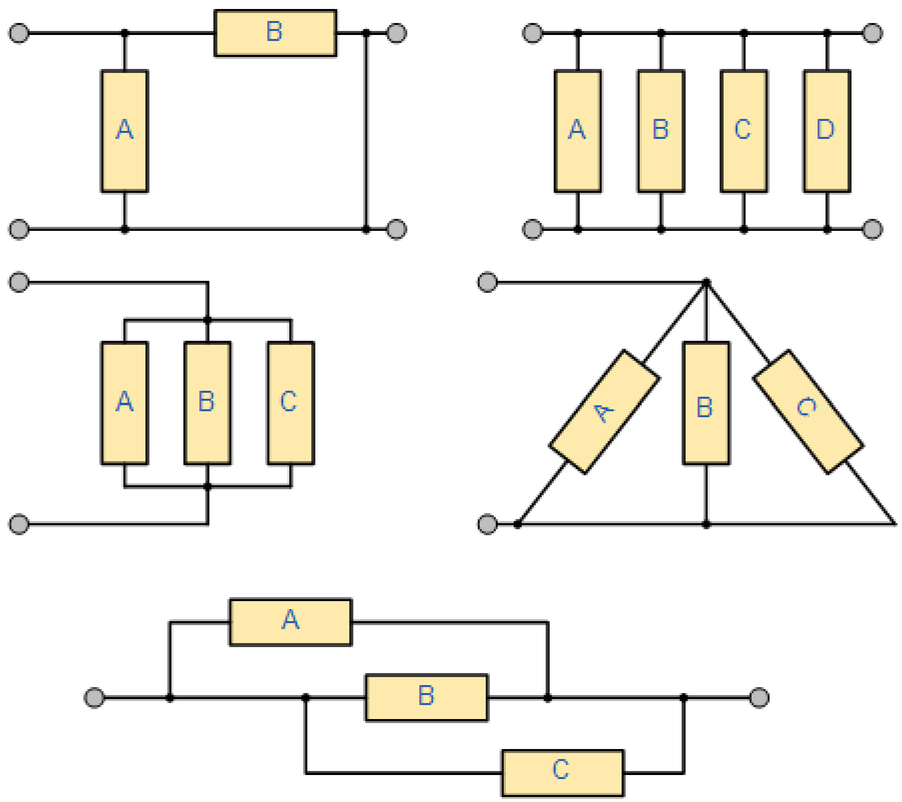
Samlet resistans i en parallellkrets (forts)

- Hvis alle *n* resistorer har samme Ohm-verdi *R* blir den totale resistansen i en parallellkobling

$$R_T = \frac{R}{n}$$

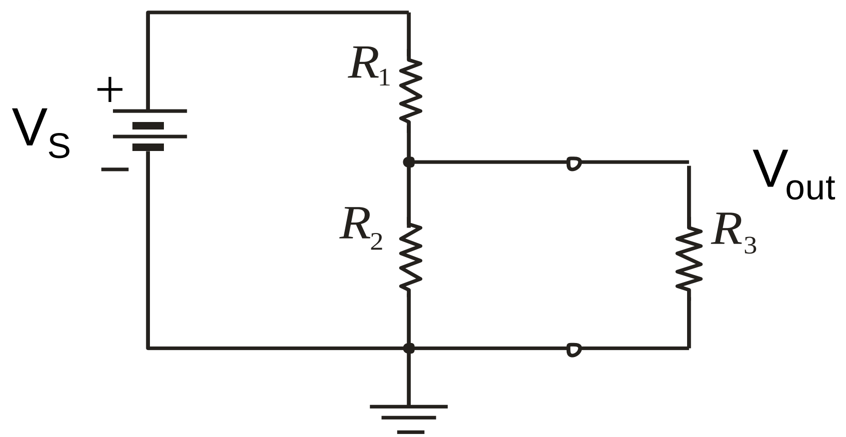
- Notasjonen for resistorer i parallell er

$$R_n \,||\, R_m$$



Spenningsdeler med lastmotstand

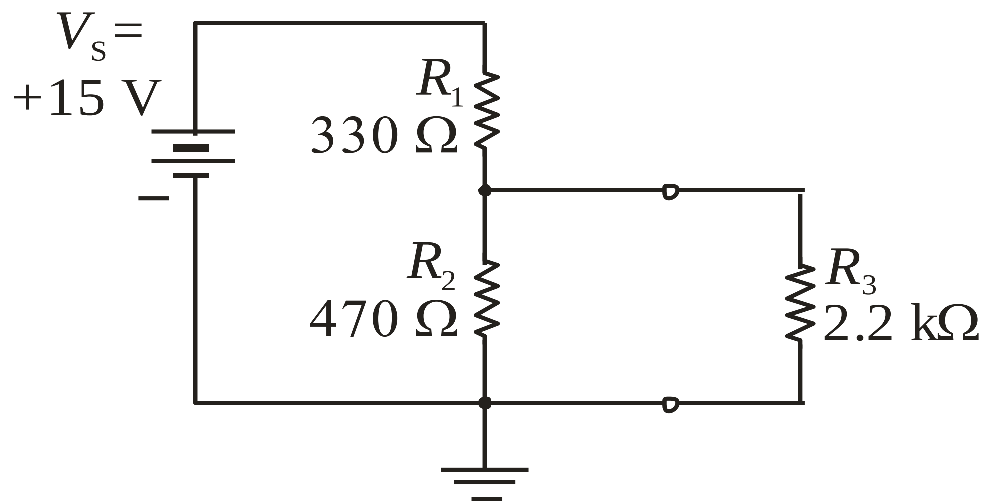
- Hvis en spenningsdeler brukes som forsyningsspenning til f.eks en resistor, vil spenningen synke



- Spenningen V_{out} er nå $V_{out} = \frac{R_2 || R_3}{R_1 + R_2 || R_3} V_S$

- Siden $R_2 || R_3 < R_2$, så synker V_{out}

Eksempel

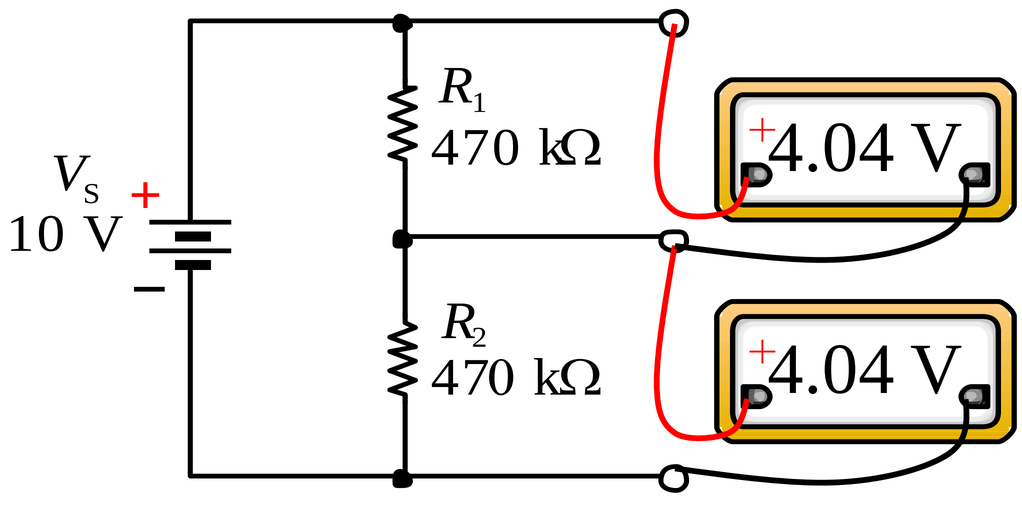


- **Uten** R_3 er $V_{out} = V_S \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 15v \frac{470}{330 + 470} \Omega = 8{,}81v$
- **Med** R_3 er $V_{out} = V_S \frac{R_2 || R_3}{R_1 + R_2 || R_3} = 15v \frac{470||2200}{330 + 470||2200} \Omega = 15v \frac{387}{330 + 387} \Omega = 8{,}10v$

Påvirkning av spenningmåling

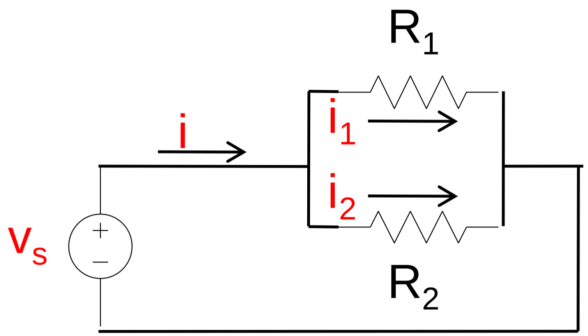
- Et voltmeter som kobles i parallell med elementet som det skal måles spenning over, vil innføre en parallellmotstand

- Hva er den (teoretiske) spenningen i noden mellom R_1 og R_2 ***uten*** voltmeter?
- Her måles spenningen med **ett** voltmeter enten over R_1 eller over R_2
- Hva skjer hvis det brukes **to** voltmetre som måler spenningen over R_1 og R_2 samtidig?



Strømdivisjon

- Noen ganger trenger man å kunne skalere (dividere) en strøm med en konstant faktor

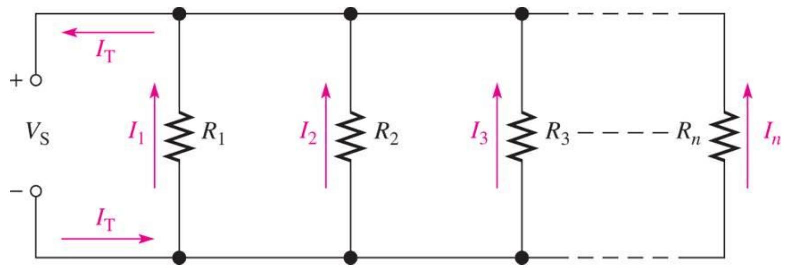


$$i_1 = \frac{v_s}{R_1} = \frac{i(R_1 \,||\, R_2)}{R_1} \Rightarrow i_1 = i\frac{R_1R_2}{R_1(R_1+R_2)} = i\frac{R_2}{R_1+R_2}$$

$$i_2 = \frac{v_s}{R_2} = \frac{i(R_1 \,||\, R_2)}{R_2} \Rightarrow i_2 = i\frac{R_1R_2}{R_2(R_1+R_2)} = i\frac{R_1}{R_1+R_2}$$

Strømdivisjon (forts)

- Uttrykket for strømdivisjon kan generaliseres til å gjelde *n* parallellkoblede grener



- Strømmen I_x gjennom én gren er gitt av

$$V_S = I_x R_x \Rightarrow I_x = \frac{V_S}{R_x}$$

- Samtidig er V_S gitt av den totale strømmen I_T ganget med den totale resistansen R_T

$$I_x = \frac{V_S}{R_x} = \frac{I_T R_T}{Rx} = \left(\frac{R_T}{R_x}\right) I_T$$

Effekt i parallellkretser

- Den totale effekten P_T for n resistorer i parallell er gitt av

$$P_T = P_1 + P_2 + \cdots + P_n$$

- Uttrykt ved strøm, spenning og resistans kan effekten skrives som

$$P_T = V_S I_T = I_T^2 R_T = \frac{V_S^2}{R_T}$$

Seriell-parallellkretser

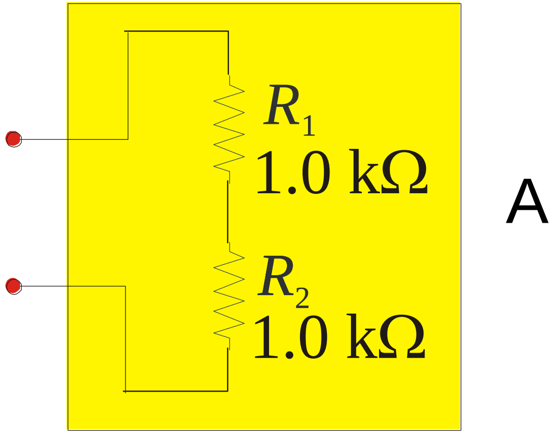
- De fleste kretser er en blanding av serie- og parallell-koblede elementer
- Man ønsker nesten alltid å bruke færrest mulig komponenter
- For å forenkle må man identifisere hvilke elementer som er i serie og i parallell, og benytte formlene for resistorer i hhv serie og parallell

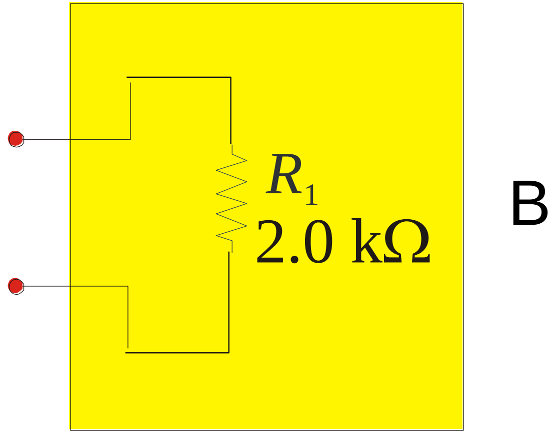
$$R_S = R_1 + R_2 + \cdots + R_n$$

$$\frac{1}{R_P} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}$$

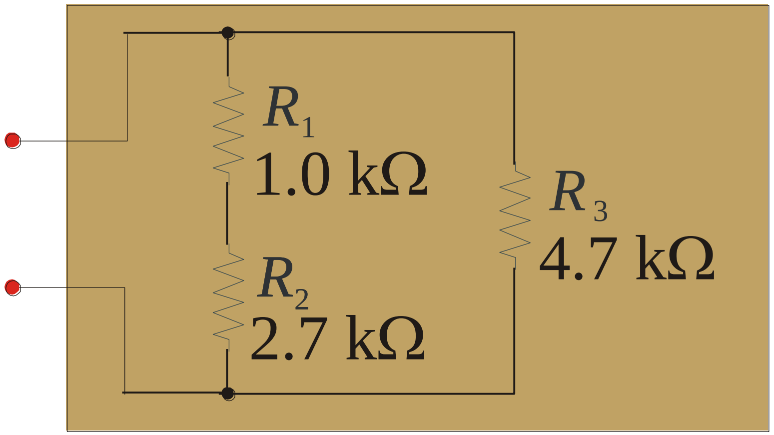
Seriell-parallellkretser (forts)

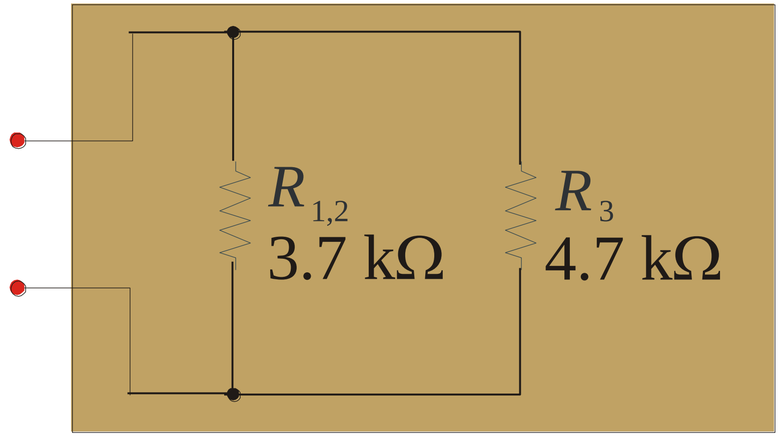
- Kretser kalles *ekvivalente* hvis de har de samme elektriske egenskapene mellom et nodepar
- Sett fra «utsiden» har krets A og B de samme elektrisk egenskapene (i dette tilfellet samme resistans)

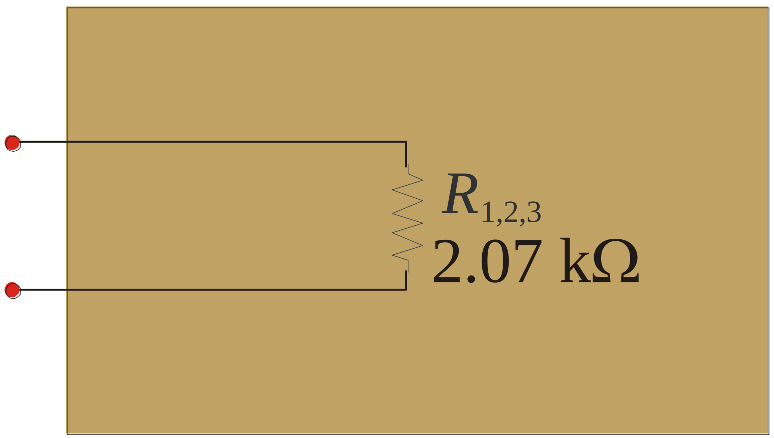




Seriell-parallellkretser (forts)







- Målt mellom de røde terminalene er det ikke mulig å avgjøre hva som er forskjellen mellom disse kretsene

Analyse av seriell-parallelle kretser

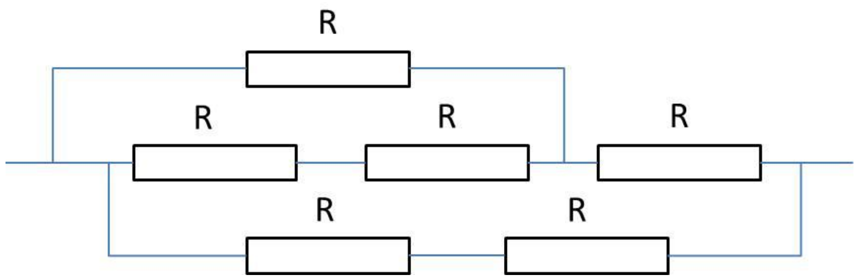
- Man må ofte finne strømmer og spenninger i noder og grener og gjennom seriell- og parallellkoblede elementer
- Ukjente strømmer og spenninger kan være avhengige av andre (kjente) strømmer og spenninger i kretsen
- Ved å bruke KVL, KCL og Ohms lov kan man i mange tilfeller finne de ukjente strømmene og spenningene
- Ved å bruke Nortons og Thévenins teoremer kan kompliserte delkretser erstattes med hhv én motstand i serie eller parallell med én strøm- eller spenningskilde

Eksempel 1

- Fra eksamen 2015

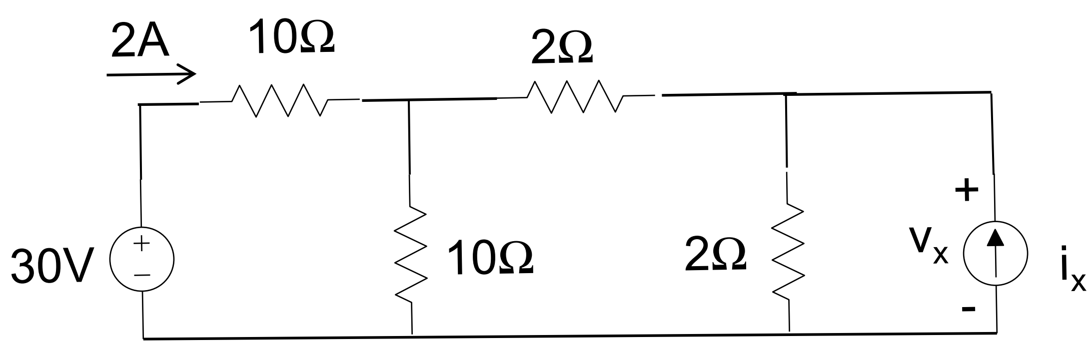
  i) Hvor mange noder har kretsen?

  ii) Hva er den totale resistansen hvis R=22kΩ?



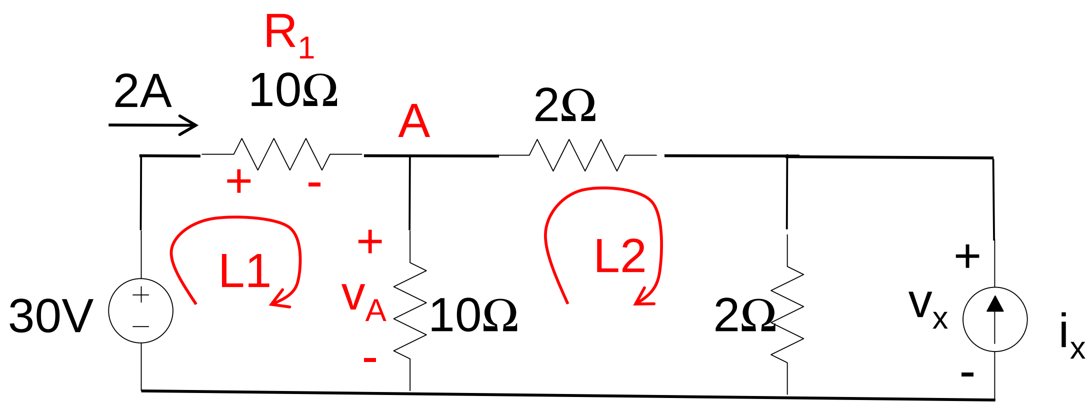
Eksempel 2

- Finn spenningen v_x i kretsen under



- *Forberedelse:* Sett navn på relevante noder, løkker, strømmer, spenninger og elementer (iterativ prosess)

Eksempel 2 forts



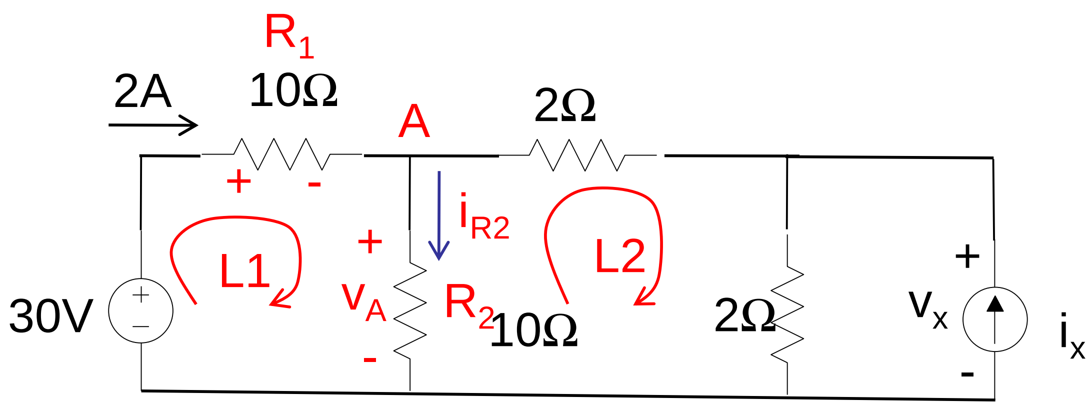
- *Steg 1*: Finn v_A ved å bruke KVL på løkke L1:

$$-30v + v_{R1} + v_A = 0 \Rightarrow$$

$$-30v + 10\Omega \times 2A + v_A = 0 \Rightarrow$$

$$v_A = 10v$$

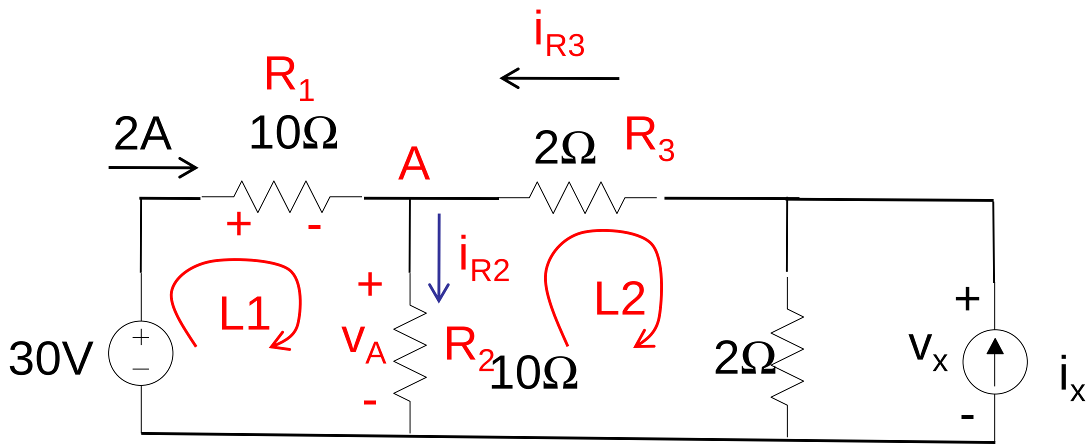
Eksempel 2 forts



- *Steg 3*: Finn i_{R2} ved å bruke Ohms lov:

$$i_{R2} = \frac{10v}{10\Omega} = 1A$$

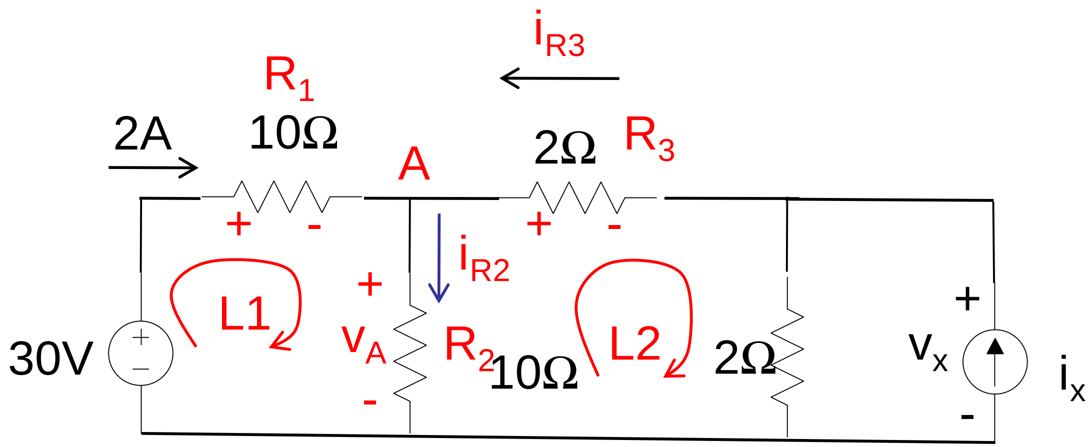
Eksempel 2 forts



- *Steg 4:* Bruk KCL mot node A

$$2A + i_{R3} = i_{R2} \Rightarrow i_{R3} = 1A - 2A = -1A$$

Eksempel 2 forts



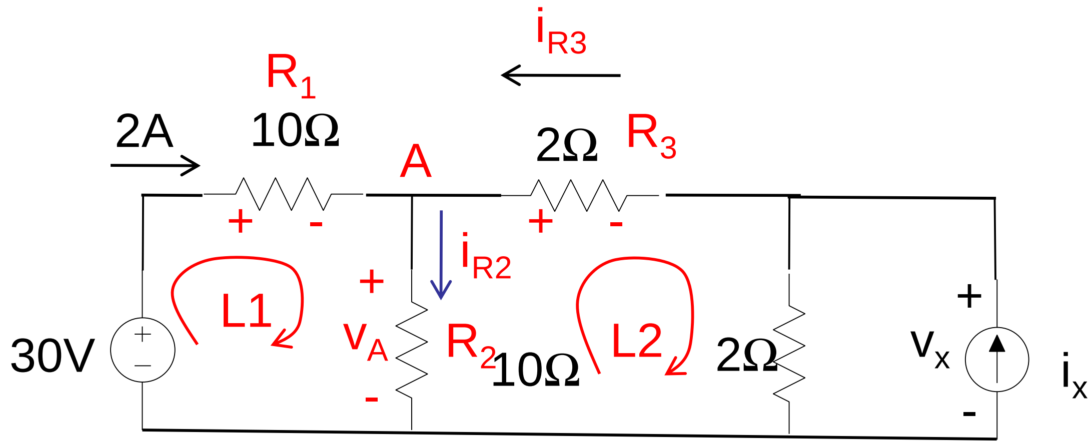
- *Steg 5:* Bruk KVL på løkke L2

$$-v_A + v_{R3} + v_x = 0$$

- Bruker Ohms lov for å finne V_{R3} som da gir

$$-10v + 2\Omega \times 1A + v_x = 0 \Rightarrow v_x = 8v$$

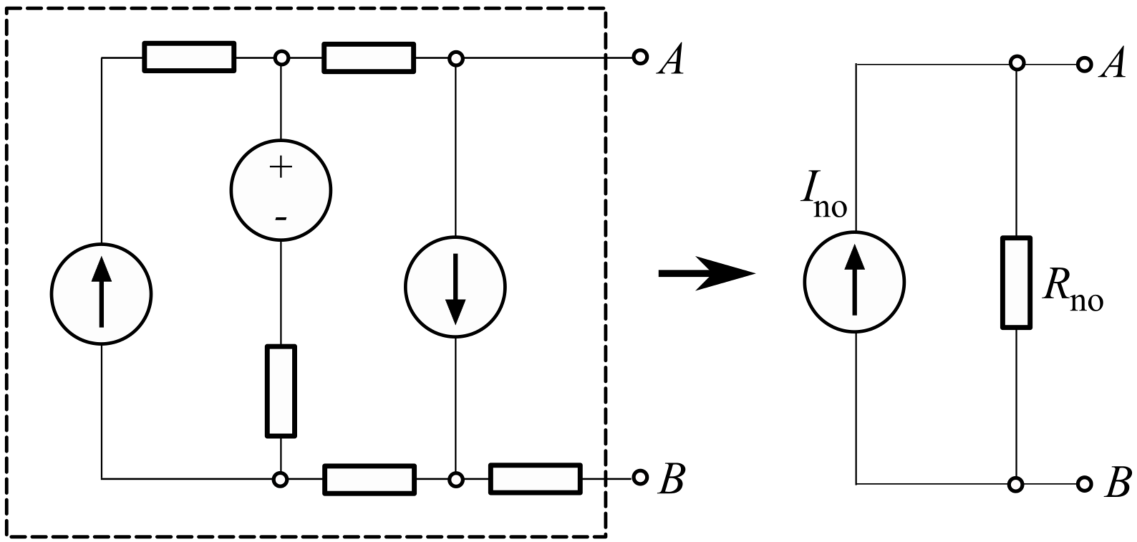
Eksempel 2 forts



- Vi fant den ukjente spenningen ved bruk av KVL, KCL og Ohms lov
- Node og mesh-analyse (Nortons/Thévenins teoremer og superposisjon) er mer systematiske metoder
- For større kretser brukes simuleringsprogrammer, f.eks. SPICE

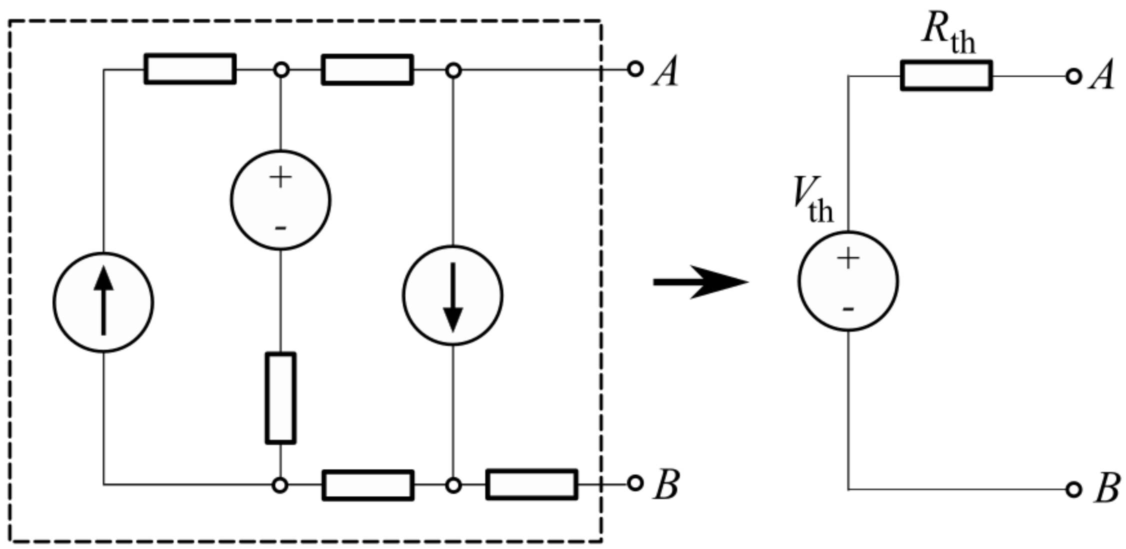
Nortons teorem

- «Et hvert lineært to-terminalers dc-nettverk bestående av strømkilder, spenningskilder og resistorer kan erstattes av en ekvivalent krets med én strømkilde i parallell med én resistor»



Thévenins teorem

- «Et hvert lineært to-terminalers dc-nettverk bestående av strømkilder, spenningskilder og resistorer kan erstattes av en ekvivalent krets med én spenningskilde i serie med én resistor»



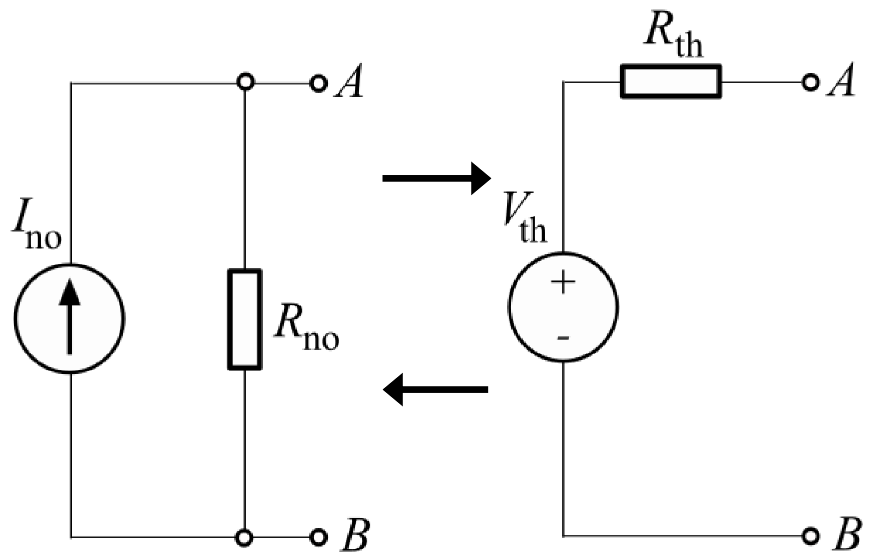
Konvertering mellom Thévenin og Norton

- En Thévenin-ekvivalent krets kan konverteres til en Norton-ekvivalent krets og omvendt

$$R_{th} = R_{no}$$

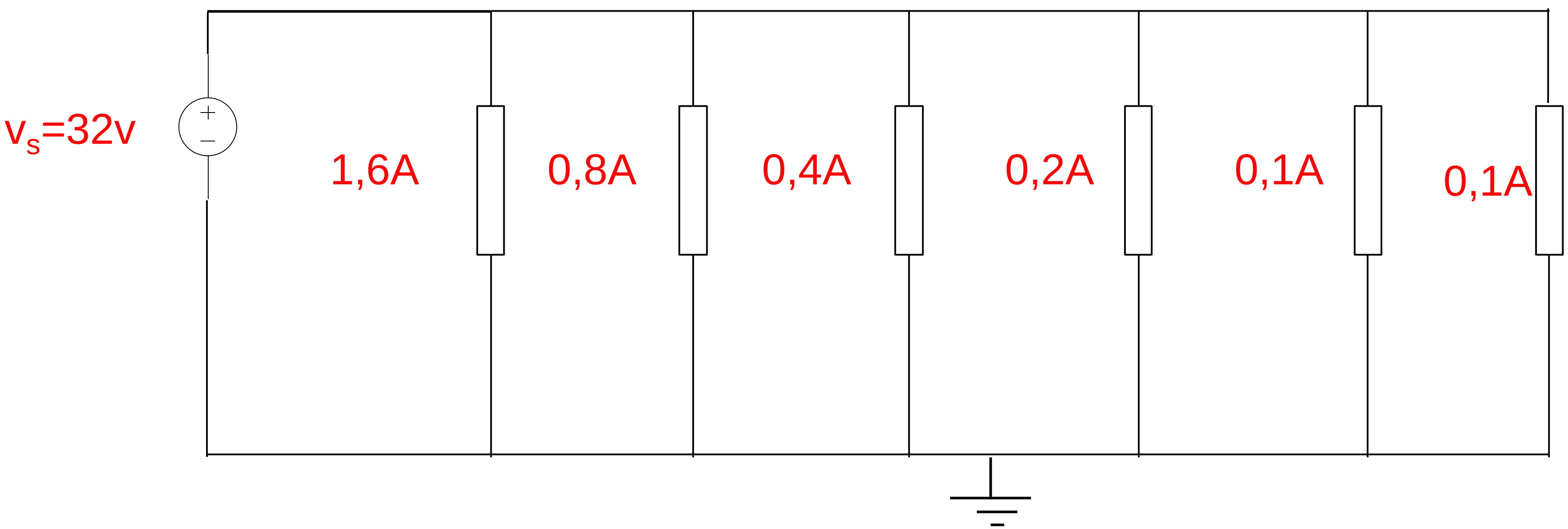
$$V_{th} = I_{no} R_{no}$$

$$\frac{V_{th}}{R_{th}} = I_{no}$$



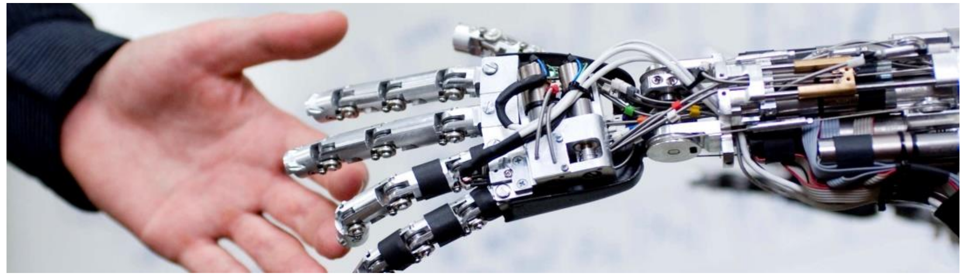
Nøtt til neste gang

- Gitt en krets som skal brukes til å lage 6 strømmer slik vist:



- Hvis du bare har én motstandsstørrelse tilgjengelig, hvor stor må denne være for at du skal klare deg med *så få* motstander som mulig?

UiO : Institutt for informatikk
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet



Oppsummeringsspørsmål

Spørsmål fra forelesningene 2 og 3