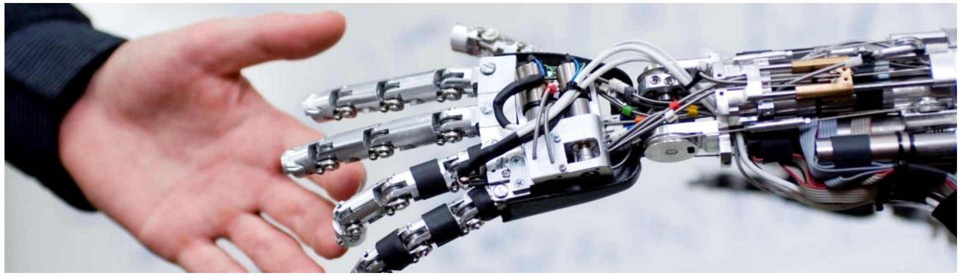
UiO : Institutt for informatikk
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet



Forelesning nr.4 IN 1080 Mekatronikk

Vekselstrøm
Kondensatorer

Dagens temaer

- Mer om Thévenins og Nortons teoremer
- Sinusformede spenninger og strømmer
- Firkant-, puls- og sagtannsbølger
- Effekt i vekselstrømkretser
- Kondensator
- Temaene hentes fra Kapittel 8.1-8.5, 8.8 og 9.1-9.4

Thévenin og Norton

- Teoremene gjør det mulig å forenkle lineære kretser med strøm/spenningskilder og passive kretselementer:
  - Thévenin: En vilkårlig krets kan erstattes av en spenningskilde V_{th} i serie med en resistor R_{th}
  - Norton: En vilkårlig krets kan erstattes av en strømkilde I_{no} i parallell med en resistor R_{no}
  - De forenklede kretsene kalles hhv Thévenin- og Norton-ekvivalenter
  - Har man funnet den ene ekvivalenten er det enkelt å finne den andre vha formler
- Gjelder også for ac kretser med elementer med frekvensavhengig motstand (impedans), men mer komplisert

Thévenins teorem: Fremgangsmåte (1)

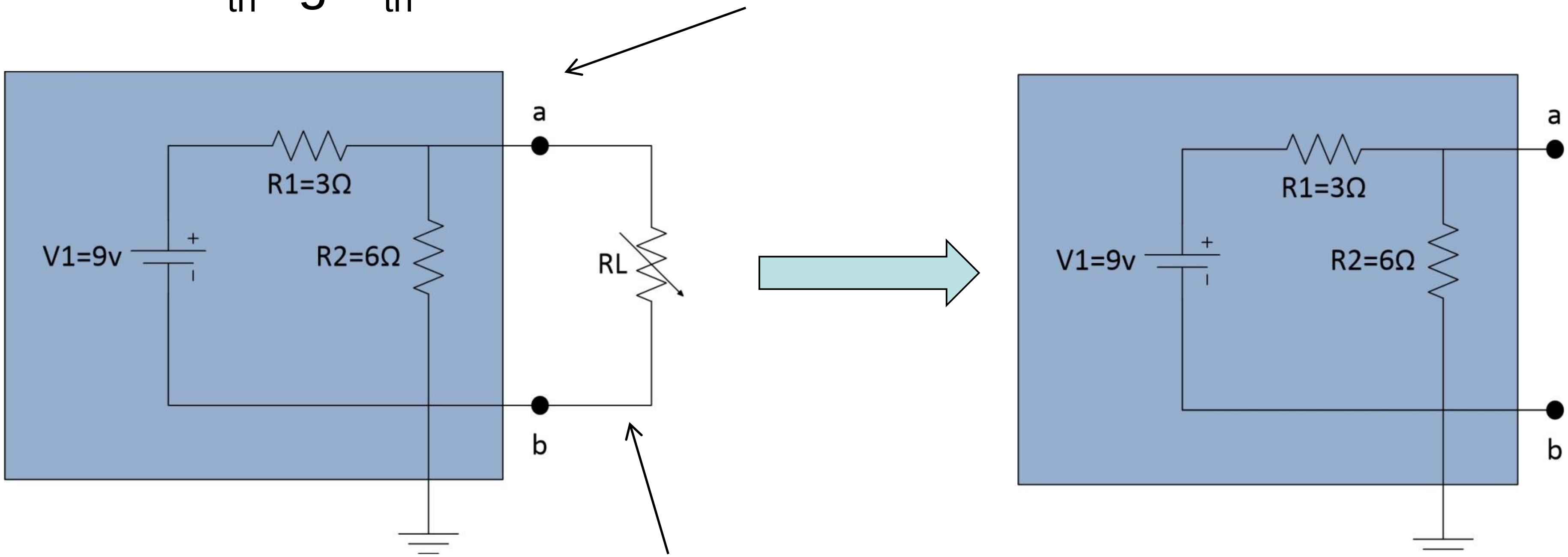
- Forarbeid:
  - Identifiser og marker den delen av kretsen som skal erstattes med ekvivalenten
  - Sett navn på de to tilkoblingspunktene mellom delen av kretsen som skal erstattes av ekvivalenten og resten av kretsen
- Thévenin-resistansen R_{th}:
  - Sett alle kilder til null (spenningskilder kortsluttes og strømkilder åpnes)
  - R_{th} er resistansen sett mellom de to terminalene etter at kildene er satt til null

Thévenins teorem: Fremgangsmåte (2)

- Thévenin-spenningen V_{th}:
  - Sett alle kilder tilbake
  - Beregn V_{th} mellom de to terminalene uten at resten av kretsen er tilkoblet
- Thévenin-ekvivalenten med spenningskilden V_{th} og resistoren R_{th} settes inn og erstatter den kompliserte delen

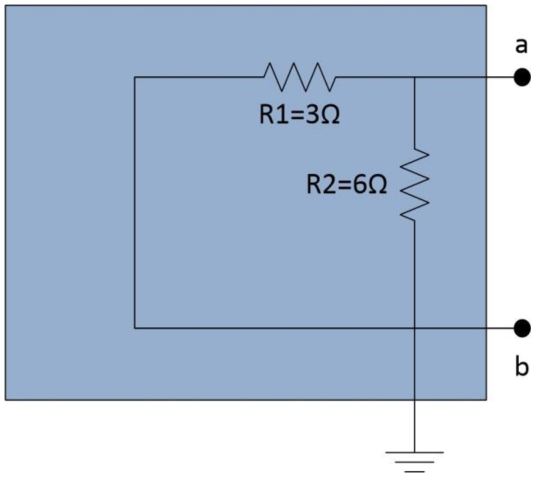
Thévenins teorem: Eksempel (1)

- Finn V_{th} og R_{th} for den blå delen

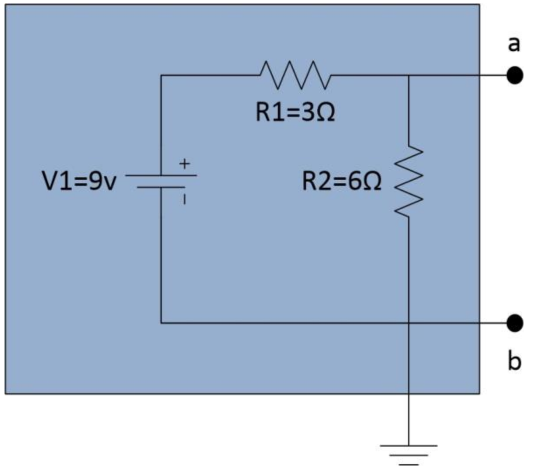


- Fjerner den delen av kretsen som ikke skal inngå i ekvivalenten (dvs resistoren R_L)

Thévenins teorem: Eksempel (3)

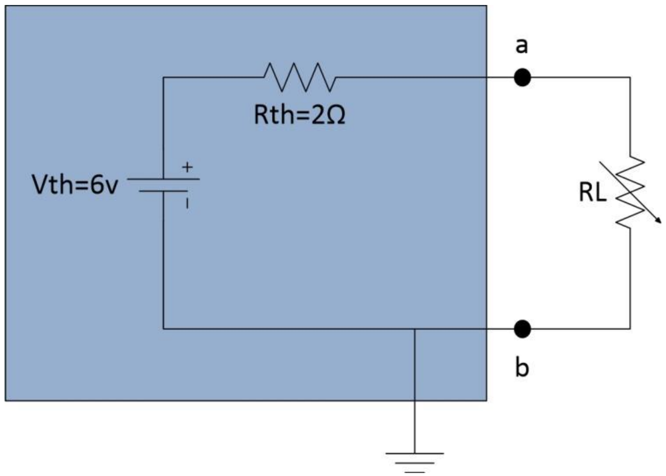


- Nuller ut kilden(e): Kortslutter V1
- Beregner resistansen (dvs R_{th}) mellom node a og b:
  – R1||R2=(R1*R2)/(R1+R2)=(3Ω*6Ω)/(3Ω+6Ω)=2Ω
- Setter tilbake V1 og beregner spenningen mellom node a og b:
  – Vab=Vth=V1*(R2/(R1+R2)=9v*(6Ω)/(3Ω+6Ω)=6v



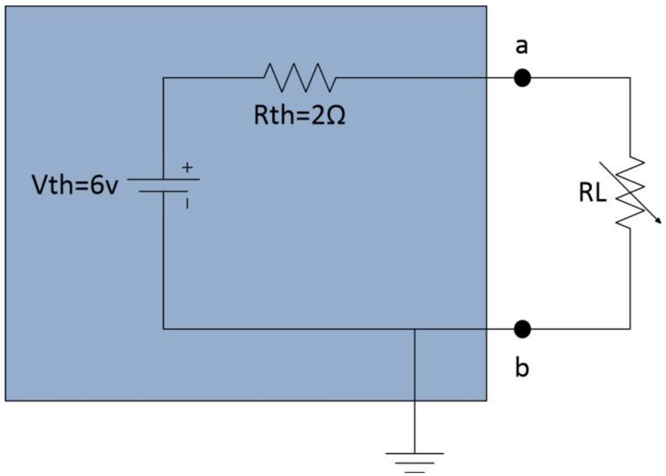
Thévenins teorem: Eksempel (4)

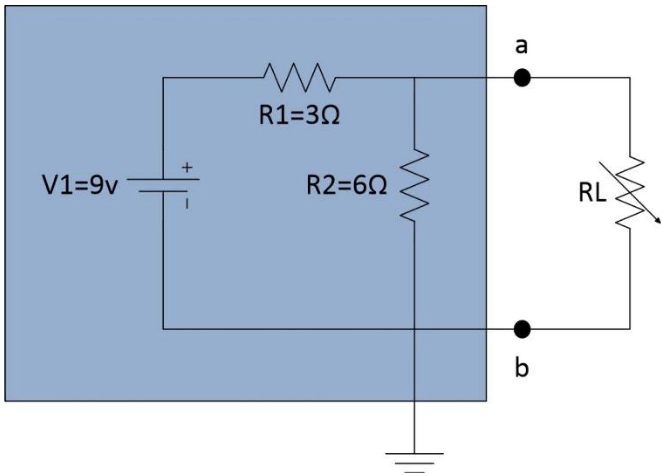
- Setter inn ekvivalenten:



- For ulike verdier av RL er det nå mye enklere å beregne f.eks hvordan strømmen IL varierer

Thévenins teorem: Med og uten ekvivalent





IL=Vth/(Rth + RL)

IL = Vab/RL og Vab = V1*R1/(R1 + R2||RL)

IL = V1*R1/(R1+R2*RL/(R2+RL))/RL

RL=2Ω : IL= 6v/(2Ω + 2Ω)=1.5A

RL=10Ω : IL= 6v/(2Ω + 10Ω)=0.5A

RL=100Ω : 6v/(2Ω + 100Ω)=0.06A

RL=2Ω : IL = 9v*3 Ω /(3 Ω +6 Ω *2 Ω /(6 Ω +2 Ω))/2 Ω=1.5A

RL=10Ω : IL = 9v*3 Ω /(3 Ω +6 Ω *10 Ω /(6 Ω +10 Ω))/10 Ω=0.5A

RL=100Ω : IL = 9v*3 Ω /(3 Ω +6 Ω *100 Ω /(6 Ω +100 Ω))/100 Ω=0.06A

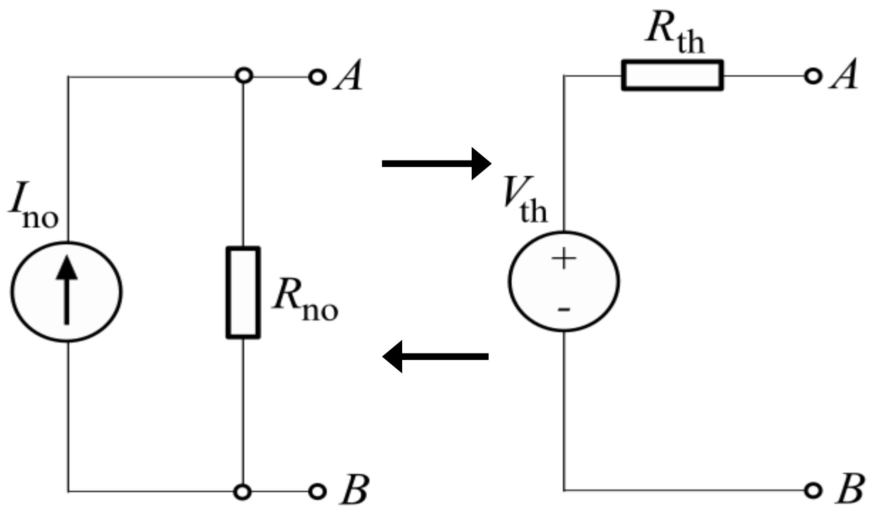
Nortons teorem

- Samme fremgangsmåte som for Thévenins teorem
  - Likhet: Kildene kortsluttes (spenningskilder) eller åpnes (strømkilder)
  - Forskjell: Terminalene a og b kortsluttes for å finne strømmen gjennom dem (istedenfor å beregne spenningen over dem)
- Sammenhengen mellom Norton- og Thévenin-ekvivalenter:

$$R_{th} = R_{no}$$

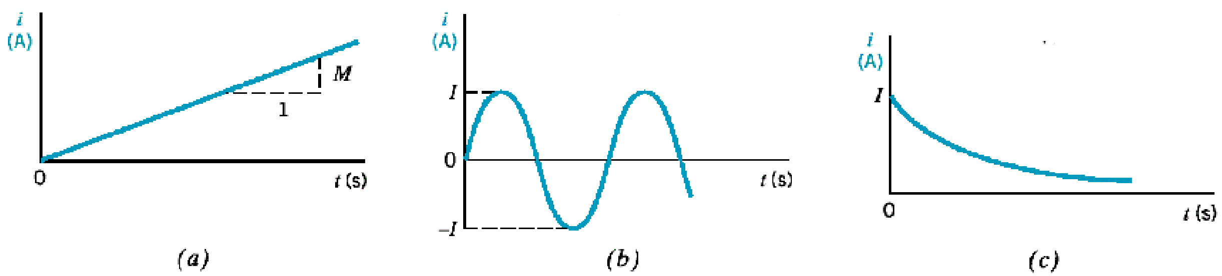
$$V_{th} = I_{no} R_{no}$$

$$\frac{V_{th}}{R_{th}} = I_{no}$$



Signaler

- Et *signal* er et annet navn på en strøm eller spenning som overfører informasjon
- Signaler som varierer mhp tid kalles ac-signaler
- Variasjonen kan være *periodisk* (b), dvs at signalet gjentar seg med faste mellomrom, eller *ikke-periodisk* ((a) og (c))
- dc-signaler også kan variere over tid, men dette er som regel ikke tilsiktet (f.eks. batteri som lades ut)



Sinussignaler

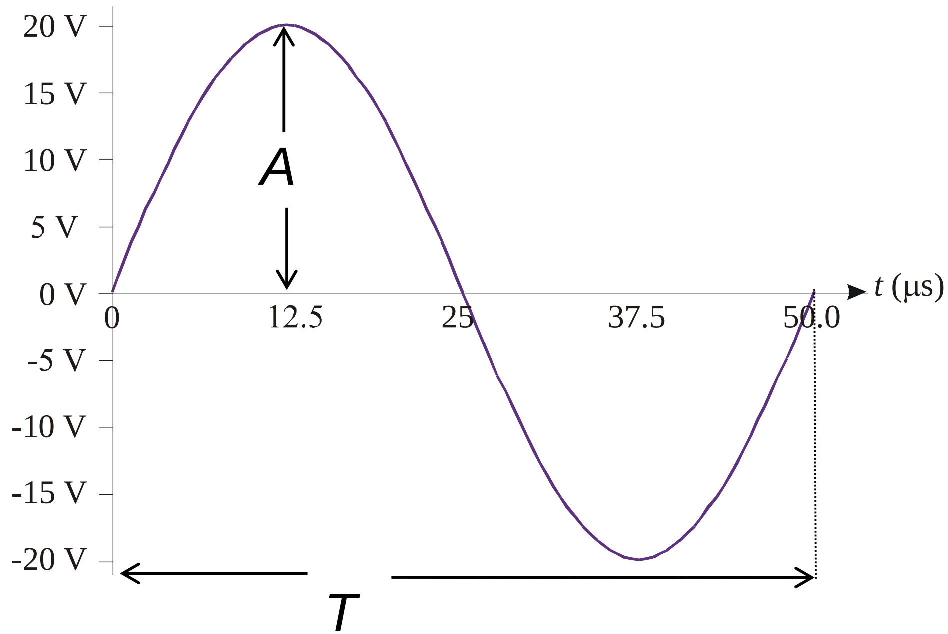
- Mange naturlige fenomener varierer med sinus-karakteristikk
- Sinussignaler og deres egenskaper kan beskrives presist matematisk
- Vilkårlige signaler kan representeres som sinusformede signaler
- Sinussignaler er viktige i bla lyd- og bildebehandling

Egenskaper

- Et sinussignal karakteriseres ved *amplitude* og *periode*
- *Amplituden A* er den maksimale verdien til signalet, mens *perioden T* er tiden det tar før signalformen gjentar seg

A = 20 volt

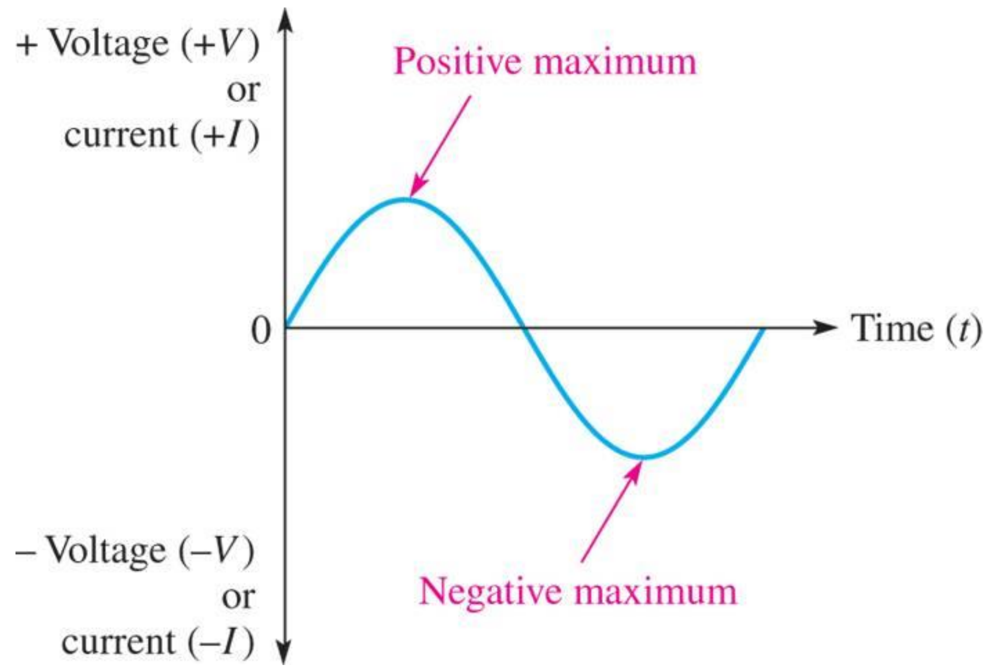
T=50 µs



Mer om amplitude

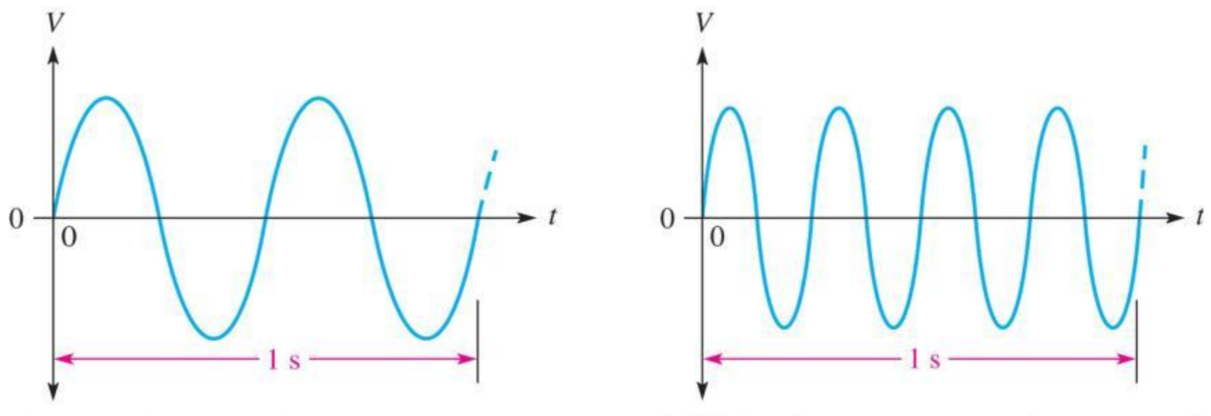
- Et *balansert* sinussignal er sentrert rundt 0: Maksimal positiv verdi = maksimal negativ verdi (absoluttverdi).
- Amplituden er den positive maksimumsverdien

- Gjennomsnittsverdien over en hel periode er lik 0 hvis signalet er balansert



Mer om periode og frekvens

- P*erioden* er tiden det tar før signalformen gjentas; *frekvensen* sier hvor mange ganger signalformen gjentar seg per sekund

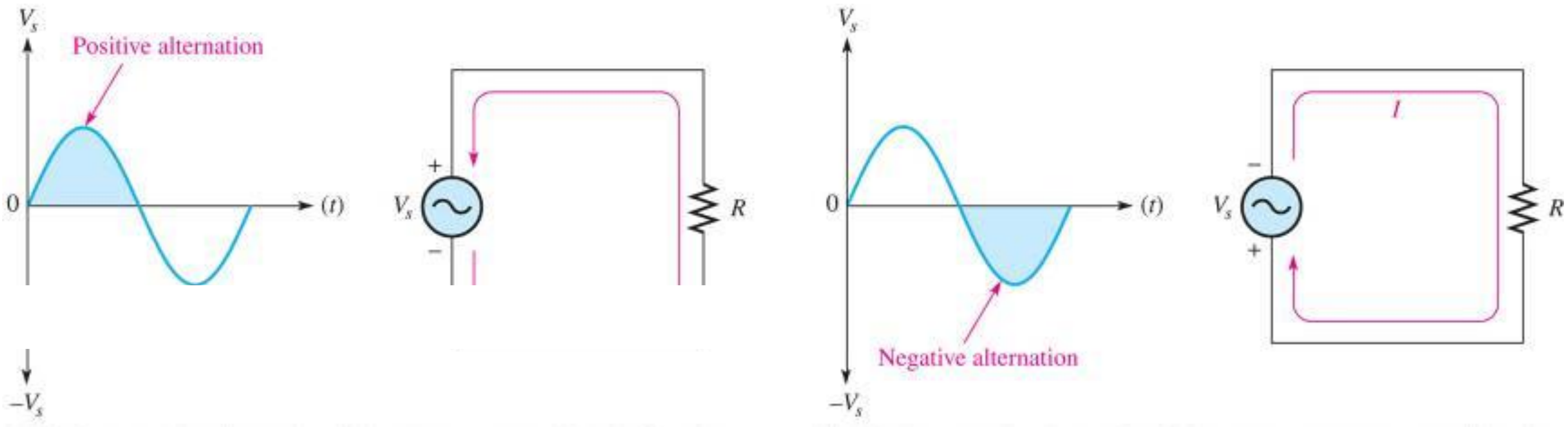


- Perioden T og frekvensen f er omvendt proporsjonale:

$$T = \frac{1}{f} \Leftrightarrow f = \frac{1}{T}$$

Strøm- og spenningsretning

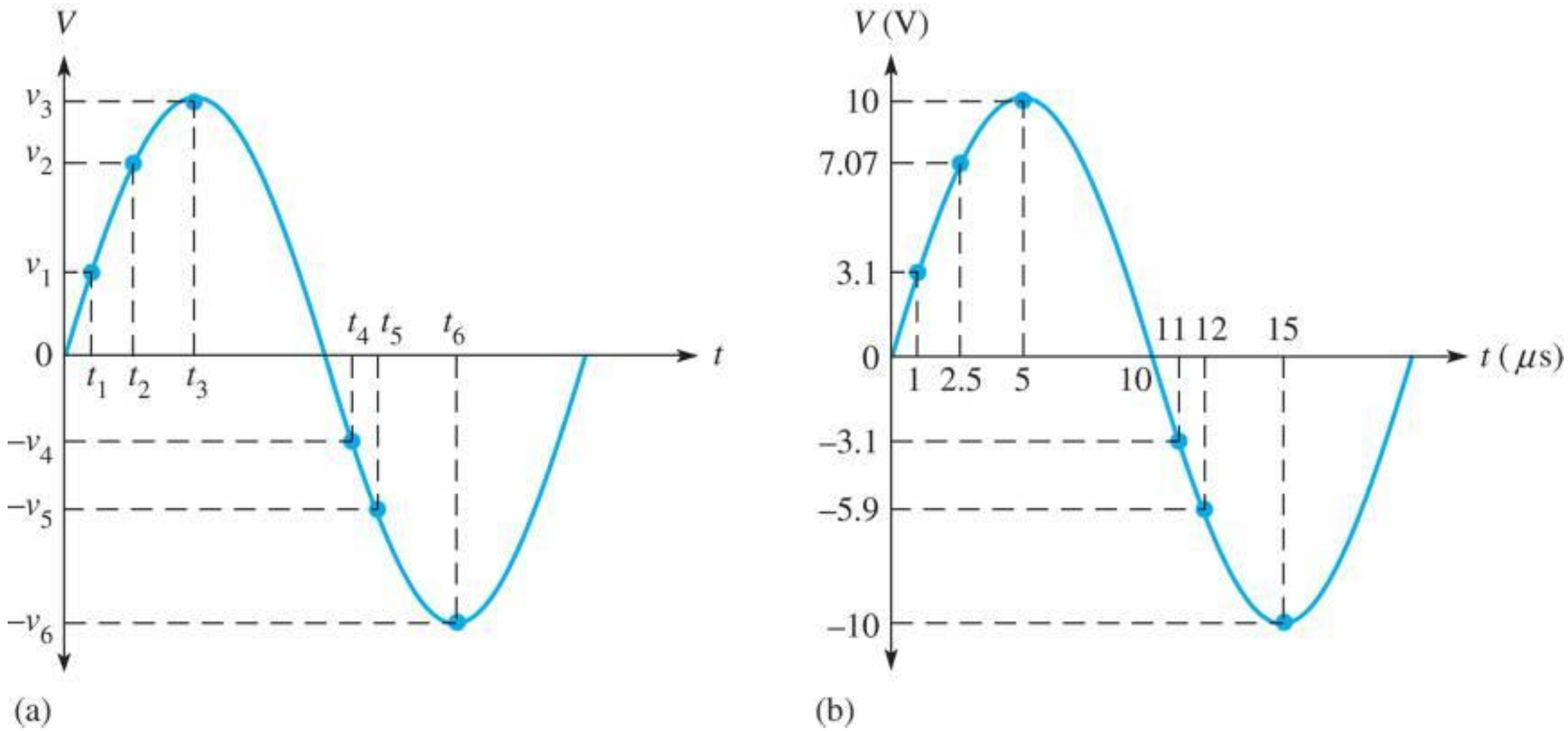
- For et balansert sinussignal endres strømretningen og/eller polariteten til spenningen en gang per periode



- Signalet er positivt halve perioden og negativ den andre halve perioden

Øyeblikksverdi

- *Øyeblikksverdien* måles som verdien på et bestemt tidspunkt

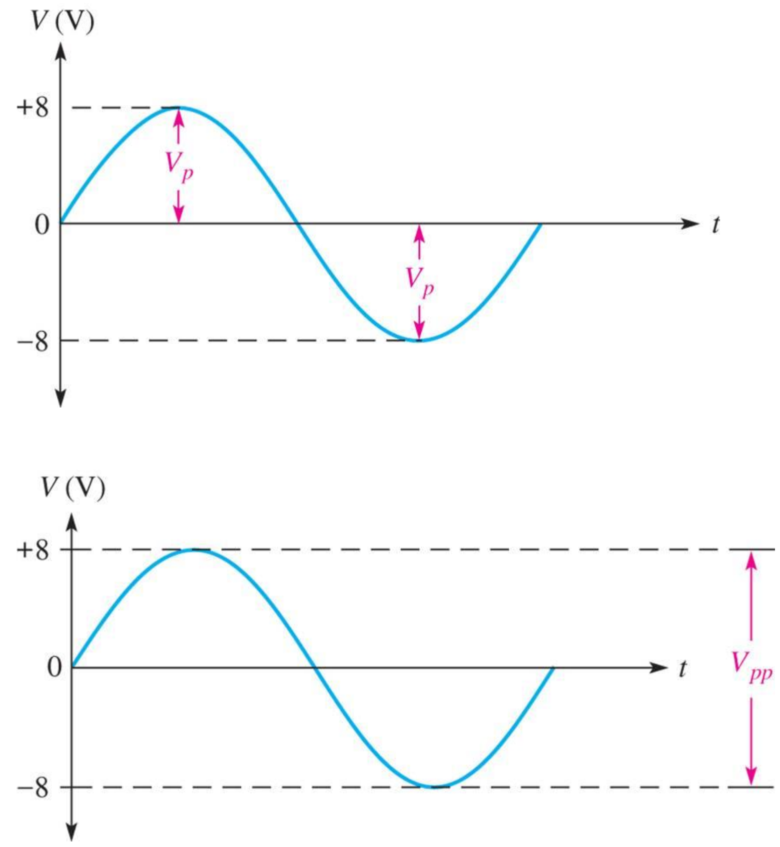


Peak-til-peak verdi

- Amplitude kalles også *magnitude* eller *peak-verdi* V_p

- *Peak-til-peak* verdi er definert som

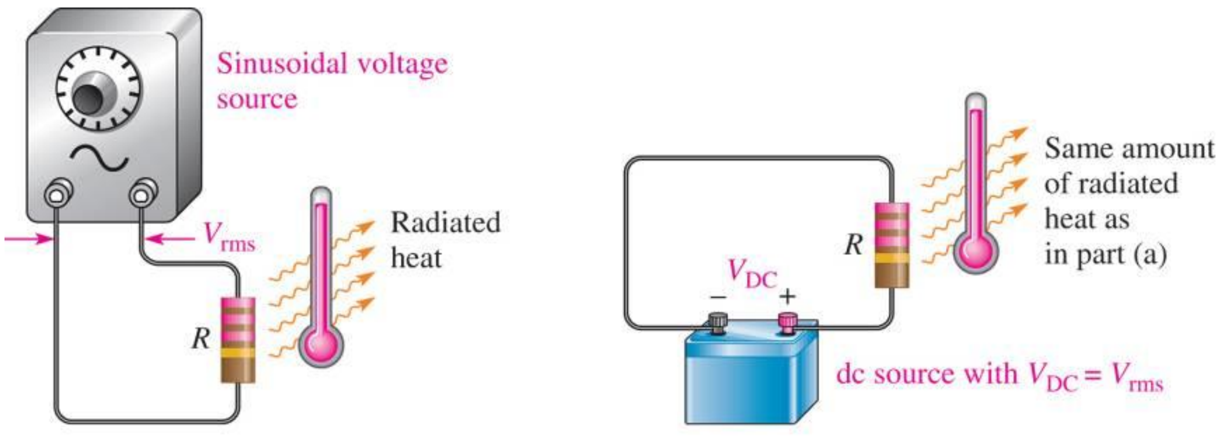
$$V_{pp} = 2V_p \wedge I_{pp} = 2I_p$$



RMS-verdi

- RMS-verdi betyr *Root-Mean-Square* og kalles den *effektive* verdien til sinussignalet

- RMS-verdien til et sinussignal angir hva et tilsvarende dc-signal må være for å produsere samme effekt i en resistor



(a) (b)

RMS-verdi (forts)

- Sammenhengen mellom RMS-verdien og peakverdien er

$$V_{rms} = \frac{1}{\sqrt{2}} V_p \approx 0.707 V_p$$

$$I_{rms} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_p \approx 0.707 I_p$$

- Kjenner RMS-verdien kan man finne peakverdien:

$$V_p = \sqrt{2} V_{rms} \approx 1{,}414 V_{rms}$$

$$I_p = \sqrt{2} I_{rms} \approx 1{,}414 I_{rms}$$

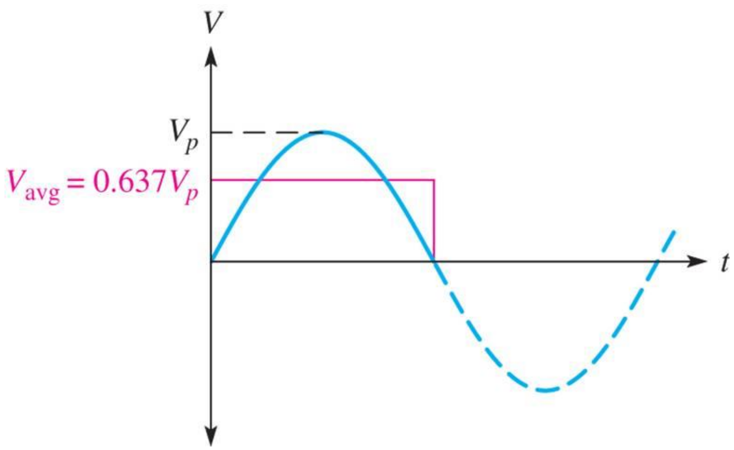
Gjennomsnittsverdi

- Gjennomsnittsverdien til et sinussignal måles over en halv periode (hvorfor?)

  - Sammenhengen er gitt av

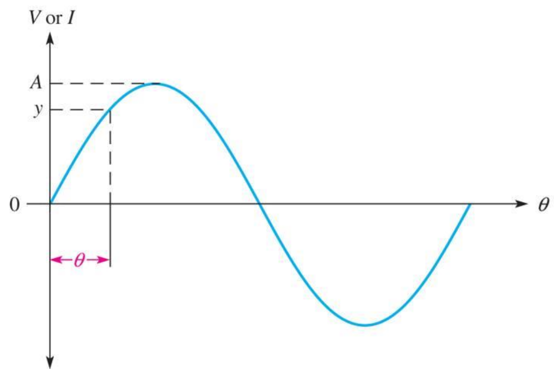
$$V_{avg} = \frac{2}{\pi} V_p \approx 0.637 V_p$$

$$I_{avg} = \frac{2}{\pi} I_p \approx 0.637 I_p$$



Matematisk representasjon av sinus

- I mange sammenhenger representeres sinussignaler som en *funksjon*

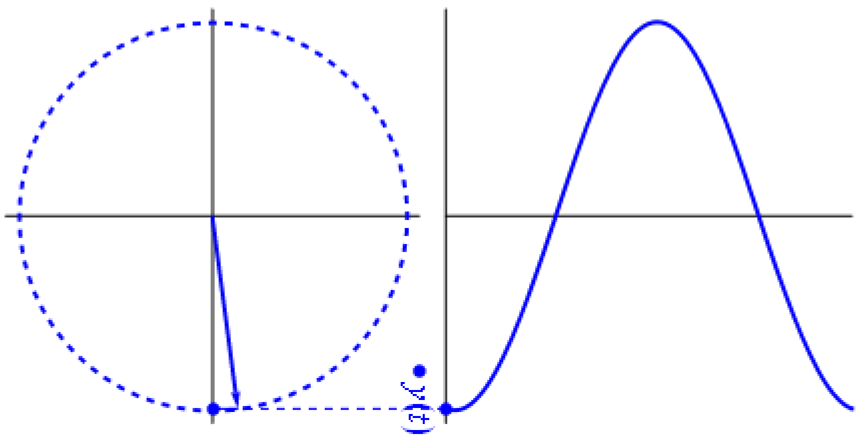


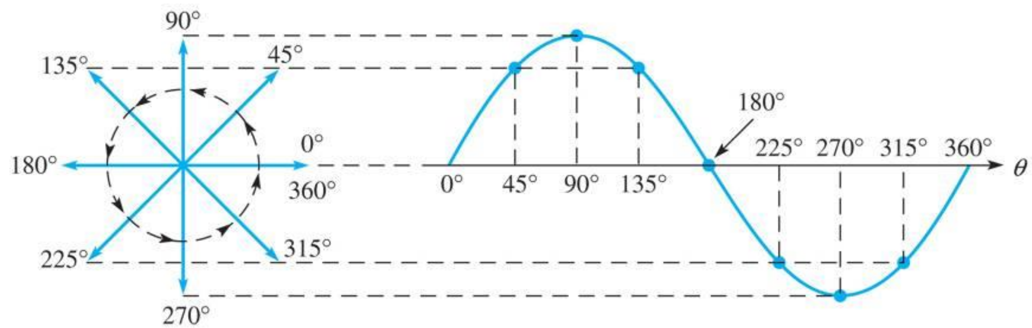
- Matematisk kan sinus skrives som $y = A\sin(\theta)$

- Skal senere i kurset se at sinusfunksjoner kan utvides til det komplekse planet, noe som gjør mange operasjoner mye enklere

Matematisk representasjon av sinus (forts.)

- θ brukes for å representere sinuskurven som en vektor og man tenker seg at vektoren roterer
- Om endepunktet projiseres horisontalt på en rett linje, får man en sinuskurve



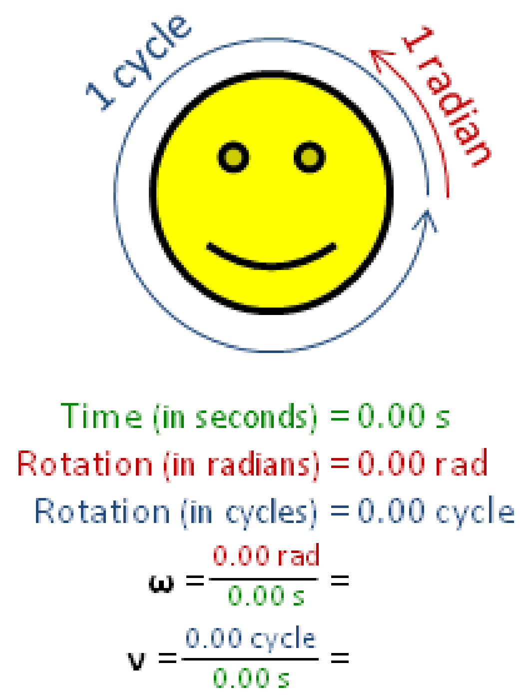


Matematisk representasjon av sinus (forts)

- Siden signalet gjentar seg for hver 2π=360º, kan frekvensen defineres som

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} \Leftrightarrow \omega = 2\pi f$$

- ω kalles for radian- eller vinkelfrekvens og er proporsjonal med f

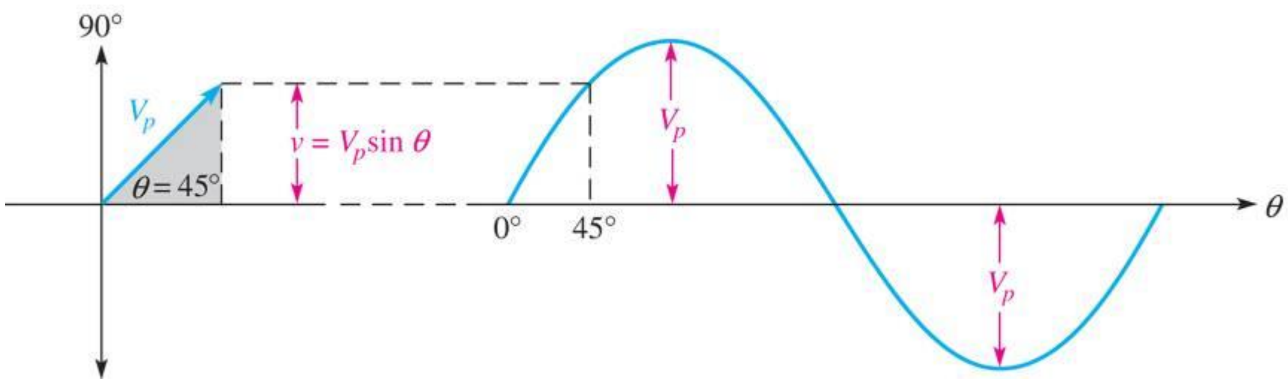


Matematisk representasjon av sinus (forts)

- Hvis lengden på vektoren er V_p, kan sammenhengen mellom sinussignalet og vektorrepresentasjonen skrives som

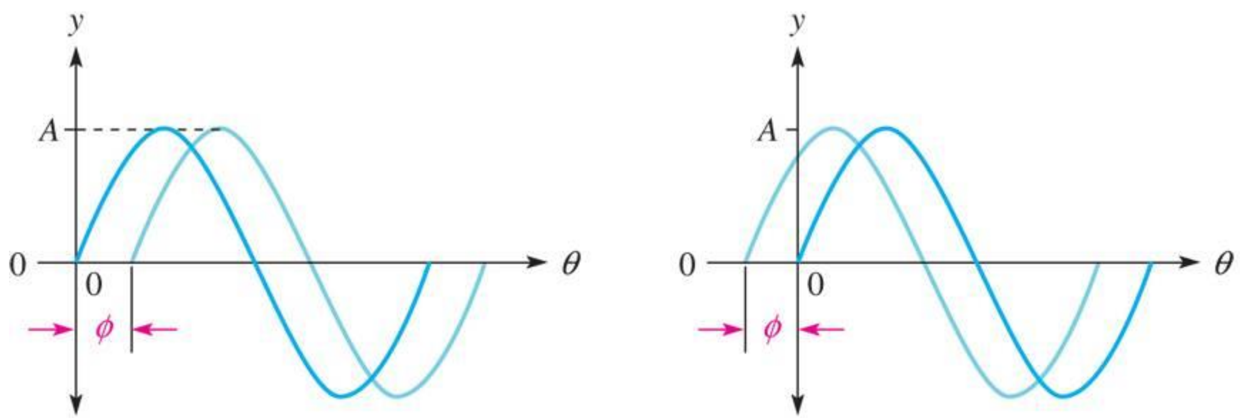
$$v = V_p \sin(\theta)$$

$$i = I_p \sin(\theta)$$



Fasedreining

- Hvis et sinussignal forskyves i tid (dvs langs den horisontale aksen), oppstår *faseforskyving* eller *fasedreining* φ



(a) $y = A \sin(\theta - \phi)$ (b) $y = A \sin(\theta + \phi)$

$$y = A\sin(\theta \pm \varphi)$$

Analyse av ac-kretser

- Ohms lov og Kirchhoffs strøm- og spenningslover gjelder også for ac-signaler
  - Ved høye frekvenser må man bruke Maxwells ligninger
- Man må bruke *enten* peak-, rms- *eller* gjennomsnittsverdier for *både* strøm og spenning i samme ligning
- For å beregne effekt må man bruke rms-verdiene:

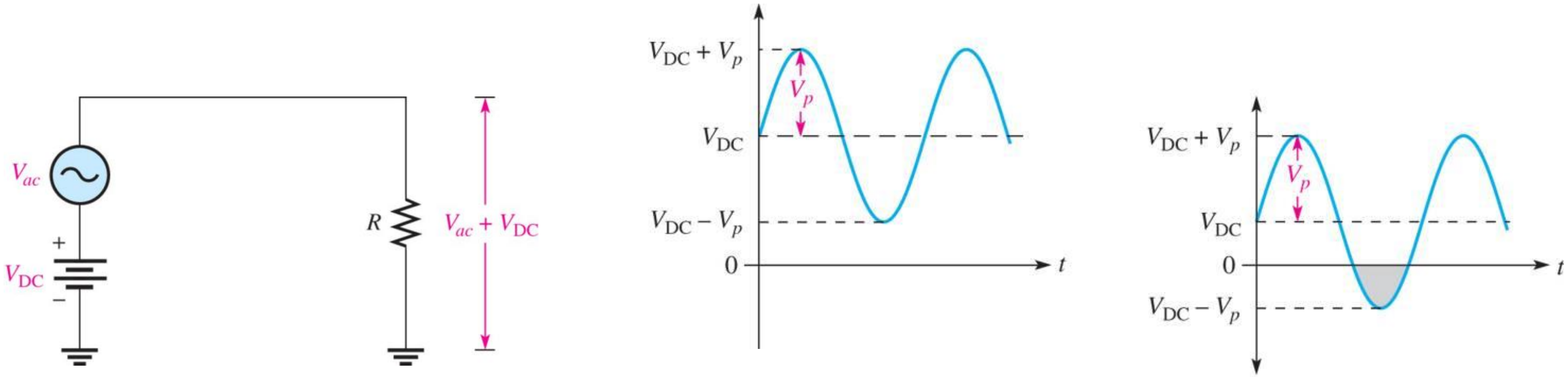
$$P = V_{rms} I_{rms}$$

$$P = \frac{V_{rms}^2}{R}$$

$$P = I_{rms}^2 R$$

Sinussignaler med dc-offset

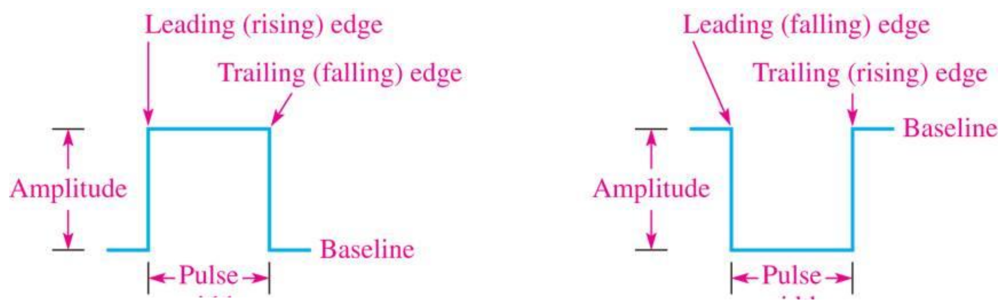
- Hvis sinussignalet har en dc-komponent, forskyves amplituden opp eller ned



- V_p defineres relativt til dc-offset, og ikke fra 0

Andre bølgeformer

- I digitale systemer brukes *firkant-* eller *pulssignaler*
- Et pulssignal varierer mellom to faste nivåer

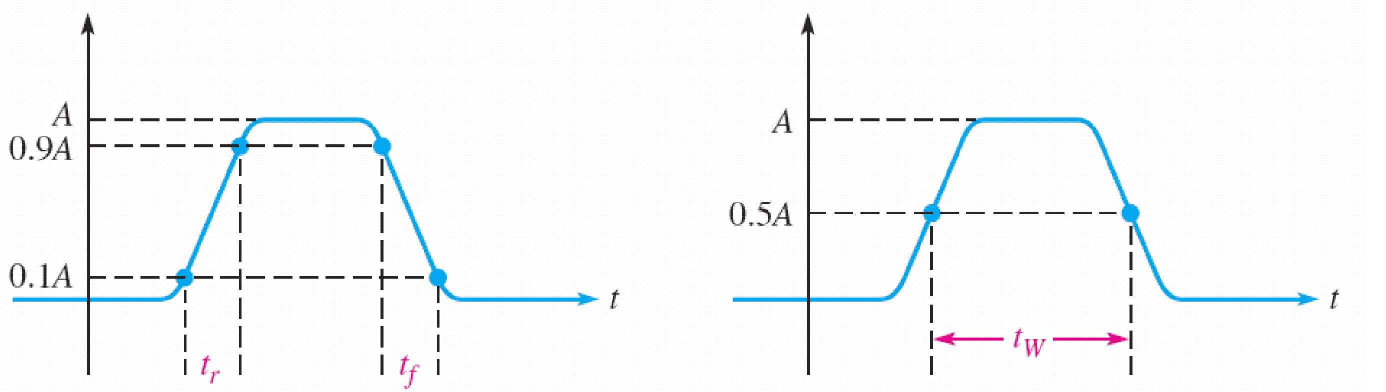


(a) Positive-going pulse (b) Negative-going pulse

- I tillegg til amplituden karakteriseres pulssignalet av pulsbredden og stigene og fallende flanker («edges»)

Andre bølgeformer (forts)

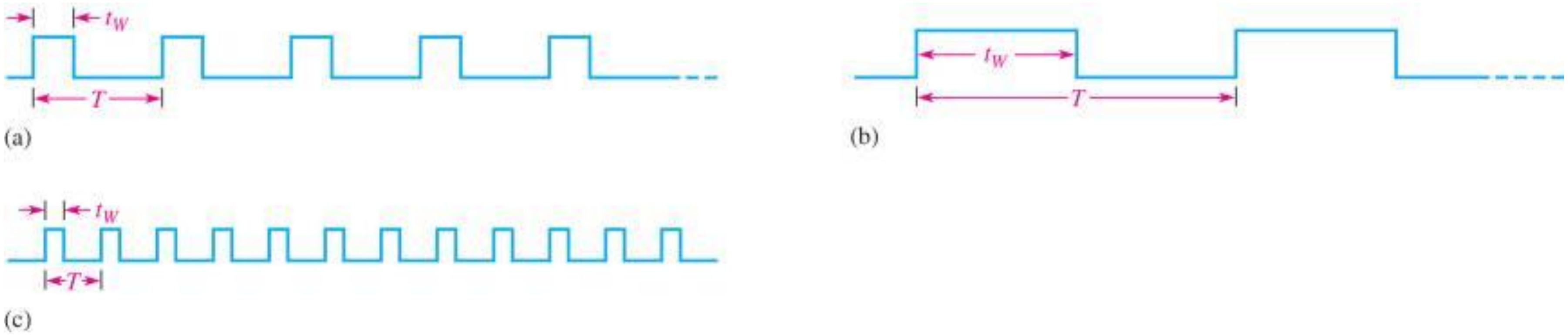
- Et ideelt pulssignal har vertikale flanker; i praksis er dette umulig fordi strøm/spenning ikke kan endre verdi momentant
- Fysiske pulssignaler karakteriseres ved tre parametre til:
  - «Rise time»: Tiden det tar fra signalet går fra 10% til 90% av amplituden
  - «Fall time»: Tiden det tar fra signalet går fra 90% til 10% av amplituden
  - Pulsbredden måles mellom de punktene på hhv stigende og fallende flanke som har nådd 50% av amplituden



(a) Rise and fall times (b) Pulse width

Andre bølgeformer (forts)

- Periodiske signaler er ikke alltid symmetriske rundt et referansepunkt (gjennomsnittsverdi ≠ 0)

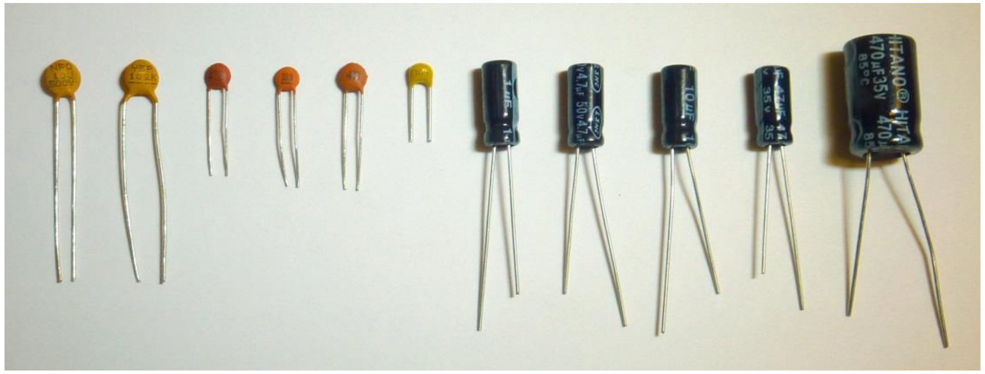


- Frekvensen defineres som for sinus
- «Duty cycle» er forholdet mellom pulsbredde og periode i %

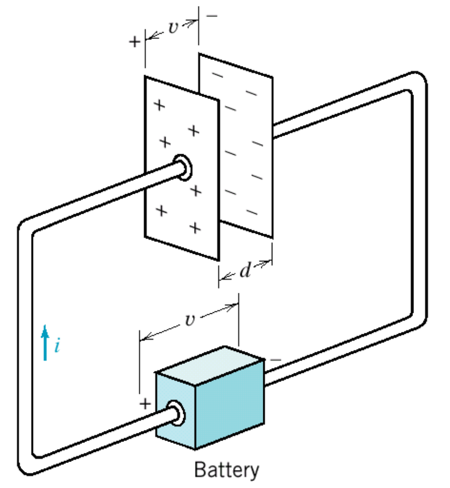
$$DutyCycle = \left(\frac{t_w}{T}\right)100\%$$

Kondensatorer

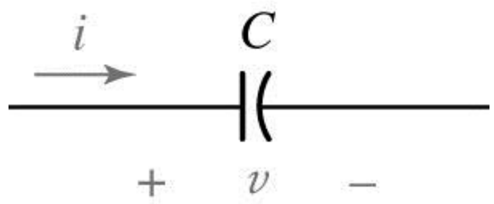
- Kondensatorer er viktige komponenter i elektronikk
- Kondensatorer kan lagre energi (ladninger), eller glatte ut signaler som endrer seg hurtig
- Brukes i elektroniske filtre for å fjerne uønskede frekvenser fra ac-signaler
- Brukes i kraft-elektronikk, blant annet ac-til-dc og dc-ac omformere, spenningsregulatorer, batterier etc
- Kondensatorer lages i ulike størrelser og typer avhengig av bruksområde



Kondensatorer

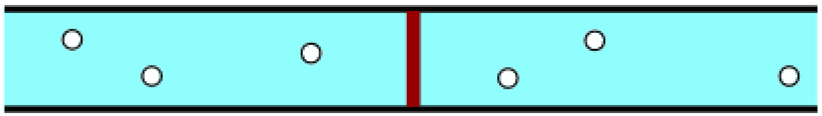


- En *resistors* motstand varierer *ikke* med frekvensen til strømmen
- En *kondensators* motstand *variererer* med frekvensen
- En kondensator kan lagre elektrisk ladning
- En kondensator består av to plater av ledende materiale med isolasjon i mellom



Kondensatorer (forts)

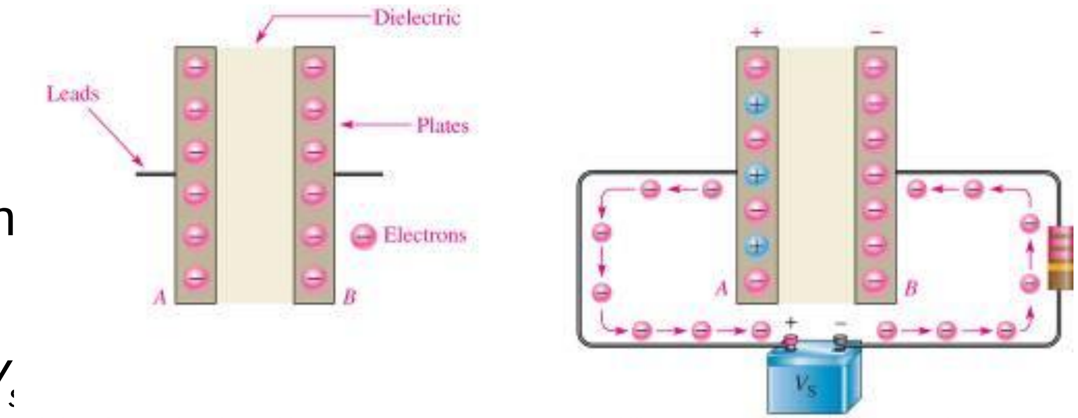
- En kondensator kan sammenlignes med et vannrør med en elastisk membran



- Hvis vannet beveger seg vil membranen bevege seg også, slik det ser ut som det renner vann igjennom røret (vann = elektrisk strøm)
- Hvis vannet endrer retning, vil membranen gå tilbake til sin opprinnelige posisjon og presse vannet tilbake
- Det vil være trykkforskjell på hver side av membranen når vannet beveger seg (trykkforskjell = spenning)
- Uten bevegelse i vannet vil membranen ikke bevege seg (dc-spenning gir ingen strøm igjennom kondensatoren)

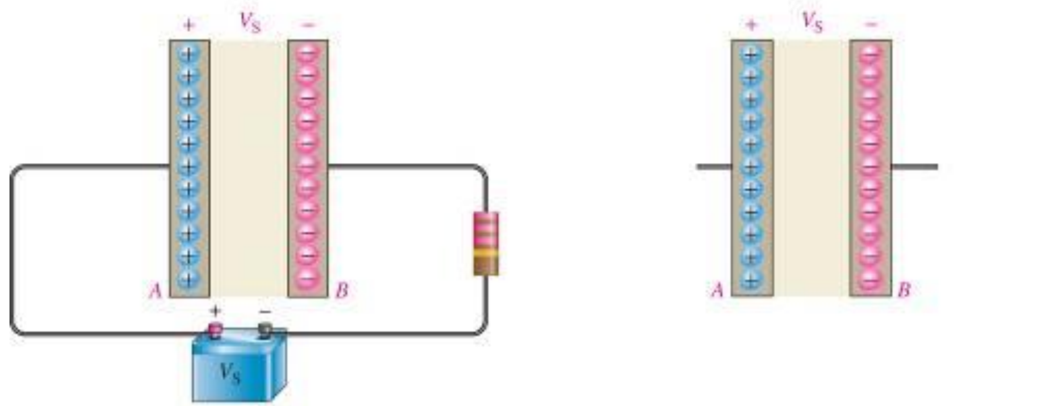
Kondensatorer (forts)

- Hvis platene kobles til en spenning V_S, oppstår et elektrisk felt mellom platene
- Feltet gjør at elektroner beveger seg fra den ene platen over til den andre
- Når spenningen mellom platene har nådd V_S beveger det seg ikke lenger elektroner
- Om kilden fjernes vil en ideell kondensator beholde spenningen til evig tid
- I praksis «lekker» platene og dette modelleres med en resistor i parallell



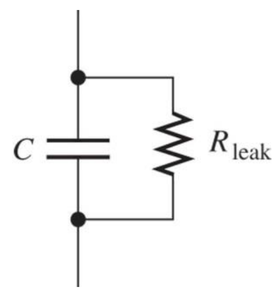
(a) Neutral (uncharged) capacitor (same charge on both plates)

(b) When connected to a voltage source, electrons flow from plate A to plate B as the capacitor charges.



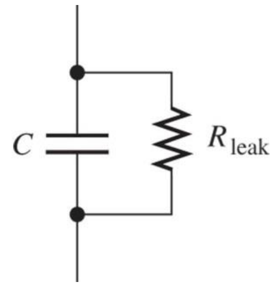
(c) After the capacitor charges to V_S, no electrons flow.

(d) Ideally, the capacitor retains charge when disconnected from the voltage source.



Kondensatorer (forts)

- Hvis spenningskilden kilden fjernes vil en ideell kondensator beholde spenningen til evig tid
- I praksis «lekker» platene ladninger og dette kan modelleres med en resistor i parallell



- Hvis frekvensene blir høye (~10^9 Hertz) blir oppførselen mer komplisert (mer om dette senere i kurset)

Kondensatorer (forts)

- Mengden ladning en kondensator kan holde på heter *kapasitans C,* måles i *Farad* og er definert ved

$$C = \frac{Q}{V} \Leftrightarrow Q = CV \Leftrightarrow V = \frac{Q}{C}$$

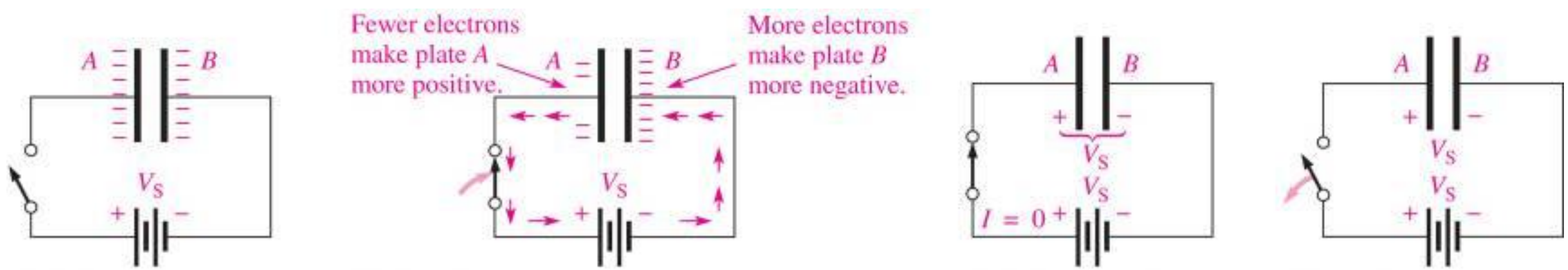
- 1 Farad er kapasitansen som tilsvarer lagring av 1 Coulomb med 1 volt potensialforskjell mellom platene
- Sammenhengen mellom plateareal *A*, plateavstand *d* og kapasitans er gitt av

$$C = \varepsilon \frac{A}{d}$$

- ε kalles for *permittivitet* og er en egenskap ved materialet mellom platene

Oppladning og utladning av kondensator

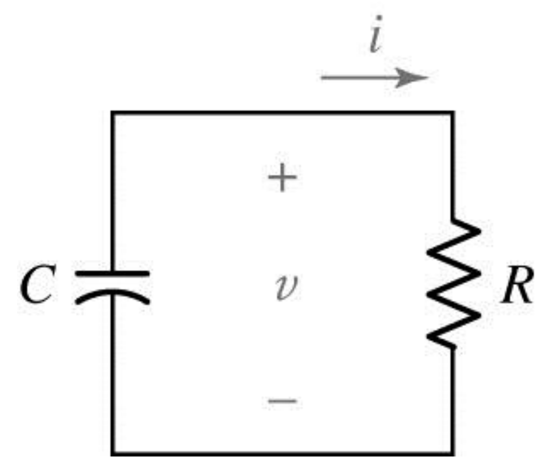
- Ladninger kan bare bevege seg når spenningen over kondensatoren er forskjellig fra spenningskilden
- Når kretsen har nådd stabil dc-spenning, vil kondensatoren blokkere for strøm



(a) Uncharged (b) Charging (c) Fully charged (d) Retains charge

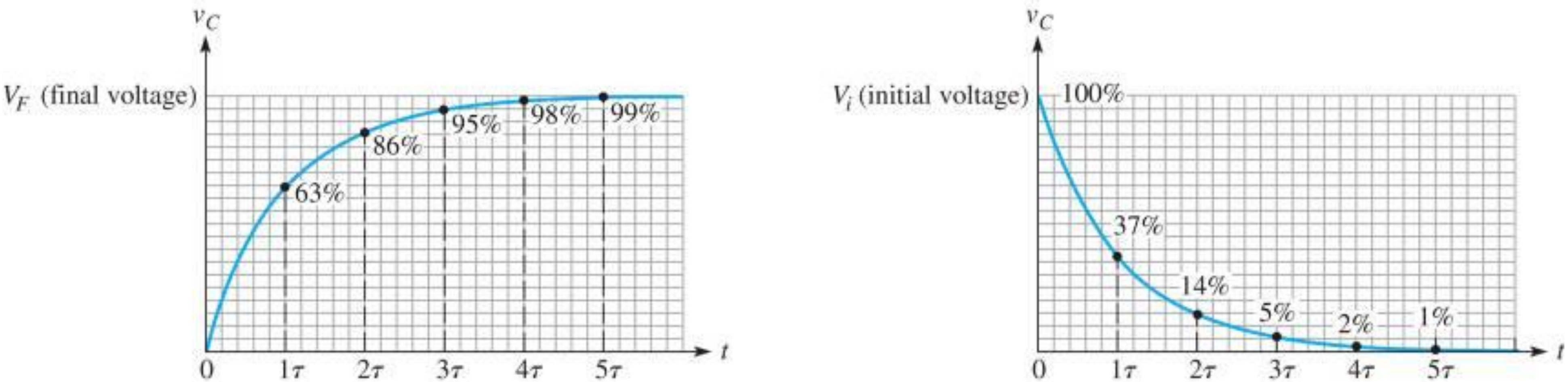
Tidskonstant

- Viktige egenskaper ved en kondensator er
  - Hvor raskt den lades *opp* når en spenningskilde V_s kobles *til*
  - Hvor raskt den lades *ut* til 0 når en spenningskilde V_s kobles *fra*
- Tidskonstanten τ sier hvor lang tid det tar å lade opp eller ut kondensatoren når den er koblet i serie med en ohmsk motstand.
- Måles i sekunder og er definert ved $\tau = RC$



Tidskonstant (forts)

- Når $\tau = 1s$ betyr det at
  - En fullt utladet kondensator har nådd ca 63% av den maksimale spenningen etter at den er koblet til en spenningkilde
  - En fullt oppladet kondensator har falt til ca 37% av den opprinnelige spenningen etter at kilden er koblet fra
- Opp/utladningskurvene er eksponensielle



(a) Charging curve with percentages of the final voltage

(b) Discharging curve with percentages of the initial voltage

Tidskonstant (forts)

- De generelle formlene for oppladning og utladning av en kondensator som lades opp/ut via en resistor er gitt av

$$v = V_F + (V_i - V_F)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i = I_F + (I_i - I_F)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

der V_F og I_F er slutt-verdiene, og V_i og I_i er startverdiene

- Hvis man lader *opp* fra $V_i = 0$, blir formelen

$$v = V_F(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

- Hvis man lader *ut* til $V_F = 0$ blir formelen

$$v = V_i e^{-\frac{t}{RC}}$$

Kapasitiv reaktans

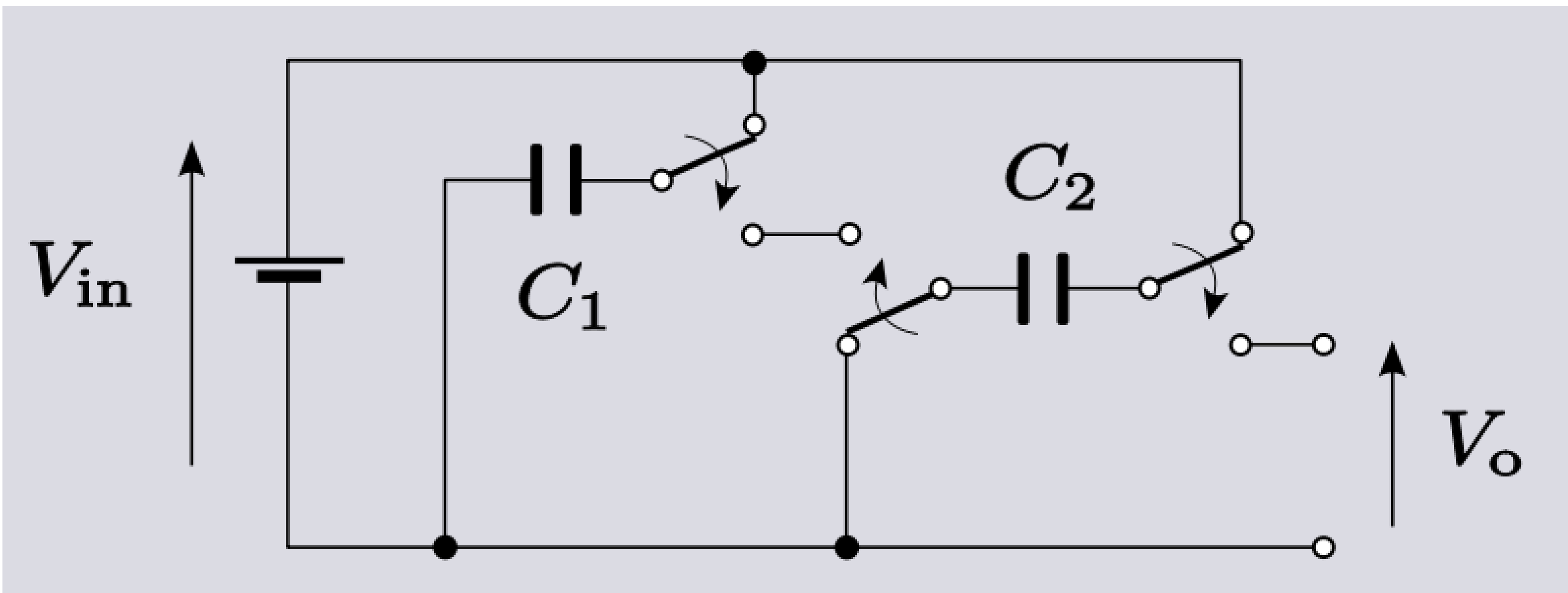
- En kondensator har en motstand mot elektrisk strøm som er avhengig av frekvensen til signalet
- Denne motstanden kalles *kapasitiv reaktans* X_c og er definert ved

$$X_c = \frac{1}{2\pi f C}$$

- Jo større frekvens, desto mindre kapasitiv reaktans
- Jo større kapasitans, desto mindre kapasitiv reaktans
- Også reaktans kan representeres i det komplekse planet, og da blir det lettere å finne den samlede motstanden (resistivitet og reaktans) i en krets

Nøtt til neste gang

- Hva gjør denne kretsen? (dvs hva er sammenhengen mellom V_{in} og V_o når bryterene åpnes og lukkes?) Anta ideelle kondensatorer



Oppsummeringsspørsmål

- Spørsmål fra forelesningene 3 og 4