某厂生产Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ三种产品，均要经过A、B两道工序加工。设有两种规格的设备A1、A2能完成 A 工序；有三种规格的设备B1、B2、B3能完成 B 工序。Ⅰ可在A、B的任何规格的设备上加工；Ⅱ 可在任意规格的A设备上加工，但对B工序，只能在B1设备上加工；Ⅲ只能在A2与B2设备上加工。数据如表。问：为使该厂获得最大利润，应如何制定产品加工方案？

设备	产品单件工时			设备的有效台时	满负荷时的设备费用
	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ		
A_1	5	10		6000	300
A_2	7	9	12	10000	321
B_1	6	8		4000	250
B_2	4		11	7000	783
B_3	7			4000	200
原料（元/件）	0.25	0.35	0.50		
售价（元/件）	1.25	2.00	2.80		

解：设 x_{ijk} 表示第 i 种产品，在第 j 种工序上的第 k 种设备上加工的数量。建立如下的数学模型：

s.t.

$$
\begin{aligned}
&5x_{111} + 10x_{211} \le 6000 \quad &（设备 A_1）\\
&7x_{112} + 9x_{212} + 12x_{312} \le 10000 \quad &（设备 A_2）\\
&6x_{121} + 8x_{221} \le 4000 \quad &（设备 B_1）\\
&4x_{122} + 11x_{322} \le 7000 \quad &（设备 B_2）\\
&7x_{123} \le 4000 \quad &（设备 B_3）
\end{aligned}
$$

$x_{111} + x_{112} - x_{121} - x_{122} - x_{123} = 0$ （Ⅰ产品在A、B工序加工的数量相等）

$x_{211} + x_{212} - x_{221} = 0$ （Ⅱ产品在A、B工序加工的数量相等）

$x_{312} - x_{322} = 0$ （Ⅲ产品在A、B工序加工的数量相等）

$$x_{ijk} \ge 0 \quad, i = 1,2,3;\ j = 1,2;\ k = 1,2,3$$

目标函数为计算利润最大化，利润的计算公式为：

利润 = [（销售单价 - 原料单价）* 产品件数]之和 - （每台时的设备费用*设备实际使用的总台时数）之和。

这样得到目标函数：

$$Max z=(1.25-0.25)(x_{111}+x_{112})+(2-0.35)x_{221}+(2.80-0.5)x_{312}-300/6000(5x_{111}+10x_{211})-321/10000(7x_{112}+9x_{212}+12x_{312})-250/4000(6x_{121}+8x_{221})-783/7000(4x_{122}+11x_{322})-200/4000(7x_{123}).$$

经整理可得：

$$Max z=0.75x_{111}+0.7753x_{112}+1.15x_{211}+1.3611x_{212}+1.9148x_{312}-0.375x_{121}-0.5x_{221}-0.4475x_{122}-1.2304x_{322}-0.35x_{123}$$

3.1 单纯形法的矩阵描述

3.1 单纯形法的矩阵描述

- 设线性规划的矩阵形式为

$$\max z = CX \quad \begin{cases} AX \le b \\ X \ge 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{标准化}} \max z = CX + C_S X_S \quad \begin{cases} AX + IX_S = b \\ X, X_S \ge 0 \end{cases} \qquad (3-1)$$

- 这里I为m阶单位阵,$b\geq 0$. 设基变量$X_B=X_S$，系数矩阵$(A,I)=(B,N)$，其中B、N分别是基变量和非基变量的系数矩阵,则

$$(X, X_S) = \begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix}, (C, C_S) = (C_B, C_N);$$

目标函数 $\max z = CX = (C_B, C_N)\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix}$

$$= C_B X_B + C_N X_N \qquad (3-2)$$

约束条件 $(B, N)\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix} = BX_B + NX_N = b \quad (3-3)$

非负条件 $X_B,\ X_N \geq 0 \qquad (3-4)$

由(3-3)式知 $BX_B = b - NX_N$

$$X_B = B^{-1}b - B^{-1}NX_N \qquad (3-5)$$

上式代入(3-2)式得

$$z = C_B(B^{-1}b - B^{-1}NX_N) + C_N X_N$$

$$= C_B B^{-1}b + (C_N - C_B B^{-1}N)X_N \qquad (3-6)$$

3.1 单纯形法的矩阵描述

令 $X_N = 0$,得 $X_B = B^{-1}b$,有

基可行解$X^{(1)} = (B^{-1}b, 0)^T$，目标函数值 $z = C_B B^{-1} b$

最小规则的表达式是

$$\theta = \min_i \left[\frac{(B^{-1}b)_i}{(B^{-1}P_k)_i} \middle| (B^{-1}P_k)_i > 0 \right] = \frac{(B^{-1}b)_l}{(B^{-1}P_k)_l}$$

4）非基矩阵: $B^{-1}N$

$$z = C_B B^{-1} b + (C_N - C_B B^{-1} N) X_N \quad (3-6)$$

(1) 在初始状态，基变量 X_S 的检验数为 $\left(C_B - C_B B^{-1} B\right) = 0$；迭代运算后，$X_S$ 的部分元素属于基变量，其检验数仍为0，属于非基变量的元素，其检验数非0.

(2) 从(3-6)可知，非基变量 X_N 的系数为$\left(C_N - C_B B^{-1} N\right)$，即检验数$c_j - z_j\ (j = 1, 2, \cdots, n)$。若$X_S$ 的某 j 元素属于非基变量，有$c_{S_{j\in N}} = 0$，N 中含该 j 元素对应的单位列向量$P_{S_{j\in N}}$，故对应的检验数为$\left(-C_B B^{-1}\right)_j$，所有检验数可用 $C - C_B B^{-1} A$ 与 $-C_B B^{-1}$ 表示。其中 $C = \left(C_B \quad C_N\right)$，$A = \left(B \quad N\right)$ 。

- 若将z看作不参与基变换的基变量，它与$x_1,x_2,\ldots,x_m$的系数构成一个基，这时可采用行初等变换将$c_1,c_2,\ldots,c_m$变换为零，使其对应的系数矩阵为单位矩阵。得到

$$
\begin{array}{ccccccccc}
-z & x_1 & x_2 & \cdots & x_m & x_{m+1} & \cdots & x_n & b \\
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{cccccccc|c}
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{2,m+1} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{m,m+1} & \cdots & a_{mn} & b_m \\
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{m+1}-\sum_{i=1}^{m} c_i a_{i,m+1} & \cdots & c_n-\sum_{i=1}^{m} c_i a_{in} & -\sum_{i=1}^{m} c_i b_i
\end{array}\right)
$$

单纯形表与矩阵表示的关系

由（3-5)、（3-6)式知

$$X_B + B^{-1}NX_N = B^{-1}b$$

$$-z + (C_N - C_B B^{-1}N)X_N = -C_B B^{-1}b$$

上两式用矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} 0 & I & B^{-1}N \\ 1 & 0 & C_N - C_B B^{-1}N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -z \\ X_B \\ X_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ -C_B B^{-1}b \end{bmatrix}$$

		基变量X_B		非基变量X_N		RHS)
初始表	系数矩阵	X_S	B	N		b
	检验数		C_B	C_N		$(-z)=0$
迭代后	系数矩阵	X_B	$I=B^{-1}B$	$B^{-1}N$	$B^{-1}P_{sj\in N}$	$B^{-1}b$
	检验数		$C_B-C_BB^{-1}B$	$C_N-C_BB^{-1}N$	$(-C_BB^{-1})_{j\in N}$	$(-z)= -C_BB^{-1}b$

3.2 单纯形法的矩阵计算

（改进单纯形法）

- 单纯形法的迭代过程实质上是从一组基到另一组基的变换.
- 在每次迭代过程中不必要地计算了很多与迭代无关的数字，影响了计算效率.
- 而每次迭代中真正有用的数字是基变量列数字、基的逆矩阵、非基变量检验数，以及最大正检验数所对应的非基变量系数列向量。

引例

$$\max Z = 6x_1 + 8x_2$$
$$2x_1 + x_2 \le 12$$
$$x_1 + 4x_2 \le 20$$
$$x_j \ge 0$$

标准化得：

$$\max Z = 6x_1 + 8x_2$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 12$$
$$x_1 + 4x_2 + x_4 = 20$$
$$x_j \ge 0$$

- 求解

C_j			6	8	0	0	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	12	2	1	1	0	12/1=12
0	x_4	20	1	4	0	1	20/4=5
σ			6	8	0	0	
0	x_3	7	7/4	0	1	－1/4	7/(7/4)=4
8	x_2	5	1/4	1	0	1/4	5/(1/4)=20
σ			4	0	0	－2	
6	x_1	4	1	0	4/7	－1/7	
8	x_2	4	0	1	－1/7	2/7	
σ			0	0	－16/7	－10/7	

$\max Z=6x_1+8x_2$

$2x_1+x_2+x_3=12$

$x_1+4x_2+x_4=20$

$x_j\geq 0$

第二步迭代中：

基变量 $X_B=(x_3、x_2)$

基矩阵 $B_2=(P_3、P_2)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 4\end{pmatrix}$

$B_2^{-1} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 1\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1 & -\frac{1}{4}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4}\end{array}\right)$

$B_2^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{4}\\ 0 & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$

正是 x_3、x_4 在第二步迭代表中的系数

$\max Z=6x_1+8x_2$

$2x_1+x_2+x_3=12$

$x_1+4x_2+x_4=20$

$x_j \geq 0$

	C_j		6	8	0	0	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	12	2	1	1	0	12/1=12
0	x_4	20	1	4	0	1	20/4=5
	σ		6	8	0	0	
0	x_3	7	7/4	0	1	−1/4	7/(7/4)=4
8	x_2	5	1/4	1	0	1/4	5/(1/4)=20
	σ		4	0	0	−2	
6	x_1	4	1	0	4/7	−1/7	
8	x_2	4	0	1	−1/7	2/7	
	σ		0	0	−16/7	−10/7	

- 根据矩阵理论，第二步迭代表中的任何数都可由$B2^{-1}$左乘原始数据得到

如：$p'_2 = B_2^{-1} p_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$p'_3 = B_2^{-1} p_3 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p'_4 = B_2^{-1} p_4 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$b' = B_2^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

C_j			6	8	0	0	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	12	2	1	1	0	12/1=12
0	x_4	20	1	4	0	1	20/4=5
σ			6	8	0	0	
0	x_3	7	7/4	0	1	−1/4	7/(7/4)=4
8	x_2	5	1/4	1	0	1/4	5/(1/4)=20
σ			4	0	0	−2	
6	x_1	4	1	0	4/7	−1/7	
8	x_2	4	0	1	−1/7	2/7	
σ			0	0	−16/7	−10/7	

检验数$\sigma_j = C_j - C_B B^{-1} P_j$

$$\sigma_1 = C_1 - C_B B_2^{-1} P_1 = 6 - (0 \quad 8)\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= 6 - 2 = 4$$

$$\sigma_4 = C_4 - C_B B_2^{-1} P_4 = 0 - (0 \quad 8)\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= 0 - 2 = -2$$

令$Y = C_B B_2^{-1}$

称 单纯形乘子

C_j			6	8	0	0	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	12	2	1	1	0	12/1=12
0	x_4	20	1	4	0	1	20/4=5
σ			6	8	0	0	
0	x_3	7	7/4	0	1	−1/4	7/(7/4)=4
8	x_2	5	1/4	1	0	1/4	5/(1/4)=20
σ			4	0	0	−2	
6	x_1	4	1	0	4/7	−1/7	
8	x_2	4	0	1	−1/7	2/7	
σ			0	0	−16/7	−10/7	

第三步迭代中：

基变量 $X_B=(x_1、x_2)$

基矩阵 $B_3=(P_1、P_2)=\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 4\end{pmatrix}$

$$B_3^{-1}\rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}2 & 1 & 1 & 0\\1 & 4 & 0 & 1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & \frac{4}{7} & -\frac{1}{7}\\0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7}\end{array}\right)$$

$$B_3^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{4}{7} & -\frac{1}{7}\\-\frac{1}{7} & \frac{2}{7}\end{pmatrix}$$

C_j			6	8	0	0	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	12	2	1	1	0	12/1=12
0	x_4	20	1	4	0	1	20/4=5
σ			6	8	0	0	
0	x_3	7	7/4	0	1	－1/4	7/(7/4)=4
8	x_2	5	1/4	1	0	1/4	5/(1/4)=20
σ			4	0	0	－2	
6	x_1	4	1	0	4/7	－1/7	
8	x_2	4	0	1	－1/7	2/7	
σ			0	0	－16/7	－10/7	

正是x_3、x_4在第三步迭代表中的系数

根据矩阵理论，第三步迭代表中的任何数都可由B_3^{-1}左乘原始数据得到

如：$p'_1 = B_3^{-1} p_1 = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$b' = B_3^{-1} b = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

检验数$\sigma_j = C_j - C_B B^{-1} P_j$

$$\sigma_1 = C_1 - C_B B_3^{-1} P_1$$

$$= 6 - (6 \quad 8) \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= 6 - 6 = 0$$

C_j			6	8	0	0	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	12	2	1	1	0	12/1=12
0	x_4	20	1	4	0	1	20/4=5
σ			6	8	0	0	
0	x_3	7	7/4	0	1	−1/4	7/(7/4)=4
8	x_2	5	1/4	1	0	1/4	5/(1/4)=20
σ			4	0	0	−2	
6	x_1	4	1	0	4/7	−1/7	
8	x_2	4	0	1	−1/7	2/7	
σ			0	0	−16/7	−10/7	

- 可以看出在单纯形法中关键在于求B^{-1}
- 定理
  - 在单纯形法的相邻两次迭代中，设迭代前的可行基为$B=(P_1, P_2, \ldots, P_{r-1}, P_r, P_{r+1}, \ldots P_m)$，经过换基运算后，得到另一个可行基$B_{new}=(P_1, P_2, \ldots, P_{r-1}, P_r, P_{r+1}, \ldots P_m)$
  - 则迭代后所得基B_{new}的逆矩阵为

$$B_{new}^{-1} = EB^{-1}, \text{其中} E=(e_1,\cdots,e_{l-1},\xi,e_{l+1},\cdots,e_m)$$

$$P_1 = \begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{lk} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{主元素} \\ \\ \end{array} \Rightarrow \xi = \begin{pmatrix} -a_{1k}/a_{lk} \\ \vdots \\ 1/a_{lk} \\ \vdots \\ -a_{mk}/a_{lk} \end{pmatrix}$$

■ 改进单纯形法的步骤：

(1)据LP问题的标准型，确定初始基变量和初始可行基B。求逆矩阵B^{-1}，得初始基本可行解 $X_B=B^{-1}b, X_N=0$

(2)计算单纯形乘子$\pi=C_BB^{-1}$和目标函数值 $Z=C_BB^{-1}b=\pi b$

(3)计算非基变量检验数 $\sigma_N=C_N-C_BB^{-1}N=C_N-\pi N$，若$\sigma_N \le 0$，则已得最优解，停止计算；否则转下一步。

(4)据 $\max\{\sigma_j/\sigma_j>0\}=\sigma_k$ ，确定x_k为换入变量，计算$B^{-1}P_k$，若$B^{-1}P_k\le 0$，则问题没有有限最优解，停止计算，否则转下一步。

(5)据 $\min\left\{\frac{(B^{-1}b)_i}{(B^{-1}P_k)_i} / (B^{-1}P_k)_i > 0\right\} = \frac{(B^{-1}b)_l}{(B^{-1}P_k)_l}$ ，确定 x_l 为换出变量。

(6)用 P_l 替代 P_k 得新基 B_1，由变换公式 $B_1^{-1} = E_{lk}B^{-1}$ 计算 B_1^{-1}，求出新的基本可行解。

其中 E_{lk} 为变换矩阵，构造方法：

将换入变量 x_k 对应的系数列向量 $B^{-1}P_k$ 做如下变形，主元素 a'_{lk}（应在主对角线上）取倒数，其他元素除以主元素 a'_{lk} 并取相反数。然后用它替换单位矩阵出发，把换出变量 x_l 在基B中的对应列的单位向量。

重复(2)～(6)直至求得最优解。

例:用改进单纯形法求解

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & & = 8 \\ 4x_1 & + x_4 & = 16 \\ 4x_2 & & + x_5 = 12 \end{cases}$$

解：第1步(1)确定初始基和初始基变量

$$X_{B0}=(x_3,x_4,x_5)^T, B_0=(P_3,\quad P_4,\quad P_5)=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix};$$

$$B_0^{-1}=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\qquad X_{N0}=(x_1,x_2)^T$$

（2）计算非基变量的检验数，确定换入变量。

$$\sigma_{N_0}=C_{N_0}-C_{B_0}B_0^{-1}N_0\quad (N_0=(P_1,P_2))$$

$$=(2,3)-(0,0,0)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\4&0\\0&4\end{pmatrix}=(2,3)\Rightarrow(x_1,x_2)$$

(3) 确定换出变量

表示选择>0的元素

$$\theta = \min\left(\frac{\left(B_0^{-1}b\right)_i}{\left(B_0^{-1}P_2\right)_i} \middle| B_0^{-1}P_2 > 0 \right)$$

$$= \min\left(\frac{8}{2}, -, \frac{12}{4} \right) = 3 \Rightarrow x_5$$

（4）基变换　　新基 $B_1 = \left(P_3, P_4, P_2\right) \Rightarrow$

$$B_0^{-1}P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \xi_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/4 \end{pmatrix};$$

$$B_1^{-1}=E_1B_0^{-1}=\begin{pmatrix}1 & & -1/2\\ & 1 & 0\\ & & 1/4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1/2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1/4\end{pmatrix}$$

（5）计算非基变量的系数矩阵 $X_{N_1}=(x_1,x_5)^T$

$$N_1=\begin{pmatrix}1 & \\ 4 & \\ & 1\end{pmatrix}\Rightarrow B_1^{-1}N_1=\begin{pmatrix}1 & & -1/2\\ & 1 & 0\\ & & 1/4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \\ 4 & \\ & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1/2\\ 4 & 0\\ 0 & 1/4\end{pmatrix}$$

（6）计算RHS

$$B_1^{-1}b=\begin{pmatrix}1 & & -1/2\\ & 1 & 0\\ & & 1/4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\16\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\16\\3\end{pmatrix}$$

- 第1步计算结束后的结果

基 $B_1=\left(P_3,P_4,P_2\right);$

基变量 $X_{B_1}=\left(x_3,x_4,x_2\right)^T;$

非基变量 $X_{N_1}=\left(x_1,x_5\right)^T;$

价值系数 $C=\left(C_{B_1},C_{N_1}\right)=\left(\left(0,0,3\right),\left(2,0\right)\right)$

- 重复(2)~(6)
- （2）计算非基变量的检验数。

$$\sigma_{N_1} = C_{N_1} - C_{B_1} B_1^{-1} N_1 \quad (\text{注：} N_1 = (P_1, P_5)) \qquad X_{N_1} = (x_1, x_5)^T$$

$$= (2,0) - (0,0,3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (2, -3/4) \Rightarrow_{\text{对应}} (x_1, x_5)$$

换入变量

（3）确定换出变量

$$\theta = \min\left(\frac{\left(B_1^{-1}b\right)_i}{\left(B_1^{-1}P_1\right)_i} \middle| B_1^{-1}P_1 > 0 \right)$$

$$= \min\left(\frac{2}{1}, \frac{16}{4}, \frac{3}{0} \right) = 2 \Rightarrow x_3$$

（4）由此得到新的基。$B_2 = \left(P_1, P_4, P_2\right)$

$$B_1^{-1}P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}^{\text{主元素}} \Rightarrow \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B_2^{-1} = E_2 B_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

（4）计算RHS 。

$$B_2^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- 第2步计算结束后的结果

基 $B_2=\left(P_1,P_4,P_2\right);$

基变量 $X_{B_2}=\left(x_1,x_4,x_2\right)^T;$

非基变量 $X_{N_2}=\left(x_3,x_5\right)^T;$

价值系数 $C=\left(C_{B_2},C_{N_2}\right)=\left((2,0,3),(0,0)\right)$

- 第3步：重复第2步的步骤。$X_{N_2}=(x_3,x_5)^T$

(2)计算非基变量的检验数。

$$\sigma_{N_2}=C_{N_2}-C_{B_2}B_2^{-1}N_2 \quad (N_2=(P_3,P_5))$$

$$=(0,0)-(2,0,3)\begin{pmatrix}1 & 0 & -1/2\\ -4 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1/4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=(-2,\quad 1/4)\Rightarrow(x_3,x_5)$$

(3)确定换出变量

$$\theta=\min\left(\frac{(B_2^{-1}b)_i}{(B_2^{-1}P_5)_i}\middle|B_2^{-1}P_5>0\right)$$

$$=\min\left(\frac{2}{-1/2},\frac{8}{2},\frac{3}{1/4}\right)=4\Rightarrow x_4$$

- (5)由此得到新的基 $B_3=(P_1,P_5,P_2)$;

$$B_2^{-1}P_5=\begin{pmatrix}1&0&-1/2\\-4&1&2\\0&0&1/4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2\\2\\1/4\end{pmatrix}\Rightarrow\xi_3=\begin{pmatrix}1/4\\1/2\\-1/8\end{pmatrix}$$

$$B_3^{-1}=E_3B_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&1/4&0\\0&1/2&0\\0&-1/8&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1/2\\-4&1&2\\0&0&1/4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&1/4&0\\-2&1/2&1\\1/2&-1/8&0\end{pmatrix}$$

- 计算非基变量的检验数 $X_{N_3}=(x_3,x_4)^T$

$$\sigma_{N_3}=C_{N_3}-C_{B_3}B_3^{-1}N_3 \quad (N_3=(P_3,P_4))$$

$$=(0,0)-(2,0,3)\begin{pmatrix}0 & 1/4 & 0\\ -2 & 1/2 & 1\\ 1/2 & -1/8 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$=(-3/2,\quad -1/8)$$

- 已无正的检验数

- 最优解为

$$X^* = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_5 \\ x_2 \end{pmatrix} = B_3^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 8 \\ -2 & 1/2 & 16 \\ 1/2 & -1/8 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- 最优值为

$$z^* = C_{B_3} B_3^{-1} b = (2, 0, 3) \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 14$$

二、单纯形法矩阵描述的应用

1 检查计算是否正确

例1

$$\max z = 7x_1 + 15x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_2 \le 3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

最优基矩阵B=(p_3,p_1,p_2)

c_j		7	15	0	0	0		
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	θ_i
0	x_3	1	1	1	0	0	6	6/1
0	x_4	1	2	0	1	0	8	8/2
0	x_5	0	1	0	0	1	3	3/1
σ_j		7	15	0	0	0	0	
0	x_3	1	0	1	0	-1	3	3/1
0	x_4	1	0	0	1	-2	2	2/1
15	x_2	0	1	0	0	1	3	—
σ_j		7	0	0	0	-15	45	
0	x_3	0	0	1	-1	1	1	
7	x_1	1	0	0	1	-2	2	
15	x_2	0	1	0	0	1	3	
σ_j		0	0	0	-7	-1	59	

b

单位矩阵

$B^{-1}b$

最优基矩阵的逆矩阵B^{-1}

基矩阵：

$$B=\begin{pmatrix}p_3 & p_1 & p_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

基矩阵的逆矩阵：

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

常数项：

$$X_B=B^{-1}b=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\ 8\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$$

检验数：

$$\sigma_N=C_N-C_BB^{-1}N$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 7 & 15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 7 & 15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & -1\end{pmatrix}$$

目标函数值：

$$z=C_BB^{-1}b$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 7 & 15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}=59$$

2 由最终表反推出初始表

例2：设用单纯形法求解某个线性规划问题的最终表如下（目标max， 约束为≤形式，x_3,x_4,x_5为松弛变量），试写出原始线性规划模型。

	x_3	0	0	1	-1	1	1	
	x_1	1	0	0	1	-2	2	
	x_2	0	1	0	0	1	3	
σ_j		0	0	0	-7	-1		

松弛变量的价值系数为0

x_1、x_2的价值系数设为c_1、c_2

$$\begin{cases} 0-c_1=-7 \\ 0+2c_1-c_2=-1 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} c_1=7 \\ c_2=15 \end{matrix}$$

解：

$$B=(B^{-1})^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_3 & p_1 & p_2\end{pmatrix}$$

$$N=B(B^{-1}N)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_4 & p_5\end{pmatrix}$$

$$b=B(B^{-1}b)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\ 8\\ 3\end{pmatrix}$$

故：

$$\max z = 7x_1 + 15x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_2 \le 3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$