



中山大學 智能工程学院

SUN YAT-SEN UNIVERSITY SCHOOL OF INTELLIGENT SYSTEMS ENGINEERING

# 对偶理论



## 3.3 对偶问题的提出

- **对偶**：对同一事物（或问题），从不同的角度（或立场）提出对立的两种不同的表述。
- 在平面内，矩形的面积与其周长之间的关系，有两种不同的表述方法。
  - (1) 周长一定，面积最大的矩形是正方形。
  - (2) 面积一定，周长最短的矩形是正方形。
- 这是互为对偶关系的表述。



# 线性规划中的对偶问题

- 对偶理论是线性规划的内容之一。任何一个线性规划都有一个伴生的线性规划，称之为原规划的对偶规划问题。下面通过实例引出对偶问题，然后给出对偶线性规划的定义。



# 对偶问题的现实来源

- 例：设某工厂生产两种产品甲和乙，生产中需4种设备按A B C D顺序加工，每件产品加工所需的机时数、每件产品的利润值及每种设备的可利用机时数列于下表：

产品数据表

设备 产品	A	B	C	D	产品利润 (元/件)
甲	2	1	4	0	2
乙	2	2	0	4	3
设备可利用机时数	12	8	16	12	

- 问：充分利用设备机时，工厂应生产甲和乙型产品各多少件才能获得最大利润？



- 设甲、乙型产品各生产 $x_1$ 及 $x_2$ 件，则数学模型为

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 4x_1 \leq 16 \\ 4x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- 反过来问：若厂长决定不生产甲和乙型产品，决定出租机器用于接受外加工，只收加工费，那么4种机器的机时如何定价才是最佳决策？



- 在市场竞争的时代，厂长的最佳决策显然应符合两条：
- (1) **不吃亏原则**。即机时定价所赚利润不能低于加工甲、乙型产品所获利润。由此原则，便构成了新规划的不等式约束条件。
- (2) **竞争性原则**。即在上述不吃亏原则下，尽量降低机时总收费，以便争取更多用户。



- 设A、B、C、D设备的机时价分别为 $y_1$ 、 $y_2$ 、 $y_3$ 、 $y_4$ ，则新的线性规划数学模型为：

$$\min \omega = 12y_1 + 8y_2 + 16y_3 + 12y_4$$

$$s.t \begin{cases} 2y_1 + y_2 + 4y_3 + 0y_4 \geq 2 \\ 2y_1 + 2y_2 + 0y_3 + 4y_4 \geq 3 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{cases}$$

- 为了使得工厂出让资源合算，显然应该使出让原来生产一台产品甲的资源所得收入不低于自己生产一台产品甲的利润，同理乙



- 把同种问题的两种提法所获得的数学模型用下表表示，将会发现一个有趣的现象。

原问题与对偶问题对比表

	$A \ (y_1)$	$B \ (y_2)$	$C \ (y_3)$	$D \ (y_4)$	
甲 $(x_1)$	2	1	4	0	2
乙 $(x_2)$	2	2	0	4	3
	12	8	16	12	$\min \omega$ $\max z$





# 原问题与对偶问题的对应关系

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 4x_1 \leq 16 \\ 4x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

原问题-LP

$$\min \omega = 12y_1 + 8y_2 + 16y_3 + 12y_4$$

$$s.t \begin{cases} 2y_1 + y_2 + 4y_3 + 0y_4 \geq 2 \\ 2y_1 + 2y_2 + 0y_3 + 4y_4 \geq 3 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{cases}$$

对偶问题-DP



# 线性规划的对偶模型

		2	3	←	
		$x_1$	$x_2$	原问题	
12	$y_1$	2	2	$\leq$	12
8	$y_2$	1	2	$\leq$	8
16	$y_3$	4	0	$\leq$	16
12	$y_4$	0	4	$\leq$	12
		$\vee\vee$	$\vee\vee$	→	
对偶问题		2	3		



## 3.4 线性规划的对偶理论

### 定义

- 称线性规划(DP)

$$\min W = Yb$$

$$YA \geq C$$

$$Y \geq 0$$

$$Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$$

的对偶规划问题

**Dual**

为原线性规划(LP)

$$\max Z = CX$$

$$AX \leq b$$

$$X \geq 0$$

$$X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$$

这是最常见的对偶模型形式，称为对称式对偶模型。二者间具有十分对称的对应关系。



## (1) 对称形式的对偶问题

- **特点**：目标函数求极大值时，所有约束条件为 $\leq$ 号，变量非负；目标函数求极小值时，所有约束条件为 $\geq$ 号，变量非负。

	原问题	对偶问题
目标函数	max	min
约束条件	$\leq$	$\geq$
	变量数量	约束条件个数
	约束条件个数	变量数量



- 例 写出下列线性规划问题的对偶问题.

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 7x_1 + 12x_2 \\ \text{s.t. } \begin{cases} 9x_1 + 4x_2 \leq 360 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 200 \\ 3x_1 + 10x_2 \leq 300 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- 解：原问题的对偶问题为

$$\begin{aligned} \text{Min } w &= 360y_1 + 200y_2 + 300y_3 \\ \text{s.t. } \begin{cases} 9y_1 + 4y_2 + 3y_3 \geq 7 \\ 4y_1 + 5y_2 + 10y_3 \geq 12 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$



## (2) 非对称型对偶问题

- 若给出的线性规划不是对称形式（**原问题的约束条件含有等式约束时**），可以先化成对称形式再写对偶问题。  
见书P66
- 也可直接按教材表3-4中的对应关系写出非对称形式的对偶问题。



## P67 表3-4 原问题与对偶问题的关系

原问题（或对偶问题）		对偶问题（或原问题）	
目标函数 max		目标函数 min	
约束条件	m个	m个	变量
	$\leq$	$\geq 0$	
	$\geq$	$\leq 0$	
	=	无约束	
变量	n个	n个	约束条件
	$\geq 0$	$\geq$	
	$\leq 0$	$\leq$	
	无约束	=	
b	约束条件右端项	目标函数变量的系数	
c	目标函数变量的系数	约束条件右端项	

写出下列线性规划的对偶问题

$$\begin{aligned} \min Z &= x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 9x_4 \\ \begin{cases} 7x_1 - 2x_2 + 8x_3 - x_4 \leq 18 \\ 6x_2 - 5x_4 \geq 10 \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 = -14 \\ x_1 \text{ 无约束}, x_2 \leq 0, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

**【解】** 目标函数求最小值，应将表3-4的右边看作原问题，左边是对偶问题，原问题有3个约束4个变量，则对偶问题有3个变量4个约束，对偶问题为：

$$\begin{aligned} \max w &= 18y_1 + 10y_2 - 14y_3 \\ \begin{cases} 7y_1 + 2y_3 = 1 \\ -2y_1 + 6y_2 + 8y_3 \geq 5 \\ 8y_1 - y_3 \leq -4 \\ -y_1 - 5y_2 \leq 9 \\ y_1 \leq 0, y_2 \geq 0, y_3 \text{ 无约束} \end{cases} \end{aligned}$$





# 写出下列线性规划问题的对偶问题

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 \geq 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_4 \leq 4 \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 \leq 0, x_2, x_3 \geq 0, x_4 \text{无约束} \end{cases}$$

解：原问题的对偶问题为

$$\min W = 5y_1 + 4y_2 + 6y_3$$

$$\begin{cases} 4y_1 + 3y_2 - 2y_3 \leq 2 \\ y_1 - 2y_2 + 3y_3 \geq 3 \\ -3y_1 + 4y_3 \geq -5 \\ 2y_1 + 7y_2 + y_3 = 1 \\ y_1 \leq 0, y_2 \geq 0, y_3 \text{无约束} \end{cases}$$



# 线性规划对偶问题的基本性质

- 下面介绍对偶基本性质时，一般假定是如下规范对偶关系。

设原问题是（记为 $LP$ ）： 对偶问题是（记为 $DP$ ）：

$$\max Z = CX$$

$$\begin{cases} AX \leq b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

$$\min w = Yb$$

$$\begin{cases} YA \geq C \\ Y \geq 0 \end{cases}$$

这里 $A$ 是 $m \times n$ 矩阵 $X$ 是 $n \times 1$ 列向量， $Y$ 是 $1 \times m$ 行向量。假设 $X_s$ 与 $Y_s$ 分别是（ $LP$ ）与（ $DP$ ）的松弛变量。



- **【性质1】 对称性 对偶问题的对偶是原问题。**

**【证】** 设原问题是

$$\max Z = CX, AX \leq b, X \geq 0$$

可知，它的对偶问题是

$$\min w = Yb, \quad YA \geq C, Y \geq 0$$

它与下列线性规划问题是等价的：

$$\max(-w) = -Yb, -YA \leq -C, Y \geq 0$$

再写出它的对偶问题。

$$\min(-w) = -CX, -AX \geq -b, X \geq 0$$

它与下列线性规划问题是等价的

$$\max Z = CX, AX \leq b, X \geq 0$$

即是原问题。



- **【性质2】 弱对偶性** 设 $X^\circ$ 、 $Y^\circ$  分别为LP(max)与DP(min)的可行解，则  $CX^\circ \leq Y^\circ b$

**【证】** 因为 $X^\circ$ 、 $Y^\circ$  是可行解，故有 $AX^\circ \leq b$ ,  $X^\circ \geq 0$ 及 $Y^\circ A \geq C$ ,  $Y^\circ \geq 0$ , 将不等式 $AX^\circ \leq b$

两边左乘 $Y^\circ$ ，得 $Y^\circ AX^\circ \leq Y^\circ b$

再将不等式 $Y^\circ A \geq C$ 两边右乘 $X^\circ$ ，得 $CX^\circ \leq Y^\circ AX^\circ$

故  $CX^\circ \leq Y^\circ AX^\circ \leq Y^\circ b$

这一性质说明了两个线性规划互为对偶时，求最大值的线性规划的任意目标值都不会大于求最小值的线性规划的任一目标值，不能理解为原问题的目标值不超过对偶问题的目标值。



- **推论1**: 原问题任一可行解的目标函数值是其对偶问题目标函数值的下界; 反之, 对偶问题任意可行解的目标函数值是其原问题目标函数值的上界。

- 例题:

$$\begin{aligned} \max Z &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\ \text{(P)} \quad &\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 20 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 20 \\ x_{1-4} \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- 试估计它们目标函数的界, 并验证弱对偶性原理。



$$\min W = 20y_1 + 20y_2$$

$$(D) \quad \begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 1 \\ 2y_1 + y_2 \geq 2 \\ 2y_1 + 3y_2 \geq 3 \\ 3y_1 + 2y_2 \geq 4 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

- 由观察可知： $\bar{X} = (1.1.1.1)$ ， $\bar{Y} = (1.1)$ ，分别是 (P) 和 (D) 的可行解。 $Z=10$ ， $W=40$ ，故有
- $C\bar{X} < \bar{Y}b$ ，弱对偶定理成立。由推论(1)可知， $W$  的最小值不能小于10， $Z$  的最大值不能超过40。

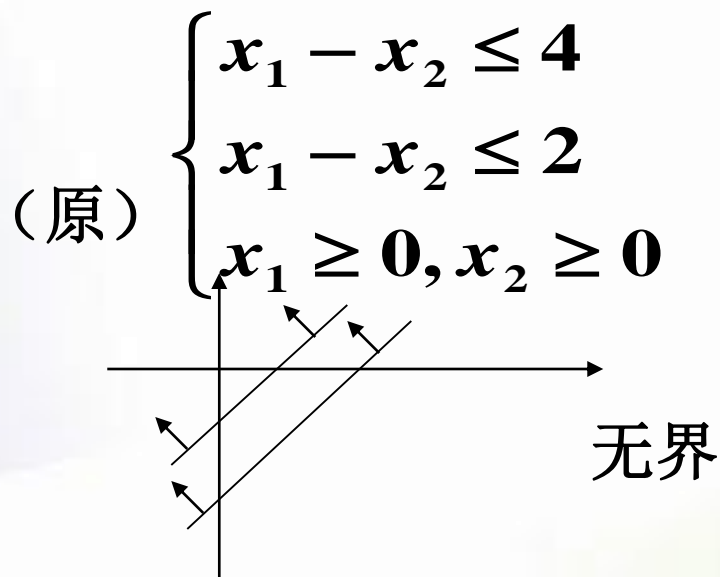


- **【性质3】 无界性** 若原问题(对偶问题)有无界解, 则其对偶问题(原问题)无可行解。

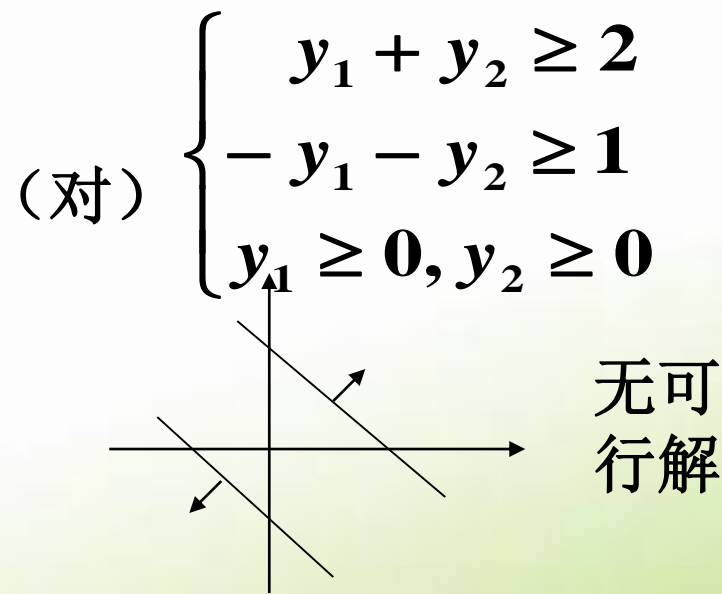
- 可理解为: 在互为对偶的两个问题中, 若一个问题可行且具有无界解, 则另一个问题无可行解

证: 假定原问题有无界解, 对偶问题有可行解  $Y^\circ$ ,  $Y^\circ b \leq \infty$ 。原问题有无界解, 即存在  $C X^\circ \rightarrow \infty$ , 根据弱对偶性有,  $Y^\circ b \geq C X^\circ \rightarrow \infty$ , 显然矛盾, 故命题成立。

$$\max Z = 2x_1 + x_2$$



$$\min W = 4y_1 + 2y_2$$







## 关于无界性有如下结论：

原问题	对偶问题
问题无界	无可行解
无可行解	
	问题无界

**推论2：**在一对对偶问题 (P) 和 (D) 中，若其中一个问题可行但目标函数无界，则另一个问题无可行解；反之不成立。这也是对偶问题的无界性。





例如：

$$\begin{aligned} \min z &= x_1 + 2x_2 \\ \begin{cases} -x_1 - \frac{1}{2}x_2 \geq 2 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

无可行解，而对偶问题

$$\begin{aligned} \max w &= 2y_1 + 2y_2 \\ \begin{cases} -y_1 + y_2 \leq 1 \\ -\frac{1}{2}y_1 + y_2 \leq 2 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

有可行解，由性质（3）知对偶问题必有无界解。



- **【性质4】 最优性定理** 设 $X^0$ 与 $Y^0$ 分别是 $(LP)$ 与 $(DP)$ 的可行解，则当 $CX^0 = Y^0b$ 时， $X^0$ 、 $Y^0$ 是 $(LP)$ 与 $(DP)$ 的最优解
- **【证】** 若 $CX^0 = Y^0b$ ，由性质2，对偶问题的所有可行解 $Y'$ 都存在 $Y'b \geq CX'$ 。因为 $CX^0 = Y^0b$ ，所以 $Y'b \geq Y^0b$ ，可见 $Y^0$ 是使目标函数取值最小的可行解，因而 $Y^0$ 是最优解。同理可证， $X^0$ 是最优解



- 性质5 对偶定理:若原问题有最优解, 那么对偶问题也有最优解, 且目标函数值相等。

【证】设  $(LP)$  有最优解  $X^0$ , 那么对于最优基  $B$  必有  $C - C_B B^{-1} A \leq 0$  与  $-C_B B^{-1} \leq 0$ , 即有  $Y^0 A \geq C$  与  $Y^0 \geq 0$ , 这里  $Y^0 = C_B B^{-1}$ , 从而  $Y^0$  是可行解, 对目标函数有

$$CX^0 = C_B X_B = C_B B^{-1} b = Y^0 b$$

由性质4知  $Y^0$  是最优解。

总结以上性质, 对偶问题的解一般共有三种情况:

- (1) 两个问题均有有限最优解
- (2) 两个问题都无可行解
- (3) 一个问题有无界解, 另一个问题无可行解

【例】 证明下列线性规划无最优解：

$$\begin{aligned} \min Z &= x_1 - x_2 + x_3 \\ \begin{cases} x_1 - x_3 \geq 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 3 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3 \end{cases} \end{aligned}$$

【证】 容易看出 $X = (4, 0, 0)$ 是一可行解，故问题可行。对偶问题

$$\begin{aligned} \max w &= 4y_1 + 3y_2 \\ \begin{cases} y_1 + y_2 \leq 1 \\ -y_2 \leq -1 \\ -y_1 + 2y_2 \leq 1 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

将三个约束的两端分别相加得  $y_2 \leq \frac{1}{2}$   
而第二个约束有 $y_2 \geq 1$ ，矛盾，故对偶问题无可行解，因而原问题具有无界解，即无最优解。



- **【性质6】 互补松弛定理** 设 $X^0$ 、 $Y^0$ 分别为(LP)与(DP)的可行解， $X_S$ 和 $Y_S$ 是它的松弛变量的可行解，则 $X^0$ 和 $Y^0$ 是最优解当且仅当  $Y_S X^0 = 0$  和  $Y^0 X_S = 0$

**【证】** 设 $X^0$  和 $Y^0$  是最优解,由性质4 ,  $C X^0 = Y^0 b$ , 由于 $X_S$ 和 $Y_S$ 是松弛变量, 则有

$$\begin{aligned} A X^0 + X_S &= b \\ Y^0 A - Y_S &= C \end{aligned}$$

将第一式左乘 $Y^0$ , 第二式右乘 $X^0$ 得

$$\begin{aligned} Y^0 A X^0 + Y^0 X_S &= Y^0 b \\ Y^0 A X^0 - Y_S X^0 &= C X^0 \end{aligned}$$



显然有  $Y^0 X_S = -Y_S X^0$

又因为  $Y^0$ 、 $X_S$ 、 $Y_S$ 、 $X^0 \geq 0$ ，所以有

$$Y^0 X_S = 0 \text{ 和 } Y_S X^0 = 0$$

成立。

反之，当  $Y^0 X_S = 0$  和  $Y_S X^0 = 0$  时，有

$$\begin{aligned} Y^0 A X^0 &= Y^0 b \\ Y^0 A X^0 &= C X^0 \end{aligned}$$

显然有  $Y^0 b = C X^0$ ，由性质4知  $Y^0$  与  $X^0$  是  $(LP)$  与  $(DP)$  的最优解。证毕。

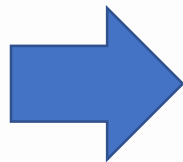


- 性质6告诉我们已知一个问题的最优解时求另一个问题的最优解的方法，即已知 $Y^*$ 求 $X^*$ 或已知 $X^*$ 求 $Y^*$ 。

$$Y^* X_S = 0 \text{ 和 } Y_S X^* = 0$$

- 两式称为互补松弛条件。将互补松弛条件写成下式
- 由于变量都非负，要使求和式等于零，则必定每一分量为零，因而有下列关系：

$$\sum_{i=1}^m y_i^* x_{S_i} = 0$$
$$\sum_{j=1}^n y_{S_j} x_j^* = 0$$



(1) 当 $y_i^* > 0$ 时， $x_{S_i} = 0$ ，反之当 $x_{S_i} > 0$ 时 $y_i^* = 0$ ；

(2)  $y_{S_j} > 0$ 时 $x_j^* = 0$ ，反之当 $x_j^* > 0$ 时 $y_{S_j} = 0$



- 利用上述关系，建立对偶问题（或原问题）的约束线性方程组，方程组的解即为最优解。
- 性质6的结论和证明都是假定(P)与(D)为对称形式，事实上对于非对称形式，性质6的结论仍然有效。

【例】 已知线性规划

$$\max z = 3x_1 + 4x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 16 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

的最优解是

$$X = (6, 2, 0)^T$$

求对偶问题的最优解。





【解】对偶问题是

$$\min w = 10y_1 + 16y_2$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 3 \\ 2y_1 + 2y_2 \geq 4 \\ y_1 + y_2 \geq 1 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

因为 $X_1 \neq 0$ ,  $X_2 \neq 0$ , 所以对偶问题的第一、二个约束的松弛变量等于零, 即

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 = 3 \\ 2y_1 + 2y_2 = 4 \end{cases}$$

解此线性方程组得 $y_1=1, y_2=1$ , 从而对偶问题的最优解为 $Y = (1, 1)$ , 最优值 $w=26$ 。



【例】 已知线性规划

$$\begin{aligned} \min z &= 2x_1 - x_2 + 2x_3 \\ \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + x_2 - x_3 \leq 6 \\ x_1 \leq 0, x_2 \geq 0, x_3 \text{无约束} \end{cases} \end{aligned}$$

的对偶问题的最优解为  $Y=(0, -2)$ ，求原问题的最优解。

【解】 对偶问题是

$$\begin{aligned} \max w &= 4y_1 + 6y_2 \\ \begin{cases} -y_1 - y_2 \geq 2 \\ y_1 + y_2 \leq -1 \\ y_1 - y_2 = 2 \\ y_1 \text{无约}, y_2 \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$



因为 $y_2 \neq 0$ ，所以原问题第二个松弛变量  $x_{s_2} = 0$ ，由  $y_1 = 0$ 、 $y_2 = -2$  知，松弛变量  $y_{s_1} = 0$ ， $y_{s_2} = 1$ ， $y_{s_3} = 0$ ，故  $x_2 = 0$ ，则原问题的约束条件为线性方程组：

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 = 4 \\ -x_1 - x_3 = 6 \end{cases}$$

解方程组得： $x_1 = -5$ ， $x_3 = -1$ ，所以原问题的最优解为  $X = (-5, 0, -1)$ ，最优值  $Z = -12$ 。



## 例 3.8 已知线性规划问题

$$z^* = \max \left\{ \sum_{j=1}^n c_j x_j \right\}$$

$$z^{**} = \max \left\{ \sum_{j=1}^n c_j x_j \right\}$$

$$(I) \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i & i = 1, 2, \dots, m \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \text{ 与 } (II) \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i + k_i & i = 1, 2, \dots, m \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

若  $(y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$  为线性规划问题(I)对偶问题的最优解，在线性规划问题(II)

中  $k_i$  为某已知常数，求证：
$$z^{**} \leq z^* + \sum_{i=1}^m k_i y_i^*$$

证 先写出第一个问题的对偶问题

$$w^* = \min \left\{ \sum_{i=1}^m b_i y_i \right\} = \sum_{i=1}^m b_i y_i^*$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j & j=1, 2, \dots, n \\ y_i \geq 0 & i=1, 2, \dots, m \end{cases}$$

然后再写出第二个问题的对偶问题

$$w^{**} = \min \left\{ \sum_{i=1}^m (b_i + k_i) y_i \right\} = \sum_{i=1}^m b_i y_i^{**} + \sum_{i=1}^m k_i y_i^{**}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j & j=1, 2, \dots, n \\ y_i \geq 0 & i=1, 2, \dots, m \end{cases}$$

两个问题的约束条件相同, 故  $(y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$  也是后一个对偶问题的可行解。

$$\text{故有 } w^{**} = \sum_{i=1}^m b_i y_i^{**} + \sum_{i=1}^m k_i y_i^{**} \leq \sum_{i=1}^m (b_i + k_i) y_i^* = w^* + \sum_{i=1}^m k_i y_i^*,$$

$$\text{又 } z^{**} = w^{**}, z^* = w^*, \text{ 所以有 } z^{**} \leq z^* + \sum_{i=1}^m k_i y_i^*。$$



- 原问题单纯形表检验数行与对偶问题解的关系
  - 原问题单纯形表检验数的相反数对应对偶问题的一个基解.
  - 显然,原问题最终单纯形表检验数的相反数对应对偶问题的一个基可行解

原问题	$X_B$	$X_N$	$X_S$
检验数	0	$C_N - C_B B^{-1} N$	$-C_B B^{-1}$
对偶问题	$Y_{S1}$	$-Y_{S2}$	$-Y$

对应原问题中基  
变量的剩余变量

对应原问题中非基  
变量的剩余变量



## 3.6 对偶单纯形法

原问题最优表

$X_B$	b	原问题的变量		原问题的松弛变量		
		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
$x_3$	15/2	0	0	1	5/4	-15/2
$x_1$	7/2	1	0	0	1/4	-1/2
$x_2$	3/2	0	1	0	-1/4	3/2
$\sigma_j$		0	0	0	-1/4	-1/2

对偶问题最优表

$X_B$	b	对偶问题的变量			对偶问题的剩余变量	
		$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$
$y_2$	1/4	-4/5	1	0	-1/4	1/4
$y_3$	1/2	15/2	0	1	1/2	-3/2
$\sigma_j$		15/2	0	0	7/2	3/2



# 思路产生动机

- 由原问题和对偶问题的解之间关系： $b$ 列元素是原问题的基可行解，而检验数行是对偶问题的基解。单纯形法迭代到对偶问题的解也是可行解(检验数非正)时，则对偶理论知原问题和对偶问题此时都达到最优解。
- 单纯形法的求解过程是：在保持原问题可行( $b$ 列数字保持 $\geq 0$ )的前提下，通过逐步迭代实现对偶问题可行(检验数行 $\leq 0$ )。





# 思路产生动机

- 利用对偶问题的对称性，换个角度来考虑求解原问题最优解的方法：
- 能否保持对偶问题可行(检验数行数字保持 $\leq 0$ )的前提下，通过逐步迭代实现原问题可行( $b$ 列 $\geq 0$ ，从非可行解变成可行解)呢？
- 答案是肯定的，这就是对偶单纯形法的基本思想。



# 对偶单纯形法原理和基本思路

- **原理：**

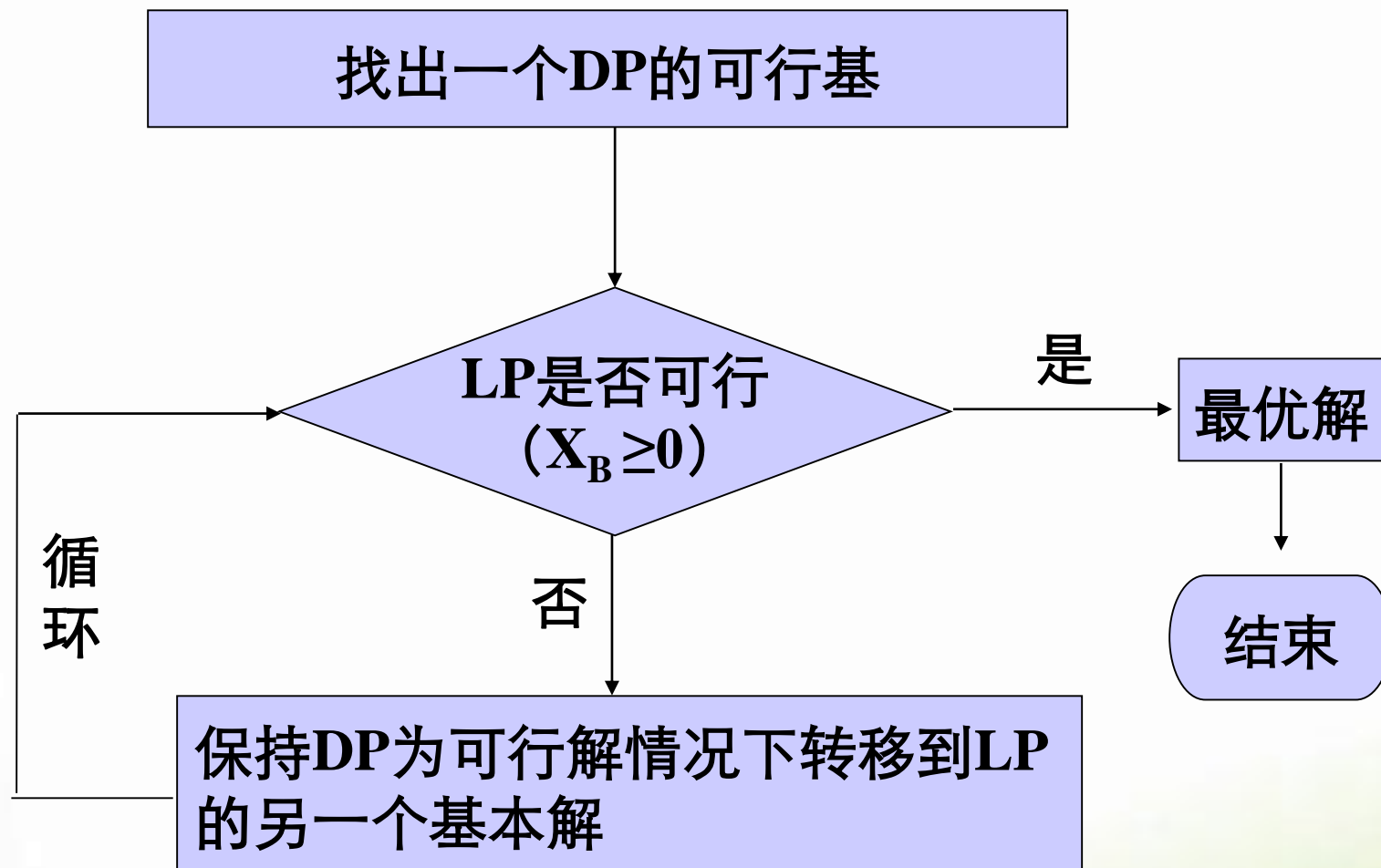
- 对偶单纯形法是求解线性规划的另一个基本方法。它是根据对偶原理和单纯形法原理而设计出来的。
- 注意：对偶单纯形法是一种求解线性规划的方法，而不是去求对偶问题的单纯形法。



# 对偶单纯形法原理和基本思路

- **思路:**

- 以保持对偶问题可行为条件，即不论进行何种基变换，必须保持所有的检验数非正，同时取消原问题必须可行(常数列的非负限制)的要求，通过基变换使原问题在非可行解的基础上逐步转换成基本可行解，一旦原问题的基本解可行，则该基本可行解也就是最优解。





- 单纯形法和对偶单纯形法的思路不同：
- **单纯形法**：在保持原问题可行解的前提下，通过基变换使**对偶问题**在非可行解的基础上向可行解的方向迭代。
- **对偶单纯形法**：在保持对偶问题可行解的前提下，通过基变换使**原问题**在非可行解基础上向可行解的方向迭代。

	单纯形法	对偶单纯形法
保持	$B^{-1}b \geq 0$	$c_j - z_j \leq 0$
最优准则	$c_j - z_j \leq 0$	$B^{-1}b \geq 0$



# 对偶单纯形法的计算步骤

Step1 列出初始单纯形表。

若 $b$ 列的数都非负，检验数都非正，则已得最优解，停止计算。若 $b$ 列的数至少有一个负分量，检验数保持非正，则转入下一步。

Step2 确定换出变量。按 $\min \{(B^{-1}b)_i \mid (B^{-1}b)_i < 0\} = (B^{-1}b)_l$ 对应的基变量 $x_l$ 为换出变量。

Step3 确定换入变量。检查 $x_l$ 所在行的系数。

若所有系数都非负，则无可行解，停止计算。

若存在某个系数小于零，计算

$$\theta = \min_j \left( \frac{c_j - z_j}{a_{lj}} \mid a_{lj} < 0 \right) = \frac{c_k - z_k}{a_{lk}}$$



按 $\theta$ 规则所对应的列的非基变量 $x_k$ 为换入变量，这样才能保持得到的对偶问题解仍为可行解。

Step4 以 $\alpha_{lk}$ 为主元素，按原单纯形法在表中进行迭代运算，得到新的计算表。

重复步骤Step1-4。



例 用对偶单纯形法求解:  $\min w = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 4 \\ x_j \geq 0 (j = 1, 2, 3) \end{cases}$$

解: (1) 将模型化为下列形式, 因为对偶问题可行, 即全部检验数  $\leq 0$  (求max问题)。

$$\max \quad z = -2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -1 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_5 = -4 \\ x_j \geq 0 (j = 1, 2, 3, 4, 5) \end{cases}$$





$c_j$			-2	-3	-4	0	0	
$C_B$	$X_B$	$b$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
0	$x_4$	-1	-1	-2	-1	1	0	-2/-2
0	$x_5$	-4	-2	1	-3	0	1	-4/-3
			-2	-3	-4	0	0	
0	$x_4$	1	0	-5/2	1/2	1	-1/2	
-2	$x_1$	2	1	-1/2	3/2	0	-1/2	
			0	-4	-1	0	-1	

最优解:  $x_1^* = 2, x_2^* = 0, x_3^* = 0, x_4^* = 1, x_5^* = 0$

目标值:  $w^* = -z^* = 4$



❖ 换出变量的确定:

按上述对偶单纯形法计算步骤(2), 即按 $\min \{ (B^{-1}b)_i \mid (B^{-1}b)_i < 0 \} = (B^{-1}b)_1$ 对应的基变量 $x_1$ 为换出变量。计算

$$\min(-3, -4) = -4$$

故 $x_5$ 为换出变量。

❖ 换入变量的确定: 按上述对偶单纯形法计算步骤(3), 即在单纯形表中检查 $x_1$ 所在行的各系数 $\alpha_{1j} (j=1, 2, \dots, n)$ 。若所有 $\alpha_{1j} \geq 0$ , 则无可行解, 停止计算。

$$\theta = \min\left(\frac{-2}{-2}, -, \frac{-4}{-3}\right) = \frac{-2}{-2} = 1$$

故 $x_1$ 为换入变量。换入、换出变量的所在列、行的交叉处“-2”为主元素。按单纯形法计算步骤进行迭代, 得下表



例 用对偶单纯形法求解：

$$\min Z = 9x_1 + 12x_2 + 15x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 12 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 \geq 14 \\ x_j \geq 0 (j = 1, 2, 3) \end{cases}$$

解：(1) 将模型化为下列形式，因为对偶问题可行，即全部检验数 $\leq 0$   
(求max问题)。

$$\max Z' = -9x_1 - 12x_2 - 15x_3$$

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 & = -10 \\ -2x_1 - 3x_2 - x_3 & + x_5 = -12 \\ -x_1 - x_2 - 5x_3 & + x_6 = -14 \\ x_1, \dots, x_6 \geq 0 \end{cases}$$



$c_j$			-9	-12	-15	0	0	0	
$C_B$	$X_B$	$b$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
0	$x_4$	-10	-2	-2	-1	1	0	0	-9/-1
0	$x_5$	-12	-2	-3	-1	0	1	0	-12/-1
0	$x_6$	-14	-1	-1	-5	0	0	1	-15/-5
			-9	-12	-15	0	0	0	
0	$x_4$	-36/5	-9/5	-9/5	0	1	0	-1/5	30/9
0	$x_5$	-46/5	-9/5	-14/5	0	0	1	-1/5	45/14
-15	$x_3$	14/5	1/5	1/5	1	0	0	-1/5	15
			-6	-9	0	0	0	-3	



$C_j$			-9	-12	-15	0	0	0	
$C_B$	$X_B$	$b$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
0	$x_4$	-9/7	-9/14	0	0	1	-9/14	-1/14	60/3
-12	$x_2$	23/7	9/14	1	0	0	-5/14	1/14	10/1
-15	$x_3$	15/7	1/14	0	1	0	1/14	-3/14	20/1
			-3/14	0	0	0	-45/14	-33/14	
-9	$x_1$	2	1	0	0	-14/9	1	1/9	
-12	$x_2$	2	0	1	0	1	-1	0	
-15	$x_3$	2	0	0	1	1/9	0	-2/9	
			0	0	0	-1/3	-3	-7/3	

原问题的最优解为：  $X^* = (2, 2, 2, 0, 0, 0)$  ,  $Z^* = 72$

其对偶问题的最优解为：  $Y^* = (1/3, 3, 7/3)$  ,  $W^* = 72$



# 对偶单纯形法应注意的问题

- (1) 单纯形法换基顺序：先确定进基变量后确定出基变量；  
对偶单纯形法换基顺序：先确定出基变量后确定进基变量。
- (2) 初始解可以是非可行解，但初始表中一定要满足对偶问题可行(即检验数都为负数)，就可以进行基变换，不需要加入人工变量，因此对偶单纯形法可以简化计算。
- (3) 当变量多于约束条件的LP问题用对偶单纯形法计算可以减少计算工作量，因此对变量较少而约束条件很多的LP问题，可先将它变换成对偶问题，然后用对偶单纯形法求解。





- (4) 单纯形法的最小比值是  $\min_i \left\{ \frac{b_i}{a_{ik}} \mid a_{ik} > 0 \right\}$ ，其目的是保证下一个原问题的基本解可行。

对偶单纯形法的最小比值是  $\min_j \left\{ \left| \frac{\sigma_j}{a_{lj}} \right| \mid a_{lj} < 0 \right\}$ ，其目的是保证下一个对偶问题的基本解可行。

- (5) 对偶单纯形法在确定出基变量时，若不遵循  $b_l = \min \{b_i \mid b_i < 0\}$  规则，任选一个小于零的  $b_i$  对应的基变量出基，不影响计算结果，只是迭代次数可能不一样。



## 3.5 影子价格

设 $B$ 是 $\{\max z = CX \mid AX \leq b, X \geq 0\}$ 的最优基,

$$z^* = C_B B^{-1} b = Y^* b, \quad \frac{\partial z^*}{\partial b} = C_B B^{-1} = Y^*$$

定义：在一对  $P$  和  $D$  中，若  $P$  的某个约束条件的右端项常数  $b_i$  (第  $i$  种资源的拥有量) 增加一个单位时，所引起目标函数最优值  $z^*$  的改变量称为第  $i$  种资源的影子价格，其值等于  $D$  问题中对偶变量  $y_i^*$ 。

$$z^* = \sum_{j=1}^n c_j x_j = \sum_{i=1}^m b_i y_i$$





(1) 影子价格反映资源对目标函数的边际贡献，即资源转换成经济效益的效率。

在其它条件不变的情况下，单位资源数量的变化所引起的目标函数最优值的变化。即对偶变量 $y_i$ 就是第 $i$ 种资源的影子价格。



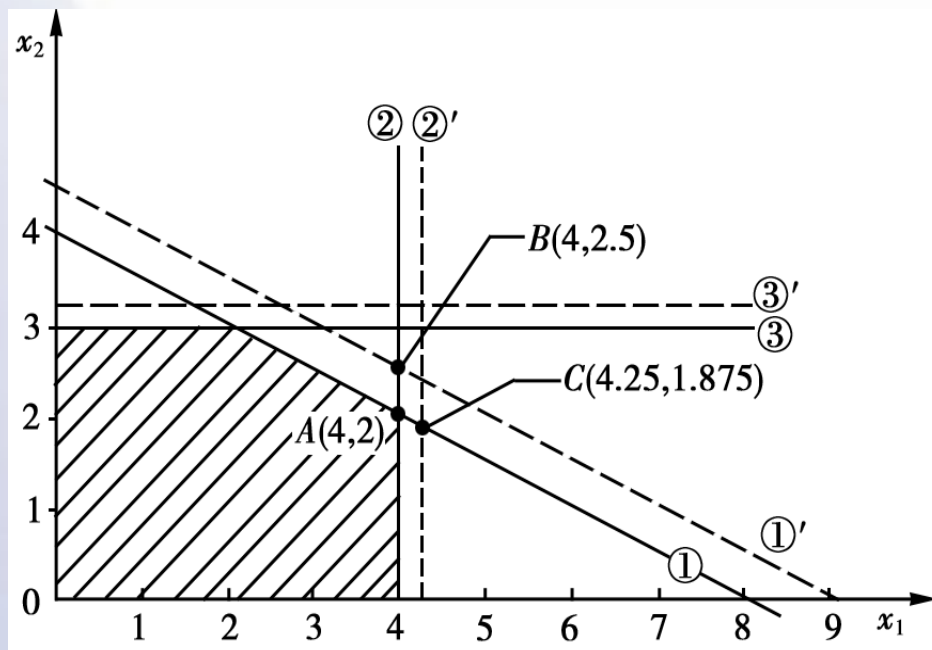
$c_j$			2	3	0	0	0	$\theta_i$
$c_B$	$X_B$	$b$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
2	$x_1$	4	1	0	0	1/4	0	
0	$x_5$	4	0	0	-2	1/2	1	
3	$x_2$	2	0	1	1/2	-1/8	0	
			0	0	-3/2	-1/8	0	

$y_1^*=1.5, y_2^*=0.125, y_3^*=0$ 。

这说明是其他条件不变的情况下，若设备增加一台时，该厂按最优计划安排生产可多获利1.5元；原材料A增加1kg，可多获利0.125元；原材料B增加1kg，对获利无影响。



## 几何解释



如图，

若设备增加一台，代表该约束的直线由①移至①'，最优解由(4,2)变为(4,2.5)， $z=15.5$ ，即比原来增大1.5。若原材料A增加1kg，代表该约束的直线由②移至②'，最优解从(4,2)变为(4.25,1.875)， $z=14.125$ 。比原来增加0.125。原材料B增加1kg，该约束的直线由③移至③'，最优解不变。



- (2) 影子价格反映了资源的稀缺程度

根据互补松弛性定理:

$$Y^* X_s = 0, \quad Y_s X^* = 0$$

若某种资源的影子价格为0, 则表明这种资源剩余;

若某种资源的影子价格大于0, 则表明这种资源短缺。



### (3) 影子价格反映了资源的边际使用价值

影子价格是在资源最优利用条件下对单位资源的估价，这种估价不是资源实际的市场价格，而根据在生产中的作用而估价。因此从另一个角度说，它是一种机会成本。

资源的市场价格是已知数，相对比较稳定而它的影子价格则依赖于资源利用情况，是未知数。企业生产任务、产品结构等情况发变化，资源的影子价格也随之发生变化。

机会成本：机会成本是厂商利用同样的生产要素所能生产的其它产品的价值。



若第 $i$ 种资源的单位市场价格为 $m_i$ ，

(1)则当 $y_i^* > m_i$ 时，企业愿意购进这种资源，单位纯利为 $y_i^* - m_i$ ，则有利可图；

(2)如果 $y_i^* < m_i$ ，企业有偿转让这种资源，可获单位纯利 $m_i - y_i^*$ ，否则企业无利可图，甚至亏损。

结论：若 $y_i^* > m_i$  则购进资源 $i$ ，可获单位纯利 $y_i^* - m_i$

若 $y_i^* < m_i$ 则转让资源 $i$ ，可获单位纯利 $m_i - y_i$



## (4) 影子价格对单纯形表计算的解释

单纯形表中的检验数

$$\sigma_j = c_j - C_B B^{-1} P_j = c_j - \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i$$

其中 $c_j$ 表示第 $j$ 种产品的价格;  $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i$ 表示生产该种产品所消耗的各项资源的影子价格的总和,即产品的**隐含成本**。

当产值大于隐含成本时, 即 $\sigma_j > 0$ , 表明生产该项产品有利, 可在计划中安排; 否则 $\sigma_j < 0$ , 用这些资源生产别的产品更有利, 不在生产中安排该产品。





- 对线性规划问题求解是确定资源的最优分配方案
- 对对偶问题的求解则是确定对资源的恰当估价，这种估价直接关系到资源的最有效利用





# 影子价格有3种理论

- 一、资源最优配置理论；
- 二、机会成本和福利经济学理论；
- 三、全部效益和全部费用理论；