# 运筹学绪论

姜善成
办公室地址：红楼-格致堂112
邮箱：jiangshch3@mail.sysu.edu.cn; pfc24@126.com

# 关于教学

- 书面、闭卷考试。平时成绩（考勤10%、作业20%、课堂表现10%、中期考核10%）占总分50%，期末考试占总分50%
- 教材《运筹学（本科版）》，第4版，清华大学出版社
- 推荐优化软件CPLEX，Lingo
- 相关刊物; https://pubsonline.informs.org/
  - OMEGA
  - European journal of operational research

一、运筹学的形成与发展

二、运筹学模型及分析步骤

三、运筹学的定义及学科体系

四、线性代数相关前置知识复习

# 一、运筹学的形成和发展

- 运筹学（Operations Research）是系统工程的最重要的理论基础之一，在美国有人把运筹学称之为管理科学(Management Science)。

- 运筹学所研究的问题，可简单地归结为一句话："依照给定条件和目标，从众多方案中选择最佳方案"，故有人称之为最优化技术。

- 1938年英国最早出现了军事运筹学，命名为"Operational Research",1942年，美国从事这方面工作的科学家命其名为"Operations Research"，这个名字一直延用至今。

# 中国古代的运筹学思想

- 中国《史记》中的“运筹帷幄之中，决胜千里之外”表达了中国古代运筹学思想，在古代中国有许多运筹学思想的应用案例，如丁谓修宫、田忌赛马等，都蕴藏着神奇的运筹学思想，这些案例至今仍有很高的参考和借鉴价值。

# 体现运筹学思想的优秀案例1——田忌赛马

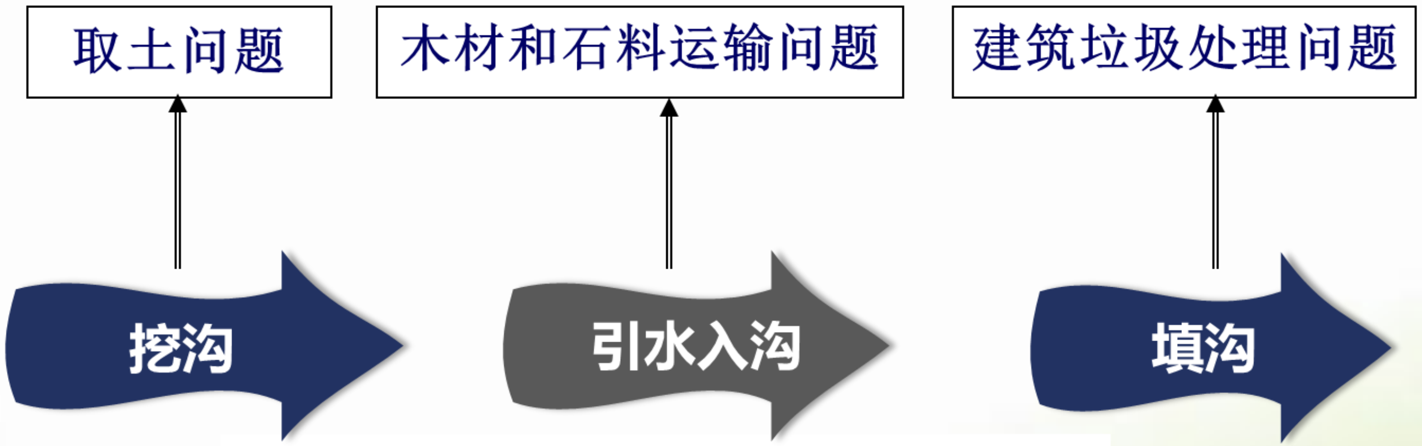
- 战国时期齐王和田忌赛马,各从自己上等马、中等马、下等马中选送一匹进行比赛，每输一局，输银千两，齐王的马都比田忌的好，但田忌的下等马与齐王的上等马赛，用上等马对中等马，用中等马对下等马，这样田忌非但没有输，反而赢了一千两银子，这便是系统中从整体出发，选最优方案，到最后实施的对策策略。

# 体现运筹学思想的优秀案例2——沈括运粮

- 沈括(1031—1095年)，北宋时期大科学家、军事家.在率兵抗击西夏侵扰的征途中，曾经从行军中各类人员可以背负粮食的基本数据出发，分析计算了后勤人员与作战兵士在不同行军天数中的不同比例关系，同时也分析计算了用各种牲畜运粮与人力运粮之间的利弊，最后做出了从敌国就地征粮，保障前方供应的重要决策.从而减少了后勤人员的比例，增强了前方作战的兵力.

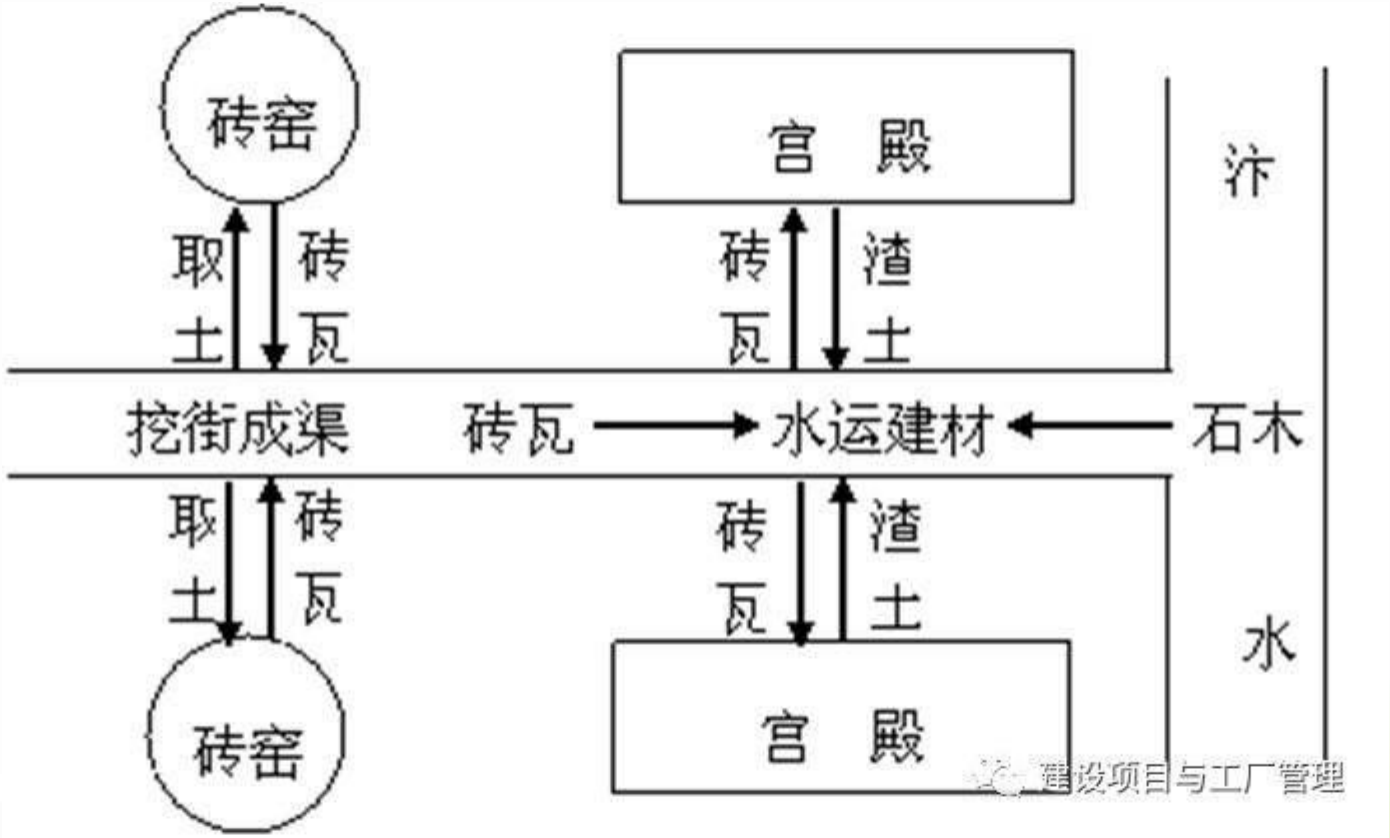
# 体现运筹学思想的优秀案例3——丁渭修宫

- 宋朝《梦溪笔谈》中记载了这样一个故事：北宋真宗年间，皇宫失火，皇帝召各大臣商议如何在很短的时间内修复好皇宫，而修复皇宫包括取土烧砖，运输建筑材料，清理废墟三大工程，但在当时的条件下，这是相当繁重的工程，大家都无以言答。当时有个叫丁谓的大臣，他提出了一个一举三得的方案




丁谓修宫工程问题示意图

# 丁渭修宫



# 体现运筹学思想的优秀案例4——都江堰

- 都江堰水利工程由战国时期（大约公元前250年）川西太守李冰父子主持修建。其目标是：利用岷江上游的水资源灌溉川西平原。追求的效益还有防洪与航运。

# 体现运筹学思想的优秀案例4——都江堰

- 都江堰由三大工程组成：
  - 1.鱼嘴岷江分水工程：将岷江水有控制地引入内江。
  - 2.飞沙堰分洪排沙工程：将泥沙排入外江。
  - 3.宝瓶口引水工程：除沙后的江水引入水网干道。
- 它们巧妙结合，完整而严密，相得益彰。两千多年来，这项工程一直发挥着巨大的效益，是我国最成功的水利工程。

# 运筹学学科的形成

- 现在普遍认为，运筹学的研究是从第二次世界大战初期的军事任务开始的，以英国为代表的科学家做了奠基性的工作。当时迫切需要把各项稀少的资源以有效的方式分配给各种不同的军事经营及在每一经营内的各项活动，所以美国及随后美国的军事管理当局都号召大批科学家运用科学手段来处理战略与战术问题，实际上这便是要求他们对种种（军事）经营进行研究，这些科学家小组正是最早的运筹小组（O.R.小组）。
- 第二次世界大战期间，运筹学（OR）成功地解决了许多重要作战问题，显示了科学的巨大物质威力，为“OR”后来的发展铺平了道路。

# 鲍德西雷达站的研究

- 1935年，英国科学家R.Watson-Wart发明了雷达。丘吉尔命令在英国东海岸的建立了一个秘密雷达站。当时，德国已拥有一支强大的空军，起飞17分钟即到达英国本土。在如此短的时间内，如何预警和拦截成为一大难题。
- 组建多学科研究小组（马戏团）：三名心理学家、两名数学家、两名应用数学家、一名天文物理学家、一名普通物理学家、一名海军军官、一名陆军军官、一名测量员。

- 研究的问题是：设计将雷达信息传送到指挥系统和武器系统的最佳方式；雷达与武器的最佳配置；对探测、信息传递、作战指挥、战斗机与武器的协调，作了系统的研究，并获得成功。“Blackett马戏团”在秘密报告中使用了“Operational Research”，即“运筹学”。

# 运筹学学科发展

- 第二次世界大战后，运筹学从单纯军事和战争中的应用研究，扩展到经济和管理领域，并形成了自己的理论与方法.
- 1948年，美国麻省理工学院率先开设了运筹学课程，许多大学群起效法，内容也日益丰富.
- 1950年，美国出版了第一份运筹学杂志；
- 1951年美国的莫尔斯等著的《运筹学方法》一书出版。


Philip M. Morse


George E. Kimball

# 运筹学学科发展

- 1、从1945年到50年代初，被称为创建时期。此阶段的特点是从事运筹学研究的人数不多，范围较小，运筹学的出版物、研究组织等寥寥无几

- 2、从50年代初期到50年代末期，被认为是运筹学的成长时期。此阶段的一个特点是电子计算机技术的迅速发展，使得运筹学中一些方法如单纯形法、动态规划方法等，得以用来解决实际管理系统中的优化问题，促进了运筹学的推广应用。

- 3、自60年代以来，被认为是运筹学开始普及和迅速发展的时期。此阶段的特点是运筹学进一步细分为各个分支，专业学术团体的迅速增多，更多期刊的创办，运筹学书籍的大量出版，以及更多学校将运筹学课程纳人教学计划之中。

# 国内运筹学学科形成

- 现代运筹学被引入中国是在20世纪50年代后期。中国第一个运筹学小组是在钱学森、许国志先生的推动下，在1956年于中国科学院力学研究所成立。
- 1959年，第二个运筹学部门在中国科学院数学研究所成立，当时的主要研究方向为排队论、非线性规划和图论，还有人专门研究运输理论、动态规划和经济分析(例如投入产出方法)。
- 20世纪50年代后期，运筹学在中国的应用集中在运输问题上。其中一个代表性工作是研究“打麦场的选址问题”，解决在手工收割为主的情况下如何节省人力。此外，国际上著名的“中国邮路问题”模型也是在那个时期由管梅谷教授提出的。

# 二、运筹学模型及分析步骤

- 运筹学模型是用一些数学关系（数学方程、逻辑关系等）来描述被研究对象的实际关系（技术关系、物理定律、外部环境等）。
- 运筹学模型的一个显著特点是它们大部分为最优化模型。一般来说，运筹学模型都有一个目标函数和一系列的约束条件，模型的目标是在满足约束条件的前提下使目标函数最大化或最小化。

数学模型举例：

$$\text{Max (Min)} \quad z = 7x_1 + 5x_2$$

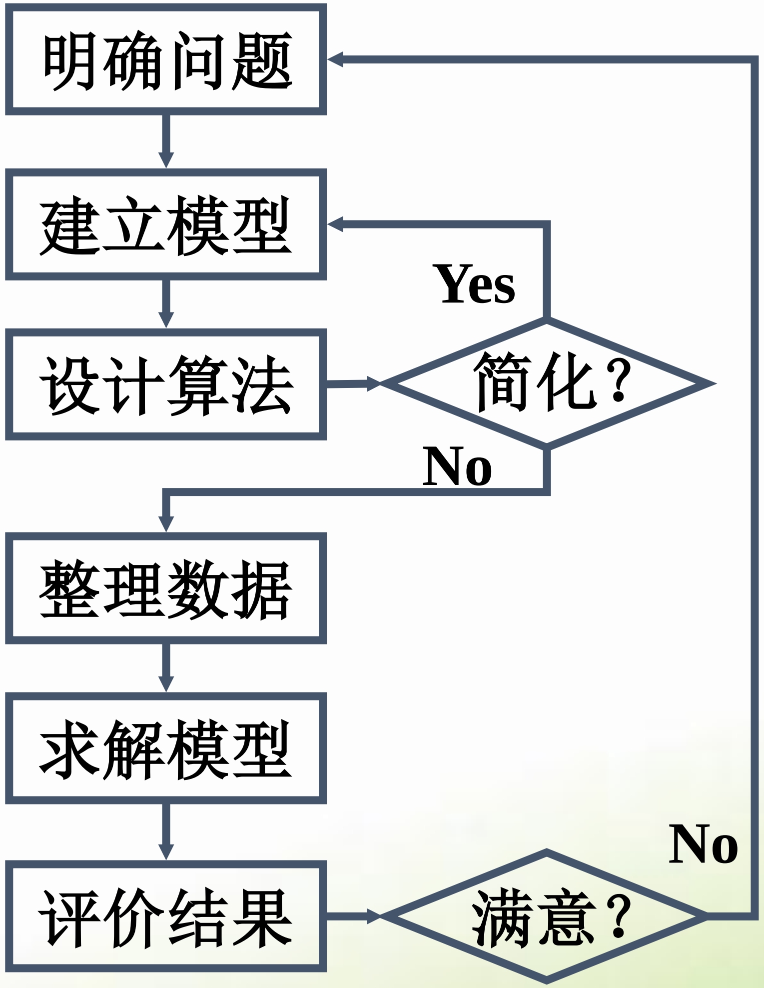
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leqslant 90 \\ 4x_1 + 6x_2 \leqslant 200 \\ 7x_2 \leqslant 210 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

# 研究方法

- 从现实生活场合抽出本质的要素来构造数学模型
- 探索求解的结构并导出系统的求解过程
- 从可行方案中寻求系统的最优解法。

# 运筹学解决问题的方法步骤

- 明确问题
- 建立模型
- 设计算法
- 整理数据
- 求解模型
- 评价结果



# 三、运筹学的定义及学科体系

- Morse&Kimball（运筹学界元老） 运筹学是为决策机构在对其控制的业务活动进行决策时，提供的数量化为基础的科学方法。

- 英国人运筹学会（世界上最早的运筹学会） 运筹学是运用科学方法（特别是数学方法）来解决工业、商业、政府、国防等部门里有关人力、机器、物资、金钱等大型系统的指挥和管理中出现的复杂问题的一门学科。

- 钱学森等：由一支综合性的队伍，采用科学的方法，为一些涉及到有机系统（人-机）的控制系统问题提供解答，为该系统的总目标服务的学科。

# 运筹学的特点

- 科学性：运筹学是以研究事物内在规律，并从定量分析的角度探求更好地解决问题的一门科学。
- 应用性：运筹学既对各种经营进行创造性的科学研究，又涉及到组织的实际管理问题，它具有很强的实践性，最终应能向决策者提供建设性意见，并应收到实效。
- 多学科的交叉性、综合性：运筹学研究中吸收了来自不同领域的经验，并被广泛应用于工商企业、军事部门、民政事业等研究组织内的统筹协调问题，故其应用不受行业、部门之限制；

# 运筹学的特点

- 系统性和最优性:它以整体最优为目标,从系统的观点出发,力图以整个系统最佳的方式来解决该系统各部门之间的利害冲突。对所研究的问题求出最优解,寻求最佳的行动方案,所以它也可看成是一门优化技术,提供的是解决各类问题的优化方法。

- 运筹学已经形成了一个庞大的学科体系，其具体内容主要包括：规划论（包括线性规划、非线性规划、整数规划和动态规划）、决策论、对策论、排队论、存储论、网络分析等。

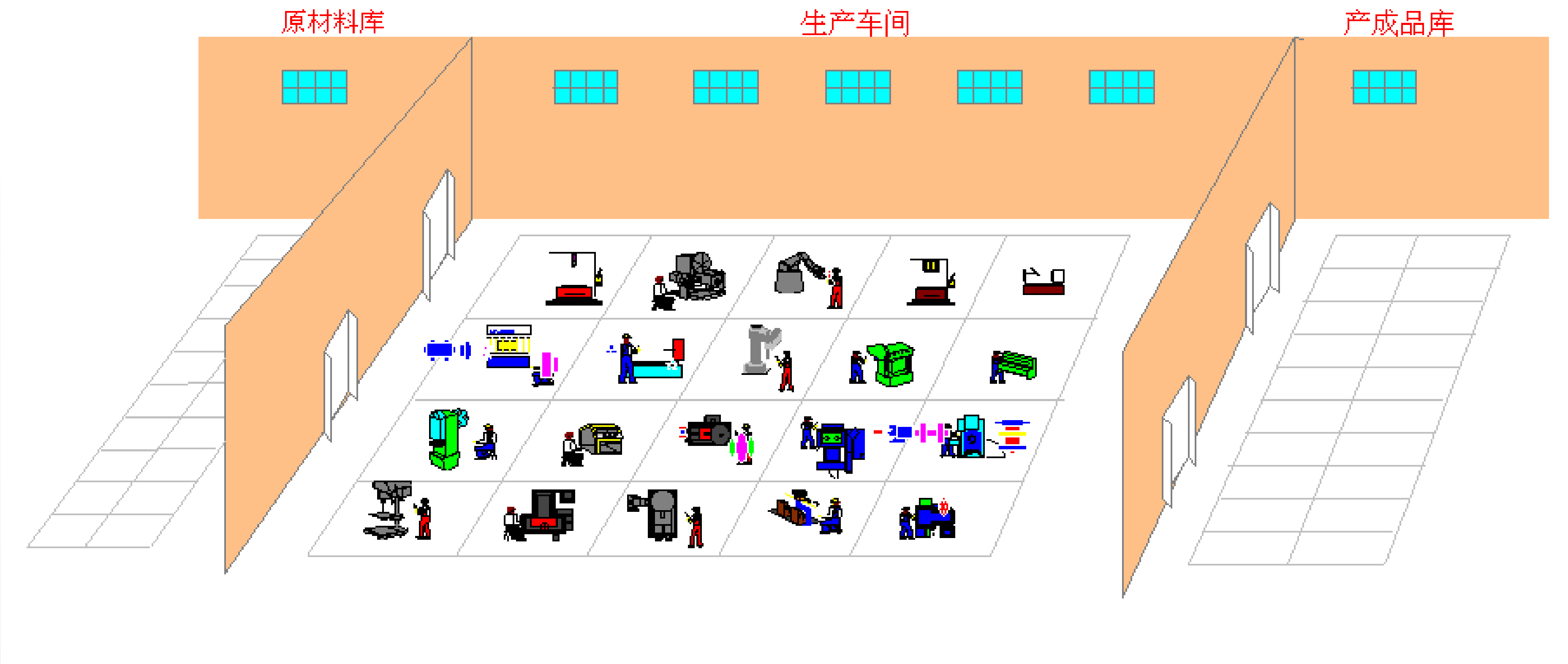
**学科内容**

- **数学规划**
  - 线性规划
  - 非线性规划
  - 整数规划
  - 动态规划
  - 多目标规划
  - 双层规划
- **组合优化**
  - 最优计数问题
  - 网络优化
  - 排序问题
  - 统筹图
- **随机优化**
  - 对策论
  - 排队论
  - 库存论
  - 决策分析
  - 可靠性分析

**系统工程**

**管理科学与工程**

# 产品组合问题——线性规划



# 生产计划问题——线性规划

- 某企业要在计划期内安排生产甲、乙两种产品,这个企业现有的生产资料是：设备18台时,原材料A 4吨,原材料 B 12吨;已知单位产品所需消耗生产资料及利润如下表.问应如何确定生产计划使企业获利最多

| 产品<br>资源 | 甲 | 乙 | 资源量 |
|---|---|---|---|
| 设备/台时 | 3 | 2 | 18 |
| 原料A/吨 | 1 | 0 | 4 |
| 原料B/吨 | 0 | 2 | 12 |
| 单位赢利/万元 | 3 | 5 | |

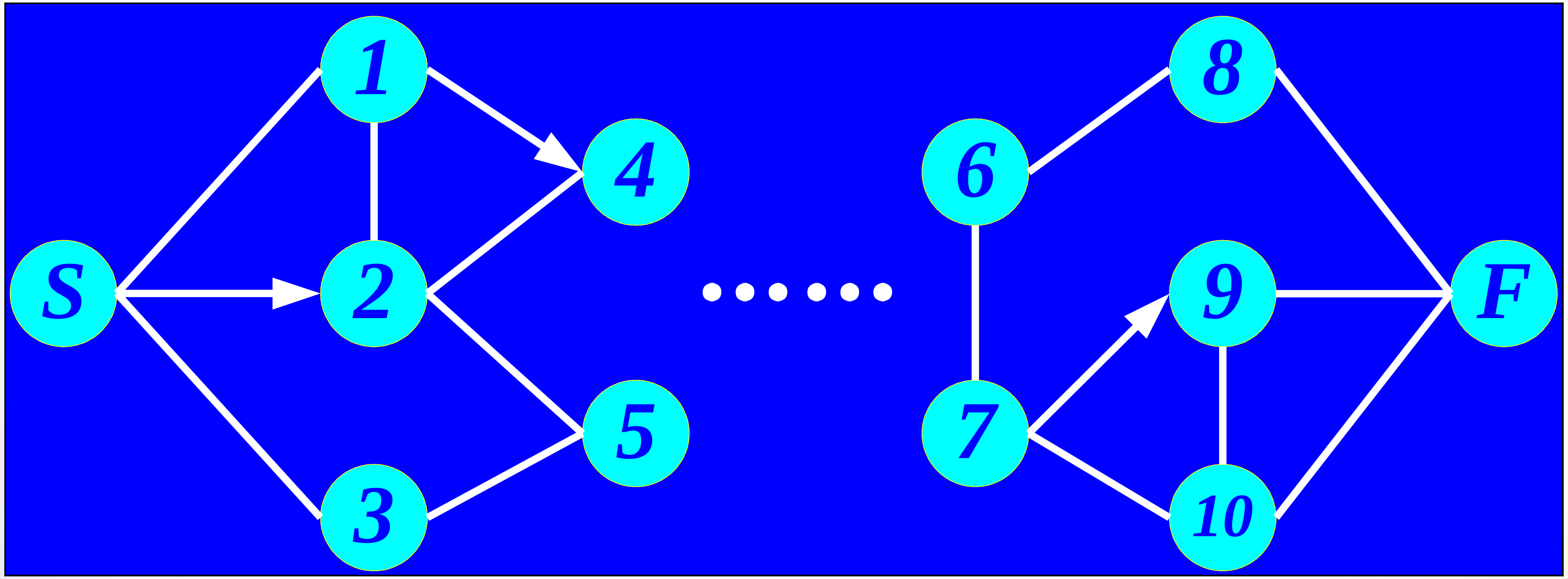
# 厂址选择问题——运输问题


黑龙江
吉林
辽宁
内蒙古
新疆
甘肃
宁夏
青海
西藏
陕西
山西
河北
北京
天津
山东
河南
江苏
上海
安徽
湖北
浙江
四川
重庆
湖南
江西
福建
贵州
云南
广西
广东
香港
澳门
台湾
海南
南海诸岛
海口市

# 匹配问题——整数规划

- 某团体举行舞会，其中有n 个男士与n 个女士，每个男士恰好认识 r 个女士，每个女士也恰好认识 r 个男士，
  - 问：在这个团中，能否做到：每个男士与其认识的女士跳舞，每个女士也与其认识的男士跳舞
- 其他问题：护士排班，人员调度，
- 球队循环赛场次安排

# 交通路线规划问题——图与网络模型



# TSP问题（Traveling Salesman Problem）

- 是数学领域中著名问题之一。
- 假设有一个旅行商人要拜访N个城市，他必须选择所要走的路径，路径的限制是每个城市只能拜访一次，而且最后要回到原来出发的城市。路径的选择目标是要求得的路径路程为所有路径之中的最小值，
- 这是一个NP难问题。
- TSP的历史很久，最早的描述是1759年欧拉研究的骑士周游问题，即对于国际象棋棋盘中的64个方格，走访64个方格一次且仅一次，并且最终返回到起始点。

# 四、线性代数相关前置知识复习

- 两个矩阵的和
- 设有两个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和记作 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，规定为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

# 数与矩阵的乘积

- 数 k 与矩阵 $A=(a_{ij})$ 的乘积称为**数乘运算**, 记作 $kA$
- 矩阵的加法与数乘两种运算统称为矩阵的**线性运算**.

$$kA = k\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

# 两个矩阵相乘

- 设 $A=(a_{ik})_{m\times l}$， $B=(b_{kj})_{l\times n}$，记
  $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{il}b_{lj}\ (i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n)$
- 称矩阵 $C=(c_{ij})_{m\times n}$ 为矩阵$A$与$B$的乘积，记$C=A\times B$

$$c_{ij}=(a_{i1}\quad\cdots\quad a_{il})\begin{pmatrix}b_{1j}\\ \vdots\\ b_{lj}\end{pmatrix}=a_{i1}b_{1j}+\cdots+a_{il}b_{lj}$$

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}&a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\\a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}&a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{pmatrix}$$

# 转置矩阵

- 把矩阵 $A$ 的各行作为相同序号的列，形成一个新的矩阵，称为矩阵 $A$ 的转置矩阵，记为 $A^{\mathrm{T}}$ 或 $A'$

$$(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A; \qquad (A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}};$$

$$(kA)^{\mathrm{T}} = kA^{\mathrm{T}}; \qquad (AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}.$$

# 行列式

- 把一个$n$阶行列式中的元素$a_{ij}$所在的第$i$行和第$j$列划去后，留下来的$n$-1阶行列式叫做元素$a_{ij}$的余子式,记作$\boldsymbol{M}_{ij}$。记$\boldsymbol{A}_{ij}=(-1)^{i+j}\boldsymbol{M}_{ij}$，叫做元素$a_{ij}$的代数余子式。例如

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \boldsymbol{M}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_{23}=(-1)^{2+3}\boldsymbol{M}_{23}=-\boldsymbol{M}_{23}.$$

- 一个$n \times n$矩阵的行列式等于其任意行(或列)的元素与对应的代数余子式乘积之和

$$\det(A)=a_{i1}A_{i1}+\ldots+a_{in}A_{in}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}M_{ij}$$

# 逆矩阵

- 对于$n$阶矩阵$A$，如果存在$n$阶矩阵$B$，使得$AB=BA=E$，那么矩阵$A$称为可逆的，而$B$称为$A$的逆矩阵
- $n$阶矩阵$A$为可逆的充分必要条件是$|A|\neq 0$，而且 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}$，
- 其中$A^{*}$为方阵$A$的伴随矩阵

# 矩阵的秩(rank)

- 有$r$阶子式不为0，任何$r+1$阶子式(如果存在的话)全为0，称$r$为矩阵$A$的秩，记作$R(A)$或秩$(A)$。
- $R(A) \leq m$, $R(A) \leq n$, $0 \leq R(A) \leq \min\{m, n\}$
- 如果$A_{n\times n}$，且$|A| \neq 0$，则$R(A) = n$
- 方阵$A$可逆的充分必要条件是$R(A) = n$

# 矩阵的秩(rank)

- 设 $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，为阶梯形矩阵，求$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{B})$
- 存在一个二阶子式$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$，而任何三阶子式全为0，$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{B})=2$
- **结论：阶梯形矩阵的秩=台阶数。**

# 矩阵的秩(rank)

- 定理：矩阵初等变换不改变矩阵的秩

  $1.\ r_i \leftrightarrow r_j \quad 2.\quad k\,r_i \quad \mathbf{3.}\ \boldsymbol{r_i + kr_j}$

- 求矩阵A的秩方法：
  - 1）利用初等行变换化矩阵A为阶梯形矩阵B
  - 2）数阶梯形矩阵B非零行的行数即为矩阵A的秩

# 为什么要研究矩阵的秩?

- $n$元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$
- 系数矩阵$A$
- 增广矩阵$\tilde{A} = (A \vdots b)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

# 判断方程组解的情况

- $\boldsymbol{R}(A) < \boldsymbol{R}(B)$ 时，方程组无解
- $\boldsymbol{R}(A) = \boldsymbol{R}(B) = \mathrm{n}$，方程组有唯一解
- $\boldsymbol{R}(A) = \boldsymbol{R}(B) < \mathrm{n}$，方程组无穷解