单纯形法

单纯形法的基本思想

- 1947年G.B.Dantzig提出的单纯形法提供了方便、有效的通用算法求解线性规划。
- 基本思想：顶点的逐步转移
  - 即从可行域的一个顶点（基本可行解）开始，转移到另一个顶点（另一个基本可行解）的迭代过程，转移的条件是使目标函数值得到改善（逐步变优），当目标函数达到最优值时，问题也就得到了最优解。

顶点转移的依据

- 根据线性规划问题的可行域是凸多边形或凸多面体(定理1)，一个线性规划问题有最优解，就一定可以在可行域的顶点上找到(定理3)。
- 于是，若某线性规划只有唯一的一个最优解，这个最优解所对应的点一定是可行域的一个顶点；若该线性规划有多个最优解，那么肯定在可行域的顶点中可以找到至少一个最优解。

需要解决的问题

- (1)如何寻找初始顶点(基本可行解)?
- (2)为了使目标函数逐步变优，怎么转移?即如何找到下一顶点(基本可行解)?
- (3)目标函数达到最优的判断标准是什么?

2.3.1 举例

第一步：化标准型

- 书上例2-1（P15，P28）

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \qquad (1-11)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_4 = 16 \\ 4x_2 + x_5 = 12 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1,2,\cdots,5 \end{cases} \qquad (1-12)$$

约束条件(1-12)式的系数矩阵为

第二步：寻找初始可行基，对应基变量

$$A=(P_1,P_2,P_3,P_4,P_5)=\begin{pmatrix}1&2&1&0&0\\4&0&0&1&0\\0&4&0&0&1\end{pmatrix}$$

从(1-12)式可看到x_3,x_4,x_5的系数构成的列向量

$$P_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},P_4=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},P_5=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

P_3, P_4, P_5是线性独立的，这些向量构成一个基B。
对应于B的变量x_3, x_4, x_5为基变量.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 8 \\ 4x_1 \qquad\qquad + x_4 \qquad &= 16 \quad (1-12) \\ 4x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 12 \end{aligned}$$

第三步：算基本可行解，对应目标函数值

- 从(1-12)式中可以得到（1-13）

$$\begin{cases} x_3 = 8 - x_1 - 2x_2 \\ x_4 = 16 - 4x_1 \\ x_5 = 12 - 4x_2 \end{cases} \qquad (1-13)$$

$$X^{(0)} = (0,0,8,16,12)^T$$

写出用非基变量表示目标函数的表达式 $\max Z = 2x_1 + 3x_2$

计算当前的目标函数值：$Z^{(0)}=0$

对应背后的经济含义

- 工厂没有安排生产产品I、II，资源都没有被利用，所以工厂的利润为$z=0$。

- 1. 分析用非基变量表示目标函数的表达式 $\max Z = 2x_1 + 3x_2$
  - 非基变量前面的系数均为正数，所以任何一个非基变量进基都能使Z值增加
  - 通常把非基变量前面的系数叫“检验数”
  - 选哪一个非基变量进基？

第四步：分析两个基本表达式，看看目标函数是否可以改善

- 任意一个 ✕
- 任意一个正检验数对应的非基变量 ✓
- 最大正检验数对应的非基变量 ✓
- 排在最前面的正检验数对应的非基变量 ✓

- 2.分析用非基变量表示基变量的表达式找一个换出去基变量
- 思考：
  - x_2进基意味着其取值从0变成一个正数（经济意义——生产II产品），能否无限增大？
  - 当x_2增加时，x_3、x_4、x_5如何变化？
  - 现在的非基变量是哪些？
  - 具体如何确定换出变量？

$$\begin{cases} x_3 = 8 - x_1 - 2x_2 \\ x_4 = 16 - 4x_1 \\ x_5 = 12 - 4x_2 \end{cases} \qquad (1\text{–}13)$$

$$\begin{aligned} x_3 &= 8 - 2x_2 \geqslant 0 \\ x_4 &= 16 \geqslant 0 \\ x_5 &= 12 - 4x_2 \geqslant 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \min(8/2, -, 12/4) = 3$$

- 当x_2增加时，x_3，x_4，x_5会减小，但有限度?——必须保证解所有分量大于等于0，以保持解的可行性
- 当x_2的值从0增加到3时，x_5首先变为0，此时$x_3=2>0$
- 这种用来确定出基变量的规则称为“最小比值原则”（或θ原则）。
- 只有当$a_{ik}>0$时，比值才有意义，0元素或负元素不必计算比值，解的可行性自然满足

$$
\begin{aligned}
x_3 &= 8-2x_2 \geqslant 0 \\
x_4 &= 16 \geqslant 0 \qquad \Rightarrow \quad x_2 = \min(8/2, -, 12/4) = 3 \\
x_5 &= 12-4x_2 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

- 将(1-16)式中x_2的系数列向量变换为单位列向量。其运算步骤是：
- ③′=③/4；①′=①-2×③′;②′=②,
- 并将结果仍按原顺序排列有：

第五步：通过高斯消去法运算，进行基变换

$$\begin{cases} x_3 = 8 - x_1 - 2x_2 \\ x_4 = 16 - 4x_1 \\ x_5 = 12 - 4x_2 \end{cases} \quad (1-13)$$

$$\begin{cases} x_3 + 2x_2 = 8 - x_1 & (1) \\ x_4 = 16 - 4x_1 & (2) \\ 4x_2 = 12 - x_5 & (3) \end{cases} \quad (1-16)$$

$$\begin{cases} x_3 = 2 - x_1 + \frac{1}{2}x_5 & (1)' \\ x_4 = 16 - 4x_1 & (2)' \\ x_2 = 3 - \frac{1}{4}x_5 & (3)' \end{cases} \quad (1-17)$$

$$\begin{cases} x_3 = 2 - x_1 + \frac{1}{2}x_5 & (1)' \\ x_4 = 16 - 4x_1 & (2)' \\ x_2 = 3 - \frac{1}{4}x_5 & (3)' \end{cases} \quad (1-17)$$

- 可得新的基本可行解 $X^{(1)}=(0,3,2,16,0)^T$
- 写出用非基变量表示目标函数的表达式

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 \Rightarrow Z = 9 + 2x_1 - 0.75x_5$$

- 可得相应的目标函数值为 $Z^{(1)}=9$
- 检验数仍有正数，返回第四步继续运算

- 上述过程何时停止？
- 当用非基变量表示目标函数的表达式中，非基变量的系数（检验数）全部非正时，当前的基本可行解就是最优解！
- 为什么？
  - 分析用非基变量表示目标函数的表达式，如果让负检验数所对应的变量进基，目标函数值将下降！

2.3.5 迭代(旋转运算)

上述讨论的基可行解的转换方法是用向量方程描述的，在实际计算时不太方便，因此下面介绍**系数矩阵法**。

考虑以下形式的约束方程组

$$
\begin{array}{l}
x_1 \qquad\qquad + a_{1,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{1k}x_k + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
\quad x_2 \qquad\quad + a_{2,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{2k}x_k + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\qquad \ddots \qquad\quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
\qquad\quad x_l \quad + a_{l,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{lk}x_k + \cdots + a_{ln}x_n = b_l \qquad (1-33) \\
\qquad\qquad \ddots \\
\qquad\qquad x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{mk}x_k + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{array}
$$

一般线性规划问题的约束方程组中加入松弛变量或人工变量后，很容易得到上述形式

设$x_1,x_2,\ldots,x_m$为基变量，对应的系数矩阵是$m\times m$单位阵I，它是可行基。令非基变量$x_{m+1},x_{m+2},\ldots,x_n$为零，即可得到一个基可行解。
若它不是最优解，则要另找一个使目标函数值增大的基可行解。这时从非基变量中确定x_k为换入变量。显然这时θ为

$$\theta=\min_i\left(\frac{b_i}{a_{ik}}\middle|a_{ik}>0\right)=\frac{b_l}{a_{lk}}$$

在迭代过程中 θ可表示为

$$\theta=\min_i\left(\frac{b_i^{'}}{a_{ik}^{'}}\middle|a_{ik}^{'}>0\right)=\frac{b_l^{'}}{a_{lk}^{'}}$$

其中$b_i^{'},a_{ik}^{'}$是经过迭代后对应于b_i,a_{ik}的元素值。

- 按θ规则确定x_l为换出变量，
- x_k, x_l的系数列向量分别为

$$P_k=\begin{bmatrix} a_{1k}\\ a_{2k}\\ \vdots\\ a_{lk}\\ \vdots\\ a_{mk}\end{bmatrix};\quad P_l=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\leftarrow \text{第}l\text{个分量}$$

- 为了使x_k与x_l进行对换，须把P_k变为单位向量，这可以通过(1-33)式系数矩阵的增广矩阵进行初等变换来实现。

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} x_1 & \cdots & x_l & \cdots & x_m & x_{m+1} & \cdots & x_k & \cdots & x_n \quad b \end{array}\\
\left(\begin{array}{ccccccccc|c}
1 & & & & & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} & b_1\\
 & \ddots & & & & \vdots & & & & & \\
 & & 1 & & & a_{l,m+1} & \cdots & a_{lk} & \cdots & a_{ln} & b_l\\
 & & & \ddots & & & & & & & \\
 & & & & 1 & a_{m,m+1} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{mn} & b_m
\end{array}\right)
\end{array}\quad(1-34)$$

- 经过初等变换后的新增广矩阵是

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccc}
x_1 & \cdots & x_l & \cdots & x_m & x_{m+1} & \cdots & x_k & \cdots & x_n & b
\end{array}\\
\begin{pmatrix}
1 & \cdots & -\dfrac{a_{1k}}{a_{lk}} & \cdots & 0 & a_{1,m+1}' & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n}' & b_1' \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & +\dfrac{1}{a_{lk}} & \cdots & 0 & a_{l,m+1}' & \cdots & 1 & \cdots & a_{ln}' & b_l' \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & -\dfrac{a_{mk}}{a_{lk}} & \cdots & 1 & a_{m,m+1}' & \cdots & 0 & \cdots & a_{mn}' & b_m'
\end{pmatrix}
\end{array}
\quad (1-36)
$$

- 由(1-36)式中可以看到$x_1,x_2,\ldots,x_k,\ldots$，$x_m$的系数列向量构成$m \times m$单位矩阵;它是可行基。当非基变量$x_{m+1},\ldots$，$x_l,\ldots,x_n$为零时，就得到一个基可行解$X^{(1)}$

$$X^{(1)} = (b_1', \cdots, b_{l-1}', 0, b_{l+1}', \cdots, b_m', 0, \cdots b_k', 0)^T$$

- 在上述系数矩阵的变换中，元素a_{lk}称为**主元素**，它所在列称为主元列，它所在行称为主元行，元素a_{lk}位置变换后为1。

试用上述方法计算例1的两个基变换

- 解：例1的约束方程组的系数矩阵写成增广矩阵

$$
\begin{array}{cccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 8 \\
4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 16 \\
0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 12
\end{array}\right)
$$

当以x_3,x_4,x_5为基变量，x_1,x_2为非基变量，令$x_1,x_2=0$，可得到一个基可行解

$$X^{(0)}=(0,0,8,16,12)^{\mathrm{T}}$$

- 现用x_2去替换x_5，于是将x_3,x_4, x_2的系数矩阵变换为单位矩阵，经变换后为

$$
\begin{array}{cccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\
\end{array}
\quad\quad
\begin{array}{cccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 8 \\
4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 16 \\
0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 12
\end{array}\right)
\Rightarrow
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 2 \\
4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 16 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 3
\end{array}\right)
$$

令非基变量x_1,x_5=0，得到新的基可行解

$$X^{(1)}=(0,3,2,16,0)^{\mathrm{T}}$$

2.4 单纯型法的计算步骤

- 2.4.1 单纯型表
- 2.4.2 计算步骤

单纯形表设计依据

- 将-Z看作不参与基变换的基变量，把目标函数表达式改写成方程的形式，和原有的m个约束方程组成一个具有$n+m+1$个变量、$m+1$个方程的方程组：

$$
\begin{aligned}
x_1 \quad\quad\quad\quad & + a_{1m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
x_2 \quad\quad\quad & + a_{2m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\ddots \quad\quad & \\
x_m & + a_{mm+1}x_{m+1} + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned}
$$

$$
-z + c_1x_1 + \cdots + c_mx_m + c_{m+1}x_{m+1} + \cdots + c_nx_n = 0
$$

- 为了便于迭代运算，可将上述方程组写成增广矩阵形式

$$
\begin{array}{cccccccc|c}
-z & x_1 & x_2 & \cdots & x_m & x_{m+1} & \cdots & x_n & b \\
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{cccccccc|c}
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{2,m+1} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{m,m+1} & \cdots & a_{mn} & b_m \\
1 & c_1 & c_2 & \cdots & c_m & c_{m+1} & \cdots & c_n & 0
\end{array}\right)
$$

- 若将z看作不参与基变换的基变量，它与$x_1,x_2,\ldots,x_m$的系数构成一个基，这时可采用行初等变换将$c_1,c_2,\ldots,c_m$变换为零，使其对应的系数矩阵为单位矩阵。得到

$$
\begin{array}{ccccccccc}
-z & x_1 & x_2 & \cdots & x_m & x_{m+1} & \cdots & x_n & b \\
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{cccccccc|c}
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{2,m+1} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{m,m+1} & \cdots & a_{mn} & b_m \\
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{m+1}-\sum_{i=1}^{m} c_i a_{i,m+1} & \cdots & c_n-\sum_{i=1}^{m} c_i a_{in} & -\sum_{i=1}^{m} c_i b_i
\end{array}\right)
$$

单纯形表

	c_j		c_1	c_m	c_{m+1}	c_n	θ_i
c_B	X_B	b	x_1	x_m	x_{m+1}	x_n	
c_1	x_1	b_1	1	0	$a_{1,m+1}$	a_{1n}	θ_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$					$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				,	$\vdots$
c_m	x_m	b_m	0	1	$a_{m,m+1}$	a_{mn}	θ_m
	σ_j		0 $\cdots\cdots$	0			

其中：$\theta_i = \frac{b_i}{a_{kj}} \Big| a_{kj} > 0$ $\qquad \sigma_j = c_j - \sum c_i a_{ij} = c_j - z_j$

计算步骤

- (1) 按数学模型确定初始可行基和初始基可行解，建立初始单纯形表。
- (2) 计算各非基变量x_j的检验数，检查检验数 $\boxed{\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij},}$
  - 若所有检验数 $\boxed{\sigma_j \le 0,\ j = 1,2,\cdots n}$
  - 则已得到最优解，可停止计算。否则转入下一步
- (3) 在$\sigma_j > 0, j=m+1,\ldots,n$中，若有某个$\sigma_k$对应$x_k$的系数列向量$P_k \le 0$，则此问题是无界，停止计算。
- (4) 根据$\max(\sigma_j > 0)=\sigma_k$，确定$x_k$为换入变量，按$\theta$规则计算

$$\theta = \min\left(\frac{b_i}{a_{ik}} \middle| a_{ik} > 0\right) = \frac{b_l}{a_{lk}}$$

计算步骤

- (5) 以a_{lk}为主元素进行迭代(即用高斯消去法或称为旋转运算)，把x_k所对应的列向量

$$P_k=\begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{lk} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix} \text{变换} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow \text{第}l\text{行} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

- 将X_B列中的x_l换为x_k，得到新的单纯形表。重复(2)～(5)，直到终止。

例子

- 用单纯形法求下列线性规划的最优解

$$\max Z = 3x_1 + 4x_2$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 40 \\ x_1 + 3x_2 \le 30 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

- 解:(1) 将问题化为标准型，加入松驰变量x_3、x_4则标准型为:

$$\max Z = 3x_1 + 4x_2$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 40 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 30 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

• 2）求出线性规划的初始基可行解，列出初始单纯形表。

c_j			3	4	0	0	θ_i
c_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	40	2	1	1	0	
0	x_4	30	1	3	0	1	
σ_j			3	4	0	0	

检验数

$$\sigma_1 = c_1 - (c_3 a_{11} + c_4 a_{21}) = 3 - (0 \times 2 + 0 \times 1) = 3$$

$$\sigma_2 = c_2 - (c_3 a_{21} + c_4 a_{22}) = 4 - (0 \times 1 + 0 \times 3) = 4$$

将3化为1

换入列

b_i/a_{i2}， a_{i2}>0

换出行

乘以3/5后得到

c_j			3	4	0	0	θ_i
c_B	基变量	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	40	2	1	1	0	40
0	x_4	30	1	3	0	1	10
	σ_j		3	4	0	0	
0	x_3	30	5/3	0	1	−1/3	18
4	x_2	10	1/3	1	0	1/3	30
	σ_j		5/3	0	0	−4/3	
3	x_1	18	1	0	3/5	−1/5	
4	x_2	4	0	1	−1/5	−2/5	
	σ_j		0	0	−1	−1	

- 例子： 用单纯形法求解

$$\max Z = x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$s.t\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \le 15 \\ \dfrac{1}{3}x_1 + x_2 + 5x_3 \le 20 \\ x_1、x_2、x_3 \ge 0 \end{cases}$$

解：将数学模型化为标准形式：

$$\max Z = x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$s.t\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 15 \\ \dfrac{1}{3}x_1 + x_2 + 5x_3 + x_5 = 20 \\ x_j \ge 0, j = 1,2,\cdots,5 \end{cases}$$

不难看出x_4、x_5可作为初始基变量，列单纯形表计算。

	c_j		1	2	1	0	0	θ_i
c_B	基变量	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_4	15	2	-3	2	1	0	—
0	x_5	20	1/3	1	5	0	1	20
σ_j			1	2	1	0	0	
0	x_4	75	3	0	17	1	3	25
2	x_2	20	1/3	1	5	0	1	60
σ_j			1/3	0	−9	0	−2	
1	x_1	25	1	0	17/3	1/3	1	
2	x_2	35/	0	1	28/9	-1/9	2/3	
σ_j			0	0	-98/9	-1/9	-7/3	

- 例子用单纯形法求解

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

变成标准型

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 8 \\ 4x_1 + x_5 = 16 \\ 4x_2 + x_6 = 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0 \end{cases}$$

约束方程的系数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&2&1&0&0&0\\1&2&0&1&0&0\\4&0&0&0&1&0\\0&4&0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{p}_1&\boldsymbol{p}_2&\boldsymbol{p}_3&\boldsymbol{p}_4&\boldsymbol{p}_5&\boldsymbol{p}_6\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{p}_3&\boldsymbol{p}_4&\boldsymbol{p}_5&\boldsymbol{p}_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\boldsymbol{I}$$

I 为单位矩阵且线性独立 $\therefore\ \boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_4,\boldsymbol{x}_5,\boldsymbol{x}_6$ 为基变量

$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ 为非基变量

c_j			2	3	0	0	0	0	θ_i
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_3	12	2	2	1	0	0	0	12/2
0	x_4	8	1	2	0	1	0	0	8/2
0	x_5	16	4	0	0	0	1	0	—
0	x_6	12	0	4	0	0	0	1	12/4
Z		0	2	3 ↑	0	0	0	0	

c_j			2	3	0	0	0	0	θ_i
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_3	6	2	0	1	0	0	-1/2	
0	x_4	2	1	0	0	1	0	-1/2	
0	x_5	16	4	0	0	0	1	0	
3	x_2	3	0	1	0	0	0	1/4	
Z									

c_j			2	3	0	0	0	0	θ_i
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_3	6	2	0	1	0	0	-1/2	6/2
0	x_4	2	1	0	0	1	0	-1/2	2
0	x_5	16	4	0	0	0	1	0	16/4
3	x_2	3	0	1	0	0	0	1/4	—
Z		9	2 ↑	0	0	0	0	-3/4	

c_j			2	3	0	0	0	0	θ_i
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_3	2	0	0	1	-2	0	1/2	3
2	x_1	2	1	0	0	1	0	-1/2	—
0	x_5	8	0	0	0	-4	1	2	4
3	x_2	3	0	1	0	0	0	1/4	12
Z		13	0	0	0	-2	0	1/4 ↑	

中山 SUN YAT-SE

c_j			2	3	0	0	0	0	θ_i
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_3	2	0	0	1	-2	0	1/2	3
2	x_1	2	1	0	0	1	0	-1/2	—
0	x_5	8	0	0	0	-4	1	2	4
3	x_2	3	0	1	0	0	0	1/4	12
Z		13	0	0	0	-2	0	1/4 ↑	

c_j			2	3	0	0	0	0	θ_i
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_6	4	0	0	2	-4	0	1	
2	x_1	4	1	0	1	-1	0	0	
0	x_5	0	0	0	-4	4	1	0	
3	x_2	2	0	1	-1/2	1	0	0	
Z		14	0	0	-1/2	-1	0	0	

2.5.1单纯形法的进一步讨论——人工变量法

- 前面讨论了在标准型中系数矩阵有单位矩阵，很容易确定一组基可行解。在实际问题中有些模型并不含有单位矩阵，为了得到一组基向量和初基可行解，在约束条件的等式左端加一组虚拟变量，得到一组基变量。这种人为加的变量称为人工变量，构成的可行基称为人工基，用大M法或两阶段法求解，这种用人工变量作桥梁的求解方法称为人工变量法。

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} & = b \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \qquad + x_{n+2} & = b \\
\qquad\qquad \cdots & \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \qquad\qquad + x_{n+m} & = b \\
x_1, \cdots, x_n \ge 0; \quad x_{m+1}, \cdots, x_{n+m} \ge 0 &
\end{cases}
$$

人工变量法基本思路

- 以$x_{n+1},\ldots,x_{n+m}$为基变量，并可得到一个$m\times m$单位矩阵。令非基变量$x_1,\ldots,x_n$为零，便可得到一个初始基可行解$X^{(0)}=(0,0,\ldots,0,b_1,b_2,\ldots,b_m)^T$
- 因为人工变量是后加入到原约束条件中的虚拟变量，要求经过基的变换将它们从基变量中逐个替换出来。
- 基变量中不再含有非零的人工变量，这表示原问题有解。
- 若在最终表中当所有$c_j-z_j\le 0$，而在其中还有某个非零人工变量，这表示原问题无可行解。
- 以下讨论如何解含有人工变量的线性规划问题。

大M法

- 例： 用大M法解下列线性规划

$$
\min\ z = -3x_1 + x_2 + x_3
$$

$$
\begin{cases}
x_1 - 2x_2 + x_3 \le 11 \\
-4x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 3 \\
-2x_1 + x_3 = 1 \\
x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{cases}
$$

- 解：在上述问题的约束条件中加入松弛变量x_4，剩余变量x_5，人工变量x_6,x_7，得到。

$$
\min\ z = -3x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + Mx_6 + Mx_7
$$

$$
\begin{cases}
x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\
-4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3 \\
-2x_1 + x_3 + x_7 = 1 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \ge 0
\end{cases}
$$

- 故人为添加两个单位向量，得到人工变量单纯形法数学模型：

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2 - x_3 - Mx_6 - Mx_7$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + x_6 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 10 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \quad, 7 \end{cases}$$

- 其中：M是一个很大的抽象的数，不需要给出具体的数值，可以理解为它能大于给定的任何一个确定数值；再用前面介绍的单纯形法求解该模型，计算结果见下表。

- 因本例的目标函数是要求min，所以用所有$c_j-z_j\geq 0$来判别目标函数是否实现了最小化.用单纯形法进行计算时，见下表

$c_j\rightarrow$			-3	1	1	0	0	M	M	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ_i
0	x_4	11	1	-2	1	1	0	0	0	11
M	x_6	3	-4	1	2	0	-1	1	0	3/2
M	x_7	1	-2	0	[1]	0	0	0	1	1
c_j-z_j			-3+6M	1-M	1-3M	0	M	0	0	

$c_j \rightarrow$			-3	1	1	0	0	M	M	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_4	10	3	-2	0	1	0	0	-1	
M	x_6	1	0	[1]	0	0	-1	1	-2	1
1	x_3	1	-2	0	1	0	0	0	1	
c_j-z_j			-1	1-M	1-3M	0	M	0	3M-1	
0	x_4	12	[3]	0	0	1	-2	2	-5	4
1	x_2	1	0	1	0	0	-1	1	-2	
1	x_3	1	-2	0	1	0	0	0	1	
c_j-z_j			-1	0	0	0	1	M-1	M+1	
-3	x_1	4	1	0	0	1/3	-2/3	2/3	-5/3	
1	x_2	1	0	1	0	0	-1	1	-2	
1	x_3	9	0	0	1	2/3	-4/3	4/3	-7/3	
c_j-z_j		2	0	0	0	1/3	1/3	M-1/3	M-2/3	

在表1-6的最终计算结果可看出，已得到最优解：

$x_1=4, x_2=1, x_3=9$，$x_4=x_5=x_6=x_7=0$；目标函数$z=-2$

两阶段法

- 两阶段法是处理人工变量的另一种方法，这种方法是将加入人工变量后的线性规划问题分两段来求解。
- 第一阶段：通过设置新的目标函数将引入的人工变量迭代到非基变量中，并判断原线性规划问题是否存在基本可行解。
- 第二阶段：将第一阶段的最终计算表中的人工变量取消，并将第一阶段最终计算表中的目标函数行的数字换成原问题的目标函数的数字，继续求解，直到得到最优解。

阶段一

- 在原线性规划问题中加入人工变量，构造如下模型：

$$\min \omega = x_{n+1} + \cdots + x_{n+m} + 0x_1 + \cdots + 0x_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} & = b_1 \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \ddots & \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \qquad + x_{n+m} & = b_m \\ x_1 \cdots x_{n+m} \geq 0 & \end{cases}$$

- 若w* > 0，说明人工变量中至少有一个为正，表示原问题无可行解，停止计算；

- 1）若$w^* = 0$，且人工变量都变换为非基变量，说明原问题得到了初始基本可行解，转入阶段II；
- 2）若$w^*=0$，但“基列”存在人工变量，例如该列第l行的基变量x_{Bl}是人工变量，同时该行的原变量系数项（非人工变量系数项）a_{lj}全都是0，这说明原问题的该约束方程式多余的，那么删去第l行及x_{Bl}列，阶段II；
- 3）若$w^*=0$，且存在人工变量x_{Bl}是基变量，但该行的其他原变量系数项中存在$a_{lk}\neq 0$，则以a_{lk}为主元进行一次换基运算，可使原变量x_k取代人工变量x_{Bl}作为基变量，类似可将这类人工变量全部都由基变量变为非基变量；转入阶段II

阶段二

- 将第一阶段求得的基本可行解对原问题的目标函数进行优化，将目标函数换成原目标函数，建立原问题的初始单纯形表。只需把阶段Ⅰ的最末单纯形表修改如下
  - 人工变量 x_{n+1}，x_{n+2}，…，x_{n+m}诸列去掉；
  - 把c_j行与c_j列的数字换成原问题目标函数的相应系数;
  - 重新计算z_0和 σ_j，用以取代原检验行中相应数字。
  - 然后用单纯形法进行迭代，直到运算结束。

- 试用两阶段法求解如下线性规划问题：

目标函数 $\min z = -3x_1 + x_2 + x_3$

约束条件 $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 3 \\ -2x_1 + x_3 = 1 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

- 先在上述线性规划问题的约束方程中加入人工变量，给出第一阶段的数学模型为

目标函数 $\min \omega = x_6 + x_{73}$

约束条件 $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3 \\ -2x_1 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \ge 0 \end{cases}$$

- 第一阶段用单纯形法求解，见下表。求得的结果是w=0，最优解是$x_1=0, x_2=1, x_3=1, x_4=12, x_5=x_6=x_7=0$
- 因为人工变量$x_6=x_7=0$，所以(0，1，1，12，0)^{T}是原线性规划问题的基可行解。

c_j→			0	0	0	0	0	1	1	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ_i
0	x_4	11	1	-2	1	1	0	0	0	11
1	x_6	3	-4	1	2	0	-1	1	0	3/2
1	x_7	1	-2	0	[1]	0	0	0	1	1
c_j-z_j			6	-1	-3	0	1	0	0	
0	x_4	10	3	-2	0	1	0	0	-1	-
M	x_6	1	0	[1]	0	0	-1	1	-2	1
1	x_3	1	-2	0	1	0	0	0	1	-
c_j-z_j			0	-1	0	0	1	0	3	
0	x_4	12	3	0	0	1	-2	2	-5	
1	x_2	1	0	1	0	0	-1	1	-2	
1	x_3	1	-2	0	1	0	0	0	1	
c_j-z_j			0	0	0	0	0	1	1	

- 于是可以进行第二阶段运算。将第一阶段的最终表中的人工变量取消，填入原问题的目标函数系数，进行第二阶段计算，见下表。

$c_j \rightarrow$			-3	1	1	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_4	12	[3]	0	0	1	-2	4
1	x_2	1	0	1	0	0	-1	-
1	x_3	1	-2	0	1	0	0	-
c_j-z_j			-1	0	0	0	1	
-3	x_1	4	1	0	0	1/3	-2/3	
1	x_2	1	0	1	0	0	-1	
1	x_3	9	0	0	1	2/3	-4/3	
c_j-z_j		-2	0	0	0	1/3	1/3	

例 3.2.3 用两阶段法求解下列问题

$$
\begin{aligned}
\max\quad & 3x_1 + x_2 - 2x_3 \\
\text{s.t.}\quad & 2x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\
& x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\
& x_1 + x_4 = 2, \\
& 3x_1 + 2x_3 = 10, \\
& x_j \geqslant 0,\quad j = 1,\cdots,4 .
\end{aligned}
$$

解 引进人工变量 x_5, x_6, x_7. 解一阶段问题:

$$
\begin{aligned}
\min\quad & x_5 + x_6 + x_7 \\
\text{s.t.}\quad & 2x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 4, \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 6, \\
& x_1 + x_4 = 2, \\
& 3x_1 + 2x_3 + x_7 = 10, \\
& x_j \geqslant 0,\quad j = 1,\cdots,7 .
\end{aligned}
$$

下面以表格形式给出迭代过程:

cj			0	0	0	0	1	1	1	
Cb	XB	b	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	θ
1	x5	4	2	-1	1	0	1	0	0	2
1	x6	6	1	1	1	0	0	1	0	6
0	x4	2	1	0	0	1	0	0	0	2
1	x7	10	3	0	2	0	0	0	1	10/3
cj-zj			-6	0	-4	0	0	0	0	

cj			0	0	0	0	1	1	1	
Cb	XB	b	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	θ
1	x5	0	0	-1	1	-2	1	0	0	0
1	x6	4	0	1	1	-1	0	1	0	4
0	x1	2	1	0	0	1	0	0	0	-
1	x7	4	0	0	2	-3	0	0	1	2
cj-zj			0	0	-4	6	0	0	0	

cj			0	0	0	0	1	1	1	
Cb	XB	b	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	θ
0	x3	0	0	-1	1	-2	1	0	0	-
1	x6	4	0	$\boxed{2}$	0	1	-1	1	0	1/2
0	x1	2	1	0	0	1	0	0	0	-
1	x7	4	0	2	0	1	-2	0	1	1/2
cj-zj			0	-4	0	-2	4	0	0	

cj			0	0	0	0	1	1	1	
Cb	XB	b	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	θ
0	x3	2	0	0	1	-3/2	1/2	1/2	0	
0	x2	2	0	1	0	1/2	-1/2	1/2	0	
0	x1	2	1	0	0	1	0	0	0	
1	x7	0	0	0	0	0	-1	-1	1	
cj-zj			0	0	0	0	2	2	0	

- 人工变量x7是基变量，应该从基中替换出去
- x7对应的行中，原来变量对应系数均为0，说明对应第4个约束多余，可以直接删除，并删除x7列

cj			0	0	0	0	1	1	~~1~~	
Cb	XB	b	x1	x2	x3	x4	x5	x6	~~x7~~	θ
0	x3	2	0	0	1	-3/2	1/2	1/2	~~0~~	
0	x2	2	0	1	0	1/2	-1/2	1/2	~~0~~	
0	x1	2	1	0	0	1	0	0	~~0~~	
~~1~~	~~x7~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~-1~~	~~-1~~	~~1~~	
cj-zj			0	0	0	0	2	2	0	

2.5.3 退化

- 在单纯形法计算中用θ规则确定换出变量时，有时存在两个以上相同的最小比值，这样在下一次迭代中就有一个或几个基变量等于零，这就出现了退化解。
- 这时换出变量$x_l=0$，迭代后目标函数值不变。这时不同基表示为同一顶点。有人构造了一个特例，当出现退化时，进行多次迭代，而基从B_1,B_2，…又返回到B_1，即出现计算过程的循环，便永远达不到最优解。

- 尽管实际计算过程中循环现象极少出现，但还是有可能发生的。如何解决这问题？先后有人提出了“摄动法”，“字典序法”。1974年由勃兰特(Bland)提出一种简便的规则，简称勃兰特规则：
  - (1) 选取$c_j - z_j > 0$中下标最小的非基变量x_k为换入变量，即
$$k = \min(j \mid c_j - z_j > 0)$$
  - (2) 当按θ规则计算存在两个和两个以上最小比值时，选取下标最小的基变量为换出变量。
  - 按勃兰特规则计算时，一定能避免出现循环。

无可行解

- 通过大M法或两阶段法求初始的基本可行解。但是如果在大M法的最优单纯形表的基变量中仍含有人工变量，或者两阶段法的辅助线性规划的目标函数的极小值大于零，那么该线性规划就不存在可行解。

例

C			-3	-2	-1	0	0	0	-M	-M	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
0	x_4	6	1	1	1	1	0	0	0	0	6/1
-M	x_7	4	1	0	-1	0	-1	0	1	0	-
-M	x_8	3	0	1	-1	0	0	-1	0	1	3/1
Z		-7M	-3+M	-2+M	-1-2M	0	-M	-M	0	0	
0	x_4	3	1	0	2	1	0	1	0	-1	3/1
-M	x_7	4	1	0	-1	0	-1	0	1	0	4/1
-2	x_2	3	0	1	-1	0	0	-1	0	1	-
Z		-6-4M	-3+M	0	-3-M	0	-M	-2	0	2-M	
-3	x_1	3	1	0	2	1	0	1	0	-1	
-M	x_7	1	0	0	-3	-1	-1	-1	1	1	
-2	x_2	3	0	1	-1	0	0	-1	0	1	
Z		-15-M	0	0	3-3M	3-M	-M	1-M	0	-1	

运算到检验数全负为止，仍含有人工变量，无可行解。

无最优解

- 无最优解与无可行解时两个不同的概念。
  - 无可行解是指原规划不存在可行解，从几何的角度解释是指线性规划问题的可行域为空集；
  - 无最优解则是指线性规划问题存在可行解，但是可行解的目标函数达不到最优值，即目标函数在可行域内可以趋于无穷大（或者无穷小）。无最优解也称为有限最优解，或无界解。

- 判别方法：在求解极大化的线性规划问题过程中，若某单纯形表的检验行存在某个大于零的检验数，但是该检验数所对应的非基变量的系数列向量的全部系数都为负数或零，则该线性规划问题无最优解

- 因 $\sigma_1=2$ 但 $P_1=\begin{pmatrix}-1\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\le 0$， 所以原问题无最优解

C			2	2	0	0	θ
C	X_B	B	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	X_3	1	-1	1	1	0	
0	X_4	2	-1/2	1	0	1	
Z		0	2	2	0	0	

无穷多最优解

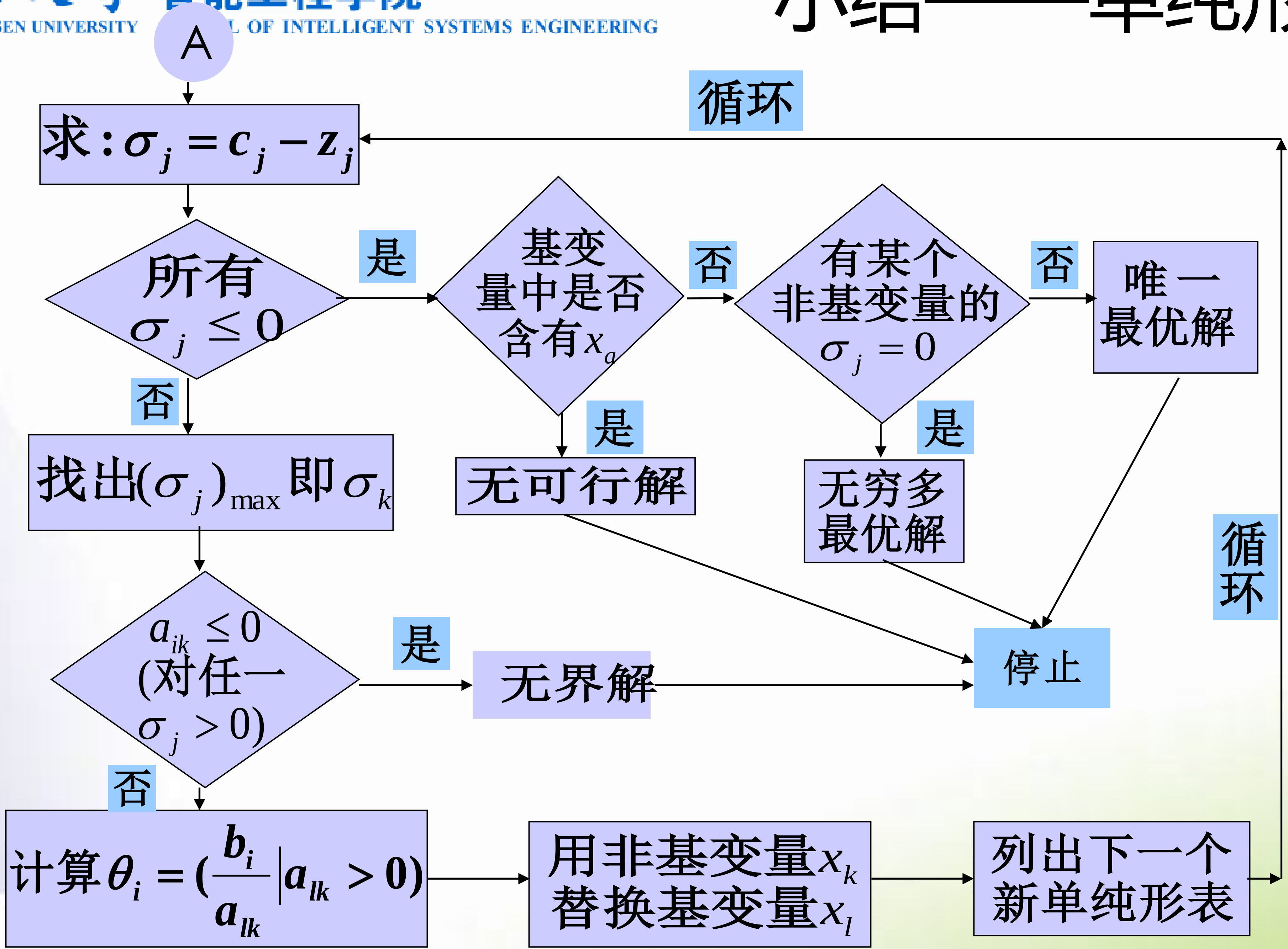
- 若线性规划问题某个基本可行解所有的非基变量检验数都小于等于零，但其中存在一个检验数等于零，那么该线性规划问题有无穷多最优解。

C			1	2	0	0	0	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	2	0	0	1	2	-1	2/2
2	x_2	3	0	1	0	1	0	3/1
1	x_1	2	1	0	0	-2	1	-
Z’		8	0	0	0	0	-1	

小结——标准型

建立模型	个数		取值			右端项		等式或不等式			极大或极小		新加变量系数	
	两个	三个以上	$x_j \geq 0$	x_j无约束	$x_j \leq 0$	$b_i \geq 0$	$b_i < 0$	$\leq$	$=$	$\geq$	max Z	min Z	x_s	x_a
求解	图解法、单纯形法	单纯形法	不处理	令$x_j = x_j' - x_j''$ $x_j' \geq 0$ $x_j'' \geq 0$	令$x_j' = -x_j$	不处理	约束条件两端同乘以-1	加松弛变量x_s	加入人工变量x_a	减去x_s加入x_a	不处理	令$z' = -Z$ $\min Z = -\max z'$	0	$-M$

小结——单纯形法


A
求: $\sigma_j = c_j - z_j$
循环
所有 $\sigma_j \le 0$
是
基变量中是否含有 x_a
否
有某个非基变量的 $\sigma_j = 0$
否
唯一最优解
否
是
是
找出 $(\sigma_j)_{\max}$ 即 σ_k
无可行解
无穷多最优解
循环
$a_{ik} \le 0$ (对任一 $\sigma_j > 0$)
是
无界解
停止
否
计算 $\theta_i = \left(\frac{b_i}{a_{lk}} \middle| a_{lk} > 0\right)$
用非基变量 x_k 替换基变量 x_l
列出下一个新单纯形表

小结——解的判别

- 1）唯一最优解判别：最优表中所有非基变量的检验数非零,则线性规划具有唯一最优解。
- 2）多重最优解判别：最优表中存在非基变量的检验数为零,则线性规划具有多重最优解（或无穷多最优解）。
- 3）无界解判别：某个$\lambda_k>0$且$a_{ik}\leqslant 0$（i=1，2,⋯,m）则线性规划具有无界解。
- 4）无可行解的判断：当用大M单纯形法计算得到最优解并且存在$R_i>0$时，则表明原线性规划无可行解。
- 5）退化解的判别：存在某个基变量为零的基本可行解。

作业 提交日期：9月16日上课前

- 2.1、2.3-(1)
- 分别用图解法和单纯形法求解下列线性规划问题，并指出单纯形法迭代的每一步相当于图形上的哪一个顶点。

(1) $\max z = 2x_1 + x_2$

- $$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 15 \\ 6x_1 + 2x_2 \le 24 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

(2) $\max z = 2x_1 + 5x_2$

$$\begin{cases} x_1 \le 4 \\ 2x_2 \le 12 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 18 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$