

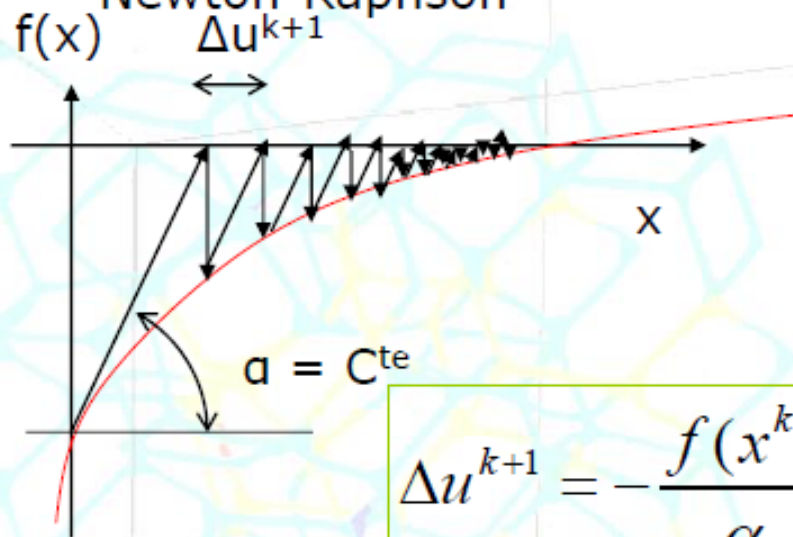
- **Méthode Asymptotique Numérique**
- **Méthode de Réduction de Modèle**
- **Méthodes de Résolution Numérique par FFT**

Méthode Asymptotique Numérique
-MAN- (Taylor series expansion)

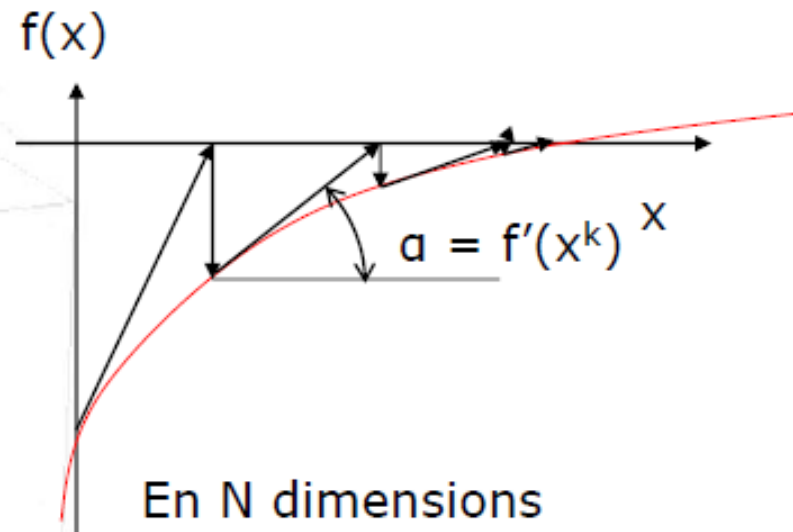
Méthodes classiques pour la résolution itérative des équations non-linéaires

- Méthode de point fixe

- Newton-Raphson



$$\Delta u^{k+1} = -\frac{f(x^k)}{a}$$



En N dimensions

$$\mathbf{K}_t(\mathbf{u}^k) \Delta \mathbf{u}^{k+1} = -\mathbf{R}(\mathbf{u}^k)$$

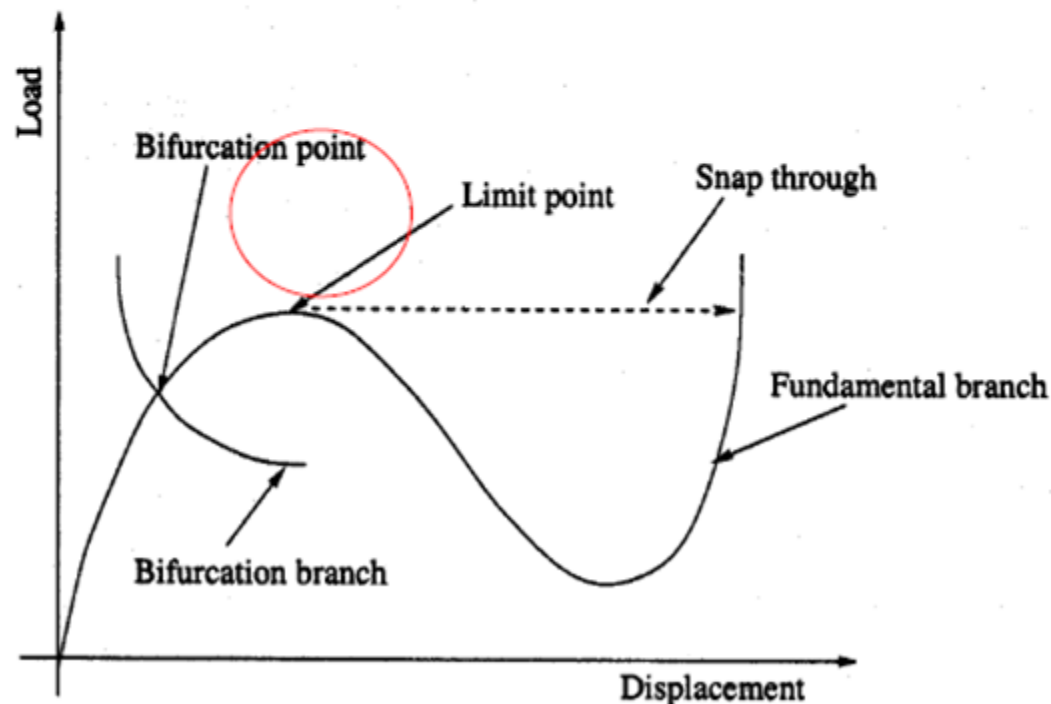
$$\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^k + \Delta \mathbf{u}^{k+1}$$

Issues with problems involving instabilities and bifurcation solutions

Divergence of Newton-Raphson algorithms near limit points

Solutions : arc-length control

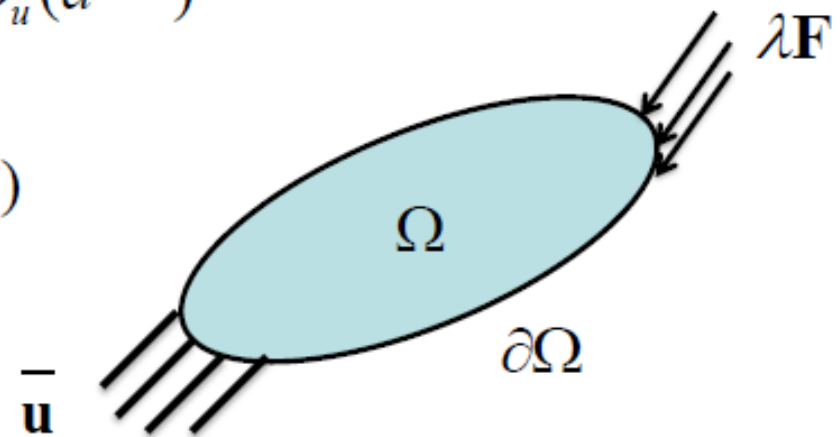
Difficulties : choice of numerical control parameters, small iterations, detection of bifurcation points...



The Asymptotic Numerical Method [Damil, Potier-Ferry, Cochelin 90-94....]

- Perturbation method (Taylor expansion) around a known solution u_0, λ_0
- Development parameter a : related to the system evolution (in a mechanical problem: amplitude of applied force)
- Continuation procedure

$$\begin{cases} u(x, a) = u_0(x) + \sum_{i=1}^N \frac{a^i}{i!} \frac{\partial^i u(x, a)}{\partial a^i} + O_u(a^{N+1}) \\ \lambda(a) = \lambda_0 + \sum_{i=1}^N \frac{a^i}{i!} \frac{\partial^i \lambda(a)}{\partial a^i} + O_\lambda(a^{N+1}) \end{cases}$$



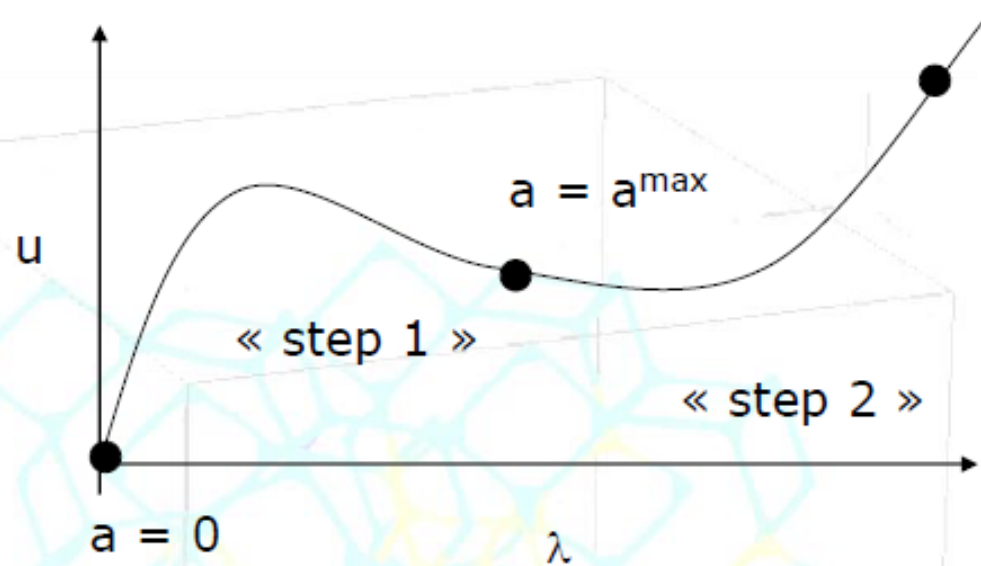
High order terms: not known explicitly in general

$$\begin{cases} u(x, a) = u_0(x) + \sum_{i=1}^N \frac{a^i}{i!} \frac{\partial^i u(x, a)}{\partial a^i} \\ \lambda(a) = \lambda_0 + \sum_{i=1}^N \frac{a^i}{i!} \frac{\partial^i \lambda(a)}{\partial a^i} \end{cases}$$

Defined as unknown fields u_i and λ_i and computed numerically (via the Finite Element method)

$$\begin{cases} u(x) = u_0(x) + \sum_{i=1}^N a^i u_i(x) \\ \lambda = \lambda_0 + \sum_{i=1}^N a^i \lambda_i \end{cases}$$

The series has a radius of convergence: the solution is defined along « steps » through a continuation method



Continuation method

Given N , a tolerance ϵ is chosen such that

$$\epsilon = \frac{\|\mathbf{u}^{n+1}(N, a_{max}) - \mathbf{u}^{n+1}(N-1, a_{max})\|}{\|\mathbf{u}^{n+1}(N, a_{max}) - \mathbf{u}^n\|}$$

example: elasticity with geometrical nonlinearity

$$\int_{\Omega} {}^t\mathbf{P} : \delta \mathbf{F} d\Omega = \lambda \mathcal{P}_{ext}(\delta \mathbf{u})$$

Constitutive law:

$$\mathbf{S} = \mathbb{C} : \gamma$$

Kinematic relations:

$$\mathbf{P} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}$$

$$\gamma = \frac{1}{2} ({}^t\mathbf{F} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I})$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}$$



$$\begin{Bmatrix} \mathbf{U}(a) \\ \lambda(a) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_0 \\ \lambda_0 \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^N a^i \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_i \\ \lambda_i \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \{\mathbf{P}, \mathbf{F}, \mathbf{S}, \gamma, \mathbf{u}\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \left(\sum_{i=0}^N a^i {}^t\mathbf{P}_i : \delta \mathbf{F} \right) d\Omega = \sum_{i=0}^N a^i \lambda_i \mathcal{P}_{ext}(\delta \mathbf{u}) \\ \sum_{i=0}^N a^i \mathbf{S}_i = \mathbb{C} : \sum_{i=0}^N a^i \gamma_i \\ \sum_{i=0}^N a^i \mathbf{P}_i = \left(\sum_{i=0}^N a^i \mathbf{F}_i \right) \cdot \left(\sum_{i=0}^N a^i \mathbf{S}_i \right) \\ \sum_{i=0}^N a^i \gamma_i = \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{i=0}^N a^i {}^t\mathbf{F}_i \right) \cdot \left(\sum_{i=0}^N a^i \mathbf{F}_i \right) - \mathbf{I} \right] \\ \sum_{i=0}^N a^i \mathbf{F}_i = \mathbf{I} + \nabla \left(\sum_{i=0}^N a^i \mathbf{u}_i \right) \end{array} \right.$$

Grouping terms with same exponent produces at order k

$$\begin{cases} \int_{\Omega} {}^t\mathbf{P}_k : \delta \mathbf{F} d\Omega = \lambda_k \mathcal{P}_{ext}(\delta \mathbf{u}) \\ \mathbf{S}_k = \mathbb{C} : \gamma_k \\ \mathbf{P}_k = \mathbf{F}_0 \cdot \mathbf{S}_k + \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{S}_0 + \sum_{r=1}^{k-1} \mathbf{F}_{k-r} \cdot \mathbf{S}_r \\ \gamma_k = \frac{1}{2} \left({}^t\mathbf{F}_0 \cdot \mathbf{F}_k + {}^t\mathbf{F}_k \cdot \mathbf{F}_0 + \sum_{r=1}^{k-1} {}^t\mathbf{F}_{k-r} \cdot \mathbf{F}_r \right) \\ \mathbf{F}_k = \nabla \mathbf{u}_k \end{cases}$$

Sequence of linear problems with same linear operator solved with FEM

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}_k, \delta \mathbf{u}) = \lambda_k \mathcal{P}_{ext}(\delta \mathbf{u}) + \mathcal{F}_k^{nl}(\delta \mathbf{u})$$

Order k

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}_k, \delta \mathbf{u}) = \int_{\Omega} {}^t\nabla \mathbf{u}_k : \mathbb{H} : \nabla \delta \mathbf{u} d\Omega ,$$

$$\mathcal{F}_k^{nl}(\delta \mathbf{u}) = - \int_{\Omega} {}^t\mathbf{P}_k^{nl} : \nabla \delta \mathbf{u} d\Omega \quad 1 < k \leq N$$

Méthodes de Réduction de Modèles de type POD

Méthodes de réduction de modèles

Systèmes de grandes dimensions (nombre important de d.d.l.) :

- Matrice de grandes tailles à décomposer (inverser)
- Assemblage des matrices coûteux, place mémoire importante

Enjeux des méthodes de réduction de modèle :
transformer un système d'équations de taille $N \times N$ en
un système de « taille réduite » $M \times M$ avec $M \ll N$

Applications : séries de problèmes non-linéaires
« similaires » de taille importante (Optimisation, calcul
multi-échelles...)

La réduction de modèle

Problématique générale

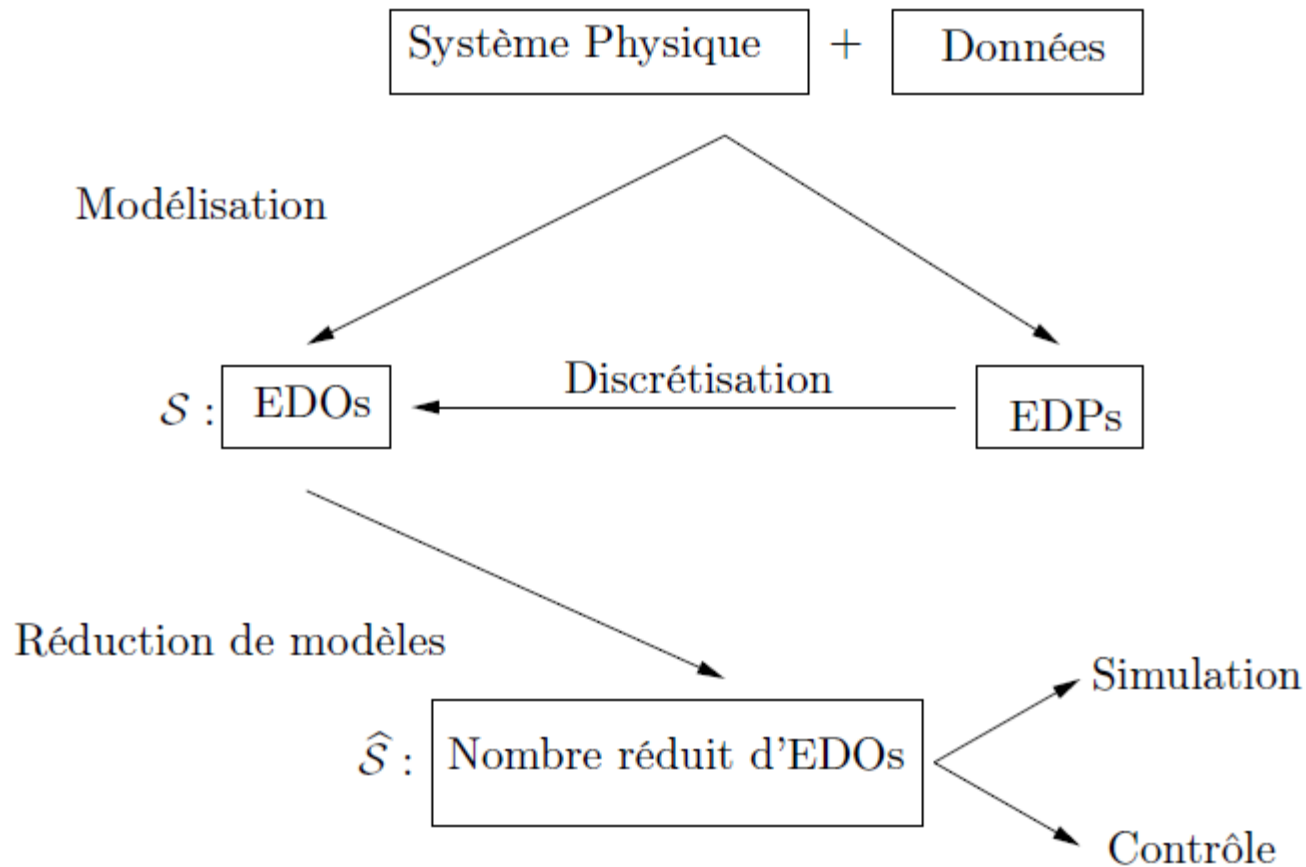


FIGURE – Description schématique de la réduction de modèles.

La Décomposition aux Valeurs Singulières (SVD)

Soit A une matrice réelle de dimension $N_x \times N_t$ alors la Décomposition aux Valeurs Singulières de A est la factorisation

$$A = U \Sigma V^T,$$

où U et V sont des matrices orthogonales, respectivement de dimension $N_x \times N_x$ et $N_t \times N_t$ (*i.e.* $U U^T = I_{N_x}$ et $V V^T = I_{N_t}$) et où Σ est une matrice diagonale de dimension $N_x \times N_t$ contenant les grandeurs $\sigma_1, \dots, \sigma_p \in \mathbb{R}$, appelées valeurs singulières de A (et de A^T), telles que $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \sigma_{r+2} = \dots = \sigma_p = 0$ où $p = \min(N_x, N_t)$. Le rang r de la matrice A est égal au nombre de valeurs singulières non nulles que possède la matrice A .

Le calcul direct des valeurs singulières σ_i et vecteurs singuliers U et V associés est souvent fastidieux, et il est préférable de les déterminer par la résolution de problèmes aux valeurs propres équivalents

Liens entre SVD et problèmes aux valeurs propres

$$A = U \Sigma V^T.$$

Par conséquent, en multipliant les deux membres de cette équation par A^T à gauche, on obtient une matrice de dimension $N_t \times N_t$ donnée par :

$$\begin{aligned} A^T A &= V \Sigma U^T U \Sigma V^T \\ &= V \Sigma^2 V^T. \end{aligned}$$

En appliquant une démarche similaire à la matrice AA^T , on trouve successivement $AA^T = U\Sigma V^T V\Sigma U^T = U\Sigma^2 U^T = W\Lambda W^T$ ce qui nous permet de conclure que (U, Λ) représente la décomposition aux valeurs propres de la matrice AA^T .

A ce stade, on constate que lorsque $N_t \ll N_x$, la résolution du problème aux valeurs propres lié à la matrice $A^T A$ (de dimension $N_t \times N_t$) est bien moins coûteux numériquement que la résolution du problème équivalent pour la matrice AA^T (de dimension $N_x \times N_x$). Cette remarque explique qu'il existe en pratique deux approches différentes pour la POD.

Approximation de rang minimum de A

Soit $A \in \mathbb{R}^{N_x \times N_t}$ une matrice, déterminer une matrice X de même taille que A mais de rang k inférieur et qui soit telle qu'une certaine norme de l'erreur $A - X$ soit minimale. problème peut être résolu explicitement pour toute norme unitaire invariante.

$$\min_{rang(X) \leq k} \|A - X\|_F = \|A - A_k\|_F = \left(\sum_{j=k+1}^r \sigma_j^2(A) \right)^{\frac{1}{2}}$$

où

$$A_k = U \begin{pmatrix} \Sigma_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^T = \sigma_1 u_1 v_1^T + \cdots + \sigma_k u_k v_k^T$$

avec Σ_k , matrice obtenue à partir de Σ , en conservant les k premières lignes.

D'après le théorème d'Eckart-Young toute matrice A de rang r peut être approximée par une autre matrice de rang $k \leq r$ donnée par la relation :

$$\hat{A} = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T + \cdots + \sigma_k u_k v_k^T,$$

et telle que

$$\|A - \hat{A}\|_2 = \sigma_{k+1}.$$

Par conséquent, par SVD, il est possible d'obtenir un modèle fidèle (éventuellement de rang faible) d'une matrice quelconque, à condition que le spectre des valeurs singulières de cette matrice décroisse suffisamment vite. En effet, on peut alors choisir un indice de coupure $M \ll r$ et construire une approximation de A sur un nombre réduit de modes. Afin de préciser cette idée, on peut définir le *contenu informationnel relatif* de la décomposition en valeurs singulières de A par :

$$\text{RIC}(M) = \frac{\sum_{i=1}^M \sigma_i}{\sum_{i=1}^r \sigma_i}.$$


Méthode de réduction de modèles de type POD

POD (Proper orthogonal decomposition)

Jusqu'ici la POD a été présentée uniquement comme une technique performante de post-traitement permettant, selon le point de vue retenu, d'extraire sans empirisme les structures cohérentes d'un écoulement, ou de réaliser une compression des informations contenues dans des données provenant de simulations numériques ou d'expériences. Par la suite, nous allons considérer que la POD permet également de fournir des fonctions de base qui peuvent être utilisées pour définir un sous-espace de faible dimension sur lequel on pourra projeter les équations d'état.

Approximation de la solution Éléments Finis par projection dans un sous-espace de taille M .

$$\mathbf{q}^R(t) = \phi_0 + \sum_{m=1}^M \phi_m \xi_m(t) \longrightarrow \text{Variables arbitraires}$$

 Fonctions de base globales

Fonctions de base définies par le problème de minimisation

$$\phi \cdot \text{MIN} \int_0^T \left\| \mathbf{u}(t) - \phi \phi^T \mathbf{u}(t) \right\|^2 dt$$

Sous la contrainte $\langle \phi_i, \phi_j \rangle = \delta_{ij}$

La minimisation conduit, après discrétisation temporelle du problème aux valeurs propres [Liang 2002, etc...]

$$\mathbf{Q} \phi_i = \lambda_i \phi_i$$

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{S} \mathbf{U} \mathbf{U}^T$$

$$\phi_0 = \bar{\mathbf{q}} = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^S \mathbf{q}(t_i)$$

$$\mathbf{U} = \{ \mathbf{q}(t_1) - \bar{\mathbf{q}}, \mathbf{q}(t_2) - \bar{\mathbf{q}}, \dots, \mathbf{q}(t_S) - \bar{\mathbf{q}} \}$$

On cherche à obtenir un sous-espace de dimension $M \ll N$

Erreur liée à la troncature de la base

$$\epsilon(M) = \sum_{i=1}^S \left\| \mathbf{q}(\mathbf{x}, t_i) - \mathbf{q}^R(\mathbf{x}, t_i) \right\| = \left(\sum_{i=M+1}^{DN} \lambda_i \right)^{1/2}$$

$$\text{Critère : } \frac{\left(\sum_{i=M+1}^{DN} \lambda_i \right)^{1/2}}{\left(\sum_{i=1}^{DN} \lambda_i \right)^{1/2}} < \delta$$

$$\mathbf{K}_{\mu}^k \Delta \mathbf{q}^{k+1} = \mathbf{f}_{ext(\mu)} - \mathbf{f}_{int}^k(\mathbf{q}_{\mu}^k)$$

Incréments de déplacements projetés dans la base réduite

$$\Delta \mathbf{q}^{k+1} = \sum_{m=1}^M \phi_m \Delta \xi_m^{k+1}$$

$$\Phi = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_M\}$$

$$\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_M\}$$



Problème réduit
linéarisé

$$\begin{matrix} M < < \\ N \end{matrix}$$

$$\Phi^T \mathbf{K}_{\mu}^k \Phi \Delta \xi^{k+1} = \Phi^T [\mathbf{f}_{ext(\mu)} - \mathbf{f}_{int}^k(\mathbf{q}_{\mu}^k)]$$

[M x M]

Actualisation des variables
réduites

$$\xi^{k+1} = \xi^k + \Delta \xi^{k+1}$$

Exemple d'application : hyperelasticité non-linéaire en grandes transformations

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{P}} + \bar{\mathbf{B}} = 0 \quad \text{and} \quad \bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{F}}^T = (\bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{F}}^T)^T \quad \text{in } \Omega_0$$

$$\mathbf{P} = \frac{\partial \Psi(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \quad \Psi = c(J - 1)^2 - d \log(J) + c_1(I_1 - 3) + c_2(I_2 - 3)$$

Matériau hyperelastique de type Mooney-Rivlin compressible

$$D_{\Delta \mathbf{u}} \delta W_{int}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \int_{\Omega_0} \left[\nabla_X(\delta \mathbf{u}) : \nabla_X(\Delta \mathbf{u}) \bar{\mathbf{S}} + \bar{\mathbf{F}}^T \nabla_X(\delta \mathbf{u}) : \bar{\mathbf{C}}^e : \bar{\mathbf{F}}^T \nabla_X(\Delta \mathbf{u}) \right] d\Omega$$

Problème tangent

Homogénéisation par Méthode FFT

Résolution dans le domaine de Fourier

Relations d'équilibre et de compatibilité

On posera pour tout champ $F(\underline{x}) = (u_i(\underline{x}), \varepsilon_{ij}(\underline{x}), \sigma_{ij}(\underline{x}))$:

$$F(\underline{x}) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} F(\underline{\xi}_n) \exp(-i\underline{\xi}_n \cdot \underline{x})$$

où les $\underline{\xi}_n$ pour $n = -\infty \dots +\infty$ sont les vecteurs d'ondes définis par

$$(\underline{\xi}_n)_k = 2n\pi/(b_k)$$

transformée de Fourier d'une fonction $F(\underline{x})$:

$$F(\underline{\xi}) = \frac{1}{V} \int_V F(\underline{x}) \exp(i\underline{\xi} \cdot \underline{x}) d\underline{x}$$

$$F(\underline{\xi} = 0) = \frac{1}{V} \int_V F(\underline{x}) dx = \langle F(\underline{x}) \rangle_V$$

En particulier, pour la déformation et la contrainte, on a :

$$\mathbf{E} = \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{\xi} = 0), \quad \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\underline{\xi} = 0)$$

Les équations de compatibilité et d'équilibre s'écrivent, dans le domaine de Fourier :

$$\begin{aligned} \forall \underline{\xi} \quad &: \sigma_{ij}(\underline{\xi}) \xi_j = 0 \\ \forall \underline{\xi} \quad &: \epsilon_{ipk} \epsilon_{jq l} \varepsilon_{kl}(\underline{\xi}) \xi_p \xi_q = 0 \end{aligned}$$

On note $\mathbb{P}(\underline{\xi})$ et $\mathbb{Q}(\underline{\xi})$ les deux tenseurs d'ordre quatre définis, pour tout $\underline{\xi} \neq 0$, par

$$\mathbb{Q}(\underline{\xi}) = \mathbb{E}_1(\underline{\xi}) + \mathbb{E}_3(\underline{\xi}), \quad \mathbb{P}(\underline{\xi}) = \mathbb{E}_2(\underline{\xi}) + \mathbb{E}_4(\underline{\xi})$$

Tout champ de contrainte périodique $\sigma(\underline{\xi})$ vérifie l'équilibre local si et seulement si :

$$\forall \underline{\xi} \neq 0 : \mathbb{P}(\underline{\xi}) : \sigma(\underline{\xi}) = 0 \quad \text{ou} \quad \mathbb{Q}(\underline{\xi}) : \sigma(\underline{\xi}) = \sigma(\underline{\xi})$$

Tout champ périodique $\varepsilon(\underline{\xi})$ vérifie l'équation de compatibilité si et seulement si :

$$\forall \underline{\xi} \neq 0 : \mathbb{P}(\underline{\xi}) : \varepsilon(\underline{\xi}) = \varepsilon(\underline{\xi}) \quad \text{ou} \quad \mathbb{Q}(\underline{\xi}) : \varepsilon(\underline{\xi}) = 0$$

Les équations de Lippmann-Schwinger du problème d'in-homogénéité

dans le domaine de Fourier :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \underline{\xi} \neq 0 : \mathbb{P}(\underline{\xi}) : \sigma(\underline{\xi}) = 0, \quad \mathbb{Q}(\underline{\xi}) : \varepsilon(\underline{\xi}) = 0 \\ \sigma(\underline{\xi}) = \mathbb{C}(\underline{\xi}) * \varepsilon(\underline{\xi}) \\ \text{pour } \underline{\xi} = 0 : \sigma(\underline{\xi}) = \Sigma, \quad \varepsilon(\underline{\xi}) = \mathbf{E} \end{array} \right.$$

Méthode de résolution numérique basée sur la TFR

L'approche en déformation

$$F(\underline{\xi}_n) = \sum_{k=-N}^{k=N} F(\underline{x}_k) \exp(i \underline{\xi}_k \cdot \underline{x}_n)$$

L'algorithme itératif est résumé dans le tableau ci-dessous :

Etape i=1 : $\epsilon^1(\underline{x}_n) = \mathbf{E}$

$$\sigma^1(\underline{x}_n) = \mathbb{C}(\underline{x}_n) : \epsilon^1(\underline{x}_n)$$

Etape i : $\epsilon^i(\underline{x}_n)$ et $\sigma^i(\underline{x}_n)$ sont connus

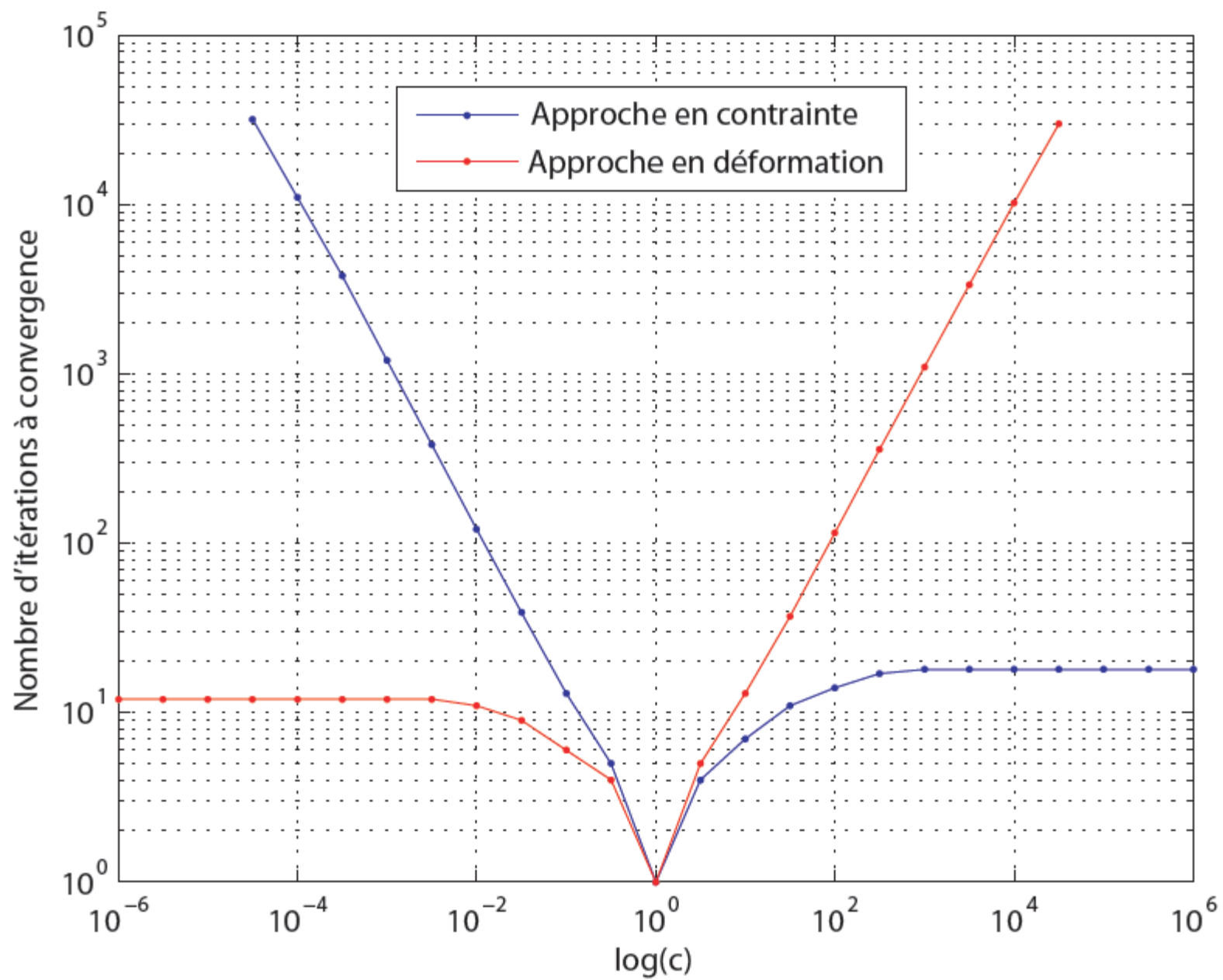
$$\sigma^i(\underline{\xi}_n) = \mathcal{F}(\sigma^i(\underline{x}_n))$$

test de convergence

$$\epsilon^{i+1}(\underline{\xi}_n) = \epsilon^i(\underline{\xi}_n) - \Gamma^0(\underline{\xi}_n) : \sigma^i(\underline{\xi}_n)$$

$$\epsilon^{i+1}(\underline{x}_n) = \mathcal{F}^{-1}(\epsilon^{i+1}(\underline{\xi}_n))$$

$$\sigma^{i+1}(\underline{x}_n) = \mathbb{C}(\underline{x}_n) : \epsilon^{i+1}(\underline{x}_n)$$



Nombre d'itérations à convergence en fonction du contraste.

On dispose donc de deux approches, une approche en déformation pour traiter le cas des contrastes inférieurs à 1, une méthode en contrainte mieux adaptée pour les contrastes supérieurs à 1. Toutefois le cas d'un composite constitué à la fois de cavités et d'inclusions rigides ne peut être traité par l'une des deux méthodes. Ce type de situation nécessite l'utilisation d'une approche basée sur le Lagrangien augmenté.