

Université Paris-Est Marne la Vallée
Laboratoire Modélisation et Simulation Multi Echelle (UMR CNRS 8208)

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PARIS-EST MARNE LA
VALLEE

Discipline : Mécanique

présentée et soutenue publiquement par

Nguyen Trung Kien

le 21 décembre 2010

Homogénéisation numérique de structures périodiques par transformée de Fourier : matériaux composites et milieux poreux

JURY

C. BOUTIN	ENTPE Laboratoire Géomatériaux	Rapporteur
C. GEINDREAU	Professeur, Université Joseph Fourier, Grenoble	Rapporteur
J.-C. MICHEL	Directeur de recherche, LMA, Marseille	Examineur
V. MONCHIET	Maître de conférence, Université Paris-Est Marne la Vallée	Examineur
G. BONNET	Professeur, Université Paris-Est Marne la Vallée	Directeur de thèse
D.C. PHAM	Professeur, Institut de Mécanique de Hanoi	Co-Directeur de thèse

Mis en page avec la classe thloria.

Remerciements

J'exprime mes profonds remerciements à mes directeurs de thèse, Monsieur Guy Bonnet et Monsieur Pham Duc Chinh dont l'aide précieuse m'a été indispensable sur le plan scientifique. Je tiens également à les remercier pour la confiance et la sympathie qu'ils m'ont témoignées au cours de ces trois années de thèse.

Je remercie tous particulièrement Monsieur Claude Boutin et Monsieur Christian Geindreau de m'avoir fait l'honneur d'être les rapporteurs de cette thèse. Leurs remarques et commentaires constructifs lors de la lecture de mon rapport m'ont permis de le clarifier et de l'améliorer.

Mes remerciements vont également à Monsieur Jean Claude Michel pour avoir accepté d'examiner mon mémoire et de présider le jury de la thèse.

Je voudrais remercier Vincent Monchiet dont les qualités pédagogiques et scientifiques m'ont énormément appris.

Je remercie Julien Yvonnet pour sa contribution aux calculs éléments finis et ses conseils pour la rédaction du mémoire.

Je tiens également à remercier Monsieur Christian Soize, directeur du laboratoire MSME, qui m'a accueilli au sein de son laboratoire et m'a permis d'effectuer cette thèse dans de bonnes et agréables conditions de travail.

Merci à tous les membres du laboratoire MSME pour leur soutien scientifique et pour la bonne ambiance au sein du laboratoire.

Merci mes amis pour votre amitié et pour tous les moments de détente et fous rires inoubliables passés ensemble.

Je voudrais adresser un grand merci à toute ma famille pour son soutien constant tout au long de mes études et de mon doctorat, en particulier à mon père, à ma mère et à mon frère.

Table des matières

Remerciements	1
----------------------	----------

Notations

Introduction générale	9
------------------------------	----------

Chapitre 1

Les méthodes basées sur la TFR pour les composites élastiques
--

1.1	Principes de base de l'homogénéisation des milieux périodiques	14
1.1.1	Le problème d'inhomogénéité	14
1.1.2	Propriétés effectives des composites périodiques en élasticité linéaire	16
1.2	Résolution dans le domaine de Fourier	17
1.2.1	Relations d'équilibre et de compatibilité	17
1.2.2	Les équations de Lippmann-Schwinger du problème d'inhomogénéité	18
1.2.3	Résolution par développement en série de Neumann	20
1.3	Méthode de résolution numérique basée sur la TFR	22
1.3.1	L'approche en déformation [61]	22
1.3.2	Utilisation des fonctions de forme [15]	25
1.3.3	Formulation en contrainte	29
1.4	Méthodes de résolution basées sur un Lagrangien augmenté	32
1.4.1	Le principe du minimum basé sur le lagrangien \mathcal{L}_ϵ	32
1.4.2	L'algorithme itératif	33
1.4.3	Autres formulations basées sur un Lagrangien augmenté	36
1.5	Conclusion	37

Chapitre 2

Une approche numérique à deux échelles pour le comportement des composites non linéaires

2.1	Une approche basée sur la TFR pour la résolution du problème local . . .	40
2.1.1	Homogénéisation des milieux périodiques en loi puissance	40
2.1.2	Résolution du problème local par un schéma itératif	41
2.1.3	Description des problèmes locaux	45
2.2	Principe de construction du potentiel des déformations macroscopiques . .	47
2.2.1	Représentation discrète du potentiel des déformations macroscopiques	47
2.2.2	Interpolation multidimensionnelle par spline	50
2.2.3	Interpolation par séparation des variables	52
2.2.4	Discussion	53
2.2.5	Interpolation du potentiel et loi de comportement macroscopique .	54
2.3	Application : problème de la poutre en flexion	57
2.4	Conclusion	58

Chapitre 3

Une approche basée sur la T.F.R pour la détermination de la perméabilité en régime statique

3.1	Description du problème local	62
3.1.1	L'écoulement de Stokes et l'équation de Darcy	62
3.1.2	Le problème de composite équivalent	63
3.1.3	Description des efforts agissant dans la phase solide	64
3.2	Une méthode de résolution basée sur la TFR	66
3.2.1	L'équation de Lippmann-Schwinger du problème d'écoulement . . .	66
3.2.2	Résolution par un schéma itératif	68
3.2.3	Détermination des efforts agissant dans la phase solide	70
3.3	Validations de l'approche basée sur la TFR	72
3.3.1	Ecoulement à travers un réseau de cylindres	73
3.3.2	Ecoulement à travers un réseau de sphères	74
3.4	Etude d'une cellule de base non symétrique	79
3.5	Conclusion	86

Chapitre 4

Extension au contexte dynamique et prise en compte du glissement

4.1	Prise en compte du glissement à l'interface solide/fluide	88
4.1.1	Description du problème	88
4.1.2	Le problème avec interphase équivalente	88
4.1.3	Le schéma itératif	90
4.1.4	Le choix du milieu de référence	92
4.1.5	Mise en oeuvre et comparaisons avec des résultats existants	95
4.2	Détermination de la perméabilité en régime dynamique	99
4.2.1	Homogénéisation des milieux poreux périodique en régime dynamique	99
4.2.2	Solution du problème d'inclusion	100
4.2.3	Résolution du problème d'écoulement par un schéma itératif	101
4.2.4	Écoulement dans un tube cylindrique	104
4.3	Conclusion	107
	Conclusion générale	111
	Bibliographie	113

Annexe A

Décomposition dans la base de Walpole

Annexe B

Conditions de convergence du schéma itératif en contrainte

Annexe C

Formulations en contrainte basées sur un Lagrangien augmenté

131

Notations

• Notations tensorielles

a	scalaire,	\underline{a}	vecteur,
\mathbf{A}	tenseurs d'ordre deux,	\mathbb{A}	tenseurs d'ordre quatre,
\mathbf{I}	tenseur identité d'ordre deux,	\mathbb{I}	tenseur identité d'ordre quatre,
\cdot	produit contracté d'ordre un,	$:$	produit contracté d'ordre deux,
\otimes	produit tensoriel,	$\overset{s}{\otimes}$	produit tensoriel symétrisé,
δ_{ij}	symbole de Kronecker.		

$$(\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{B})_{ijkl} = A_{ik} B_{jl} \quad (\mathbf{A} \underline{\otimes} \mathbf{B})_{ijkl} = A_{il} B_{jk}$$

$$(\mathbf{A} \underline{\otimes} \mathbf{B})_{ijkl} = \frac{1}{2} (A_{ik} B_{jl} + A_{il} B_{jk})$$

• Notations communes à tous les chapitres

$\underline{\xi}$	vecteur d'onde,
$\bar{\Gamma}^0(\underline{\xi})$	opérateur de Green pour les déformations,
$\Delta^0(\underline{\xi})$	opérateur de Green pour les contraintes,
$\boldsymbol{\sigma}$	tenseur des contraintes microscopiques,
$\boldsymbol{\Sigma}$	tenseur des contraintes macroscopiques,

• Notations propres aux chapitres 1 et 2

\underline{u}	champ de déplacement,
$\boldsymbol{\varepsilon}$	tenseur des déformations microscopiques,
\mathbf{E}	tenseur des déformations macroscopiques,
\mathbb{C}	tenseur de rigidité,
\mathbb{S}	tenseur de souplesse,
$w(\boldsymbol{\varepsilon})$	potentiel des déformations microscopiques,
$w^*(\boldsymbol{\sigma})$	potentiel des contraintes microscopiques,
$W(\mathbf{E})$	potentiel des déformations macroscopiques,
$W^*(\boldsymbol{\Sigma})$	potentiel des contraintes macroscopiques,

• Notations propres aux chapitres 3 et 4

\underline{v}	champ des vitesses microscopiques,
\underline{V}	champ des vitesses macroscopiques,
p	champ de pression microscopique,
\underline{G}	gradient de pression macroscopique,
$\underline{\varepsilon}$	tenseur des déformations microscopiques,
\underline{K}	tenseur de perméabilité en régime statique,
$\underline{K}(\omega)$	tenseur de perméabilité en régime dynamique,
ω	la pulsation,
\underline{f}	forces de volume,

Introduction générale

La détermination des propriétés effectives des milieux périodiques a fait l'objet de nombreux travaux durant ces dernières décennies, tant sur le plan de la modélisation que sur le développement des outils de résolution numérique [71], [64], [16, 17], [7, 8]. Les propriétés effectives du milieu hétérogène sont obtenues en résolvant un problème linéaire ou non linéaire posé sur une cellule élémentaire. On peut alors décliner deux types d'approches : celles consistant à déterminer des bornes ou des approximations du milieu homogène équivalent (Hashin-Shtrikman, Mori-Tanaka...), des approches utilisant des solutions "complètes" reposant sur des méthodes de résolution numériques. Ces approches sont complètes au sens où aucune approximation ou hypothèse n'est utilisée pour l'obtention des propriétés homogénéisées. Dans ce contexte, Moulinec, Michel et Suquet [61] ont proposé une méthode de résolution numérique basée sur la Transformée de Fourier Rapide (TFR). Elle présente de nombreux avantages face aux méthodes de résolution par la méthode des éléments finis. D'une part, elle ne nécessite pas le recours au maillage des différentes phases : elles sont bien adaptées au cas des microstructures complexes (par exemple les images pixélisées issues de la tomographie) mais permettent aussi de traiter le cas de cellules géométriquement simples. D'autre part la méthode ne requiert pas la résolution d'un système linéaire, mais repose sur un schéma itératif. Ainsi, à même degrés de liberté, la méthode basée sur la TFR permet de réduire significativement les temps de calcul (cf. [55]).

Dans ce mémoire de thèse, nous présentons des travaux visant à mettre en oeuvre et à développer les méthodes basées sur la TFR dans le contexte de l'homogénéisation des matériaux composites et des milieux poreux périodiques.

La première partie de la thèse est consacrée aux milieux composites périodiques linéaires et non linéaires. Dans le premier chapitre, nous présentons et nous comparons les différentes méthodes basées sur la TFR dans le contexte de l'élasticité. La convergence de ces schémas de résolution numérique est particulièrement sensible au contraste entre les phases. On discute donc des conditions de convergence, des limitations des différentes approches ainsi que des améliorations proposées ces dernières années pour pallier aux incapacités de la méthode initialement introduite dans [61].

Dans le second chapitre, on présente une approche numérique à deux échelles pour la détermination du comportement des composites non linéaires. L'homogénéisation des milieux hétérogènes non linéaire reste encore aujourd'hui un problème ouvert et qui a fait l'objet de nombreuses contributions ces vingt dernières années [66], [67], [29], [59], [58] (voir également [17, 68] pour une synthèse sur les approches variationnelles). Cette problématique soulève un certain nombre de questions spécifiques : en particulier, une des

difficultés majeures réside dans le fait que la forme générale de la loi de comportement macroscopique n'est pas connue. Une approche numérique pour la détermination de la loi de comportement "exacte" du composite et son implémentation dans un code de calcul de structure a été proposé dans [34, 36, 35] et [37, 38]. Ces méthodes, dites "FE2" (éléments finis "au carré") ou méthodes concourantes traitent simultanément les deux échelles. Elles nécessitent donc un grand nombre de calculs qui limite évidemment le nombre de degrés de libertés à l'échelle de la structure et exclut, à l'heure actuelle, l'utilisation de cette méthode pour les problèmes tridimensionnels. Plus récemment, Yvonnet et al. [86] ont proposé une méthode basée sur des techniques d'interpolation multidimensionnelle pour la détermination de la loi de comportement macroscopique. Cette approche présente plusieurs avantages face aux méthodes concourantes et ce, essentiellement par sa nature séquentielle. Dans cette approche, la loi de comportement macroscopique, une fois déterminée, peut alors être appliquée à tout type de problème de structure. Elle permet des études de convergence du calcul par éléments finis à l'échelle macroscopique, et également d'effectuer la transition sur plusieurs échelles...

Nous proposons ici de coupler l'approche par interpolation développée dans [86] avec une méthode de résolution par la TFR des problèmes locaux non linéaires, basée sur la formulation Lagrangienne introduite dans [57]. Le nombre de calculs locaux pouvant être très grand, l'utilisation des méthodes de type TFR peut s'avérer judicieuse pour réduire les temps de calculs. De plus, l'utilisation des algorithmes basés sur la TFR permet également de traiter des problèmes à microstructure complexe, notamment les images issues de la microtomographie. On décrit, dans ce chapitre, la méthodologie, les choix et la stratégie adoptés pour limiter le nombre de calculs. On propose de construire la loi de comportement macroscopique pour différentes microstructures et matériaux. Enfin, pour illustrer la pertinence de la démarche, on implémente la loi macroscopique dans un code de calcul par éléments finis pour la résolution d'un problème de flexion de poutre.

La seconde partie du mémoire est dédiée à la formulation d'un outil numérique pour la détermination des propriétés effectives des milieux poreux périodiques saturés. Cette problématique concerne de nombreuses applications dans des domaines très variés tel que la mécanique des sols, la biomécanique, les problèmes liés au stockage des déchets nucléaires, la prospection pétrolière, les écoulements dans les micro et nanosystèmes (MEMS) etc.

L'objectif concerne plus principalement la détermination de la perméabilité de milieux poreux périodiques. Celle-ci peut être obtenue par la méthode des éléments finis [9, 27, 1, 2, 74] ou par des méthodes semi analytiques par développement en série de fonctions propres [72, 73, 80, 81]. Notons toutefois que cette dernière méthode reste limitée à des configurations où la cellule élémentaire reste géométriquement simple. On propose ici d'étendre le domaine d'application des méthodes de résolution basées sur la TFR au contexte des écoulements en milieux poreux périodiques. Dans le chapitre 3, on considère le cas d'un écoulement quasi-statique d'un fluide incompressible à travers un squelette solide rigide. L'écoulement est régi par les équations de Stokes qui présentent une grande similitude avec les équations de l'élasticité. Ainsi, la reconduction des méthodes présentées dans la première partie de la thèse, au contexte des milieux poreux, apparaît tout à fait justifiée. On montre toutefois que, de par la nature du chargement imposé à la cellule élémentaire (un gradient de pression macroscopique), le problème posé est statiquement indéterminé.

On montre également que la solution du problème peut être décomposée dans un espace fini de chargements que l'on décrit dans le chapitre 3. Chacune des solutions élémentaires est obtenue à l'aide d'un algorithme itératif basé sur la TFR. Des comparaisons avec des solutions issues de la littérature pour des problèmes bi- et tridimensionnels ont permis de valider notre approche.

Dans le chapitre 4 on propose deux extensions. La première consiste à prendre en compte les effets de glissement sur la paroi de la matrice poreuse, qui sont particulièrement notables dans les microécoulements de gaz raréfiés [46, 28]. Lorsque le libre parcours moyen devient petit devant la taille caractéristique des interstices du milieu poreux, les équations de Stokes restent applicables mais il est nécessaire de prendre en compte un saut du champ de vitesse à la paroi qui résulte d'un déséquilibre thermodynamique. Les conditions aux limites traduisant le glissement du champ de vitesse à la paroi ont été établies par Maxwell [54]. L'approche proposée dans le quatrième chapitre, pour la prise en compte de ces effets de glissement, est basée sur le concept d'interphase et d'interface imparfaite utilisée dans le contexte de l'élasticité [47, 11] (mais initialement introduite dans le contexte de la conduction thermique par [70, 65]). En adaptant ces résultats au contexte des milieux poreux, on montre que cette condition de glissement peut être introduite en remplaçant l'interface solide/fluide par une couche de fluide d'épaisseur très faible constituée d'un second fluide de viscosité dynamique très petite. Enfin, on présente au chapitre 4 une seconde extension pour la prise en compte des effets dynamiques. On étudie l'écoulement en régime linéaire en présence d'une d'excitation harmonique. La résolution de ce problème est alors effectué en généralisant l'approche duale introduite dans [15] au contexte dynamique.

Chapitre 1

Les méthodes basées sur la TFR pour les composites élastiques

Dans ce premier chapitre on s'attache à présenter les méthodes de résolution basées sur la transformée de Fourier Rapide (Méthodes TFR). Ici, les méthodes sont décrites et comparées dans le contexte de l'élasticité linéaire. La mise en oeuvre de ces méthodes dans la cas des composites non linéaire fait l'objet du second chapitre.

La méthode de résolution numérique basée sur la Transformée de Fourier a été initialement introduite par Moulinec et Suquet [61] pour déterminer les propriétés effectives des composites élastiques. Elle repose sur la formulation d'une équation intégrale, dite de Lippmann-Schwinger, du problème d'inhomogénéité et utilise le tenseur de Green périodique. La résolution de cette équation intégrale est obtenue à l'aide d'un schéma itératif utilisant la Transformée de Fourier Discrète (TFD) et la Transformée de Fourier Rapide (T.F.R) ce qui permet de réduire considérablement les temps de calcul. De plus la méthode basée sur la TFR permet de traiter tout aussi facilement les microstructures simples que complexes car elle utilise une grille régulière et n'a pas recours à un maillage des différentes phases constitutives de la cellule élémentaire.

On rappelle tout d'abord le cadre classique de l'homogénéisation des milieux périodique et les méthodes de résolution dans le domaine de Fourier. En outre, on établit les équations dites de Lippmann-Schwinger du problème d'inhomogénéité, sur lesquelles repose la méthode numérique basée sur la TFR.

On présente ensuite la méthode de base, que l'on désignera dans la suite "schéma en déformation", introduite par Moulinec et Suquet [61]. On présente également les différentes améliorations possibles de la méthode de base proposées dans [57, 15] (voir également [10], pour la formulation duale). D'autres méthodes visant à accélérer la convergence des schémas itératifs basés sur la TFR on été proposées dans [87, 21] mais ne sont pas détaillées dans ce chapitre. Notamment, on décrit une formulation duale de la méthode en déformation (appelée formulation en contrainte ou méthode duale dans la suite du chapitre) et qui sera utilisée dans les chapitres 3 et 4 en vue d'une extension au cas des milieux poreux.

Dans la dernière partie du chapitre, on présente les formulations basées sur le Lagrangien augmenté.

1.1 Principes de base de l'homogénéisation des milieux périodiques

1.1.1 Le problème d'inhomogénéité

Le milieu périodique peut être obtenu par répétition d'une cellule de base dans les trois directions de l'espace. La cellule élémentaire n'est pas nécessairement parallélépipédique, mais la considération d'une cellule de ce type s'avère généralement plus pratique en vue de la résolution numérique du problème d'inhomogénéité, que l'on va décrire dans la première partie de ce chapitre. On notera par b_1, b_2 et b_3 les longueurs des demi cotés de la cellule de base, prises respectivement suivant les axes Ox_1, Ox_2 et Ox_3 .

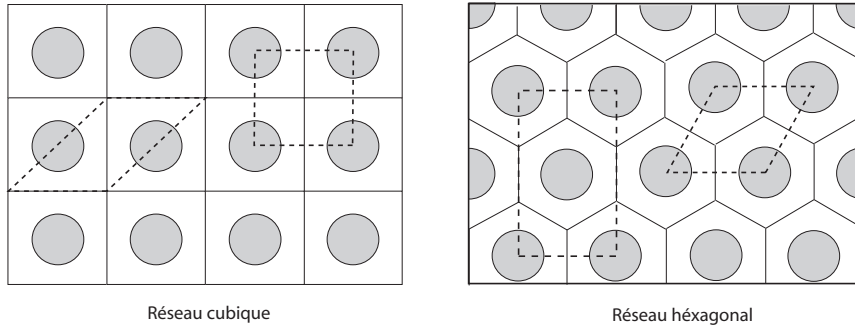


FIGURE 1.1 – Définition de la cellule élémentaire du milieu périodique

Les équations du problème d'élasticité posé sur la cellule élémentaire sont :

- des relations de compatibilité pour le champ de déplacement $\underline{u}(\underline{x})$ et le champ de déformation, $\underline{\epsilon}(\underline{x})$
- des conditions d'équilibre pour le champ de contrainte $\underline{\sigma}(\underline{x})$
- une loi d'élasticité liant $\underline{\epsilon}(\underline{x})$ et $\underline{\sigma}(\underline{x})$
- des conditions aux limites.

On se propose de rappeler brièvement ces équations.

1.1.1.1 Conditions de compatibilité

On note, en tout point $\underline{x} \in V$ (la cellule élémentaire), $\underline{u}(\underline{x})$ le champ de déplacement et $\underline{\epsilon}(\underline{x})$ le champ de déformation qui lui est associé, par :

$$\underline{\epsilon}(\underline{x}) = \frac{1}{2}(\nabla \underline{u}(\underline{x}) + \nabla^t \underline{u}(\underline{x})) \quad \Leftrightarrow \quad \text{rot rot}(\underline{\epsilon}(\underline{x})) = 0 \quad (1.1)$$

Le champ de déplacement $\underline{u}(\underline{x})$ et le champ de déformation se décompose en :

$$\underline{u}(\underline{x}) = \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{x} + \underline{u}^*(\underline{x}), \quad \underline{u}^*(\underline{x}) \text{ périodique} \quad (1.2)$$

où $\underline{\mathbf{E}}$ est le champ des déformations macroscopiques (homogène à l'échelle de la cellule élémentaire). $\underline{u}^*(\underline{x})$ est une fluctuation périodique, c'est à dire qu'il prend des valeurs

égales sur les bords opposés de la cellule élémentaire. Le champ de déformation $\underline{\varepsilon}(\underline{x})$ se décompose en un premier terme homogène, correspondant à la déformation macroscopique $\underline{\mathbf{E}}$, et une fluctuation périodique $\underline{\varepsilon}^*(\underline{x})$. On écrira donc :

$$\underline{\varepsilon}(\underline{x}) = \underline{\mathbf{E}} + \underline{\varepsilon}^*(\underline{x}), \quad \underline{\varepsilon}^*(\underline{x}) = \frac{1}{2}(\nabla \underline{u}^*(\underline{x}) + \nabla^t \underline{u}^*(\underline{x})) \quad (1.3)$$

Compte tenu des conditions de périodicité de $\underline{u}^*(\underline{x})$, on a :

$$\langle \underline{\varepsilon}^*(\underline{x}) \rangle_V = 0, \quad \underline{\mathbf{E}} = \langle \underline{\varepsilon}(\underline{x}) \rangle_V \quad (1.4)$$

où les crochets $\langle \bullet \rangle_V$ désignent la moyenne sur le volume de la cellule de base.

1.1.1.2 Relations d'équilibre

Le champ de contrainte local est en équilibre dans le milieu périodique entier. Il satisfait donc l'équation d'équilibre à l'intérieur de V et l'équilibre sur l'interface ∂V qui traduit l'équilibre d'une cellule avec les cellules voisines :

$$\operatorname{div}(\underline{\sigma}(\underline{x})) = 0 \quad \text{dans } V, \quad \underline{\sigma}(\underline{x}) \cdot \underline{n} \quad \text{antipériodique} \quad (1.5)$$

Le champ de contrainte $\underline{\sigma}(\underline{x})$ peut se décomposer de la manière suivante :

$$\underline{\sigma}(\underline{x}) = \underline{\Sigma} + \underline{\sigma}^*(\underline{x}) \quad (1.6)$$

où $\underline{\Sigma}$ est le contrainte macroscopique et $\underline{\sigma}^*(\underline{x})$ une fluctuation périodique à moyenne nulle sur la cellule élémentaire, ainsi :

$$\langle \underline{\sigma}^*(\underline{x}) \rangle_V = 0, \quad \underline{\Sigma} = \langle \underline{\sigma}(\underline{x}) \rangle_V \quad (1.7)$$

1.1.1.3 Loi de comportement élastique

La cellule de base est constituée de deux ou plusieurs phases élastiques notées $\alpha = 1, 2, \dots$ occupant les volumes V_α dans la cellule de base ($\sum V_\alpha = V$, $V = 8b_1b_2b_3$ étant le volume de la cellule élémentaire). On note par \mathbb{C}^α le tenseur de rigidité de la phase α et on définit par $\mathbb{S}^\alpha = (\mathbb{C}^\alpha)^{-1}$ le tenseur de souplesse associé.

Le champ des contraintes et de déformation sont liés par les relations :

$$\underline{\sigma}(\underline{x}) = \mathbb{C}(\underline{x}) : \underline{\varepsilon}(\underline{x}) \Leftrightarrow \underline{\varepsilon}(\underline{x}) = \mathbb{S}(\underline{x}) : \underline{\sigma}(\underline{x}) \quad (1.8)$$

où $\mathbb{C}(\underline{x})$ et $\mathbb{S}(\underline{x})$ désignent respectivement le tenseur de rigidité et de souplesse du milieu hétérogène :

$$\mathbb{C}(\underline{x}) = \sum_{\alpha} I_{\alpha}(\underline{x}) \mathbb{C}^{\alpha}, \quad \mathbb{S}(\underline{x}) = \sum_{\alpha} I_{\alpha}(\underline{x}) \mathbb{S}^{\alpha} \quad (1.9)$$

$$\text{avec : } I_{\alpha}(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \underline{x} \in V_{\alpha} \\ 0 & \text{si } \underline{x} \in V - V_{\alpha} \end{cases} \quad (1.10)$$

Les $I_{\alpha}(\underline{x})$ sont des fonctions qui dépendent uniquement de la géométrie et de la répartition spatiale des différentes phases. Ces fonctions satisfont la condition :

$$\sum_{\alpha} I_{\alpha}(\underline{x}) = 1 \quad (1.11)$$

1.1.2 Propriétés effectives des composites périodiques en élasticité linéaire

Le principe de l'homogénéisation consiste à remplacer le milieu hétérogène par un milieu homogène équivalent de rigidité \mathbb{C}^{hom} (ou de souplesse \mathbb{S}^{hom}) :

$$\Sigma = \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} \Leftrightarrow \mathbf{E} = \mathbb{S}^{hom} : \Sigma \quad (1.12)$$

On peut alors décliner deux approches conduisant à la détermination des propriétés effectives \mathbb{C}^{hom} et \mathbb{S}^{hom} du milieu homogénéisé :

- Une approche en déformation : on impose \mathbf{E} et on recherche $\varepsilon(\underline{x})$, satisfaisant aux équations d'élasticité (1.1), (1.2), (1.5), (1.8). En d'autres mots on recherche le tenseur $\mathbb{A}(\underline{x})$ tel que :

$$\varepsilon(\underline{x}) = \mathbb{A}(\underline{x}) : \mathbf{E} \quad (1.13)$$

Il s'agit de l'étape dite de localisation. Des relations (1.8) et (1.7) on déduit ensuite que :

$$\mathbb{C}^{hom} = \langle \mathbb{C}(\underline{x}) : \mathbb{A}(\underline{x}) \rangle_V \quad (1.14)$$

- L'approche en contrainte consiste à imposer le champ de contrainte macroscopique à la cellule élémentaire. On recherche alors $\sigma(\underline{x})$, satisfaisant aux équations d'élasticité (1.1), (1.2), (1.5), (1.8). C'est l'étape dite de concentration qui conduit à :

$$\sigma(\underline{x}) = \mathbb{B}(\underline{x}) : \Sigma \quad (1.15)$$

\mathbb{B} est le tenseur de concentration, appelé également tenseur de localisation pour les contraintes. Des relations (1.8) et (1.4) on en déduit alors que :

$$\mathbb{S}^{hom} = \langle \mathbb{S}(\underline{x}) : \mathbb{B}(\underline{x}) \rangle_V \quad (1.16)$$

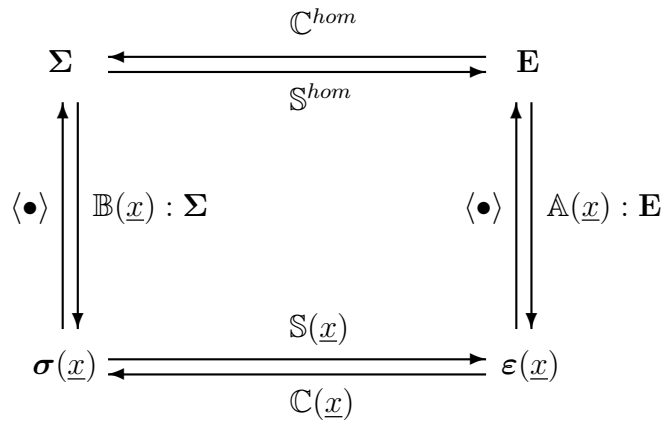


FIGURE 1.2 – Principe d'homogénéisation

1.2 Résolution dans le domaine de Fourier

1.2.1 Relations d'équilibre et de compatibilité

Les champs locaux étant de nature périodique, une représentation de ces champs en série de Fourier est donc possible. On posera pour tout champ $F(\underline{x}) = (u_i(\underline{x}), \varepsilon_{ij}(\underline{x}), \sigma_{ij}(\underline{x}))$:

$$F(\underline{x}) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} F(\underline{\xi}_n) \exp(-i\underline{\xi}_n \cdot \underline{x}) \quad (1.17)$$

où les $\underline{\xi}_n$ pour $n = -\infty.. +\infty$ sont les vecteurs d'ondes définis par $(\underline{\xi}_n)_k = 2n\pi/(b_k)$ où l'on rappelle que les b_k pour $k = 1, 2, 3$ définissent les demi-axes de la cellule de base parallélépipédique et où i est le nombre complexe $i^2 = -1$. Par $F(\underline{\xi}_n)$ on définit la transformée de Fourier d'une fonction $F(\underline{x})$:

$$F(\underline{\xi}) = \frac{1}{V} \int_V F(\underline{x}) \exp(i\underline{\xi} \cdot \underline{x}) d\underline{x} \quad (1.18)$$

Notons que l'utilisation d'un développement en série de Fourier pour la réponse élastique du composite permet en outre de vérifier automatiquement les conditions de périodicité, à savoir la périodicité de $\underline{u}(\underline{x})$ et l'antipériodicité de $\underline{t}(\underline{x}) = \underline{\sigma}(\underline{x}) \cdot \underline{n}$ sur les faces opposées de la cellule élémentaire. Notons également que le terme correspondant au vecteur d'onde $\underline{\xi} = 0$ dans (1.17) correspond à la valeur moyenne de $F(\underline{x})$ sur la cellule élémentaire :

$$F(\underline{\xi} = 0) = \frac{1}{V} \int_V F(\underline{x}) d\underline{x} = \langle F(\underline{x}) \rangle_V \quad (1.19)$$

En particulier, pour la déformation et la contrainte, on a :

$$\underline{\mathbf{E}} = \underline{\varepsilon}(\underline{\xi} = 0), \quad \underline{\Sigma} = \underline{\sigma}(\underline{\xi} = 0) \quad (1.20)$$

Les équations de compatibilité (1.1) et d'équilibre (1.5) s'écrivent, dans le domaine de Fourier :

$$\begin{aligned} \forall \underline{\xi} : \sigma_{ij}(\underline{\xi}) \xi_j &= 0 \\ \forall \underline{\xi} : \epsilon_{ipk} \epsilon_{jqk} \varepsilon_{kl}(\underline{\xi}) \xi_p \xi_q &= 0 \end{aligned} \quad (1.21)$$

où ϵ_{ijk} est le symbole de permutation.

On se propose de donner une interprétation géométrique des conditions de compatibilité et d'équilibre (1.21). On introduit donc un formalisme tensoriel qui permet également d'écrire les opérateurs de Green sous une forme plus compacte (c.f. section 1.2.2).

On note $\mathbb{P}(\underline{\xi})$ et $\mathbb{Q}(\underline{\xi})$ les deux tenseurs d'ordre quatre définis, pour tout $\underline{\xi} \neq 0$, par :

$$\mathbb{Q}(\underline{\xi}) = \mathbb{E}_1(\underline{\xi}) + \mathbb{E}_3(\underline{\xi}), \quad \mathbb{P}(\underline{\xi}) = \mathbb{E}_2(\underline{\xi}) + \mathbb{E}_4(\underline{\xi})$$

où les tenseurs $\mathbb{E}_n(\underline{\xi})$ pour $n = 1..4$ sont les quatre premiers tenseurs de la base de Walpole [79]. La base de Walpole étant constituée des six tenseurs $\mathbb{E}_n(\underline{\xi})$ définis par :

$$\begin{cases} \mathbb{E}_1(\underline{\xi}) = \frac{1}{2} \mathbf{k}^\perp \otimes \mathbf{k}^\perp \\ \mathbb{E}_2(\underline{\xi}) = \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} \\ \mathbb{E}_3(\underline{\xi}) = \mathbf{k}^\perp \underline{\otimes} \mathbf{k}^\perp - \mathbb{E}_1 \\ \mathbb{E}_4(\underline{\xi}) = \mathbf{k}^\perp \underline{\otimes} \mathbf{k} + \mathbf{k} \underline{\otimes} \mathbf{k}^\perp \\ \mathbb{E}_5(\underline{\xi}) = \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}^\perp, \quad \mathbb{E}_6(\underline{\xi}) = \mathbf{k}^\perp \otimes \mathbf{k} \end{cases} \quad (1.22)$$

où \mathbf{k} et \mathbf{k}^\perp sont définis par :

$$\mathbf{k} = \frac{1}{|\underline{\xi}|^2} \underline{\xi} \otimes \underline{\xi}, \quad \mathbf{k}^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{k} \quad (1.23)$$

Notons tout d'abord que $\mathbb{P}(\underline{\xi})$ et $\mathbb{Q}(\underline{\xi})$ sont deux projecteurs, on a donc, pour ces deux tenseurs, les propriétés classiques suivantes, $\forall \underline{\xi} \neq 0$:

$$\begin{cases} \mathbb{P}(\underline{\xi}) : \mathbb{P}(\underline{\xi}) = \mathbb{P}(\underline{\xi}), & \mathbb{Q}(\underline{\xi}) : \mathbb{Q}(\underline{\xi}) = \mathbb{Q}(\underline{\xi}) \\ \mathbb{P}(\underline{\xi}) : \mathbb{Q}(\underline{\xi}) = \mathbb{Q}(\underline{\xi}) : \mathbb{P}(\underline{\xi}) = 0 \\ \mathbb{I} = \mathbb{P}(\underline{\xi}) + \mathbb{Q}(\underline{\xi}) \end{cases} \quad (1.24)$$

L'opération $\mathbb{Q}(\underline{\xi}) : \mathbf{a}$ pour tout tenseur d'ordre deux \mathbf{a} représente la projection de \mathbf{a} dans le sous-espace défini par le plan de normale $\underline{\xi}$, tandis que $\mathbb{P}(\underline{\xi}) : \mathbf{a}$ définit la composante "hors plan" de \mathbf{a} .

Une réécriture des conditions (1.21) à l'aide des tenseurs $\mathbb{P}(\underline{\xi})$ et $\mathbb{Q}(\underline{\xi})$ est possible :

- Tout champ de contrainte périodique $\boldsymbol{\sigma}(\underline{\xi})$ vérifie l'équilibre local si et seulement si :

$$\forall \underline{\xi} \neq 0 : \quad \mathbb{P}(\underline{\xi}) : \boldsymbol{\sigma}(\underline{\xi}) = 0 \quad \text{ou} \quad \mathbb{Q}(\underline{\xi}) : \boldsymbol{\sigma}(\underline{\xi}) = \boldsymbol{\sigma}(\underline{\xi}) \quad (1.25)$$

- Tout champ périodique $\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{\xi})$ vérifie l'équation de compatibilité si et seulement si :

$$\forall \underline{\xi} \neq 0 : \quad \mathbb{P}(\underline{\xi}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{\xi}) = \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{\xi}) \quad \text{ou} \quad \mathbb{Q}(\underline{\xi}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{\xi}) = 0 \quad (1.26)$$

1.2.2 Les équations de Lippmann-Schwinger du problème d'inhomogénéité

Le problème d'inhomogénéité défini par les équations (1.1), (1.2), (1.5), (1.8) s'écrit, dans le domaine de Fourier :

$$\begin{cases} \forall \underline{\xi} \neq 0 : \quad \mathbb{P}(\underline{\xi}) : \boldsymbol{\sigma}(\underline{\xi}) = 0, & \mathbb{Q}(\underline{\xi}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{\xi}) = 0 \\ \boldsymbol{\sigma}(\underline{\xi}) = \mathbb{C}(\underline{\xi}) * \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{\xi}) \\ \text{pour } \underline{\xi} = 0 : \quad \boldsymbol{\sigma}(\underline{\xi}) = \boldsymbol{\Sigma}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{\xi}) = \mathbf{E} \end{cases} \quad (1.27)$$

où le symbole $*$ représente le produit de convolution.

Notons que les équations d'équilibre et de compatibilité sont des équations non locales

dans l'espace réel (puisqu'elles font intervenir un couplage entre les points matériels) mais sont locales dans le domaine de Fourier. La loi de comportement est locale dans le domaine réel mais est non locale dans le domaine de Fourier puisque définie par le produit de convolution de $\mathbb{C}(\underline{\xi})$ par $\underline{\varepsilon}(\underline{\xi})$. Cette non localité constitue la difficulté majeure pour la résolution du système d'équations (1.27) dans le domaine de Fourier.

Notons également que dans (1.27), la contrainte macroscopique est traitée comme une inconnue du problème lorsque la déformation macroscopique \mathbf{E} est imposée. Inversement, lorsque l'on imposera la contrainte macroscopique Σ , alors \mathbf{E} sera traitée comme une inconnue.

La résolution du système (1.27) par la méthode TFR repose en outre sur la formulation d'un problème auxiliaire, le problème d'inclusion au sens d'Eshelby [31, 32].

Considérons donc ce problème auxiliaire : une cellule de base constituée d'un milieu élastique homogène de rigidité \mathbb{C}^0 (on notera par $\mathbb{S}^0 = (\mathbb{C}^0)^{-1}$ le tenseur de souplesse associé) est soumise à un champ de polarisation $\boldsymbol{\tau}(\underline{x})$ (noté $\boldsymbol{\tau}(\underline{\xi})$ dans le domaine de Fourier) défini en tout point $\underline{x} \in V$. Les équations du problème auxiliaire sont :

$$\begin{cases} \forall \underline{\xi} \neq 0 : \mathbb{P}(\underline{\xi}) : \boldsymbol{\sigma}(\underline{\xi}) = 0, & \mathbb{Q}(\underline{\xi}) : \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}) = 0 \\ \boldsymbol{\sigma}(\underline{\xi}) = \mathbb{C}^0 : \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}) + \boldsymbol{\tau}(\underline{\xi}) \end{cases} \quad (1.28)$$

La solution de (1.28) s'exprime au moyen de l'opérateur de Green périodique associé au milieu de référence de rigidité \mathbb{C}^0 . Dans l'espace de Fourier, la déformation est donnée par :

$$\underline{\varepsilon}(\underline{\xi}) = -\boldsymbol{\Gamma}^0(\underline{\xi}) : \boldsymbol{\tau}(\underline{\xi}) \quad (1.29)$$

pour tout $\underline{\xi} \neq 0$. $\boldsymbol{\Gamma}^0$ est le tenseur de Green pour les déformations, défini, pour un milieu élastique isotrope, par :

$$\boldsymbol{\Gamma}^0(\underline{\xi}) = \frac{1}{\lambda_0 + 2\mu_0} \mathbb{E}_2(\underline{\xi}) + \frac{1}{2\mu_0} \mathbb{E}_4(\underline{\xi}) \quad (1.30)$$

où λ_0 et μ_0 sont les modules de Lamé du milieu de référence et $\mathbb{E}_2(\underline{\xi})$, $\mathbb{E}_4(\underline{\xi})$ sont les tenseurs de la base de Walpole définis par (1.22). On notera que le tenseur de Green pour les déformations possède les propriétés suivantes :

$$\forall \underline{\xi} \neq 0 : \mathbb{P}(\underline{\xi}) : \boldsymbol{\Gamma}^0(\underline{\xi}) = \boldsymbol{\Gamma}^0(\underline{\xi}), \quad \mathbb{Q}(\underline{\xi}) : \boldsymbol{\Gamma}^0(\underline{\xi}) = 0 \quad (1.31)$$

qui exprime le fait que le champ $\underline{\varepsilon}(\underline{\xi})$ défini par (1.29) est un champ compatible.

Revenons au problème d'inhomogénéité qui nous intéresse ici. Introduisons dans (1.27) un milieu de référence de raideur \mathbb{C}^0 et le champ de polarisation $\boldsymbol{\tau}(\underline{x})$ défini par :

$$\boldsymbol{\tau}(\underline{x}) = (\mathbb{C}(\underline{x}) - \mathbb{C}^0) : \underline{\varepsilon}(\underline{x}) \quad (1.32)$$

Alors le champ de déformation $\underline{\varepsilon}(\underline{\xi})$ solution du problème d'inhomogénéité (1.27) est solution de l'équation intégrale :

$$\begin{cases} \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}) = -\boldsymbol{\Gamma}^0(\underline{\xi}) : [(\mathbb{C}(\underline{\xi}) - \mathbb{C}^0) * \underline{\varepsilon}(\underline{\xi})] & \text{pour : } \underline{\xi} \neq 0 \\ \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}) = \mathbf{E} & \text{pour : } \underline{\xi} = 0 \end{cases} \quad (1.33)$$

Il s'agit ici uniquement d'une réécriture du problème d'inhomogénéité est non de sa solution proprement dite. En effet, si dans (1.29) le champ de déformation est explicitement connu lorsque $\boldsymbol{\tau}(\underline{\xi})$ est également connu, dans (1.33), le champ de déformation vérifie une équation intégrale appelée équation de Lippmann-Schwinger.

La réécriture du problème d'inhomogénéité sous la forme (1.33), s'avère adéquat pour des problèmes où la déformation macroscopique \mathbf{E} est imposée. Lorsque ce sont les contraintes macroscopique que l'on impose à la cellule élémentaire, une formulation duale de l'équation de Lippmann-Schwinger est plus appropriée.

Pour cela revenons au problème d'inclusion défini par (1.28) et dont la solution est (1.29). En remplaçant (1.29) dans la seconde relation dans (1.28), il vient :

$$\boldsymbol{\sigma}(\underline{\xi}) = \boldsymbol{\Delta}^0(\underline{\xi}) : \mathbb{S}^0 : \boldsymbol{\tau}(\underline{\xi}) \quad (1.34)$$

où $\boldsymbol{\Delta}^0(\underline{\xi})$ est l'opérateur de Green pour les contraintes, défini par :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Delta}^0(\underline{\xi}) &= \mathbb{C}^0 - \mathbb{C}^0 : \boldsymbol{\Gamma}^0(\underline{\xi}) : \mathbb{C}^0 \\ &= \frac{2\mu_0(3\lambda_0 + 2\mu_0)}{\lambda_0 + 2\mu_0} \mathbb{E}_1(\underline{\xi}) + 2\mu_0 \mathbb{E}_3(\underline{\xi}) \end{aligned} \quad (1.35)$$

où $\mathbb{E}_1(\underline{\xi})$ et $\mathbb{E}_3(\underline{\xi})$ sont définis par (1.22).

On notera que $\boldsymbol{\Delta}^0(\underline{\xi})$ a les propriétés :

$$\forall \underline{\xi} \neq 0 : \mathbb{Q}(\underline{\xi}) : \boldsymbol{\Delta}^0(\underline{\xi}) = \boldsymbol{\Delta}^0(\underline{\xi}), \quad \mathbb{P}(\underline{\xi}) : \boldsymbol{\Delta}^0(\underline{\xi}) = 0 \quad (1.36)$$

qui exprime le fait que le champ de contrainte défini par (1.34) est un champ équilibré. La formulation duale recherchée est donc obtenue en remplaçant dans (1.34), le champ de polarisation $\boldsymbol{\tau}(\underline{\xi})$ par (1.32). En notant de plus que :

$$\mathbb{S}^0 : \boldsymbol{\tau} = \mathbb{S}^0 : (\mathbb{C}(\underline{\xi}) - \mathbb{C}^0) * \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{\xi}) = -(\mathbb{S}(\underline{\xi}) - \mathbb{S}^0) * \boldsymbol{\sigma}(\underline{\xi}) \quad (1.37)$$

On obtient finalement :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}(\underline{\xi}) = -\boldsymbol{\Delta}^0(\underline{\xi}) : \left[(\mathbb{S}(\underline{\xi}) - \mathbb{S}^0) * \boldsymbol{\sigma}(\underline{\xi}) \right] & \text{pour : } \underline{\xi} \neq 0 \\ \boldsymbol{\sigma}(\underline{\xi}) = \boldsymbol{\Sigma} & \text{pour : } \underline{\xi} = 0 \end{cases} \quad (1.38)$$

L'équation ci-dessus est également une équation intégrale de type Lippmann-Schwinger. Une méthode possible pour résoudre les équations intégrales (1.33) et (1.38) consiste à utiliser un développement en série de Neumann. Ceci fait l'objet de la section qui suit.

1.2.3 Résolution par développement en série de Neumann

Posons dans (1.33) :

$$\mathbb{T}(\underline{\xi}) = \boldsymbol{\Gamma}^0(\underline{\xi}) : (\mathbb{C}(\underline{\xi}) - \mathbb{C}^0) \quad \text{et} \quad \mathbf{E}(\underline{\xi}) = \begin{cases} \mathbf{E} & \text{si } \underline{\xi} = 0 \\ 0 & \text{si } \underline{\xi} \neq 0 \end{cases} \quad (1.39)$$

Alors les équations (1.33) peuvent se mettre sous la forme compacte suivante :

$$\underline{\epsilon}(\underline{\xi}) = \underline{\mathbf{E}}(\underline{\xi}) - \underline{\mathbb{T}}(\underline{\xi}) * \underline{\epsilon}(\underline{\xi}) \quad (1.40)$$

Une méthode possible pour résoudre cette équation consiste à utiliser un développement en série de Neumann [22], [49] :

$$\underline{\epsilon}(\underline{\xi}) = \left[\mathbb{I} - \underline{\mathbb{T}}(\underline{\xi}) + \underline{\mathbb{T}}(\underline{\xi}) * \underline{\mathbb{T}}(\underline{\xi}) - \dots \right] : \underline{\mathbf{E}}(\underline{\xi}) \quad (1.41)$$

Evidemment, la convergence de la série (1.41) dépend du rayon spectral de l'opérateur $\underline{\mathbb{T}}(\underline{\xi})$: nous reviendrons sur cette question dans la suite du paragraphe.

Chacun des termes de la série de Neumann (1.41) peut être obtenu en appliquant le schéma itératif :

$$\begin{cases} \underline{\epsilon}^{i+1}(\underline{\xi}) = -\underline{\Gamma}^0 : \left[(\underline{\mathbb{C}}(\underline{\xi}) - \underline{\mathbb{C}}^0) * \underline{\epsilon}^i(\underline{\xi}) \right] & \text{pour : } \underline{\xi} \neq 0 \\ \underline{\epsilon}^{i+1}(\underline{\xi}) = \underline{\mathbf{E}} & \text{pour : } \underline{\xi} = 0 \end{cases} \quad (1.42)$$

Le premier terme de la série étant défini par :

$$\begin{cases} \underline{\epsilon}^{i=1}(\underline{\xi}) = 0 & \text{pour : } \underline{\xi} \neq 0 \\ \underline{\epsilon}^{i=1}(\underline{\xi}) = \underline{\mathbf{E}} & \text{pour : } \underline{\xi} = 0 \end{cases} \quad (1.43)$$

Une simplification du schéma itératif (1.42) est possible. On montre, en annexe A, que pour tout champ compatible $\underline{\epsilon}^i(\underline{\xi})$ on a :

$$\forall \underline{\xi} \neq 0 : \underline{\Gamma}^0 : \underline{\mathbb{C}}^0 : \underline{\epsilon}^i(\underline{\xi}) = \underline{\epsilon}^i(\underline{\xi}) \quad (1.44)$$

Le schéma itératif (1.42) peut donc être réécrit sous la forme :

$$\begin{cases} \underline{\epsilon}^{i+1}(\underline{\xi}) = \underline{\epsilon}^i(\underline{\xi}) - \underline{\Gamma}^0 : \underline{\sigma}^i(\underline{\xi}) & \text{pour : } \underline{\xi} \neq 0 \\ \underline{\epsilon}^{i+1}(\underline{\xi}) = \underline{\mathbf{E}} & \text{pour : } \underline{\xi} = 0 \end{cases} \quad (1.45)$$

où $\underline{\sigma}^i(\underline{\xi})$ est obtenu à partir de la loi élastique : $\underline{\sigma}^i(\underline{x}) = \underline{\mathbb{C}}(\underline{x}) : \underline{\epsilon}^i(\underline{x})$. Le premier terme de la série dans (1.45) est alors donné par (1.43). Comme précisé précédemment, $\underline{\epsilon}^i(\underline{\xi})$ est un champ compatible pour tout i , de plus la loi de comportement est vérifiée pour $\underline{\epsilon}^i(\underline{\xi})$ et $\underline{\sigma}^i(\underline{\xi})$. La condition d'équilibre local pour $\underline{\sigma}^i(\underline{\xi})$ n'est vérifiée qu'à convergence du schéma itératif (1.45). En effet, la limite à convergence correspond à $\underline{\epsilon}^{i+1}(\underline{\xi}) = \underline{\epsilon}^i(\underline{\xi})$ et on a alors :

$$\underline{\Gamma}^0 : \underline{\sigma}^i(\underline{\xi}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\mathbb{P}}(\underline{\xi}) : \underline{\sigma}^i(\underline{\xi}) = 0 \quad (1.46)$$

La solution à convergence correspond donc effectivement à la solution du problème d'in-homogénéité (1.27).

La résolution de l'équation intégrale (1.38) peut également être obtenue par un développement en série de Neumann. Chacun des termes de cette série est obtenu en appliquant le schéma itératif suivant :

$$\begin{cases} \underline{\sigma}^{i+1}(\underline{\xi}) = \underline{\sigma}^i(\underline{\xi}) - \underline{\Delta}^0 : \underline{\epsilon}^i(\underline{\xi}) & \text{pour : } \underline{\xi} \neq 0 \\ \underline{\sigma}^{i+1}(\underline{\xi}) = \underline{\Sigma} & \text{pour : } \underline{\xi} = 0 \end{cases} \quad (1.47)$$

le premier terme de la série étant défini par :

$$\begin{cases} \sigma^{i=1}(\underline{\xi}) = 0 & \text{pour : } \underline{\xi} \neq 0 \\ \sigma^{i=1}(\underline{\xi}) = \Sigma & \text{pour : } \underline{\xi} = 0 \end{cases} \quad (1.48)$$

A convergence on a $\sigma^{i+1}(\underline{\xi}) = \sigma^i(\underline{\xi})$, on a alors :

$$\Delta^0 : \varepsilon^i(\underline{\xi}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{Q}(\underline{\xi}) : \varepsilon^i(\underline{\xi}) = 0 \quad (1.49)$$

qui signifie que le champ $\varepsilon^i(\underline{\xi})$ est compatible.

1.3 Méthode de résolution numérique basée sur la TFR

1.3.1 L'approche en déformation [61]

Dans cette section on décrit l'algorithme numérique basé sur la TFR initialement introduit par Moulinec et Suquet [61]. En vue de l'intégration numérique du schéma itératif (1.45), la transformée de Fourier "exacte" (1.18) est remplacée par la Transformée de Fourier Discrète (T.F.D) :

$$F(\underline{\xi}_n) = \sum_{k=-N}^{k=N} F(\underline{x}_k) \exp(i\underline{\xi}_k \cdot \underline{x}_n) \quad (1.50)$$

Les $\underline{\xi}_n$ sont les vecteurs d'ondes discrets définis par $(\underline{\xi}_n)_k = 2n\pi/b_k$, où $(\underline{\xi}_n)_k$ sont les composantes du vecteur $\underline{\xi}_n$ dans la direction x_k . Les \underline{x}_n définissent la position des points d'une grille régulière dans l'espace réel. Le choix du nombre de vecteurs d'ondes utilisés pour réaliser la T.F.D. correspond donc à la résolution de l'image dans le domaine de Fourier.

L'algorithme itératif est résumé dans le tableau ci-dessous :

Etape i=1 :	$\varepsilon^1(\underline{x}_n) = \mathbf{E}$	
	$\sigma^1(\underline{x}_n) = \mathbb{C}(\underline{x}_n) : \varepsilon^1(\underline{x}_n)$	
Etape i :	$\varepsilon^i(\underline{x}_n)$ et $\sigma^i(\underline{x}_n)$ sont connus	
	$\sigma^i(\underline{\xi}_n) = \mathcal{F}(\sigma^i(\underline{x}_n))$	
	test de convergence	
	$\varepsilon^{i+1}(\underline{\xi}_n) = \varepsilon^i(\underline{\xi}_n) - \Gamma^0(\underline{\xi}_n) : \sigma^i(\underline{\xi}_n)$	
	$\varepsilon^{i+1}(\underline{x}_n) = \mathcal{F}^{-1}(\varepsilon^{i+1}(\underline{\xi}_n))$	
	$\sigma^{i+1}(\underline{x}_n) = \mathbb{C}(\underline{x}_n) : \varepsilon^{i+1}(\underline{x}_n)$	(1.51)

\mathcal{F} et \mathcal{F}^{-1} désignent respectivement la transformée de Fourier et son inverse. D'un point de vue numérique, l'utilisation de la TFR permet d'accélérer considérablement les calculs. A convergence, la contrainte macroscopique, Σ , est alors obtenue en posant $\underline{\xi}_n = 0$

dans $\sigma(\xi_n)$. La convergence du schéma est atteinte lorsque le champ de contrainte local vérifie l'équilibre (c.f. les équations (1.25) et (1.46)). Un choix possible pour le critère de convergence est donc :

$$\frac{\|\mathbb{P}(\xi_n) : \sigma^i(\xi_n)\|}{\|\sigma^i(\xi_n)\|} < \epsilon \quad (1.52)$$

où $\|\bullet\|$ représente la norme de Frobenius.

On a donc trois possibilités d'agir sur le schéma itératif : (i) le choix du nombre de vecteurs d'onde N , (ii) la précision ϵ qui va conditionner le nombre de termes retenus dans la série de Neumann, (iii) enfin le choix des modules élastiques du milieu de référence.

Dans l'ensemble des applications proposées dans ce chapitre, la valeur de ϵ est choisie égale à 10^{-3} .

Les modules λ_0, μ_0 ne peuvent pas être choisis arbitrairement mais doivent respecter les conditions de convergence de la série de Neumann. Sur la base de résultats obtenus par Milton [60] dans le contexte de la conduction thermique, Michel et al. [57] ont montré que la convergence de la série de Neumann (1.41) est obtenue si :

$$\forall x \in V : k_0 > \frac{1}{2}k(x) > 0, \quad \mu_0 > \frac{1}{2}\mu(x) > 0 \quad (1.53)$$

Le choix des modules élastiques du milieu de référence a une influence sur la vitesse de convergence du schéma itératif. En effet, considérons une cellule élémentaire d'un composite à fibres, telle que représentée par la figure 1.3. La cellule est carrée de cotés $2b$ et contient une fibre de section cylindrique de rayon a , alignée dans la direction Ox_3 . La matrice et l'inclusion sont supposés incompressibles et on note μ_M et μ_I leurs modules de cisaillement. Par $c = \mu_I/\mu_M$, on définit le contraste entre les phases, choisi égal à 5 pour l'application proposée sur la figure 1.4.

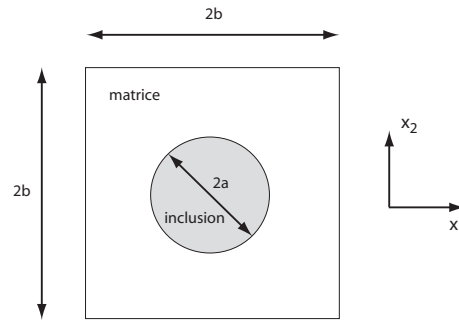


FIGURE 1.3 – Cellule élémentaire d'un composite à fibres.

Le rayon de la fibre est choisi égal à $a = 0.4b$ et on impose le chargement macroscopique suivant : $E_{11} = -E_{22} = 1$, $E_{12} = 0$. On considère pour module de cisaillement du milieu de référence l'expression :

$$\mu_0 = (1 - \alpha)\mu_M + \alpha\mu_I \quad (1.54)$$

Le domaine de convergence théorique, pour le paramètre α , est défini par :

$$\begin{cases} \alpha < \frac{1}{2} \frac{1}{1-c} & \text{si } c \leq 1 \\ \alpha > \frac{1}{2} \frac{2-c}{1-c} & \text{si } c \geq 1 \end{cases} \quad (1.55)$$

Dans le cas présent, c'est à dire pour un contraste égal à 5, le schéma converge si $\alpha > 0.375$. Sur la figure 1.4 on représente le nombre d'itérations en fonction de la valeur α . Pour les calculs, la transformée de Fourier est réalisée en utilisant 64 vecteurs d'onde suivant chacune des directions de l'espace. Le milieu de référence optimal considéré dans [61] correspond à la valeur de $\alpha = 1/2$. On observe effectivement sur la figure 1.4 que la courbe présente un minimum pour $\alpha = 1/2$. On peut également noter que, pour les valeurs $\alpha > 1/2$, le nombre d'itération croît lentement avec α tandis que pour $\alpha < 1/2$ le nombre d'itérations croît rapidement lorsque α diminue. Le nombre d'itérations tend vers l'infini lorsque la valeur seuil $\alpha = 0.375$, correspondant au critère (1.53), est atteinte.

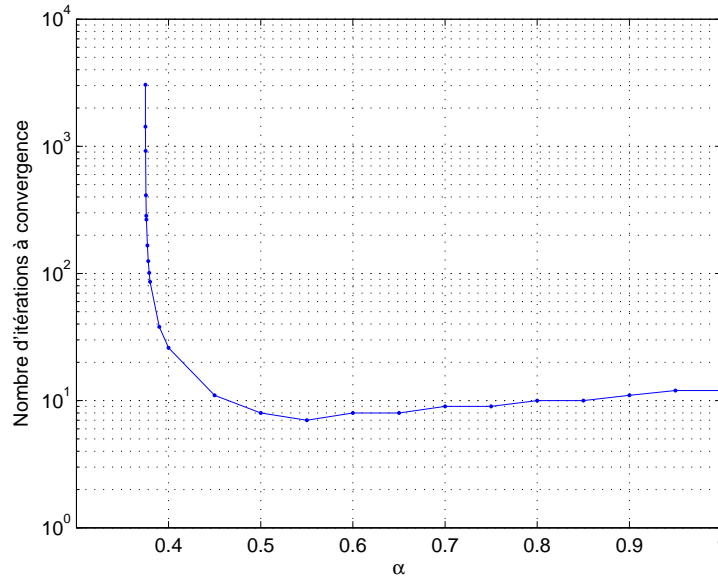


FIGURE 1.4 – Nombre d'itérations à convergence du schéma itératif en fonction du paramètre α .

La solution à convergence dépend du choix de ϵ dans (1.52) mais dépend également de la résolution, c'est à dire du nombre de vecteurs d'onde utilisés pour réaliser la Transformée de Fourier Discrète. A titre d'illustration on donne dans le tableau ci-dessous le module de cisaillement effectif du composite, noté μ^{hom} , en fonction du nombre de vecteurs d'ondes N , dans le cas de la cellule représentée sur la figure 1.3.1. Le choix d'un nombre de vecteurs d'ondes $N = 64$ semble être le plus cohérent puisqu'il conduit à une erreur sur μ^{hom} qui est de l'ordre de grandeur de ϵ .

N	16	32	64	128	256	512	1024
μ^{hom}	1.205376	1.208091	1.209978	1.209272	1.208775	1.208907	1.208897

TABLE 1.1 – Valeur du module de cisaillement effectif μ^{hom} en fonction du nombre de vecteurs d'ondes utilisés.

1.3.2 Utilisation des fonctions de forme [15]

La procédure d'intégration numérique de la loi d'élasticité proposée par Michel et Suquet [61] utilise une description du tenseur d'élasticité dans l'espace réel. Toutefois, dans la plupart des problèmes de type matrice inclusion, cette approche donne une description approchée de la microstructure réelle. En outre, dans le cas d'un composites à fibres, la section circulaire des fibres est approchée par un maillage régulier.

Comme le montrent les équations (1.9), le tenseur de rigidité peut s'exprimer à partir des fonctions caractéristiques de la géométrie des différentes phases constituant la cellule élémentaire, notées $I_\alpha(\underline{x})$. Lorsque le composite est constitué de phases à géométries simples (cylindre, sphères, ellipsoïdes...) des expressions exactes de la transformée de Fourier de ces fonctions caractéristiques peuvent être obtenues. Ces transformées de Fourier, notées $I_\alpha(\underline{\xi})$, sont appelées "fonction de formes", elles sont à la base d'approximations pour les propriétés effectives des milieux périodiques obtenues par Nemat-Nasser et Hori [64].

La transformée de Fourier du tenseur de rigidité (1.9) s'écrit :

$$\mathbb{C}(\underline{\xi}) = \int_V \mathbb{C}(\underline{x}) \exp(i\underline{\xi} \cdot \underline{x}) dV = \sum_{\alpha} I_{\alpha}(\underline{\xi}) \mathbb{C}_{\alpha} \quad (1.56)$$

Où \mathbb{C}_{α} et $I_{\alpha}(\underline{\xi})$ sont respectivement le tenseur de rigidité et la fonction de forme de la phase α . Les $I_{\alpha}(\underline{\xi})$ sont définies par :

$$I_{\alpha}(\underline{\xi}) = \frac{1}{V} \int_{V_{\alpha}} \exp(i\underline{\xi} \cdot \underline{x}) dV \quad (1.57)$$

Elles possèdent les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \forall \underline{\xi} \neq 0 : \sum_{\alpha} I_{\alpha}(\underline{\xi}) &= 0 \\ \text{pour } \underline{\xi} = 0 : I_{\alpha}(\underline{\xi}) &= f_{\alpha} \end{aligned} \quad (1.58)$$

où f_{α} est la fraction volumique de la phase α .

Dans le cas du composite à fibres, défini par la cellule de base représentée par la figure 1.3, l'intégrale (1.57) pour $\alpha = I$ donne alors (voir Nemat-Nasser et Hori [64]) :

$$I_I(\underline{\xi}) = \frac{\pi a}{2b^2 \|\underline{\xi}\|} J_1(a \|\underline{\xi}\|) \quad (1.59)$$

Où a est le rayon de l'inclusion et b le demi-coté de la cellule de base. Des expressions analytiques de (1.57) peuvent être trouvées dans de nombreux cas pratiques (inclusions ellipsoïdales, parallélépipédique, formes polygonales...).

Dans le cas d'un composite biphasé, le tenseur d'élasticité est entièrement déterminé dans le domaine de Fourier lorsque la fonction de forme $I_I(\underline{\xi})$ (associées aux inclusions) est connue. En effet, en utilisant les propriétés (1.58), on a :

$$\begin{aligned} \forall \underline{\xi} \neq 0 : \mathbb{C}(\underline{\xi}) &= (\mathbb{C}_I - \mathbb{C}_M)I_I(\underline{\xi}) \\ \text{pour } \underline{\xi} = 0 : \mathbb{C}(\underline{\xi}) &= (1 - f)\mathbb{C}_M + f\mathbb{C}_I \end{aligned} \quad (1.60)$$

Où $f = \pi a^2/(4b^2)$ est la fraction volumique des fibres. Dans le cas où la cellule contient plusieurs fibres de section circulaire de rayon a et positionnées en $\underline{X}^{(k)}$ pour $k = 1..K$ (K étant le nombre total d'inclusion), alors l'intégrale (1.57) pour $\alpha = I$ est :

$$I_I(\underline{\xi}) = \frac{\pi a}{2b^2 \|\underline{\xi}\|} J_1(a \|\underline{\xi}\|) \sum_k \exp(i \underline{\xi} \cdot \underline{X}^{(k)}) \quad (1.61)$$

On remplace donc le schéma itératif (1.51) par le schéma :

$$\begin{aligned} \text{Etape i=1 : } \forall \underline{\xi}_n \neq 0 : \boldsymbol{\varepsilon}^1(\underline{\xi}_n) &= 0, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^1(0) = \mathbf{E} \\ \boldsymbol{\sigma}^1(\underline{\xi}_n) &= \mathbb{C}(\underline{\xi}_n) * \boldsymbol{\varepsilon}^1(\underline{\xi}_n) \\ \text{Etape i : } \boldsymbol{\varepsilon}^i(\underline{\xi}_n) \text{ et } \boldsymbol{\sigma}^i(\underline{\xi}_n) &\text{ sont connus} \\ \text{test de convergence} & \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{i+1}(\underline{\xi}_n) &= \boldsymbol{\varepsilon}^i(\underline{\xi}_n) - \boldsymbol{\Gamma}^0(\underline{\xi}_n) : \boldsymbol{\sigma}^i(\underline{\xi}_n) \\ \boldsymbol{\sigma}^{i+1}(\underline{\xi}_n) &= \mathbb{C}(\underline{\xi}_n) * \boldsymbol{\varepsilon}^{i+1}(\underline{\xi}_n) \end{aligned} \quad (1.62)$$

Où "*" désigne le produit de convolution et $\mathbb{C}(\underline{\xi})$ est donné par (1.56). Ce produit de convolution est réalisé dans le domaine réel. Le tenseur d'élasticité étant déterminé dans l'espace de Fourier on calcule sa transformée inverse $\mathcal{F}^{-1}(\mathbb{C}(\underline{\xi}))$. Pour le calcul de $\mathcal{F}^{-1}(\mathbb{C}(\underline{\xi}))$ puis de la transformée de Fourier de la contrainte $\boldsymbol{\sigma}^i(\underline{\xi}_n)$, la Transformée de Fourier Rapide est utilisée.

On se propose de comparer l'approche introduite par Moulinec et Suquet [61] (décrite dans la section précédente (1.3.1)) avec la méthode de résolution utilisant les fonctions de forme. Pour cela on considère la cellule élémentaire définie sur la figure 1.3. Le rayon de l'inclusion est toujours choisi égal $a = 0.4b$, la matrice et l'inclusion sont supposées incompressibles et on désigne comme auparavant $c = \mu_I/\mu_M$ le contraste entre les phases. Sur la figure 1.5 on représente le module de cisaillement effectif μ^{hom} en fonction du nombre de vecteurs d'onde N pour un chargement macroscopique imposé $E_{11} = -E_{22}$ et $E_{12} = 0$ et un contraste $c = 5$. Le nombre de vecteurs d'ondes utilisé est $N = 64$.

On observe, pour la méthode classique [61], une convergence "en dent de scie" avec le nombre de vecteurs d'ondes tandis que, pour la méthode basée sur les fonctions de forme, on observe une convergence uniforme.

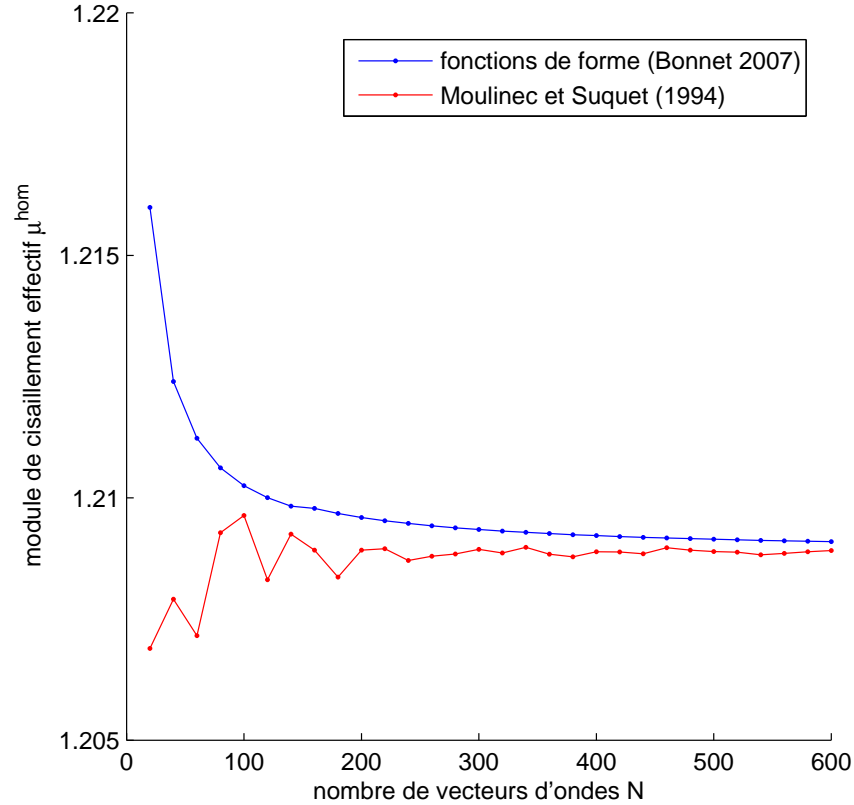


FIGURE 1.5 – Module de cisaillement effectif en fonction du nombre de vecteurs d’ondes - comparaison de l’approche classique (Moulinec et Suquet, 1994) et l’approche utilisant les fonctions de forme (Bonnet, 2007).

Les résultats numériques montrent que le choix $\alpha = 1/2$ ne correspond pas systématiquement au milieu de référence optimal. Les résultats reportés dans le tableau 1.2 donnent les valeurs du nombre d’itérations à convergence pour diverses valeurs du contraste μ_I/μ_M et du paramètre α lorsque le schéma de base (1.51) est utilisé. On observe effectivement que la valeur $\alpha = 1/2$ est optimale lorsque le contraste est inférieur à 1. Toutefois, pour des contrastes supérieurs à 1 on note que la valeur $\alpha = 0.55$ conduit à convergence plus rapide du schéma itératif que la valeur $\alpha = 1/2$.

Dans le tableau 1.3 sont regroupés les valeurs obtenues à l’aide du schéma itératif (1.62), utilisant les fonctions de forme. Il apparaît que, pour les contrastes supérieurs à 1, la valeur $\alpha = 1/2$ correspond au milieu de référence optimal. Toutefois, pour les contrastes inférieurs à 1, on observe que la valeur $\alpha = 0.45$ conduit à une convergence plus rapide du schéma itératif. On se propose de montrer que l’utilisation des fonctions de forme permet d’améliorer la convergence du schéma de base. On représente sur la figure 1.6 le nombre d’itérations à convergence en fonction du contraste c (dans un repère log-log). On observe que pour toute valeur de c l’utilisation des fonctions de forme permet de réduire le nombre d’itérations et ce, plus particulièrement pour les faibles contrastes. Pour des

μ_I/μ_M	$\alpha = 0.45$	0.5	0.55	0.6
0.01	38	35	$+\infty$	$+\infty$
0.1	9	8	12	$+\infty$
10	99	16	12	13
100	$+\infty$	195	112	122
1000	$+\infty$	2337	939	1024

TABLE 1.2 – Nombre d’itérations à convergence en fonction du contraste et du choix du milieu de référence pour le schéma itératif (1.51)

μ_I/μ_M	0.45	0.5	0.55	0.6
0.01	11	16	$+\infty$	$+\infty$
0.1	6	7	14	$+\infty$
10	34	13	13	15
100	$+\infty$	115	120	131
1000	$+\infty$	1145	1184	1291

TABLE 1.3 – Nombre d’itérations à convergence en fonction du contraste et du choix du milieu de référence pour le schéma itératif (1.62)

contrastes supérieurs à 1 on observe, pour les deux approches, une dépendance linéaire du nombre d’itérations avec le contraste. Lorsque le contraste est infini, les deux schémas divergent. Le cas des inclusions rigides ne peut être donc pas traité par une approche en déformation. Afin d’améliorer la convergence du schéma de base [61], un schéma accéléré a été proposé par Eyre et Milton [33] (voir également [59] et [78]). Toutefois ce schéma diverge également dans le cas des contrastes infinis. Dans la section qui suit, on présente une approche formulée en contrainte, mieux adaptée pour traiter le cas des forts contrastes.

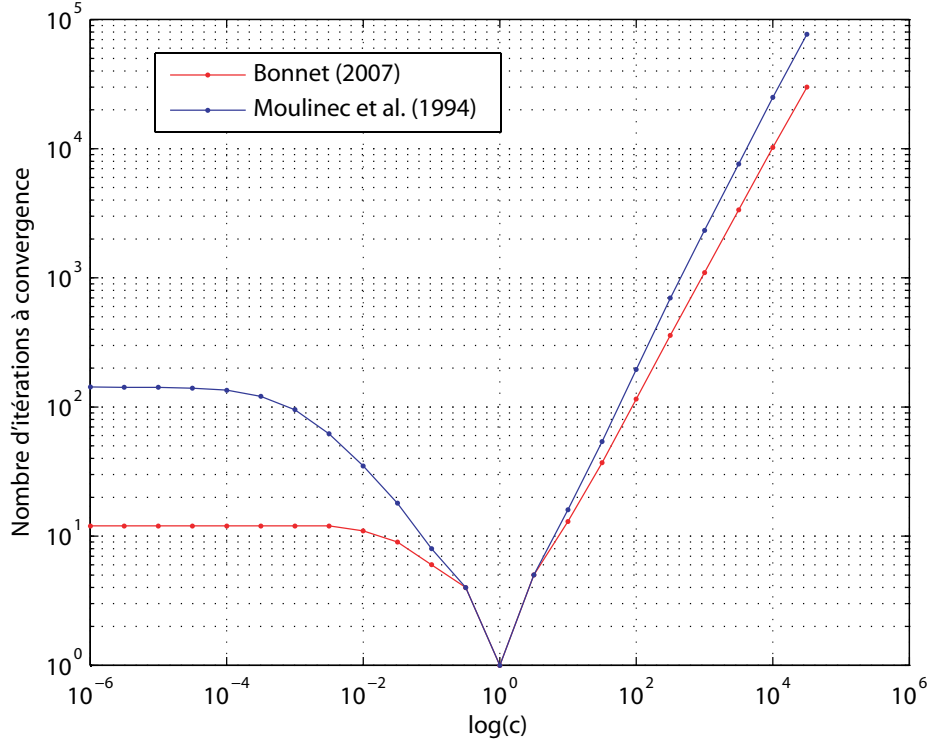


FIGURE 1.6 – Nombre d'itérations à convergence en fonction du contraste. Comparaison de la méthode de base [61] et l'approche utilisant les fonctions de forme [15].

1.3.3 Formulation en contrainte

Afin de traiter les cas des forts contrastes, une formulation duale de l'algorithme itératif (1.62) doit être utilisée. L'algorithme est basé sur le schéma itératif (1.47), et résumé ci-dessous :

$$\begin{aligned}
 \text{Etape } i=1 : \quad & \forall \underline{\xi}_n \neq 0 : \boldsymbol{\sigma}^1(\underline{\xi}_n) = 0, \quad \boldsymbol{\sigma}^1(0) = \boldsymbol{\Sigma} \\
 & \boldsymbol{\varepsilon}^1(\underline{\xi}_n) = \mathbb{S}(\underline{\xi}_n) * \boldsymbol{\sigma}^1(\underline{\xi}_n) \\
 \text{Etape } i : \quad & \boldsymbol{\varepsilon}^i(\underline{\xi}_n) \text{ et } \boldsymbol{\sigma}^i(\underline{\xi}_n) \text{ sont connus} \\
 & \text{test de convergence} \\
 & \boldsymbol{\sigma}^{i+1}(\underline{\xi}_n) = \boldsymbol{\sigma}^i(\underline{\xi}_n) - \boldsymbol{\Delta}^0(\underline{\xi}_n) : \boldsymbol{\varepsilon}^i(\underline{\xi}_n) \\
 & \boldsymbol{\varepsilon}^{i+1}(\underline{\xi}_n) = \mathbb{S}(\underline{\xi}_n) * \boldsymbol{\sigma}^{i+1}(\underline{\xi}_n)
 \end{aligned}
 \tag{1.63}$$

Dans la formulation duale, la contrainte macroscopique, $\boldsymbol{\Sigma}$, est imposée à la cellule élémentaire. C'est donc la déformation macroscopique \boldsymbol{E} que l'on détermine à convergence de l'algorithme itératif.

Le champ de contrainte vérifie la condition d'équilibre $\mathbb{P}(\underline{\xi}) : \boldsymbol{\sigma}^i(\underline{\xi})$ pour toute valeur de i , ceci étant dû à la propriété du tenseur de Green pour les contraintes (c.f. équation

(1.36)). La condition de compatibilité pour le champ de déformation, $\mathbb{Q}(\underline{\xi}) : \underline{\varepsilon}^i(\underline{\xi})$, n'est vérifiée qu'à convergence du schéma itératif. Un test de convergence basé sur la condition de compatibilité est donc considéré pour la formulation en contrainte :

$$\frac{\|\mathbb{Q}(\underline{\xi}_n) : \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}_n)\|}{\|\underline{\varepsilon}(\underline{\xi}_n)\|} < \epsilon \quad (1.64)$$

Comme précédemment, pour les applications proposées dans ce chapitre, la valeur de ϵ est choisie égale à 10^{-3} . On montre, en annexe B, que la convergence du schéma itératif en contrainte est obtenue si :

$$\forall \underline{x} \in V : \frac{1}{k_0} > \frac{1}{2} \frac{1}{k(\underline{x})} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\mu_0} > \frac{1}{2} \frac{1}{\mu(\underline{x})} > 0 \quad (1.65)$$

Où k_0 et μ_0 sont respectivement les modules de compressibilité et de cisaillement du milieu de référence. $k(\underline{x})$ et $\mu(\underline{x})$ représentent les modules de compressibilité et de cisaillement du milieu hétérogène.

On propose d'appliquer ce schéma itératif pour le cas du composite à fibre représenté par la cellule élémentaire de la figure 1.3 (avec $a = 0.4b$). Le nombre de vecteurs d'ondes est choisi égal à 64. On considère un milieu de référence de module μ_0 défini par :

$$\frac{1}{\mu_0} = \frac{1 - \alpha}{\mu_M} + \frac{\alpha}{\mu_I} \quad (1.66)$$

où la valeur de α , respectant la condition de convergence (1.65) est définie par :

$$\begin{cases} \alpha < \frac{1}{2} \frac{c}{c-1} & \text{si } c \geq 1 \\ \alpha > \frac{1}{2} \frac{1-2c}{1-c} & \text{si } c \leq 1 \end{cases} \quad (1.67)$$

Dans le tableau 1.4 on donne le nombre d'itérations pour diverses valeurs du contraste $c = \mu_I/\mu_M$ et du paramètre α . Pour les contrastes inférieurs à 1 on observe que $\alpha = 0.55$ correspond à la valeur optimale du milieu de référence (c'est à dire donnant la plus petite valeur du nombre d'itérations). Pour les contrastes supérieurs à 1, on observe que le milieu de référence optimal est obtenu pour $\alpha = 0.45$.

Sur la figure 1.7 on représente le nombre d'itérations à convergence en fonction du contraste c (dans un repère log-log) pour le schéma itératif en déformation et en contrainte. Pour les deux approches on utilise une représentation du tenseur de rigidité à l'aide des fonctions de forme. On observe que, pour des contrastes supérieurs à 1, l'approche en contrainte converge rapidement. Toutefois c'est le cas des faibles contrastes pour lequel la convergence du schéma itératif en contrainte nécessite un grand nombre d'itérations. Entre autres, on observe une relation linéaire entre le nombre d'itérations à convergence et le logarithme du contraste. Le cas des vides ne peut pas être traité par l'approche en contrainte.

μ_I/μ_M	$\alpha = 0.45$	0.5	0.55	0.6
0.01	$+\infty$	121	116	127
0.1	45	13	13	14
10	7	7	12	$+\infty$
100	14	16	$+\infty$	$+\infty$
1000	18	20	$+\infty$	$+\infty$

TABLE 1.4 – Nombre d’itérations à convergence en fonction du contraste et du choix du milieu de référence pour l’approche en contrainte utilisant les fonctions de forme

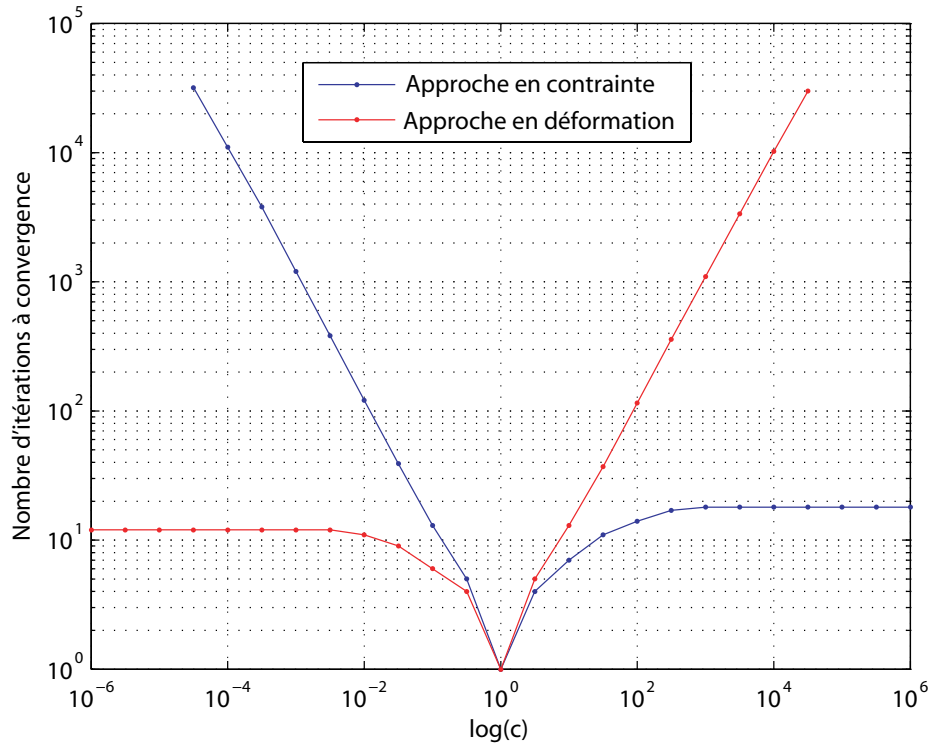


FIGURE 1.7 – Nombre d’itérations à convergence en fonction du contraste. Comparaison des formulations en déformation et en contrainte.

On dispose donc de deux approches, une approche en déformation pour traiter le cas des contrastes inférieurs à 1, une méthode en contrainte mieux adaptée pour les contrastes supérieurs à 1. Toutefois le cas d’un composite constitué à la fois de cavités et d’inclusions rigides ne peut être traité par l’une des deux méthodes. Ce type de situation nécessite l’utilisation d’une approche basée sur le Lagrangien augmenté.

1.4 Méthodes de résolution basées sur un Lagrangien augmenté

Afin d'améliorer la convergence du schéma itératif (1.51), Michel et al. [56, 57] ont proposé des schémas itératifs basés sur la minimisation des Lagrangiens augmentés \mathcal{L}_ε et $\mathcal{L}_\varepsilon^*$.

On propose tout d'abord de décrire la formulation basée sur le Lagrangien augmenté \mathcal{L}_ε . Cette première approche a été proposée pour traiter le cas des faibles contrastes et plus particulièrement celui des vides, qui selon les auteurs ne pouvait être traitée par l'approche de base (1.51)¹.

On présente ensuite le schéma itératif basé sur le Lagrangien augmenté $\mathcal{L}_\varepsilon^*$ introduit dans [57] pour traiter le cas des inclusions rigides. Des comparaisons des approches Lagrangiennes et de la méthode de base [61] sont proposées pour mettre en évidence les améliorations obtenues en terme de convergence.

1.4.1 Le principe du minimum basé sur le lagrangien \mathcal{L}_ε

La solution du problème d'hétérogénéité, décrit en première section de ce chapitre, peut être réécrite sous la forme du principe de minimum :

$$W(\mathbf{E}) = \inf_{\underline{v} \in \mathcal{K}(\mathbf{E})} \langle w(\underline{\varepsilon}(\underline{v}(\underline{x}))) \rangle \quad (1.68)$$

où $\mathcal{K}(\mathbf{E})$ est défini par l'ensemble des champs cinématiquement admissibles :

$$\mathcal{K}(\mathbf{E}) = \{\underline{v}(\underline{x}) = \mathbf{E} \cdot \underline{x} + \underline{v}^*(\underline{x}), \underline{v}^*(\underline{x}) \text{ périodique} \} \quad (1.69)$$

et $w(\underline{\varepsilon}(\underline{v}(\underline{x})))$ est l'énergie élastique définie par :

$$w(\underline{\varepsilon}(\underline{v}(\underline{x}))) = \frac{1}{2} \underline{\varepsilon}(\underline{v}(\underline{x})) : \mathbb{C}(\underline{x}) : \underline{\varepsilon}(\underline{v}(\underline{x})) \quad (1.70)$$

Le minimum (1.68) peut être réécrit sous la forme équivalente :

$$W(\mathbf{E}) = \inf_{\mathbf{e}} \left\{ \inf_{\underline{v}(\underline{x}) \in \mathcal{K}(\mathbf{E})} \langle w(\underline{\mathbf{e}}(\underline{x})) \rangle_V \right\} \quad (1.71)$$

avec la condition :

$$\underline{\varepsilon}(\underline{v}(\underline{x})) - \underline{\mathbf{e}}(\underline{x}) = 0 \quad \forall \underline{x} \in V \quad (1.72)$$

Il s'agit d'un problème de minimisation sous contrainte que l'on résoud en introduisant un multiplicateur de Lagrange $\underline{\lambda}(\underline{x})$. Le principe de minimum peut alors être réécrit sous la forme suivante :

$$W(\mathbf{E}) = \sup_{\underline{\lambda}} \inf_{\mathbf{e}} \inf_{\underline{v} \in \mathcal{K}(\mathbf{E})} \mathcal{L}_\varepsilon(\underline{\varepsilon}(\underline{v}(\underline{x})), \underline{\mathbf{e}}(\underline{x}), \underline{\lambda}(\underline{x})) \quad (1.73)$$

1. Les applications présentées sur la figure 1.6 on montré que la formulation en déformation introduite par [61] converge dans le cas des vides. La convergence du schéma (1.51) dans le cas des vides a été également observée par Brisard et Dormieux [21]

où $\mathcal{L}_\varepsilon(\underline{\varepsilon}(\underline{v}), \underline{e}, \underline{\lambda})$ est le Lagrangien augmenté défini par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\varepsilon(\underline{\varepsilon}(\underline{v}(\underline{x})), \underline{e}(\underline{x}), \underline{\lambda}(\underline{x})) = & \langle w(\underline{e}(\underline{x})) \rangle_V + \langle \underline{\lambda} : (\underline{\varepsilon}(\underline{v}(\underline{x})) - \underline{e}(\underline{x})) \rangle_V \\ & + \frac{1}{2} \langle (\underline{\varepsilon}(\underline{v}(\underline{x})) - \underline{e}(\underline{x})) : \mathbb{C}^0 : (\underline{\varepsilon}(\underline{v}(\underline{x})) - \underline{e}(\underline{x})) \rangle_V \end{aligned} \quad (1.74)$$

Dans l'expression donnée ci-dessus, le deuxième terme à droite de l'égalité correspond à la partie Lagrangienne, le troisième terme, à la partie augmentée. Ce dernier fait intervenir le module de rigidité \mathbb{C}^0 du milieu de référence. Le problème défini par les équations (1.73), (1.74) peut être résolu en utilisant l'algorithme d'Uzawa (cf. Michel et al. [57], voir également [39] et [53]).

1.4.2 L'algorithme itératif

Notons tout d'abord que la minimisation de $\mathcal{L}_\varepsilon(\underline{\varepsilon}(\underline{v}(\underline{x})), \underline{e}(\underline{x}), \underline{\lambda}(\underline{x}))$ par rapport à $\underline{v} \in \mathcal{K}(\mathbf{E})$ fait intervenir le tenseur de Green pour les déformations $\mathbf{\Gamma}^0(\underline{\xi})$. En effet, l'étude des variations de $\mathcal{L}_\varepsilon(\underline{\varepsilon}(\underline{v}(\underline{x})), \underline{e}(\underline{x}), \underline{\lambda}(\underline{x}))$ par rapport à $\underline{v} \in \mathcal{K}(\mathbf{E})$ donne :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_\varepsilon(\underline{\varepsilon}(\underline{v}(\underline{x})), \underline{e}(\underline{x}), \underline{\lambda}(\underline{x})) = & \left[\underline{\lambda}(\underline{x}) + \mathbb{C}^0 : (\underline{\varepsilon}(\underline{v}(\underline{x})) - \underline{e}(\underline{x})) \right] : (\delta \underline{v}(\underline{x}) \otimes \underline{n}) \rangle_{\partial V} \\ & - \langle \text{div} \left[\underline{\lambda}(\underline{x}) + \mathbb{C}^0 : (\underline{\varepsilon}(\underline{v}(\underline{x})) - \underline{e}(\underline{x})) \right] \cdot \delta \underline{v}(\underline{x}) \rangle_V \end{aligned} \quad (1.75)$$

Sous sa forme forte, le minimum de $\mathcal{L}_\varepsilon(\underline{\varepsilon}(\underline{v}(\underline{x})), \underline{e}(\underline{x}), \underline{\lambda}(\underline{x}))$ par rapport à $\underline{v} \in \mathcal{K}(\mathbf{E})$ pour tous champs périodiques $\underline{e}(\underline{\xi}), \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}), \underline{\lambda}(\underline{\xi})$ se traduit par : (i) une condition d'équilibre pour $\underline{\lambda}(\underline{\xi}) + \mathbb{C}^0 : (\underline{\varepsilon}(\underline{\xi}) - \underline{e}(\underline{\xi}))$, (ii) une condition de compatibilité pour $\underline{\varepsilon}(\underline{\xi})$, (iii) une condition de moyenne imposée pour $\underline{\varepsilon}(\underline{x})$, c'est à dire $\underline{\varepsilon}(\underline{\xi} = 0) = \mathbf{E}$. En résumé, on a :

$$\begin{cases} \mathbb{P}(\underline{\xi}) : \left[\underline{\lambda}(\underline{\xi}) + \mathbb{C}^0 : (\underline{\varepsilon}(\underline{\xi}) - \underline{e}(\underline{\xi})) \right] = 0 & \forall \underline{\xi} \neq 0 \\ \mathbb{Q}(\underline{\xi}) : \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}) = 0 & \forall \underline{\xi} \neq 0 \\ \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}) = \mathbf{E} & \underline{\xi} = 0 \end{cases} \quad (1.76)$$

Ce problème est identique à (1.28) dont la solution est (1.29). La solution de (1.76) est :

$$\begin{aligned} \forall \underline{\xi} \neq 0 : \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}) &= -\mathbf{\Gamma}^0(\underline{\xi}) : \left[\underline{\lambda}(\underline{\xi}) - \mathbb{C}^0 : \underline{e}(\underline{\xi}) \right] \\ \text{pour } \underline{\xi} = 0 : \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}) &= \mathbf{E} \end{aligned} \quad (1.77)$$

L'algorithme de résolution de (1.73) avec (1.74), est basée sur l'algorithme d'Uzawa et comporte trois étapes. A une étape donnée, i , on suppose que $\underline{e}^i(\underline{x})$ et $\underline{\lambda}^i(\underline{x})$ sont connus.

- La première étape consiste à calculer $\underline{\varepsilon}^i(\underline{\xi})$ à partir de (1.77) :

$$\begin{aligned} \forall \underline{\xi} \neq 0 : \underline{\varepsilon}^{i+1}(\underline{\xi}) &= -\mathbf{\Gamma}^0(\underline{\xi}) : \left[\underline{\lambda}^i(\underline{\xi}) - \mathbb{C}^0 : \underline{e}^i(\underline{\xi}) \right] \\ \text{pour } \underline{\xi} = 0 : \underline{\varepsilon}^{i+1}(\underline{\xi}) &= \mathbf{E} \end{aligned} \quad (1.78)$$

- A la seconde étape on recherche le minimum de $\mathcal{L}_\varepsilon(\underline{\varepsilon}^{i+1}, \underline{e}^{i+1}, \underline{\lambda}^i)$ par rapport à $\underline{e}^{i+1}(\underline{x})$:

$$\underline{e}^{i+1}(\underline{x}) = \left[\mathbb{C}(\underline{x}) + \mathbb{C}^0 \right]^{-1} : \left[\mathbb{C}^0 : \underline{\varepsilon}^{i+1}(\underline{x}) + \underline{\lambda}^i(\underline{x}) \right] \quad (1.79)$$

- La dernière étape consiste à mettre à jour la valeur de $\lambda^i(\underline{x})$:

$$\lambda^{i+1}(\underline{x}) = \lambda^i(\underline{x}) + \mathbb{C}^0 : (\epsilon^{i+1}(\underline{x}) - e^{i+1}(\underline{x})) \quad (1.80)$$

Les premiers termes de la série sont choisis de la manière suivante :

$$e^1(\underline{x}) = \mathbf{E}, \quad \lambda^1(\underline{x}) = 0 \quad (1.81)$$

Le schéma itératif est résumé dans le tableau donné ci dessous :

Etape i=1 :	$e^1(\underline{x}_n) = \mathbf{E}$ et $\lambda^1(\underline{x}_n) = 0$	
Etape i :	$e^i(\underline{x}_n)$ et $\lambda^i(\underline{x}_n)$ sont connus	
	$\tau^i(\underline{x}_n) = \lambda^i(\underline{x}_n) - \mathbb{C}^0 : e^i(\underline{x}_n)$	
	$\tau^i(\underline{\xi}_n) = \mathcal{F}(\tau^i(\underline{x}_n))$	
	$\forall \underline{\xi}_n \neq 0 : \epsilon^{i+1}(\underline{\xi}_n) = -\Gamma^0(\underline{\xi}_n) : \tau^i(\underline{\xi}_n), \epsilon^{i+1}(0) = \mathbf{E}$	(1.82)
	$\epsilon^{i+1}(\underline{x}_n) = \mathcal{F}^{-1}(\epsilon^{i+1}(\underline{\xi}_n))$	
	$e^{i+1}(\underline{x}_n) = [\mathbb{C}(\underline{x}_n) + \mathbb{C}^0]^{-1} : [\mathbb{C}^0 : \epsilon^{i+1}(\underline{x}_n) + \lambda^i(\underline{x}_n)]$	
	$\lambda^{i+1}(\underline{x}_n) = \lambda^i(\underline{x}_n) + \mathbb{C}^0 : (\epsilon^{i+1}(\underline{x}_n) - e^{i+1}(\underline{x}_n))$	
	test de convergence	

Le critère de convergence utilisé dans [57] est :

$$\max \left(\frac{\|\epsilon^i(\underline{x}_n) - e^i(\underline{x}_n)\|}{\|\mathbf{E}\|}, \frac{\|\lambda^i(\underline{x}_n) - \mathbb{C}(\underline{x}_n) : \epsilon^i(\underline{x}_n)\|}{\|\mathbb{C}(\underline{x}_n) : \mathbf{E}\|} \right) \leq \epsilon \quad (1.83)$$

Comme indiqué par les auteurs eux-même [57], la question relative au choix du milieu de référence, pour le schéma itératif (1.82), est un peu plus délicate que dans le cas du schéma classique (1.51). Essentiellement parce qu'il n'existe pas de résultats théoriques, similaires à (1.53), quant à la convergence du schéma (1.82). Dans les applications présentées ci-dessous, nous avons choisi pour le milieu de référence la valeur $\mu_0 = \mu_M$, qui permet d'obtenir des résultats satisfaisants en ce qui concerne la vitesse de convergence. On peut alors vérifier qu'à convergence du schéma itératif, $\lambda^i(\underline{\xi})$ vérifie la condition d'équilibre et n'est autre que le champ des contrainte microscopique. La contrainte macroscopique est donc obtenue par $\Sigma = \lambda^i(\underline{\xi} = 0)$. Comme auparavant, on choisit $\epsilon = 10^{-3}$.

On se propose d'examiner la convergence du schéma itératif basé sur le Lagrangien augmenté et sur le potentiel des déformations. On considère toujours la cellule élémentaire représentée par la figure 1.3 avec $a = 0.4b$, le nombre de vecteurs d'ondes considéré pour les applications est $N = 64$.

Sur la figure 1.8 on représente le nombre d'itérations à convergence en fonction du contraste $c = \mu_I/\mu_M$ pour le schéma de base (1.51) et le schéma itératif (1.82) basé sur l'approche Lagrangienne.

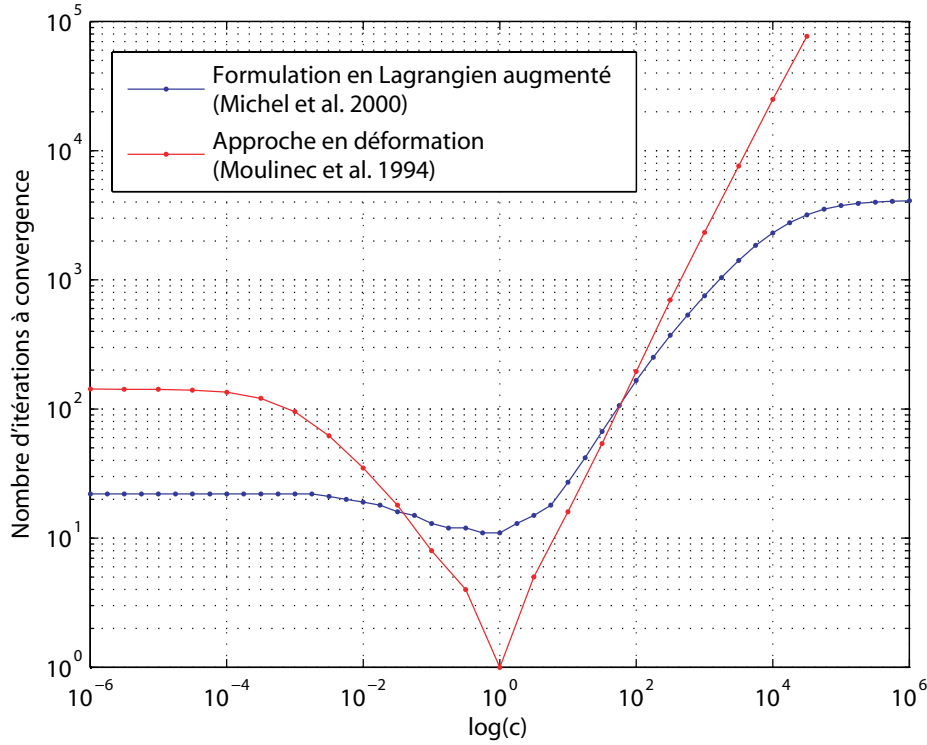


FIGURE 1.8 – Nombre d’itérations à convergence en fonction du contraste. Comparaison de l’approche classique et de la formulation Lagrangienne.

Hormis les cas où le contraste est proche de 1, on observe que le schéma itératif (1.82) améliore significativement le schéma de base (1.51). En particulier on observe que le cas des cavités et des inclusions rigides peuvent être traités par la même méthode². Toutefois on observe que le cas de l’inclusion rigide nécessite un plus grand nombre d’itérations que le cas des vides.

Contrairement au schéma de base (1.51) la solution exacte n’est pas retrouvée dès la première itération avec le schéma (1.82) dans le cas d’un milieu homogène. Ceci s’explique par le fait que dans le schéma de base (1.51), le premier terme injecté est défini par $\boldsymbol{\varepsilon}^1(\underline{x}) = \mathbf{E}$ et $\boldsymbol{\sigma}^1(\underline{x}) = \mathbb{C}(\underline{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}^0(\underline{x}) = \mathbb{C}^M : \mathbf{E}$ qui est déjà la solution du problème. Dans le schéma (1.82), le premier terme injecté n’est pas la solution du problème. Plusieurs itérations sont donc nécessaires afin d’obtenir $\boldsymbol{\lambda}^i(\underline{x}) = \mathbb{C}^M : \mathbf{E}$. Afin d’améliorer la convergence pour des valeurs du contraste proche de 1 on pourrait être tenté de remplacer $\boldsymbol{\lambda}^i(\underline{x}) = 0$ par $\boldsymbol{\lambda}^i(\underline{x}) = \mathbb{C}(\underline{x}) : \mathbf{E}$ comme pour le schéma de base (1.51). Néanmoins pour le cas de l’inclusion rigide, cela revient à injecter dans le schéma itératif la valeur $\boldsymbol{\lambda}^i(\underline{x}) = +\infty$ pour $\underline{x} \in V_I$ ce qui a pour conséquence, bien sûr, de perdre la convergence du schéma.

2. Bien que le schéma Lagrangien basé sur le potentiel des déformations ait été introduit pour traiter le cas des vides, la convergence de ce schéma pour les contrastes infinis a été observé plus tard dans [63]

1.4.3 Autres formulations basées sur un Lagrangien augmenté

La section précédente s'est attaché à décrire une formulation basée sur le Lagrangien augmenté pour résoudre le problème d'inhomogénéité. Cette formulation est basée sur le Lagrangien \mathcal{L}_ε qui utilise le potentiel des déformations $w(\varepsilon)$ et un algorithme itératif basé sur un schéma en déformation utilisant la fonction de Green $\mathbf{\Gamma}^0(\xi)$. D'autres formulations sont possibles. Entre autre, Michel et al. [57] ont proposé un algorithme itératif basé sur le Lagrangien $\mathcal{L}_\varepsilon^*$ utilisant le potentiel des contraintes $w^*(\sigma)$. Le principe de minimisation considéré peut être résumé par les équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} W^*(\Sigma) = \sup_{\lambda} \inf_{s} \inf_{\sigma \in \mathcal{S}(\Sigma)} \mathcal{L}_\varepsilon^*(\sigma(\underline{x}), s(\underline{x}), \lambda(\underline{x})) \\ \mathcal{L}_\varepsilon^*(\sigma(\underline{x}), s(\underline{x}), \lambda(\underline{x})) = \langle w^*(s(\underline{x})) \rangle_V + \langle \lambda(\underline{x}) : (\sigma(\underline{x}) - s(\underline{x})) \rangle_V \\ \quad + \frac{1}{2} \langle (\sigma(\underline{x}) - s(\underline{x})) : \mathbb{S}^0 : (\sigma(\underline{x}) - s(\underline{x})) \rangle_V \\ w^*(s(\underline{x})) = \frac{1}{2} s(\underline{x}) : \mathbb{S}(\underline{x}) : s(\underline{x}) \\ \mathcal{S}(\Sigma) = \{ \sigma(\underline{x}), \langle \sigma(\underline{x}) \rangle_V = \Sigma, \text{div}(\sigma(\underline{x})) = 0, \sigma(\underline{x}) \cdot \underline{n} \text{ antipériodique} \} \end{array} \right. \quad (1.84)$$

Le schéma itératif, basé sur l'algorithme d'Uzawa, est le suivant (voir [57] pour plus de détails) :

$$\begin{array}{ll} \text{Etape } i=1 : & s^1 = 0 \text{ et } \lambda^1 = 0 \\ \text{Etape } i : & s^i(\underline{x}_n) \text{ et } \lambda^i(\underline{x}_n) \text{ sont connus} \\ & \tau^i(\underline{x}_n) = s^i(\underline{x}_n) - \mathbb{C}^0 : \lambda^i(\underline{x}_n) \\ & \tau^i(\xi_n) = \mathcal{F}(\tau^i(\underline{x}_n)) \\ & \varepsilon^{i+1}(\xi_n) = -\mathbf{\Gamma}^0(\xi_n) : \tau^i(\xi_n), \quad \varepsilon^{i+1}(\underline{x}_n) = \mathbf{E} \\ & \varepsilon^{i+1}(\underline{x}_n) = \mathcal{F}^{-1}(\varepsilon^{i+1}(\xi_n)) \\ & \sigma^{i+1}(\underline{x}_n) = \mathbb{C}^0 : \varepsilon^{i+1}(\underline{x}_n) + \tau^i(\underline{x}_n) \\ & s^{i+1}(\underline{x}_n) = (\mathbb{S}(\underline{x}_n) + \mathbb{S}^0)^{-1} : (\lambda^i(\underline{x}_n) + \mathbb{S}^0 : \sigma^{i+1}(\underline{x}_n)) \\ & \lambda^{i+1}(\underline{x}_n) = \lambda^i(\underline{x}_n) + \mathbb{S}^0 : (\sigma^{i+1}(\underline{x}_n) - s^{i+1}(\underline{x}_n)) \\ & \text{test de convergence} \end{array} \quad (1.85)$$

Le processus d'itératif est stoppé quand :

$$\max \left(\frac{\|\sigma^i(\underline{x}_n) - s^i(\underline{x}_n)\|}{\|\Sigma\|}, \frac{\|\lambda^i(\underline{x}_n) - \mathbb{S}(\underline{x}_n) : \sigma^i\|}{\|\mathbb{S}(\underline{x}_n) : \Sigma\|} \right) \leq \epsilon \quad (1.86)$$

où ϵ est choisi égal à 10^{-3} . On reprend le problème de composite élastique traité sur la figure 1.8 et on compare les deux approches Lagrangiennes (1.82) et (1.85) sur la figure 1.9. Les résultats ont été obtenus en choisissant pour module élastique du milieu de référence la valeur $\mu_0 = \mu_M$.

On observe que le schéma itératif (1.85) converge pour toutes les valeurs du contraste c . On

note également que la convergence du schéma itératif basé sur le Lagrangien $\mathcal{L}_\varepsilon^*$ converge plus rapidement que la méthode basée sur le Lagrangien \mathcal{L}_ε pour les grandes valeurs de c . Inversement, c'est la méthode basée sur le Lagrangien \mathcal{L}_ε qui converge plus rapidement lorsque des faibles valeurs du contraste sont considérées.

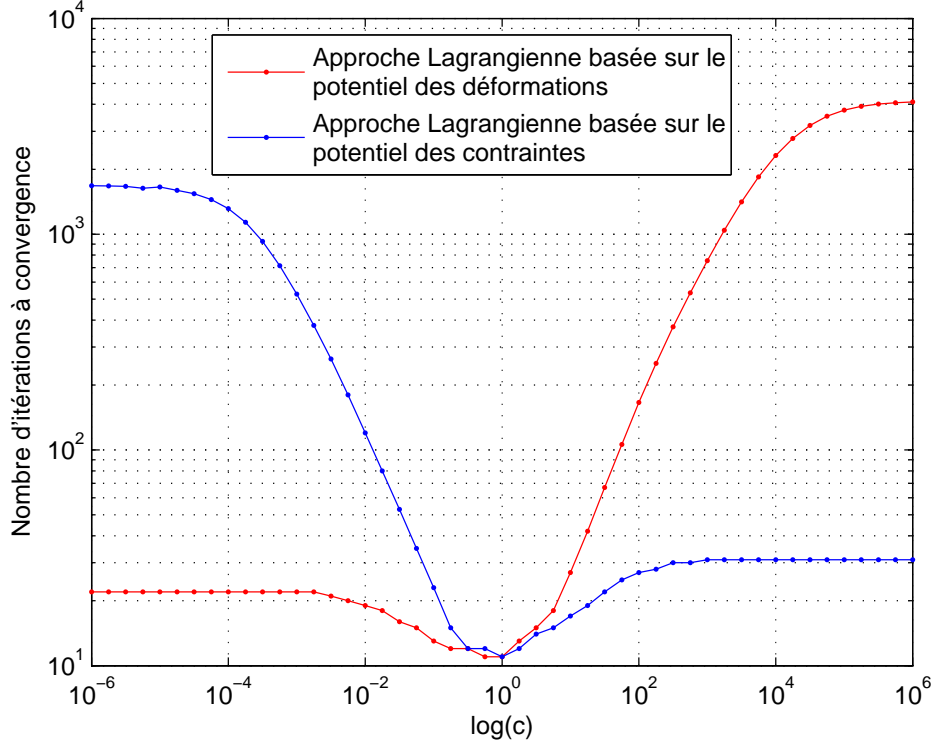


FIGURE 1.9 – Nombre d'itérations à convergence en fonction du contraste. Comparaison des approches Lagrangiennes, basées sur un potentiel des déformation ou des contraintes.

Des formulations Lagrangiennes basées sur un schéma itératif utilisant le tenseur de Green associé au contrainte $\Delta^0(\underline{\xi})$ peuvent également être formulées. Ces approches sont détaillées en annexe C.

1.5 Conclusion

Dans ce premier chapitre nous avons présenté les méthodes de résolutions basées sur la Transformée de Fourier Rapide pour la déterminations des propriétés effectives des composites élastiques. Deux types de méthodes sont décrites dans ce chapitre : les approches classiques formulées en déformation ou en contrainte et les approches basées sur un Lagrangien augmenté.

Les approches classiques reposent sur un développement en série de Neumann pour la résolution de l'équation intégrale de Lippmann-Schwinger du problème d'inhomogénéité. Il a été montré que la vitesse de convergence de l'approche en déformation, initialement

introduite dans [61], peut être améliorée en utilisant une description exacte du tenseur d'élasticité dans le domaine de Fourier à l'aide des fonctions de forme.

D'autre part on a montré que la méthode formulée en déformation est mieux adaptée pour traiter les cas des faibles contrastes (inclusions plus souples que la matrice). En outre, la formulation en contrainte ne converge pas dans le cas des vides. Toutefois l'approche en contrainte est mieux adaptée que l'approche en déformation dans le cas des forts contrastes. En particulier, le cas des inclusions rigides ne peut pas être traité par l'approche en déformation.

Dans la dernière partie du chapitre, nous avons présenté les méthodes basées sur le Lagrangien augmenté introduites dans [57]. Contrairement aux approches classiques formulées en déformation ou en contrainte, on montre que les "méthodes Lagrangiennes" convergent quelle que soit la valeur du contraste.

Chapitre 2

Une approche numérique à deux échelles pour le comportement des composites non linéaires

On présente une approche numérique à deux échelles pour le comportement effectif des composites dont les phases sont régies par une loi non linéaire de type puissance. Cette approche repose sur une représentation discrète du potentiel des déformations macroscopique et sur des techniques d'interpolation introduites récemment par Yvonnet et al. [86]. Lorsque les phases constitutives du milieu hétérogène sont régies par une loi de comportement non linéaire, la forme de la loi de comportement macroscopique n'est généralement pas connue. Ceci constitue une des difficultés majeures de l'homogénéisation dans le contexte non linéaire. L'approche numérique à deux échelles proposée dans [86] permet de traiter une large classe de problèmes d'homogénéisation non linéaire. Le principe de la méthode peut être résumé de la manière suivante :

- Le potentiel macroscopique est discrétisé dans l'espace des chargements macroscopiques, en l'occurrence l'espace des déformations macroscopiques (qui se prête mieux aux calculs éléments finis d'une structure). Les valeurs discrètes de ce potentiel sont obtenues en réalisant des calculs locaux, c'est à dire sur la cellule élémentaire du milieu hétérogène.
- Le potentiel, sous sa forme discrète, est ensuite interpolé afin de reconstruire la loi de comportement macroscopique. Les techniques d'interpolations utilisées dans [86] sont présentées dans ce chapitre. La première technique repose sur une interpolation par spline cubique dans un espace multidimensionnel. La seconde approche, moins coûteuse en temps de calcul et en mémoire, repose sur une technique de séparation des variables.
- La loi de comportement obtenue par interpolation peut être ensuite implémentée dans un code éléments finis en vue du calcul de structure.

Dans l'approche développée dans [86] la résolution des problèmes non linéaires posés à la cellule élémentaire est effectuée à l'aide de calculs par la méthode des éléments finis. En vue de l'interpolation du potentiel macroscopique, un grand nombre de calculs locaux sont nécessaires. Lorsque la cellule de base est géométriquement complexe, l'utilisation de la méthode des éléments finis à l'échelle locale peut s'avérer pénalisante pour la mise en

oeuvre de la méthode. Ici, on propose de résoudre les problèmes locaux par la méthode basée sur la TFR.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante : dans une première partie on présente les microstructures étudiées ainsi que méthode de résolution basée sur la TFR. Deux types de microstructures sont considérées, la première correspondant à une répartition aléatoire de fibres, la seconde est une image pixélisée issue de la Tomographie. Dans la seconde partie, on décrit les techniques d'interpolation. Enfin dans la dernière partie on présente une application au problème de poutre en flexion.

2.1 Une approche basée sur la TFR pour la résolution du problème local

2.1.1 Homogénéisation des milieux périodiques en loi puissance

On considère un milieu périodique constitué de plusieurs phases, notées α , chacune définie dans un volume V_α et on note par $f_\alpha = V_\alpha/V$ la fraction volumique. Les phases constitutives sont régies par un comportement non linéaire en loi puissance. La relation contrainte déformation s'écrit, en tout point \underline{x} appartenant à la cellule élémentaire :

$$\boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}), \underline{x}) \quad (2.1)$$

Où $w(\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}), \underline{x})$ est le potentiel des déformations défini par :

$$w(\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}), \underline{x}) = \sum_{\alpha} I_{\alpha}(\underline{x}) w_{\alpha}(\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x})) \quad (2.2)$$

Les $I_{\alpha}(\underline{x})$ sont les fonctions caractéristiques des phases, introduites au premier chapitre (c.f. équation (1.9)). Les potentiels $w_{\alpha}(\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}))$ sont de la forme :

$$w_{\alpha}(\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x})) = \frac{9}{2} k_{\alpha} \varepsilon_m^2(\underline{x}) + \frac{\sigma_{0,\alpha} \varepsilon_{0,\alpha}}{m_{\alpha} + 1} \left(\frac{\varepsilon_{eq}(\underline{x})}{\varepsilon_0} \right)^{m_{\alpha}+1} \quad (2.3)$$

où ε_m est la déformation moyenne :

$$\varepsilon_m(\underline{x}) = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x})) \quad (2.4)$$

ε_{eq} est la déformation équivalente au sens de Von Mises :

$$\varepsilon_{eq}(\underline{x}) = \left(\frac{2}{3} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{x}) : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{x}) \right)^{1/2} \quad (2.5)$$

$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{x})$ est la partie déviatorique du champ de déformation, $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{x}) = \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) - \varepsilon_m(\underline{x}) \mathbf{I}$. Les exposants m_{α} sont compris dans l'intervalle $[0, 1]$. Le cas $n_{\alpha} = m_{\alpha} = 1$ correspond à l'élasticité, le cas $m_{\alpha} = 0$ et donc $n_{\alpha} = +\infty$ correspond à un matériau rigide parfaitement

plastique de contrainte seuil $\sigma_{0,\alpha}$.

La relation contrainte déformation dans la phase α est donc donnée par :

$$\boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = 3k_\alpha \varepsilon_m(\underline{x}) \mathbf{I} + \frac{2\sigma_{0,\alpha}}{3\varepsilon_{0,\alpha}} \left(\frac{\varepsilon_{eq}(\underline{x})}{\varepsilon_{0,\alpha}} \right)^{m_\alpha-1} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{x}), \quad \forall \underline{x} \in V_\alpha \quad (2.6)$$

On considère des conditions de déformation macroscopique imposées à la cellule élémentaire. Le champ de déplacement est alors donné par :

$$\underline{u}(\underline{x}) = \mathbf{E}.\underline{x} + \underline{u}^*(\underline{x}) \quad (2.7)$$

où le champ de déplacement $\underline{u}^*(\underline{x})$ est périodique. Le problème étudié est donc défini par :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) = \frac{1}{2}(\nabla \underline{u}(\underline{x}) + \nabla^t \underline{u}(\underline{x})) \quad \forall \underline{x} \in V \\ \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = \mathbb{C}(\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}), \underline{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in V \\ \text{div}(\boldsymbol{\sigma}(\underline{x})) = 0 \quad \forall \underline{x} \in V \\ \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}).\underline{n} \text{ antipériodique} \\ \underline{u}(\underline{x}) - \mathbf{E}.\underline{x} \text{ périodique} \end{cases} \quad (2.8)$$

avec :

$$\mathbb{C}(\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}), \underline{x}) = \sum_{\alpha} \left[3k_\alpha \mathbb{J} + \frac{2\sigma_{0,\alpha}}{3\varepsilon_{0,\alpha}} \left(\frac{\varepsilon_{eq}(\underline{x})}{\varepsilon_{0,\alpha}} \right)^{m_\alpha-1} \mathbb{K} \right] I_\alpha(\underline{x}) \quad (2.9)$$

Pour un état de déformation macroscopique imposé \mathbf{E} , le potentiel effectif du milieu périodique est défini par :

$$W(\mathbf{E}) = \inf_{\underline{v} \in \mathcal{K}(\mathbf{E})} \langle w(\underline{x}, \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{v}(\underline{x}))) \rangle_V \quad (2.10)$$

où $\mathcal{K}(\mathbf{E})$ définit l'ensemble des champs cinématiquement admissibles :

$$\mathcal{K}(\mathbf{E}) = \{ \underline{v}(\underline{x}) = \mathbf{E}.\underline{x} + \underline{v}^*(\underline{x}), \underline{v}^*(\underline{x}) \text{ périodique} \} \quad (2.11)$$

La loi de comportement macroscopique est donnée par :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}}(\mathbf{E}) \quad (2.12)$$

Contrairement au cas de l'élasticité linéaire, pour lequel $W(\mathbf{E})$ est une fonction quadratique de \mathbf{E} , dans le cas non linéaire, la forme générale de ce potentiel n'est pas connue.

2.1.2 Résolution du problème local par un schéma itératif

Les méthodes de résolution basées sur la TFR présentées au premier chapitre peuvent être étendues au contexte non linéaire [62, 55] et notamment pour des matériaux en loi puissance [57]. En effet, la méthode de résolution basée sur la TFR repose sur la solution d'un problème d'inclusion, au sens d'Eshelby (cf. équations (1.29)). Or, le système

d'équations (2.8) peut également se ramener à un problème d'inclusion. Pour cela on introduit un milieu de référence de raideur \mathbb{C}^0 et le champ de polarisation $\boldsymbol{\tau}(\underline{x})$ défini par :

$$\boldsymbol{\tau}(\underline{x}) = \left[\mathbb{C}(\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}), \underline{x}) - \mathbb{C}^0 \right] : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) \quad (2.13)$$

Le problème d'inhomogénéité (2.8) peut s'écrire sous la forme d'une équation de type Lippmann-Schwinger en injectant (2.13) dans (1.29) et peut être résolu en remplaçant $\mathbb{C}(\underline{x})$ par $\mathbb{C}(\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}), \underline{x})$ dans le schéma itératif (1.51). Ce schéma a été utilisé par [20, 13, 14] dans le contexte de l'élastoplasticité. Néanmoins, le schéma itératif ne converge pas dans le cas d'un matériau régi par une loi en puissance [55]. La raison est que le tenseur $\mathbb{C}(\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}), \underline{x})$ peut prendre des valeurs très grandes lorsque $\varepsilon_{eq}(\underline{x}) < \varepsilon_0$ et lorsque l'exposant m_α est proche de zéro (cas de la plasticité parfaite). Cette situation est équivalente à celle d'un composite renforcé par des inclusions rigides, pour laquelle le schéma de base diverge (cf. section 1.3.2).

Au premier chapitre nous avons présenté une formulation en contrainte qui permet de traiter le cas des contrastes infinis. L'extension de cette approche au contexte non linéaire consiste à remplacer dans le schéma (1.63) le tenseur de souplesse $\mathbb{S}(\underline{x})$ par le tenseur $\mathbb{S}(\boldsymbol{\sigma}(\underline{x}), \underline{x})$ défini par :

$$\mathbb{S}(\boldsymbol{\sigma}(\underline{x}), \underline{x}) = \sum_{\alpha} \left[\frac{1}{3k_{\alpha}} \mathbb{J} + \frac{3\varepsilon_{0,\alpha}}{2\sigma_{0,\alpha}} \left(\frac{\sigma_{eq}(\underline{x})}{\sigma_{0,\alpha}} \right)^{n_{\alpha}-1} \mathbb{K} \right] I_{\alpha}(\underline{x}) \quad (2.14)$$

Toutefois, lorsque des grandes valeurs de l'exposant n_{α} sont considérées et lorsque $\sigma_{eq}(\underline{x}) > \sigma_{0,\alpha}$ alors le tenseur de souplesse peut localement diverger. On est alors dans une situation comparable à celle des cavités pour laquelle le schéma en contrainte ne converge pas. En définitive, le cas d'un composite régi par une loi en puissance est comparable à un milieu élastique hétérogène avec un contraste pouvant prendre des valeurs infinies ou nulles d'un point à un autre. Un schéma classique ne permet pas de résoudre ce type de problème. L'utilisation d'un schéma basé sur la minimisation d'une Lagrangien augmenté, similaire à (1.85), est plus adapté pour les lois en puissance [57] (voir également [43]). La solution du problème est écrite sous la forme du principe de minimum :

$$W^*(\boldsymbol{\Sigma}) = \sup_{\boldsymbol{\lambda}} \inf_{\boldsymbol{s}} \inf_{\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}(\boldsymbol{\Sigma})} \mathcal{L}_{\varepsilon}^*(\boldsymbol{\sigma}(\underline{x}), \boldsymbol{s}(\underline{x}), \boldsymbol{\lambda}(\underline{x})) \quad (2.15)$$

Où $\mathcal{L}_{\varepsilon}^*(\boldsymbol{\sigma}(\underline{x}), \boldsymbol{s}(\underline{x}), \boldsymbol{\lambda}(\underline{x}))$ est le Lagrangien défini par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\varepsilon}^*(\boldsymbol{\sigma}(\underline{x}), \boldsymbol{s}(\underline{x}), \boldsymbol{\lambda}(\underline{x})) = & \langle w^*(\boldsymbol{s}(\underline{x})) \rangle_V + \langle \boldsymbol{\lambda}(\underline{x}) : (\boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) - \boldsymbol{s}(\underline{x})) \rangle_V \\ & + \frac{1}{2} \langle (\boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) - \boldsymbol{s}(\underline{x})) : \mathbb{S}^0 : (\boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) - \boldsymbol{s}(\underline{x})) \rangle_V \end{aligned} \quad (2.16)$$

où le potentiel des contraintes $w^*(\boldsymbol{\sigma}(\underline{x}), \underline{x})$ est donné par :

$$w^*(\boldsymbol{\sigma}(\underline{x}), \underline{x}) = \sum_{\alpha} I_{\alpha}(\underline{x}) w_{\alpha}^*(\boldsymbol{\sigma}(\underline{x})) \quad (2.17)$$

avec :

$$w_\alpha^*(\boldsymbol{\sigma}(\underline{x})) = \frac{1}{18k_\alpha} \sigma_m^2(\underline{x}) + \frac{\varepsilon_{0,\alpha} \sigma_{0,\alpha}}{n_\alpha + 1} \left(\frac{\sigma_{eq}(\underline{x})}{\sigma_0} \right)^{n_\alpha+1}, \quad \forall \underline{x} \in V_\alpha \quad (2.18)$$

dans laquelle σ_m est la contrainte moyenne :

$$\sigma_m(\underline{x}) = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}(\underline{x})) \quad (2.19)$$

σ_{eq} est la contrainte équivalente au sens de Von Mises, donnée par :

$$\sigma_{eq}(\underline{x}) = \left(\frac{3}{2} \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{x}) : \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{x}) \right)^{1/2} \quad (2.20)$$

avec $\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{x}) = \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) - \sigma_m(\underline{x}) \mathbf{I}$. Les exposants n_α sont liés aux exposants m_α par la relation $m_\alpha n_\alpha = 1$. L'exposant n_α est compris dans l'intervalle $[1, +\infty]$.

La minimisation est effectuée à l'aide d'un schéma itératif basé sur l'algorithme d'Uzawa et comporte trois étapes. On suppose qu'à l'étape i , $\mathbf{s}^i(\underline{x})$ et $\boldsymbol{\lambda}^i(\underline{x})$ sont connus.

- La première étape consiste à calculer $\boldsymbol{\varepsilon}^i(\underline{\xi})$ à partir de :

$$\begin{aligned} \forall \underline{\xi} \neq 0 : \boldsymbol{\varepsilon}^{i+1}(\underline{\xi}) &= -\boldsymbol{\Gamma}^0(\underline{\xi}) : \boldsymbol{\tau}^i(\underline{\xi}) \\ \text{pour } \underline{\xi} = 0 : \boldsymbol{\varepsilon}^{i+1}(\underline{\xi}) &= \mathbf{E} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Où $\boldsymbol{\tau}^i(\underline{x}) = \mathbf{s}^i(\underline{x}) - \mathbb{C}^0 : \boldsymbol{\lambda}^i(\underline{x})$.

- A la seconde étape on recherche le minimum de $\mathcal{L}_\varepsilon^*(\boldsymbol{\sigma}^{i+1}(\underline{x}), \mathbf{s}^{i+1}(\underline{x}), \boldsymbol{\lambda}^i(\underline{x}))$ par rapport à $\mathbf{s}^{i+1}(\underline{x})$:

$$\frac{\partial w^*}{\partial \mathbf{s}}(\mathbf{s}^{i+1}(\underline{x}), \underline{x}) + \mathbb{S}^0 : \mathbf{s}^{i+1}(\underline{x}) = \mathbb{S}^0 : \boldsymbol{\sigma}^{i+1}(\underline{x}) + \boldsymbol{\lambda}^i(\underline{x}) \quad (2.22)$$

- La dernière étape consiste à mettre à jour la valeur de $\boldsymbol{\lambda}^i(\underline{x})$:

$$\boldsymbol{\lambda}^{i+1}(\underline{x}) = \boldsymbol{\lambda}^i(\underline{x}) + \mathbb{S}^0 : (\boldsymbol{\sigma}^{i+1}(\underline{x}) - \mathbf{s}^{i+1}(\underline{x})) \quad (2.23)$$

Les deux premier termes de la série sont définis par $\mathbf{s}^1 = 0$ et $\boldsymbol{\lambda}^1 = 0$.

L'équation non linéaire pour (2.22) s'écrit, $\forall \underline{x} \in V_\alpha$:

$$\frac{1}{3k_\alpha} s_m^{i+1}(\underline{x}) \mathbf{I} + \frac{3}{2\sigma_0} \left(\frac{s_{eq}^{i+1}(\underline{x})}{\sigma_0} \right)^{n_\alpha-1} \bar{\mathbf{s}}^{i+1}(\underline{x}) + \mathbb{S}^0 : \mathbf{s}^{i+1}(\underline{x}) = \mathbb{S}^0 : \boldsymbol{\sigma}^{i+1}(\underline{x}) + \boldsymbol{\lambda}^i(\underline{x}) \quad (2.24)$$

Le tenseur de souplesse du milieu de référence est défini par $\mathbb{S}^0 = \frac{1}{3k_0} \mathbb{J} + \frac{1}{2\mu_0} \mathbb{K}$. On peut isoler la partie sphérique de la partie déviatorique dans (2.24), on a $\forall \underline{x} \in V_\alpha$:

$$\begin{cases} s_m^{i+1}(\underline{x}) = \left[1 + \frac{k_0}{k_\alpha} \right]^{-1} [\sigma_m^{i+1}(\underline{x}) + 3k_0 \lambda_m^i(\underline{x})] \\ \bar{\mathbf{s}}^{i+1}(\underline{x}) = \left[1 + \frac{3\mu_0}{\sigma_0} \left(\frac{s_{eq}^{i+1}(\underline{x})}{\sigma_0} \right)^{n_\alpha-1} \right]^{-1} [\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{i+1}(\underline{x}) + 2\mu_0 \bar{\boldsymbol{\lambda}}^i(\underline{x})] \end{cases} \quad (2.25)$$

Dans la seconde relation $s_{eq}^{i+1}(\underline{x})$ est obtenu en résolvant l'équation non linéaire pour $s_{eq}^{i+1}(\underline{x})$:

$$3\mu_0\varepsilon_0 \left(\frac{s_{eq}^{i+1}(\underline{x})}{\sigma_0} \right)^{n_\alpha} + s_{eq}^{i+1}(\underline{x}) = \left(\boldsymbol{\sigma}^{i+1}(\underline{x}) + 2\mu_0\boldsymbol{\lambda}^i(\underline{x}) \right)_{eq} \quad (2.26)$$

Cette équation est résolue en utilisant une méthode itérative de type Newton-Raphson. A la convergence le champ de contrainte macroscopique $\boldsymbol{\Sigma}$ et le potentiel des déformations macroscopiques sont donnés par :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \langle \boldsymbol{\sigma}^i(\underline{x}) \rangle_V, \quad W(\mathbf{E}) = \langle w(\boldsymbol{\varepsilon}^i(\underline{x}), \underline{x}) \rangle_V \quad (2.27)$$

Le critère de convergence utilisé dans [57] est donné par :

$$\max \left(\frac{\|\boldsymbol{\sigma}^i(\underline{x}) - \mathbf{s}^i(\underline{x})\|}{\|\boldsymbol{\Sigma}\|}, \frac{\|\boldsymbol{\lambda}^i(\underline{x}) - (\partial w^*/\partial \boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{\sigma}^i(\underline{x}), \underline{x})\|}{\|(\partial w^*/\partial \boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{\Sigma})\|} \right) \leq \epsilon \quad (2.28)$$

Où $\boldsymbol{\Sigma}$ est la contrainte macroscopique calculée à partir du champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}^i(\underline{x})$ à l'étape i . L'objectif principal étant de déterminer des grandeurs macroscopiques, un critère basé sur ce type de grandeur semble plus justifié. Nous avons donc choisi un critère défini par :

$$\max \left(\frac{|\boldsymbol{\Sigma}^{i+1} - \boldsymbol{\Sigma}^i|}{|\boldsymbol{\Sigma}^{i+1}|}, \frac{|W^{i+1}(\mathbf{E}) - W^i(\mathbf{E})|}{|W^{i+1}(\mathbf{E})|} \right) \leq \epsilon \quad (2.29)$$

Où $\boldsymbol{\Sigma}^i = \boldsymbol{\sigma}^i(\underline{\xi} = 0)$ et $W^i(\mathbf{E}) = (w(\boldsymbol{\varepsilon}))(\underline{\xi} = 0)$. La valeur de ϵ est choisie égale 10^{-3} .

De plus nous avons pu observer que le critère de convergence (2.29) permet de réduire significativement les temps de calcul. On se propose donc de comparer ces deux critères. On considère la microstructure constituée de fibres aléatoirement distribuées dans la cellule élémentaire et représentée par la figure 2.2. Le chargement imposé est défini par $E_{11} = -E_{22} = 0.005$ et $E_{12} = 0$. Les paramètres des matériaux sont définis dans le tableau 2.1 avec $n_M = 10$ et $c = 10$. Le nombre de vecteurs d'ondes est choisi égal à 256, ceci correspondant à une résolution de 512×512 .

La figure (2.1) représente l'erreur mesurée à l'aide du critère de convergence "local" (2.28) (en fait défini par des quantités locales) et le critère "macroscopique" (2.29) (en fait défini par des grandeurs macroscopiques). On observe que la valeur $\epsilon = 10^{-3}$ est évidemment atteinte plus rapidement pour le critère "macroscopique" (2.29). Ce gain en temps de calcul est important compte tenu du nombre de problèmes locaux que nous allons être amenés à résoudre.

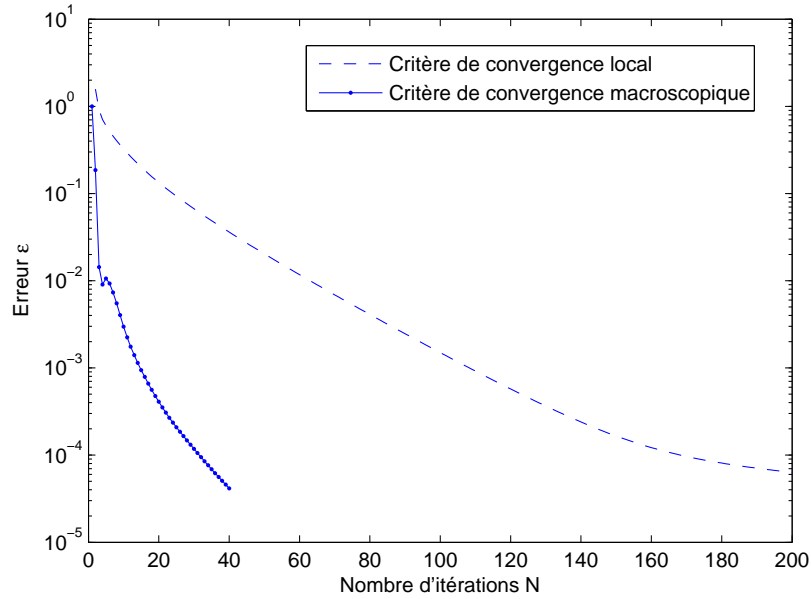


FIGURE 2.1 – Erreur ϵ en fonction du nombre d'itérations : comparaison des critères de convergence basés sur des grandeurs locales et macroscopiques.

2.1.3 Description des problèmes locaux

Deux types de microstructures sont considérées dans ce chapitre et sont représentées sur les figures 2.2 et 2.3.

- La première microstructure est définie par une cellule élémentaire, carrée de cotés $2b$, contenant 16 inclusions circulaires de rayons identiques $a = 0.1b$ définissant ainsi une fraction volumique de fibres $f_I = 0.1256$. Un tirage aléatoire à l'aide d'une loi uniforme avec une condition de non interpénétration des inclusions a été utilisé pour fixer la position des centres des cercles.
- La seconde microstructure est une image pixélisée obtenue par tomographie et définie par 150×124 pixels. Il s'agit d'une image d'un milieu biphasé de type matrice/inclusion (matrice en bleu et les inclusions en rouge). La fraction volumique des inclusions est donnée par $f_I = 0.1851$.

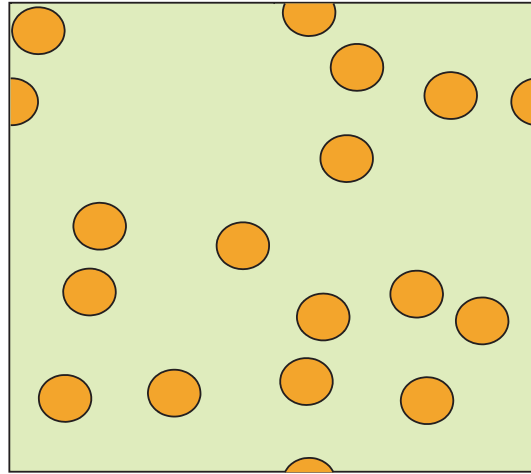


FIGURE 2.2 – Distribution aléatoire de fibres.

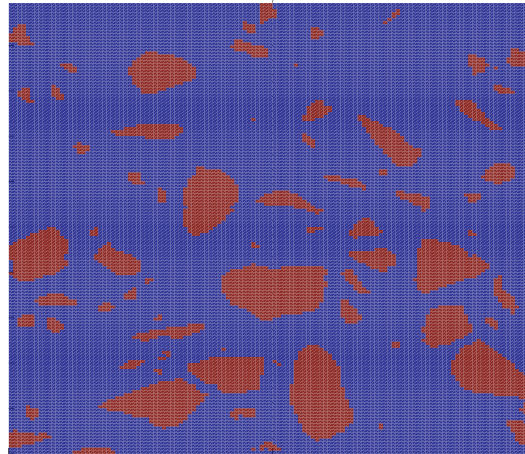


FIGURE 2.3 – Image issue de la Tomographie.

Pour chacun des cas décrits ci-dessus, le comportement des inclusions est régi par une loi élastique linéaire et l'on posera donc $n_I = m_I = 1$. On définit par $c = \mu_I/\mu_M$ le contraste entre les phases (les modules de compressibilité k_I et k_M étant choisis égaux). La

	k	σ_0	ε_0	n
matrice	20MPa	1MPa	1	n_M
inclusion	20MPa	cMPa	1	1

TABLE 2.1 – Paramètres des matériaux

méthode de résolution par la TFR a été mise en oeuvre avec les paramètres des matériaux définis dans le tableau 2.1. et pour diverses valeurs d'exposants ($n_M = 1, 2, 5, 10$) et de

contraste ($c = 2, 5, 10$). A titre d'illustration, on représente sur les figures (2.4) et (2.5) les cartes des valeurs de la contrainte équivalente, σ_{eq} , pour un contraste de 2 et des valeurs de l'exposant n_M choisies égales à 1, 2, 10. L'exemple correspondant à $n_M = 1$ est celui d'un composite élastique linéaire. Il a été choisi uniquement à titre de comparaison avec les cas non linéaires $n_M = 2$ et $n_M = 10$. Pour chacun des problèmes représentés sur les figures (2.4) et (2.5), le chargement imposé est défini par $E_{11} = -E_{22} = 0.005$ et $E_{12} = 0$. Pour le cas des fibres (2.4), le nombre de vecteurs d'ondes est choisi égal à 256 suivant les deux directions de l'espace. ceci correspondant à une résolution de 512×512 . Pour l'image issue de la tomographie (2.5), la résolution étant définie par 150×124 pixels, le nombre de vecteurs d'ondes est choisi égal à 75 dans la direction x_1 et 62 dans la direction x_2 . On observe, dans le cas linéaire ($n_M = 1$), que la contrainte équivalente est relativement homogène par phase. Seule l'hétérogénéité interphase est fortement marquée. Pour les cas non linéaires, $n_M = 2$ et $n_M = 10$, on observe une forte hétérogénéité de la contrainte équivalente dans la matrice. Notamment, lorsque $n_M = 10$, le comportement de la matrice se rapproche de celui d'un matériau rigide parfaitement plastique. Du fait de sa non linéarité, la matrice apparaît alors plus rigide que les inclusions.

2.2 Principe de construction du potentiel des déformations macroscopiques

Lorsque les phases constitutives du matériau composite sont régies par un comportement linéaire, le potentiel des déformations macroscopique $W(\mathbf{E})$ est une fonction quadratique de la déformation \mathbf{E} . On peut alors représenter ce potentiel à l'aide d'un tenseur d'élasticité homogénéisé faisant intervenir 21 coefficients indépendants.

Lorsque le comportement des phases est décrit par un comportement non linéaire, la forme générale du potentiel des déformations macroscopiques n'est pas connue. Une représentation numérique discrétisée de ce potentiel a été proposée par [86] en vue d'une implémentation dans un code de calcul par Elément Finis. Dans cette section on se propose de rappeler le principe de cette méthode, désignée sous l'acronyme "NEXP" (Numerically explicit potential).

2.2.1 Représentation discrète du potentiel des déformations macroscopiques

Bien que la méthode introduite dans [86] puisse s'appliquer aux problèmes tridimensionnels, pour des raisons de simplicité des écritures, on se restreint ici au contexte bidimensionnel. On considère donc un composite, hétérogène à l'échelle locale, dont les phases sont régies par une loi en puissance, et défini à l'échelle macroscopique par le potentiel $W(\mathbf{E})$. Ce potentiel est fonction des composantes de la déformation macroscopique, respectivement : $E_1 = E_{11}$, $E_2 = E_{22}$ et $E_6 = \sqrt{2}E_{12}$. Le potentiel $W(\mathbf{E}) = W(E_1, E_2, E_6)$ est donc une fonction définie sur l'espace vectoriel de dimension 3, $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_6)$.

Les composantes de la contrainte macroscopique et de la matrice de rigidité tangente, C_{ij} ,

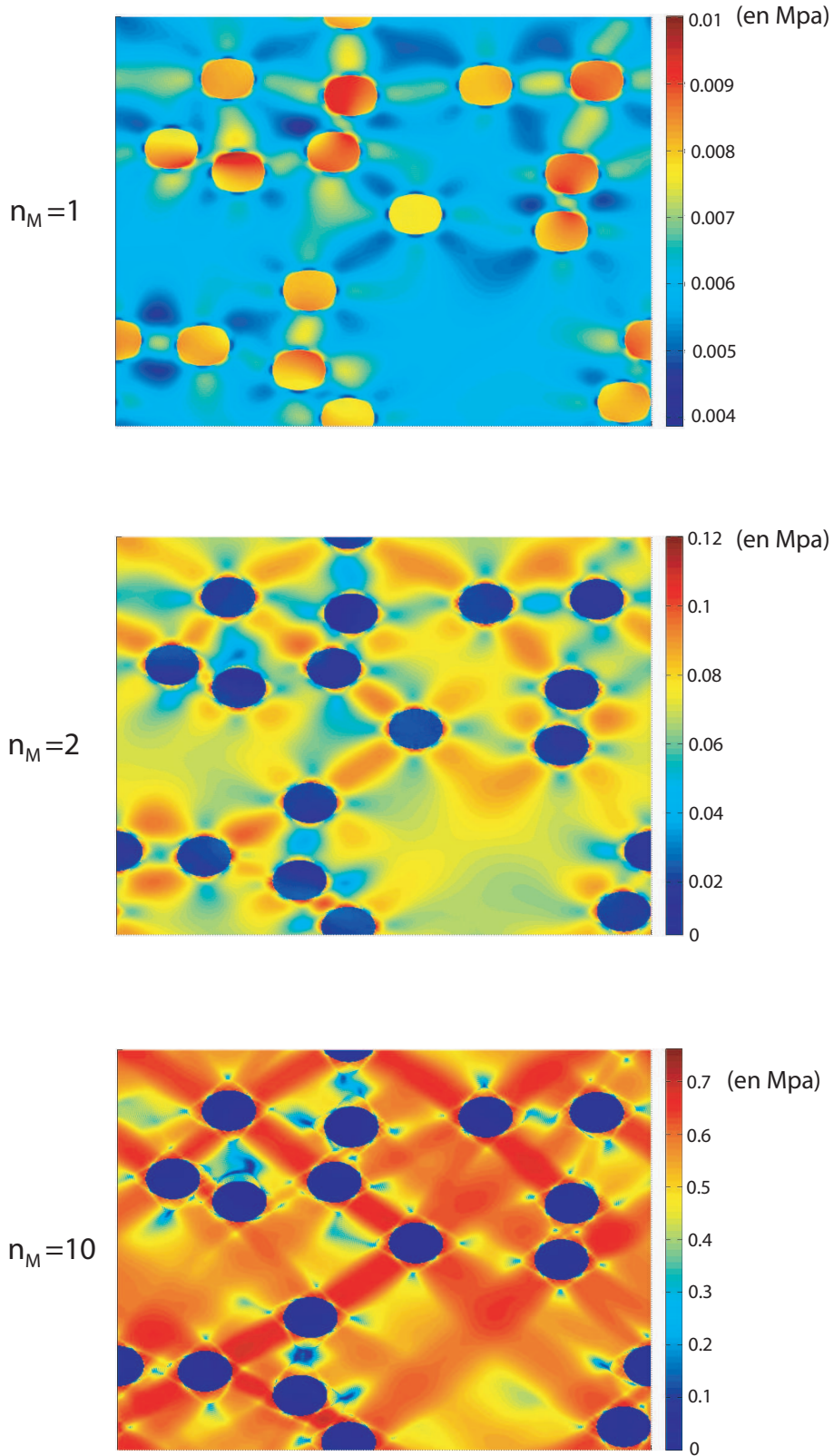


FIGURE 2.4 – Carte de la contrainte équivalente pour un contraste $c = 2$ et un exposant $n_M = 1, 2, 10$.

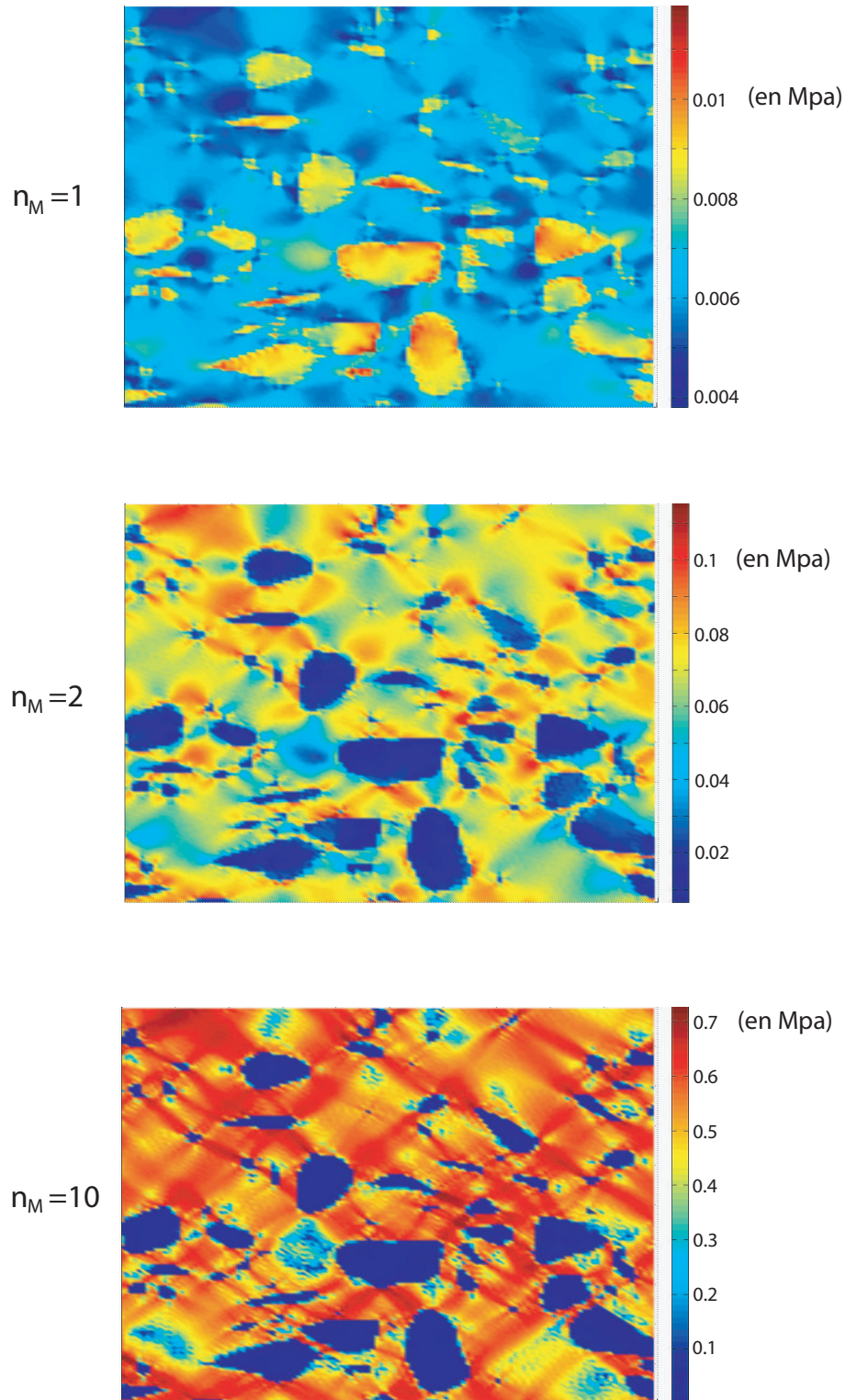


FIGURE 2.5 – Carte de la contrainte équivalente pour un contraste $c = 2$ et un exposant $n_M = 1, 2, 10$.

sont données par :

$$\begin{aligned}\Sigma_i &= \frac{\partial W}{\partial E_i}(E_1, E_2, E_6) \\ C_{ij} &= \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16}/\sqrt{2} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26}/\sqrt{2} \\ D_{16}/\sqrt{2} & D_{26}/\sqrt{2} & D_{66}/2 \end{pmatrix} \\ \text{avec : } D_{ij} &= \frac{\partial^2 W}{\partial E_i \partial E_j}(E_1, E_2, E_6), \quad i = 1, 2, 6\end{aligned}\tag{2.30}$$

Bien que potentiel $W(\mathbf{E})$ soit défini, en toute généralité, sur des intervalles non bornés, l'hypothèse de petites déformations suggère de borner l'intervalle de définition. Ainsi, les E_i pour $i = 1, 2, 6$ sont supposés varier sur les intervalles $\Delta_i = [E_i^{\min}, E_i^{\max}]$ où E_i^{\min} et E_i^{\max} sont respectivement choisis égaux à -5.10^{-3} et 5.10^{-3} pour tout $i = 1, 2, 6$. Le domaine $\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2 \times \Delta_6$ est discrétisé sur une grille régulière. Pour cela, on introduit l'ensemble de " $m+1$ " points : $\{\varphi_0^i, \varphi_1^i, \dots, \varphi_m^i\}$ tels que $E_i^{\min} = \varphi_0^i < \varphi_1^i < \dots < \varphi_m^i = E_i^{\max}$ et $\varphi_1^i - \varphi_0^i = \varphi_2^i - \varphi_1^i = \dots = \varphi_m^i - \varphi_{m-1}^i$. Le noeud de Δ est le point $(\varphi_{i_1}^1, \varphi_{i_2}^2, \varphi_{i_6}^6)$ avec $0 \leq i_\alpha \leq m$. On choisit un même nombre de points dans chacune des directions E_i . Le domaine Δ contient alors $(m+1)^3$ noeuds.

A chaque noeud $(\varphi_{i_1}^1, \varphi_{i_2}^2, \varphi_{i_6}^6)$ on note :

$$W_{[i_1, i_2, i_6]} = W(\varphi_{i_1}^1, \varphi_{i_2}^2, \varphi_{i_6}^6)\tag{2.31}$$

qui est la valeur du potentiel des déformations évalué au noeud $(\varphi_{i_1}^1, \varphi_{i_2}^2, \varphi_{i_6}^6)$. Les $W_{[i_1, i_2, i_6]}$ pour $(0 \leq i_\alpha \leq m)$ sont alors stockés dans une hypermatrice de dimension $(m+1) \times (m+1) \times (m+1)$ notée \mathbb{W} .

2.2.2 Interpolation multidimensionnelle par spline

L'interpolation du potentiel $W(\mathbf{E})$ doit être de classe C^2 , afin d'obtenir une représentation continue de l'opérateur tangent C_{ij} (cf. équation (2.30)). Une première méthode, proposée dans [86] consiste à interpoler le potentiel à l'aide de spline cubique. Cette technique est rappelée dans la section qui suit pour le cas unidimensionnel. Le cas multidimensionnel fait l'objet de la section 2.2.2.2.

2.2.2.1 Interpolation dans le cas unidimensionnel

On se propose de rappeler la technique classique d'interpolation dans le contexte unidimensionnel à l'aide de splines cubiques. La généralisation au contexte multidimensionnel est présenté dans la section qui suit. On considère donc un ensemble de points équidistants $\Delta = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ dans l'intervalle $[E^{\min}, E^{\max}]$ et on pose :

$$\varphi_i = E^{\min} + ih, \quad h = \frac{E^{\max} - E^{\min}}{m}, \quad i = 0, \dots, m\tag{2.32}$$

et W_0, W_1, \dots, W_m les valeurs du potentiel qui leurs sont associées. On note par $\mathcal{S}_3(\Delta)$ l'ensemble des fonctions cubiques par morceaux sur Δ et de classe C^2 sur $[E^{\min}, E^{\max}]$.

La fonction d'interpolation $\overline{W}(\varphi) \in \mathcal{S}_3(\Delta)$ s'écrit :

$$\overline{W}(\varphi) = \sum_{k=1}^{m+3} c_k g_k(\varphi) \quad (2.33)$$

où c_k sont les coefficients d'interpolation. Les $g_k(\varphi)$ pour $k = 1, \dots, m+3$ constituent une base de $\mathcal{S}_3(\Delta)$ et peuvent être choisis sous la forme :

$$g_k(\varphi) = \Phi\left(\frac{\varphi - E^{\min}}{h} - k + 2\right) \quad (2.34)$$

avec :

$$\Phi(x) = \begin{cases} (2 - |x|)^3 & 1 \leq |x| \leq 2 \\ 4 - 6|x|^2 + 3|x|^3 & |x| \leq 1 \\ 0 & \text{autre cas} \end{cases} \quad (2.35)$$

$\mathcal{S}_3(\Delta)$ étant un espace de dimension $m+3$, la fonction interpolée $\overline{W}(\varphi)$ est définie par $m+3$ coefficients à déterminer. Les conditions $\overline{W}(\varphi_i) = W_i$ pour $i = 0, \dots, m$ fournissent $m+1$ conditions. Ceci suggère que 2 conditions sont manquantes pour identifier l'ensemble des c_k dans (2.33). Plusieurs méthodes peuvent être appliquées. Par exemple on peut fournir deux conditions supplémentaires sur les dérivées aux extrémités $\varphi = \varphi_0$ et $\varphi = \varphi_m$:

$$\frac{d\overline{W}}{d\varphi}(\varphi_0) = \sum_{k=1}^{m+3} c_k g'_k(\varphi_0) = \frac{dW}{d\varphi}(\varphi_0) \quad (2.36)$$

$$\frac{d\overline{W}}{d\varphi}(\varphi_m) = \sum_{k=1}^{m+3} c_k g'_k(\varphi_m) = \frac{dW}{d\varphi}(\varphi_m) \quad (2.37)$$

Lorsque les dérivées de $W(\varphi)$ ne sont pas connues aux extrémités, on peut alors les estimer par un schéma aux différences finies. L'identification des coefficients c_k est effectuée en résolvant un système linéaire $A_{ij}c_j = b_i$ où A_{ij} sont les composantes d'une matrice tridiagonale.

2.2.2.2 Cas multidimensionnel

La méthode d'interpolation par spline se généralise facilement dans le cas multidimensionnel. Supposons que les $W_{[i_1, i_2, i_6]}$ soient connus. On cherche une interpolation de $W(\mathbf{E})$ de classe de classe C^2 , que l'on se propose de rechercher sous la forme $\overline{W} \in \mathcal{S} = \mathcal{S}_3(\Delta_1) \times \mathcal{S}_3(\Delta_2) \times \mathcal{S}_3(\Delta_6)$ et telle que :

$$\overline{W}(\varphi_{i_1}^1, \varphi_{i_2}^2, \varphi_{i_6}^6) = W_{[i_1, i_2, i_6]}, \quad 0 \leq i_\alpha \leq m \quad (2.38)$$

On définit par g_k^1, g_k^2, g_k^6 pour $k = 1, \dots, m+3$ les bases de $\mathcal{S}_3(\Delta_1), \mathcal{S}_3(\Delta_2), \mathcal{S}_3(\Delta_6)$, ainsi (g_k^1, g_k^2, g_k^6) fournit une base de \mathcal{S} . L'interpolation $\overline{W}(E_1, E_2, E_6)$ de $W(E_1, E_2, E_6)$ s'écrit :

$$\overline{W}(E_1, E_2, E_6) = \sum_{i_1=1}^{m+3} \sum_{i_2=1}^{m+3} \sum_{i_6=1}^{m+3} c_{[i_1, i_2, i_6]} \prod_j g_k^j(\varphi_j), \quad j = 1, 2, 6 \quad (2.39)$$

ou $g_k^j(\varphi_j)$ sont définis par (2.34). Les coefficients $c_{[i_1, i_2, i_6]}$ sont déterminés par les conditions d'interpolation (2.38) et des conditions sur les dérivées au bord de la grille. La relation contrainte-déformation est alors obtenue par :

$$\begin{aligned} \Sigma_k(E_1, E_2, E_6) &= \frac{\partial \bar{W}}{\partial \mathbf{E}_k}(E_1, E_2, E_6) \\ &= \sum_{i_1=1}^{m+3} \sum_{i_2=1}^{m+3} \sum_{i_6=1}^{m+3} c_{[i_1, i_2, i_6]} \left\{ \prod_{j \neq k} g_{i_j}^j(E_j) \right\} \frac{\partial g_{i_k}^k(E_k)}{\partial \mathbf{E}_k} \end{aligned} \quad (2.40)$$

Lorsque l'on applique cette technique d'interpolation par spline cubique pour des fonctions de trois variables sur des grilles relativement fines, le coût en calcul est raisonnable. Toutefois, pour des fonctions dépendant d'un plus grand nombre de variables, les 6 composantes du tenseur des déformations par exemple, l'utilisation de cette méthode d'interpolation peut se révéler trop coûteuse. Dans la section qui suit, on présente une méthode alternative, introduite par [86] dans le contexte de l'homogénéisation des milieux composites non linéaires.

2.2.3 Interpolation par séparation des variables

Dans la méthode d'interpolation par spline cubique, l'identification des coefficients $c_{[i_1, i_2, \dots]}$ conduit à la résolution d'un système linéaire qui peut être de très grande taille. Sur la base de travaux antérieurs sur l'interpolation des fonctions multidimensionnelles, Yvonnet et al. [86] ont proposé d'interpoler le potentiel des déformations macroscopiques par une méthode de séparation des variables. Comme nous allons le voir, cette approche permet de réduire significativement le nombre de coefficients à déterminer et donc les temps de calcul. L'hypermatrice \mathbb{W} est approchée par :

$$\mathbb{W} = \sum_{r=1}^R \underline{\phi}_1^r \otimes \underline{\phi}_2^r \otimes \underline{\phi}_6^r \quad (2.41)$$

Où R est un entier et les $\underline{\phi}_i^r$ pour $i = 1, 2, 6$ sont des vecteurs associés aux composantes macroscopiques E_i . Pour une valeur de R donnée, les vecteurs $\underline{\phi}_i^r$ sont déterminés en résolvant un problème des moindres carrés :

$$\phi_i^r = \min \left\| \mathbb{W} - \sum_{r=1}^R \underline{\phi}_1^r \otimes \underline{\phi}_2^r \otimes \underline{\phi}_6^r \right\|^2, \quad r = 1..R, \quad i = 1, 2, 6 \quad (2.42)$$

Où $\| \bullet \|$ est la norme de Frobenius. La valeur de R est augmentée jusqu'à atteindre la précision β souhaitée :

$$\left\| \mathbb{W} - \sum_{r=1}^R \underline{\phi}_1^r \otimes \underline{\phi}_2^r \otimes \underline{\phi}_6^r \right\|^2 \leq \beta \quad (2.43)$$

La résolution du problème non linéaire (2.42) est effectuée à l'aide de l'algorithme des moindres carrés alternés [24], [41], [88]. Une fois les $\underline{\phi}_i^r$ identifiés, on obtient une représentation de $W(E_1, E_2, E_6)$ sous la forme :

$$W(E_1, E_2, E_6) \simeq \overline{W}(E_1, E_2, E_6) = \sum_{r=1}^R \underline{\psi}_1^r(E_1) \underline{\psi}_2^r(E_2) \underline{\psi}_6^r(E_6) \quad (2.44)$$

Où les $\underline{\psi}_i^r(E_i)$ sont définis par :

$$\underline{\psi}_i^r(E_i) = \sum_{k=1}^n N_k(E_i) (\underline{\phi}_j^r)_k \quad (2.45)$$

Les N_k sont des fonctions d'interpolation unidimensionnelles de type spline cubique. La contrainte macroscopique est obtenue en remplaçant dans (2.30) le potentiel exact $W(E_1, E_2, E_6)$ par la fonction approchée $\overline{W}(E_1, E_2, E_6)$. On a alors :

$$\Sigma_k(E_1, E_2, E_6) = \sum_{r=1}^R \left(\prod_{j \neq k} \underline{\psi}_j^r(E_j) \frac{\partial \underline{\psi}_k^r(E_k)}{\partial E_k} \right) \quad (2.46)$$

2.2.4 Discussion

Pour chacune des méthodes présentées l'interpolation du potentiel nécessite donc de résoudre $(1 + m)^3$ calculs locaux où l'on rappelle que $1 + m$ désigne le nombre de points de discrétisation des intervalles $\Delta_i = [E_i^{min}, E_i^{max}]$. Dans la première méthode, présentée en section (2.2.2.2), les résultats des calculs locaux sont stockés dans une hypermatrice \mathbb{W} de dimension $(1 + m)^3$. Le potentiel exact est alors remplacé par un potentiel approché, obtenu en utilisant la méthode d'interpolation par spline cubique dans l'espace tridimensionnel \mathcal{E} des chargements macroscopique.

Dans la méthode par séparation des variables, l'hypermatrice est remplacée par $3R$ vecteurs de dimension $1 + m$, notés $\underline{\phi}_i^r$ pour $i = 1, 2, 6$ et $r = 1..R$. Le potentiel approché est alors obtenu en interpolant les vecteurs $\underline{\phi}_i^r$ à l'aide de splines cubiques unidimensionnels. Les deux méthodes sont équivalentes lorsque l'on souhaite interpoler une fonction d'une variable. Dans ce cas on pose $R = 1$ et $\mathbb{W} = \underline{\phi}$ pour la méthode par séparation des variables. Dans le cas de fonctions de plusieurs variables, la méthode de séparation est moins coûteuse en terme de calculs. Ceci sera d'autant plus marqué pour les problèmes tridimensionnels où le potentiel à interpoler est une fonction de six variables scalaires.

Comme indiqué en introduction, la méthode "NEXP", basée sur l'interpolation du potentiel des déformations macroscopiques est numériquement moins coûteuse que les méthodes concourantes ou de type FE^2 [34, 35, 36], [37, 38] car elle permet de réduire le nombre total de calculs locaux (éléments finis ou TFR). Dans le cas de problèmes plans ou bidimensionnels, la méthode NEXP, nécessite $(1 + m)^3$ calculs locaux. Dans une approche concourante, le nombre total de calculs locaux est donné par $4I_t \cdot P_{int} \cdot N_e$ où I_t est le nombre d'itérations avant convergence de l'équilibre macroscopique, P_{int} est le nombre de points d'intégration dans chaque élément (du maillage de la structure) et N_e est le nombre d'éléments.

La figure 2.6 est extraite de [86]. Elle représente le nombre de calculs locaux en fonction du nombre d'éléments de discrétisation de la structure macroscopique. On observe effectivement que le nombre de calculs locaux par la méthode NEXP est indépendant du nombre d'éléments alors que pour les méthodes concurrentes, ce nombre croît linéairement avec le nombre d'éléments.

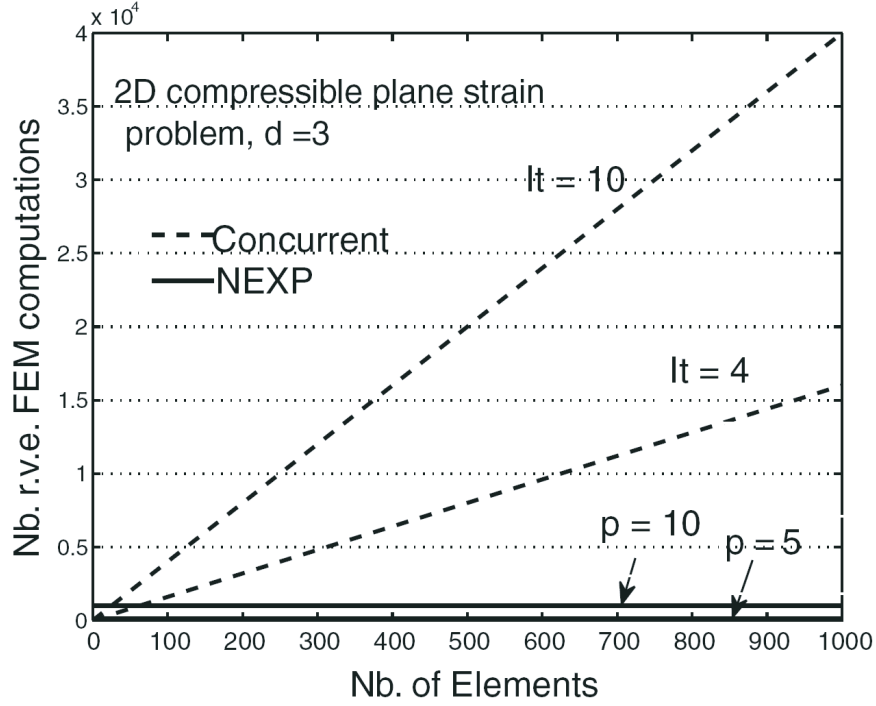


FIGURE 2.6 – Nombre de calculs locaux (E.F ou TFR) en fonction du nombre d'éléments de discrétisation de la structure.

2.2.5 Interpolation du potentiel et loi de comportement macroscopique

L'interpolation du potentiel est réalisée, pour chacune des configurations, en utilisant 21 points de discrétisation sur les intervalles $\Delta^i = [E_i^{min}, E_i^{max}]$ $i = 1, 2, 6$. Le potentiel des déformations est discrétisé en $21^3 = 9261$ points nécessitant la résolution d'autant de problèmes non linéaires locaux. Les bornes des intervalles sont choisies égales à : $E_i^{min} = -0.005$ et $E_i^{max} = 0.005$.

Les figures 2.7a, 2.8a et 2.9a représentent le potentiel des déformations macroscopiques obtenu par interpolation dans le cas de la microstructure à fibres représentée sur la figure 2.2. Pour chacun des exemples le contraste est choisi égal à 2 et l'exposant de la matrice $n_M = 2, 5, 10$. La composante E_1 varie entre les maxima E_1^{min} et E_1^{max} , les composantes E_2 et E_6 étant prise égales à zéro. Sur les figures 2.7b, 2.8b et 2.9b, on représente les composantes de la contrainte macroscopique obtenues par dérivation du potentiel interpolé (cf. relation (2.46)). Sur ces courbes on peut distinguer deux régimes séparés par une

variation brutale de la rigidité tangente. On observe, sur les figures 2.8b et 2.9b, des oscillations importantes au voisinage de changement de la rigidité. Ces oscillations sont dues à l'interpolation des fonctions ϕ_i^r par des splines unidimensionnels.

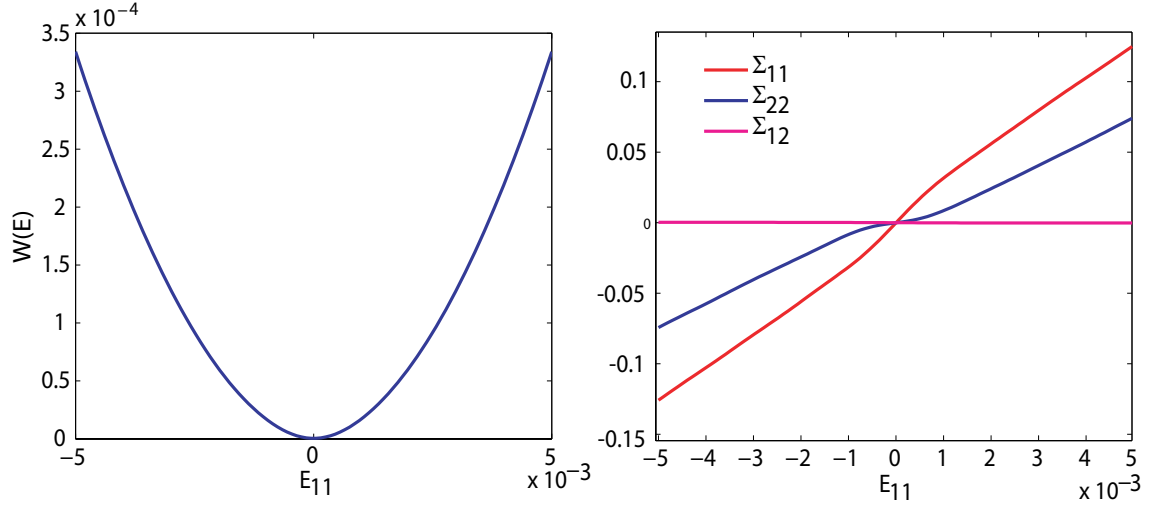


FIGURE 2.7 – Interpolation du potentiel macroscopique des déformations dans le plan $E_2 = E_6 = 0$ (à gauche). Courbe contraintes-déformations à l'échelle macroscopique (à droite). Cas de l'exposant $n_M = 2$ et du contraste $c = 2$.

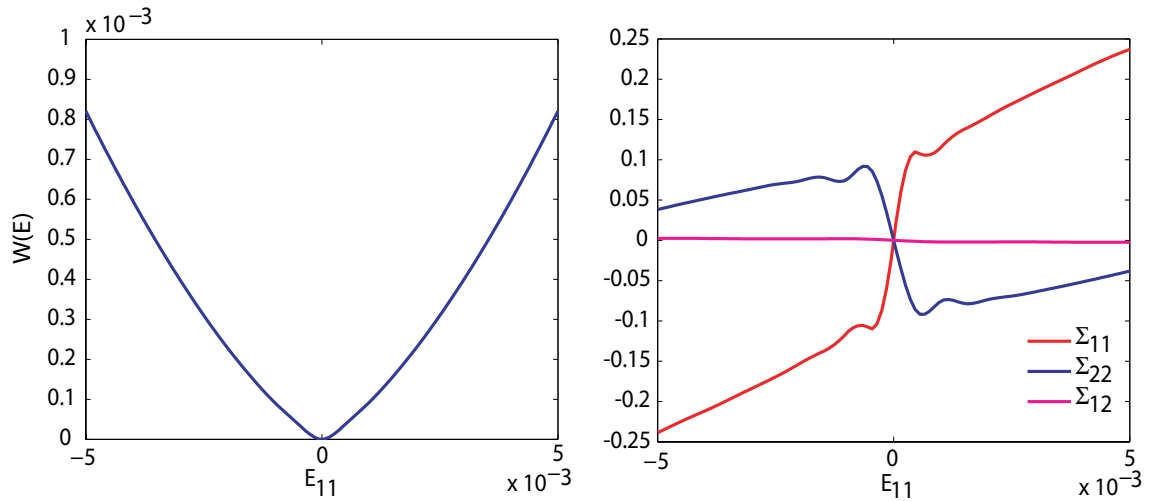


FIGURE 2.8 – Interpolation du potentiel macroscopique des déformations dans le plan $E_2 = E_6 = 0$ (à gauche). Courbe contraintes-déformations à l'échelle macroscopique (à droite). Cas de l'exposant $n_M = 5$ et du contraste $c = 2$.

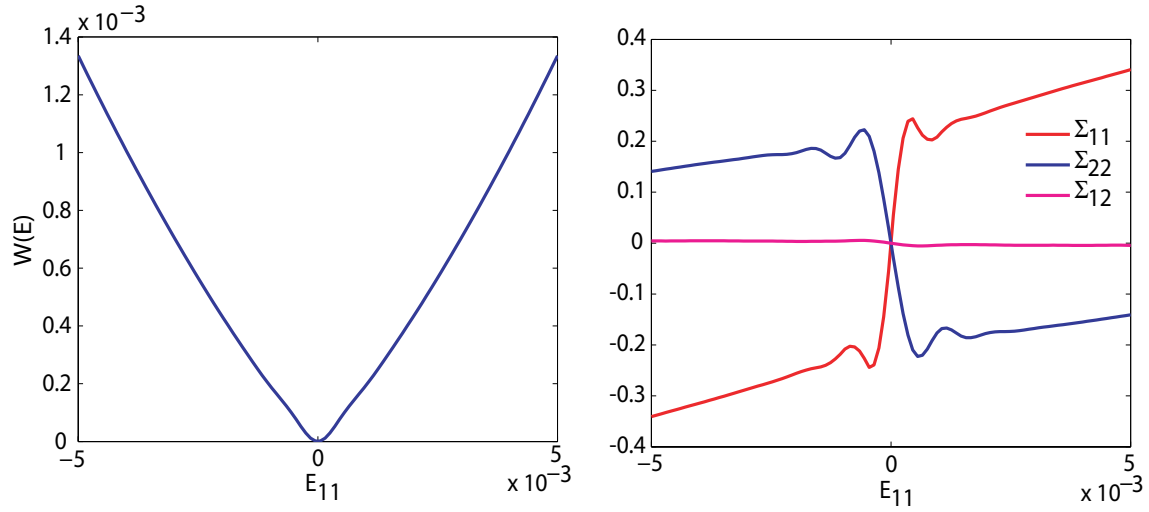


FIGURE 2.9 – Interpolation du potentiel macroscopique des déformations dans le plan $E_2 = E_6 = 0$ (à gauche). Courbe contraintes-déformations à l'échelle macroscopique (à droite). Cas de l'exposant $n_M = 10$ et du contraste $c = 2$.

Sur les figures 2.10 et 2.11 on compare les courbes contrainte déformation pour les contrastes $c = 2$ et $c = 10$. L'exposant de la matrice est choisi égal à $n_M = 5$. On observe une très faible influence du contraste, et donc du module de cisailment des inclusions, sur le comportement macroscopique du composite à fibres 2.10. L'influence du contraste reste faible mais plus marquée sur la figure 2.11.

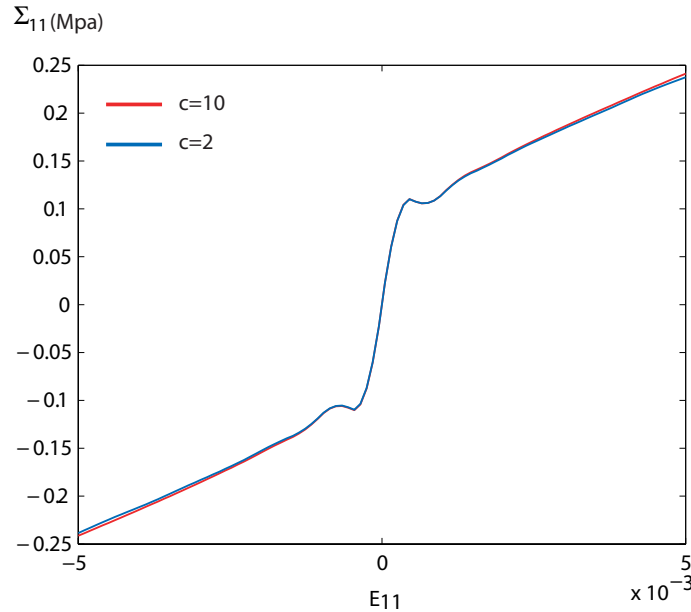


FIGURE 2.10 – Courbe contrainte Σ_{11} - déformation E_{11} pour $c = 2$ et $c = 10$ dans le cas de l'exposant $n_M = 5$. Cas du composite à fibres.

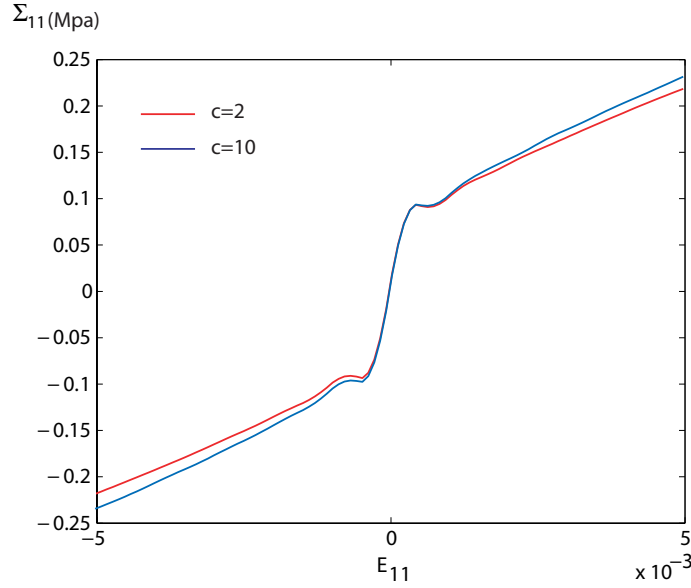


FIGURE 2.11 – Courbe contrainte Σ_{11} - déformation E_{11} pour $c = 2$ et $c = 10$ dans le cas de l'exposant $n_M = 5$. Cas de l'image issue de la tomographie.

2.3 Application : problème de la poutre en flexion

On se propose de tester la loi de comportement macroscopique obtenue par interpolation dans le cas d'une poutre soumise à flexion. On considère donc une poutre constituée d'un matériau composite dont la microstructure est décrite en section 2.1.3. On suppose que la poutre est en état plan de déformation, un déplacement nul est imposé à l'extrémité gauche de la poutre tandis qu'à l'autre extrémité on impose une charge répartie $F = 10^{-3}N/m$ (cf. figure 2.12). Les dimensions de la poutre sont données par $H = 10^{-3}m$ et $L = 5.10^{-3}m$. Le maillage est constitué de 804 éléments triangulaires. Les figures 2.13 donnent la distribution de la contrainte équivalente dans la poutre pour les exposants $n_M = 2, 5$ et 10 et le contraste $c = 2$.

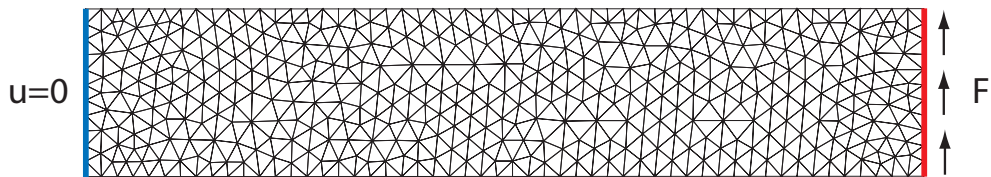


FIGURE 2.12 – Géométrie de la structure et le maillage.

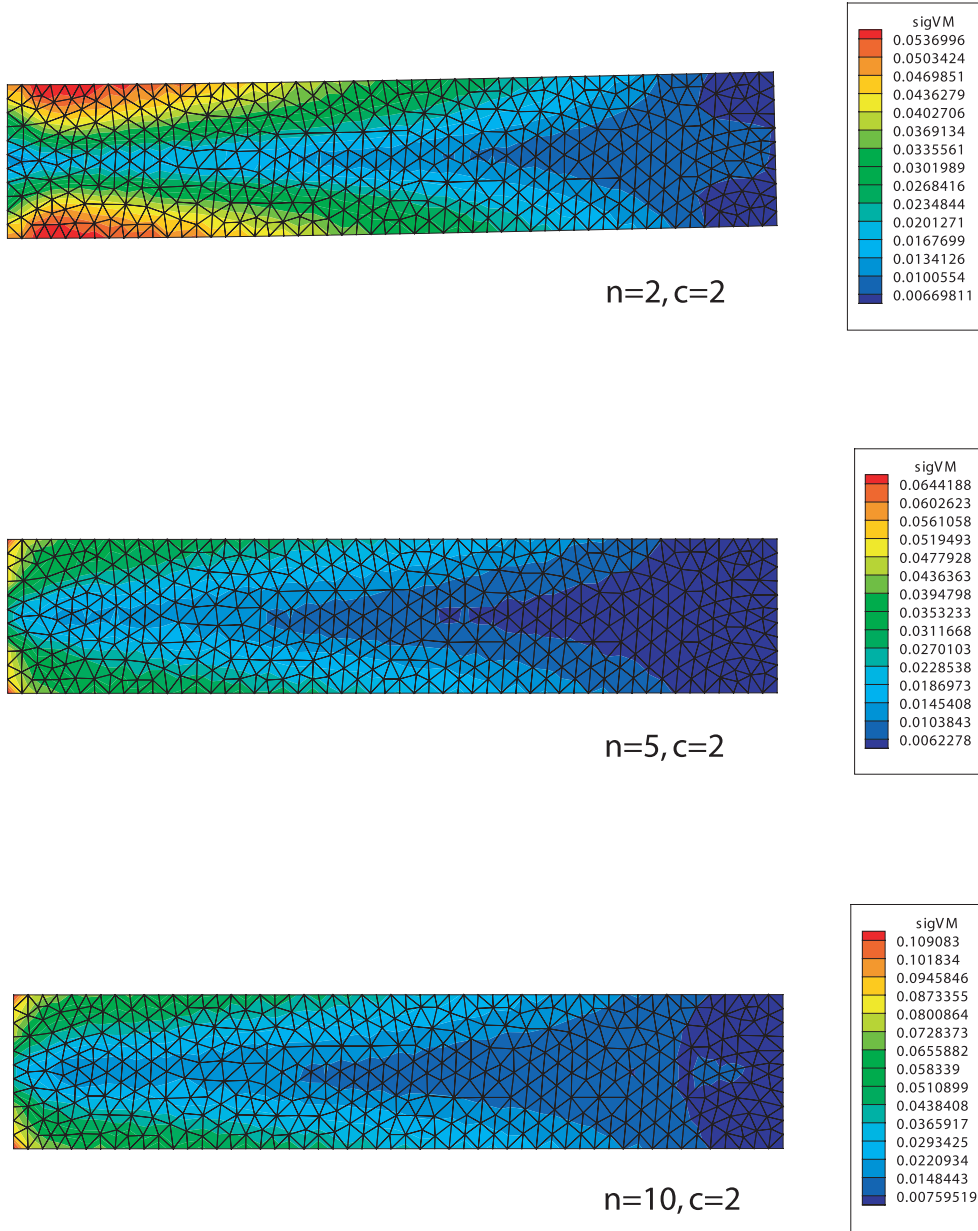


FIGURE 2.13 – Répartition de la contrainte équivalente dans la poutre pour $n_M = 2, 5, 10$ et $c = 2$. Cas de microstructure à fibres.

2.4 Conclusion

Une approche numérique à deux échelles du comportement des matériaux hétérogènes non linéaires a été présentée dans ce chapitre. L'approche consiste à déterminer le potentiel des déformations macroscopiques sur une grille de valeurs dans l'espace des chargements macroscopiques. Chacune des valeurs du potentiel est déterminée en résolvant numériquement un problème local non linéaire par une méthode de type TFR à l'échelle

macroscopique et la loi de comportement est alors obtenue par des techniques d'interpolation.

La méthode a été appliquée dans le cas de deux microstructures biphasées (composite à fibres et matériaux à grains) régies par une loi en puissance. La reconstruction du potentiel des déformations macroscopiques et de la loi contrainte/déformation qui en découle a été réalisée pour une large gamme de contrastes et d'exposants. Enfin, les lois de comportement macroscopique obtenues ont été insérées dans un code élément finis et utilisées dans le cas particulier d'une poutre en flexion.

Chapitre 3

Une approche basée sur la T.F.R pour la détermination de la perméabilité en régime statique

Dans ce troisième chapitre, on propose une méthode de résolution numérique basée sur la TFR pour la détermination de la perméabilité de milieux poreux périodiques. L'approche développée ici s'inscrit dans le cadre classique de l'homogénéisation des milieux poreux périodiques, formalisé par Ene et Sanchez-Palencia [30], Auriault et Sanchez-Palencia [5], Levy [52], Sanchez-Palencia [71].

L'écoulement du fluide est régi par les équations de Stokes qui présentent une grande similitude avec les équations de l'élasticité. En outre, on montre en première section de ce chapitre, que le problème d'écoulement peut se ramener à un problème de composite à matrice élastique contenant des inclusions rigides (les inclusions représentant ici le squelette solide du milieu poreux).

L'utilisation d'un schéma itératif basé sur la Transformée de Fourier Rapide (TFR) pour la résolution du problème d'écoulement apparaît donc justifiée. Le squelette solide, constitutif du milieu poreux, étant parfaitement rigide, c'est une approche formulée en contrainte (mieux adaptée pour traiter le cas des contrastes infinis) qui est proposée en section 3.2. Néanmoins, on montre que le problème présente une difficulté supplémentaire qui n'apparaît pas dans le contexte des composites élastiques :

Le fluide en écoulement exerce des efforts sur la paroi des inclusions rigides. Ces efforts engendrent des mouvement de translation et de rotation des solides rigides qu'il convient de supprimer. La méthode que l'on propose consiste à introduire des efforts ponctuels dans les solides rigides. Toutefois, ces efforts ponctuels sont a posteriori indéterminés, puisque leur obtention nécessite de connaître la solution du problème d'écoulement. La méthodologie employée pour déterminer ces efforts ponctuels est décrite en section 3.2.3 et constitue l'originalité de ce chapitre. Enfin, des comparaisons avec des résultats issus de littérature seront présentés afin de valider l'approche.

3.1 Description du problème local

3.1.1 L'écoulement de Stokes et l'équation de Darcy

Considérons un milieu poreux rigide et périodique avec les pores connectés. Les pores sont remplis d'un fluide visqueux Newtonien homogène de viscosité dynamique μ_p . On note par V_p le volume occupé par le fluide (donc le volume des pores) et par V_s le volume solide. La paroi du solide indéformable, en contact avec le fluide, est notée ∂V_s . On étudie les mouvements permanents du fluide à travers la phase poreuse quand les vitesses sont suffisamment petites pour que le phénomène soit linéaire. Ainsi les termes non linéaires d'origine inertielle seront négligés. L'écoulement est supposé incompressible et régi par les équations de Stokes :

$$\begin{cases} \mu_p \Delta \underline{v}(\underline{x}) + \nabla p(\underline{x}) = 0 & \forall \underline{x} \in V_p \\ \text{div}(\underline{v}(\underline{x})) = 0 & \forall \underline{x} \in V_p \\ \underline{v}(\underline{x}) = 0 & \forall \underline{x} \in \partial V_s \end{cases} \quad (3.1)$$

$\underline{v}(\underline{x})$ et $p(\underline{x})$ sont respectivement le champ de vitesse et de pression locale. L'écoulement est provoqué en imposant un gradient de pression macroscopique noté \underline{G} . Ainsi la pression locale est décomposée en un premier terme correspondant à ce gradient de pression macroscopique et un terme périodique, noté $p^*(\underline{x})$:

$$p(\underline{x}) = \underline{G} \cdot \underline{x} + p^*(\underline{x}), \quad \langle \nabla p^*(\underline{x}) \rangle_V = 0 \quad (3.2)$$

Compte tenu de la linéarité du problème étudié, la solution pour le champ de vitesse $\underline{v}(\underline{x})$ peut s'écrire :

$$\underline{v}(\underline{x}) = \underline{A}(\underline{x}) \cdot \underline{G} \quad (3.3)$$

où $\underline{A}(\underline{x})$ est un tenseur d'ordre deux de localisation. La moyenne de (3.3) sur la cellule élémentaire donne :

$$\underline{V} = \langle \underline{v}(\underline{x}) \rangle_V = \underline{K} \cdot \underline{G} \quad (3.4)$$

Où \underline{V} est la moyenne du champ des vitesses et \underline{K} est le tenseur de perméabilité défini par :

$$\underline{K} = \langle \underline{A}(\underline{x}) \rangle_V \quad (3.5)$$

L'équation (3.4) est une relation macroscopique assimilable à loi de Darcy en raison du fait que $\langle \underline{v}(\underline{x}) \rangle_V$ est un flux [7]. Ceci n'est a priori pas vrai pour tout vecteur $\underline{v}(\underline{x})$: c'est la condition d'incompressibilité qui confère à $\langle \underline{v}(\underline{x}) \rangle_V$ le statut de flux. En effet partant de l'égalité :

$$\text{div}(\underline{x} \otimes \underline{v}(\underline{x})) = \underline{v}(\underline{x}) \quad (3.6)$$

La moyenne du champ des vitesses $\underline{v}(\underline{x})$ s'écrit :

$$\underline{V} = \langle \underline{v}(\underline{x}) \rangle_V = \frac{1}{V} \int_{\partial V} \underline{x} \underline{v}(\underline{x}) \cdot \underline{n} dS \quad (3.7)$$

où \underline{n} désigne la normale unitaire à ∂V . On décompose ensuite l'intégrale ci-dessus sur chacune des facettes de la cellule élémentaire et l'on obtient :

$$\underline{V} = \frac{1}{V} \left\{ \sum_{j=1}^{j=3} \int_{x_j=\pm b_j} \underline{x} \underline{v}(\underline{x}) \cdot \underline{n} dS \right\} \quad (3.8)$$

Dans l'expression ci-dessus, le terme $\underline{v}(\underline{x}) \cdot \underline{n}$ est antipériodique, $\underline{v}(\underline{x})$ étant un champ périodique. La contribution de la partie périodique de \underline{x} est donc nulle. On ne conserve que la partie antipériodique, à savoir $\underline{x} = b_i \underline{e}_i$ sur la facette $x_i = b_i$. On obtient finalement :

$$V_i = \frac{b_i}{V} \int_{x_i=\pm b_i} \underline{v}(\underline{x}) \cdot \underline{n} dS \quad (3.9)$$

qui est bien un flux dans la direction x_i .

3.1.2 Le problème de composite équivalent

Le problème d'écoulement décrit par les équations (3.1) présente une similitude avec un problème d'élasticité d'un composite périodique. En effet, le problème peut se ramener à³ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\underline{\epsilon}}(\underline{x}) = \frac{1}{2}(\nabla \underline{v}(\underline{x}) + \nabla^t \underline{v}(\underline{x})) \quad \forall \underline{x} \in V \\ \dot{\underline{\epsilon}}(\underline{x}) = \mathbb{S}(\underline{x}) : \underline{\sigma}(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in V \\ \text{div}(\underline{\sigma}(\underline{x})) + \underline{f}(\underline{x}) = 0 \quad \forall \underline{x} \in V \\ \underline{\sigma}(\underline{x}) \cdot \underline{n} \quad \text{antipériodique} \\ \underline{v}(\underline{x}) \quad \text{périodique} \\ \langle \underline{\sigma}(\underline{x}) \rangle_V = 0, \quad \langle \dot{\underline{\epsilon}}(\underline{x}) \rangle_V = 0 \end{array} \right. \quad (3.10)$$

Dans les relations ci-dessus, le champ des taux de déformation $\dot{\underline{\epsilon}}(\underline{x})$ et de contrainte $\underline{\sigma}(\underline{x})$ sont périodiques et prolongés dans V_s par continuité. Le tenseur d'ordre quatre $\mathbb{S}(\underline{x})$ est défini par :

$$\mathbb{S}(\underline{x}) = \frac{1}{2\mu(\underline{x})} \mathbb{K} \quad \text{avec : } \mu(\underline{x}) = \begin{cases} \mu_p & \forall \underline{x} \in V_p \\ +\infty & \forall \underline{x} \in V_s \end{cases} \quad (3.11)$$

où $\mathbb{K} = \mathbb{I} - \mathbb{J}$ avec $\mathbb{J} = \frac{1}{3} \underline{\mathbf{I}} \otimes \underline{\mathbf{I}}$ et \mathbb{I} est le tenseur identité d'ordre quatre. La condition d'incompressibilité de la phase fluide se traduit par $\underline{\mathbf{I}} : \mathbb{S}(\underline{x}) = 0$ pour tout $\underline{x} \in V_p$, la phase solide étant parfaitement rigide, on pose $\mathbb{S}(\underline{x}) = 0 \quad \forall \underline{x} \in V_s$ (ceci correspondant à une phase incompressible de viscosité dynamique $\mu_s = +\infty$).

$\underline{f}(\underline{x})$ sont des forces de volume, connues uniquement dans la phase fluide :

$$\underline{f}(\underline{x}) = \begin{cases} \underline{G} & \forall \underline{x} \in V_p \\ ? & \forall \underline{x} \in V_s \end{cases} \quad (3.12)$$

3. Ici les équations sont écrites pour un solide visqueux linéaire

On serait tenté de poser $\underline{f}(\underline{x}) = 0$ dans la phase solide, mais, comme nous allons le voir par la suite, il y a nécessité d'introduire des efforts dans V_s . Deux raisons à cela : d'une part pour l'équilibre de la cellule élémentaire, d'autre part pour assurer l'équilibre statique des inclusions rigides.

L'équilibre des forces agissant sur la cellule élémentaire s'écrivent, pour la résultante :

$$\int_{\partial V} \underline{t}(\underline{x}) dS + \int_V \underline{f}(\underline{x}) dV = 0 \quad (3.13)$$

Puisque $\underline{\sigma}(\underline{x})$ est un champ périodique, la première intégrale dans (3.13) est nulle. Ainsi, les forces de volume doivent être à moyenne nulle sur la cellule élémentaire :

$$\langle \underline{f}(\underline{x}) \rangle_V = 0 \quad (3.14)$$

Dans le domaine de Fourier cette condition se traduit donc par $\underline{f}(\underline{\xi}) = 0$ pour $\underline{\xi} = 0$. On peut donc choisir les forces de volume sous la forme :

$$\underline{f}(\underline{x}) = \begin{cases} \underline{G} & \forall \underline{x} \in V_p \\ -\frac{1-f}{f} \underline{G} & \forall \underline{x} \in V_s \end{cases} \quad (3.15)$$

Dans le domaine de Fourier, les forces de volume, définies par (3.15), s'écrivent :

$$\begin{aligned} \forall \underline{\xi} \neq 0 : \underline{f}(\underline{\xi}) &= -\frac{1}{f} \underline{G} I_s(\underline{\xi}) \\ \text{pour : } \underline{\xi} = 0 : \underline{f}(\underline{\xi}) &= 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Où $I_s(\underline{\xi})$ est la fonction de forme associée à la phase solide (le squelette). Pour établir les expressions (3.16) la propriété $I_s(\underline{\xi}) = -I_p(\underline{\xi})$ a été utilisée. On ne peut pas obtenir de conditions supplémentaires de l'équilibre des moments. En effet, on a :

$$\int_{\partial V} \underline{x} \wedge \underline{t}(\underline{x}) dS + \int_V \underline{x} \wedge \underline{f}(\underline{x}) dV = 0 \quad (3.17)$$

Le champ \underline{t} est un champ antipériodique, mais \underline{x} possède une composante antipériodique. Le champ $\underline{\sigma}$ n'étant pas connu a posteriori, l'équation ci-dessus ne fournit pas de condition supplémentaire pour les forces de volume $\underline{f}(\underline{x})$.

3.1.3 Description des efforts agissant dans la phase solide

Le taux des déformations étant nul dans la phase solide le champ de vitesse est défini à un déplacement rigide près. Pour une cellule élémentaire constituée de M solides non connectés, le champ de vitesse dans l'inclusion $m \in [1, M]$, de volume V_m , s'écrit :

$$\underline{v}(\underline{x}) = \underline{V}^{(m)} + \underline{\Omega}^{(m)} \wedge (\underline{x} - \underline{X}^{(m)}) \quad \forall \underline{x} \in V_m \quad (3.18)$$

où $\underline{V}^{(m)}$ décrit la vitesse de translation de l'inclusion m et $\underline{\Omega}^{(m)}$ la vitesse de rotation de l'inclusion autour de son centre d'inertie $\underline{X}^{(m)}$. Ces déplacements rigides résultent des

efforts exercés par le fluide sur l'interface fluide/solide. Dans le cadre d'une résolution numérique basé sur un schéma itératif dans le domaine de Fourier, la condition $v(\underline{x}) = 0$ pour $\underline{x} \in V_s$ ne peut être explicitement vérifiée. On introduit donc, dans le solide $m \in [1, M]$, une force $\underline{P}^{(m)}$ et un couple $\underline{C}^{(m)}$ appliqué en son centre d'inertie, noté $\underline{X}^{(m)}$.

L'équilibre des solides s'écrit donc :

$$\forall m \in [1, M] : \begin{cases} \frac{1}{V} \int_{\partial V_m} \underline{t}(\underline{x}) dS + \underline{P}^{(m)} = 0 \\ \frac{1}{V} \int_{\partial V_m} (\underline{x} - \underline{X}^{(m)}) \wedge \underline{t}(\underline{x}) dS + \underline{C}^{(m)} = 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

où $\underline{P}^{(m)}$ et $\underline{C}^{(m)}$ sont respectivement des forces et couples par unité de volume V , ∂V_m est la frontière du domaine V_m , le volume de l'inclusion m et $\underline{t}(\underline{x}) = \underline{\sigma}(\underline{x}) \cdot \underline{n}$, \underline{n} étant la normal unitaire prise sur ∂V_m .

Précisons comment sont introduits ces efforts ponctuels dans les équations (3.10) :

- Une force $\underline{P}^{(m)}$ appliquée en $\underline{X}^{(m)}$ peut être vue comme le cas limite d'une force de volume uniforme appliqué sur une sphère de rayon infinitésimal (un disque pour les problèmes bidimensionnels). Ainsi on peut montrer aisément qu'une force $\underline{P}^{(m)}$ appliquée en $\underline{X}^{(m)}$ peut être obtenu de la manière suivante :

$$\underline{f}(\underline{x}) = \begin{cases} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{3V}{4\pi r^3} \underline{P}^{(m)} & \forall \underline{x}, |\underline{x} - \underline{X}^{(m)}| \leq r \\ 0 & \forall \underline{x}, |\underline{x} - \underline{X}^{(m)}| > r \end{cases} \quad (3.20)$$

Le passage à la limite, dans le domaine de Fourier, est possible et conduit à :

$$\underline{f}(\underline{\xi}) = \underline{P}^{(m)} \exp(i\underline{\xi} \cdot \underline{X}^{(m)}) \quad (3.21)$$

- De la même manière on peut introduire un couple (par unité de volume V), d'intensité $\underline{C}^{(m)}$, appliqué en $\underline{x} = \underline{X}^{(m)}$ en considérant des forces de volumes de la forme :

$$\underline{f}(\underline{x}) = \begin{cases} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{15V}{8\pi r^5} \underline{C}^{(m)} \wedge \underline{x} & \forall \underline{x}, |\underline{x} - \underline{X}^{(m)}| \leq r \\ 0 & \forall \underline{x}, |\underline{x} - \underline{X}^{(m)}| > r \end{cases} \quad (3.22)$$

Le passage à la limite, dans le domaine de Fourier, donne :

$$\underline{f}(\underline{\xi}) = -\frac{i}{2} \underline{C}^{(m)} \wedge \underline{\xi} \exp(i\underline{\xi} \cdot \underline{X}^{(m)}) \quad (3.23)$$

En définitive, les forces de volume introduites dans (3.10), sont obtenues comme la somme des forces de volume définies par (3.16) et des forces de volumes associées aux efforts ponctuels $\underline{P}^{(m)}$ et $\underline{C}^{(m)}$. On pose donc :

$$\underline{f}(\underline{\xi}) = -\frac{1}{f} \underline{G} I_s(\underline{\xi}) + \sum_m \left[\underline{P}^{(m)} - \frac{i}{2} \underline{C}^{(m)} \wedge \underline{\xi} \right] \exp(i\underline{\xi} \cdot \underline{X}^{(m)}) \quad (3.24)$$

où $I_s(\underline{\xi})$ est la fonction de forme de la phase solide. Le champ $\underline{f}(\underline{x})$ étant à moyenne nulle sur la cellule élémentaire, on a $\underline{f}(\underline{\xi} = 0) = 0$, ce qui revient à :

$$\sum_m \underline{P}^{(m)} = 0 \quad (3.25)$$

A ce stade les efforts ponctuels $\underline{P}^{(m)}$ et $\underline{C}^{(m)}$ restent indéterminés. En effet, les efforts ponctuels doivent vérifier les équations d'équilibre (3.19), ce qui nécessite de connaître les efforts qui s'appliquent sur le contour des solides rigides et donc la solution du problème d'écoulement. La méthodologie employée pour la détermination de ces efforts est décrite en section 3.2.3.

3.2 Une méthode de résolution basée sur la TFR

3.2.1 L'équation de Lippmann-Schwinger du problème d'écoulement

On se propose de résoudre le problème d'inhomogénéité (3.10) à l'aide d'un schéma itératif. Le module $\mu(\underline{x})$ prenant des valeurs infinies dans la phase solide, c'est la forme duale de l'équation de Lippmann-Schwinger, similaire à (1.38), que nous allons proposer ici.

La différence avec le cas traité au premier chapitre réside dans la présence des forces de volume, $\underline{f}(\underline{x})$ qui, rappelons le, représentent ici le paramètre de chargement. La réécriture de la condition d'équilibre (1.25) est :

$$\forall \underline{\xi} \neq 0 : \mathbb{P}(\underline{\xi}) : \underline{\sigma}(\underline{\xi}) = \underline{\rho}(\underline{\xi}) \quad \text{ou} \quad \underline{\sigma}(\underline{\xi}) = \mathbb{Q}(\underline{\xi}) : \underline{\sigma}(\underline{\xi}) + \underline{\rho}(\underline{\xi}) \quad (3.26)$$

où $\underline{\rho}(\underline{\xi})$ est un tenseur d'ordre deux dont les composantes dépendent des forces de volume et sont définies par :

$$\underline{\rho}(\underline{\xi}) = \frac{i}{|\underline{\xi}|^2} \left[\underline{f} \otimes \underline{\xi} + \underline{\xi} \otimes \underline{f} - \underline{k} \underline{f} \cdot \underline{\xi} \right] \quad (3.27)$$

Où le tenseur d'ordre deux \underline{k} est défini dans (1.23). On observe que $\underline{\rho}(\underline{\xi})$ possède les propriétés suivantes :

$$\forall \underline{\xi} \neq 0 : \mathbb{P}(\underline{\xi}) : \underline{\rho}(\underline{\xi}) = \underline{\rho}(\underline{\xi}) \quad \text{et} \quad \mathbb{Q}(\underline{\xi}) : \underline{\rho}(\underline{\xi}) = 0 \quad (3.28)$$

En tenant compte de (3.26), la réécriture du problème d'inhomogénéité (3.10) dans le domaine de Fourier est donc :

$$\begin{aligned} \forall \underline{\xi} \neq 0 : \quad & \begin{cases} \mathbb{P}(\underline{\xi}) : \underline{\sigma}(\underline{\xi}) = \underline{\rho}(\underline{\xi}) \\ \mathbb{Q}(\underline{\xi}) : \underline{\dot{\epsilon}}(\underline{\xi}) = 0 \\ \underline{\dot{\epsilon}}(\underline{\xi}) = \mathbb{S}(\underline{\xi}) * \underline{\sigma}(\underline{\xi}) \end{cases} \\ \text{pour } \underline{\xi} = 0 : \quad & \underline{\sigma}(\underline{\xi}) = 0, \quad \underline{\dot{\epsilon}}(\underline{\xi}) = 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

Introduisons maintenant dans (3.29) le milieu de référence \mathbb{S}^0 et le tenseur des déformations libres $\boldsymbol{\eta}(\underline{\xi})$ défini par :

$$\boldsymbol{\eta}(\underline{\xi}) = (\mathbb{S}(\underline{\xi}) - \mathbb{S}^0) * \boldsymbol{\sigma}(\underline{\xi}) \quad (3.30)$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \forall \underline{\xi} \neq 0 : & \begin{cases} \mathbb{P}(\underline{\xi}) : \boldsymbol{\sigma}(\underline{\xi}) = \boldsymbol{\rho}(\underline{\xi}) \\ \mathbb{Q}(\underline{\xi}) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}(\underline{\xi}) = 0 \\ \dot{\boldsymbol{\epsilon}}(\underline{\xi}) = \mathbb{S}^0 : \boldsymbol{\sigma}(\underline{\xi}) + \boldsymbol{\eta}(\underline{\xi}) \end{cases} \\ \text{pour } \underline{\xi} = 0 : & \boldsymbol{\sigma}(\underline{\xi}) = 0, \quad \dot{\boldsymbol{\epsilon}}(\underline{\xi}) = 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

En éliminant $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}(\underline{\xi})$ dans les relations ci-dessus, le champ de contrainte est alors solution du système d'équations :

$$\begin{aligned} \forall \underline{\xi} \neq 0 : & \begin{cases} \mathbb{P}(\underline{\xi}) : \boldsymbol{\sigma}(\underline{\xi}) = \boldsymbol{\rho}(\underline{\xi}) \\ \mathbb{Q}(\underline{\xi}) : [\mathbb{S}^0 : \boldsymbol{\sigma}(\underline{\xi}) + \boldsymbol{\eta}(\underline{\xi})] = 0 \end{cases} \\ \text{pour } \underline{\xi} = 0 : & \boldsymbol{\sigma}(\underline{\xi}) = 0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

En posant : $\boldsymbol{\sigma}'(\underline{\xi}) = \boldsymbol{\sigma}(\underline{\xi}) - \boldsymbol{\rho}(\underline{\xi})$ et $\boldsymbol{\eta}'(\underline{\xi}) = \boldsymbol{\eta}(\underline{\xi}) + \mathbb{S}^0 : \boldsymbol{\rho}(\underline{\xi})$ on obtient finalement :

$$\begin{aligned} \forall \underline{\xi} \neq 0 : & \begin{cases} \mathbb{P}(\underline{\xi}) : \boldsymbol{\sigma}'(\underline{\xi}) = 0 \\ \mathbb{Q}(\underline{\xi}) : [\mathbb{S}^0 : \boldsymbol{\sigma}'(\underline{\xi}) + \boldsymbol{\eta}'(\underline{\xi})] = 0 \end{cases} \\ \text{pour } \underline{\xi} = 0 : & \boldsymbol{\sigma}'(\underline{\xi}) = 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

On reconnaît dans le système d'équation donné ci-dessus, le problème d'inclusion classique, dont la solution est :

$$\begin{aligned} \forall \underline{\xi} \neq 0 : & \boldsymbol{\sigma}'(\underline{\xi}) = -\boldsymbol{\Delta}^0(\underline{\xi}) : \boldsymbol{\eta}'(\underline{\xi}) \\ \text{pour } \underline{\xi} = 0 : & \boldsymbol{\sigma}'(\underline{\xi}) = 0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

En réintroduisant maintenant $\boldsymbol{\sigma}(\underline{\xi})$, $\boldsymbol{\eta}(\underline{\xi})$ et $\boldsymbol{\rho}(\underline{\xi})$ et en remplaçant $\boldsymbol{\eta}(\underline{\xi})$ par son expression donnée par (3.30), on obtient l'équation recherchée :

$$\begin{aligned} \forall \underline{\xi} \neq 0 : & \boldsymbol{\sigma}(\underline{\xi}) = [\mathbb{I} - \boldsymbol{\Delta}^0(\underline{\xi}) : \mathbb{S}^0] : \boldsymbol{\rho}(\underline{\xi}) - \boldsymbol{\Delta}^0(\underline{\xi}) : [(\mathbb{S}(\underline{\xi}) - \mathbb{S}^0) * \boldsymbol{\sigma}(\underline{\xi})] \\ \text{pour } \underline{\xi} = 0 : & \boldsymbol{\sigma}(\underline{\xi}) = 0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

Le milieu de référence étant choisi incompressible, on pose $\mathbb{S}^0 = \frac{1}{2\mu_0} \mathbb{K}$. L'opérateur $\mathbb{I} - \boldsymbol{\Delta}^0(\underline{\xi}) : \mathbb{S}^0$ est indépendant du choix du milieu de référence et donné par (voir annexe A pour plus de détails) :

$$\mathbb{I} - \boldsymbol{\Delta}^0(\underline{\xi}) : \mathbb{S}^0 = \mathbb{E}_2(\underline{\xi}) + \mathbb{E}_4(\underline{\xi}) + \mathbb{E}_6(\underline{\xi}) \quad (3.36)$$

où les tenseurs $\mathbb{E}_n(\underline{\xi})$ sont définies par (1.22). On peut donc réécrire (3.35) sous la forme :

$$\begin{aligned} \forall \underline{\xi} \neq 0 : \boldsymbol{\sigma}(\underline{\xi}) &= \boldsymbol{\Upsilon}(\underline{\xi}) - \boldsymbol{\Delta}^0(\underline{\xi}) : \left[(\mathbb{S}(\underline{\xi}) - \mathbb{S}^0) * \boldsymbol{\sigma}(\underline{\xi}) \right] \\ \text{pour } \underline{\xi} = 0 : \boldsymbol{\sigma}(\underline{\xi}) &= 0 \end{aligned} \quad (3.37)$$

où $\boldsymbol{\Upsilon}(\underline{\xi})$ dépend uniquement des forces de volume $\underline{f}(\underline{x})$ et est défini par :

$$\boldsymbol{\Upsilon}(\underline{\xi}) = \left[\mathbb{I} - \boldsymbol{\Delta}^0(\underline{\xi}) : \mathbb{S}^0 \right] : \boldsymbol{\rho}(\underline{\xi}) = \frac{i}{|\underline{\xi}|^2} \left[\underline{f} \otimes \underline{\xi} + \underline{\xi} \otimes \underline{f} + (\mathbf{I} - 2\mathbf{k})\underline{f}.\underline{\xi} \right] \quad (3.38)$$

3.2.2 Résolution par un schéma itératif

L'équation de Lippmann-Schwinger du problème d'écoulement (3.37) est équivalente à (1.38) en remplaçant le champ des contraintes macroscopiques par $\boldsymbol{\Upsilon}(\underline{\xi})$. Un développement en série de Neumann pour la solution $\boldsymbol{\sigma}(\underline{\xi})$ de l'équation intégrale (3.37) est donc possible. Chacun des termes de cette série peut être obtenu à partir du schéma itératif :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^{i+1}(\underline{\xi}) = \boldsymbol{\Upsilon}(\underline{\xi}) - \boldsymbol{\Delta}^0(\underline{\xi}) : \left[(\mathbb{S}(\underline{\xi}) - \mathbb{S}^0) * \boldsymbol{\sigma}^i(\underline{\xi}) \right] & \text{pour } \underline{\xi} \neq 0 \\ \boldsymbol{\sigma}^{i+1}(\underline{\xi}) = 0 & \text{pour } \underline{\xi} = 0 \end{cases} \quad (3.39)$$

Le premier terme de la série étant défini par :

$$\forall \underline{\xi} : \boldsymbol{\sigma}^{i=1}(\underline{\xi}) = \boldsymbol{\Upsilon}(\underline{\xi}) \quad (3.40)$$

Comme dans le cas de l'élasticité, une simplification du schéma itératif (3.39) est possible. Tout d'abord, on peut montrer que le champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}^i(\underline{\xi})$ vérifie la condition d'équilibre (3.26) pour tout i . En effet :

$$\forall i, \forall \underline{\xi} \neq 0 : \mathbb{P}(\underline{\xi}) : \boldsymbol{\sigma}^{i+1}(\underline{\xi}) = \mathbb{P}(\underline{\xi}) : \boldsymbol{\Upsilon}(\underline{\xi}) - \mathbb{P}(\underline{\xi}) : \boldsymbol{\Delta}^0(\underline{\xi}) : \left[(\mathbb{S}(\underline{\xi}) - \mathbb{S}^0) * \boldsymbol{\sigma}^i(\underline{\xi}) \right] \quad (3.41)$$

Or, en utilisant la propriété du tenseur de Green (cf. (1.36)), le dernier terme dans l'équation ci-dessus est nul et $\mathbb{P}(\underline{\xi}) : \boldsymbol{\Upsilon}(\underline{\xi}) = \boldsymbol{\rho}(\underline{\xi})$. On retrouve donc :

$$\forall i, \forall \underline{\xi} \neq 0 : \mathbb{P}(\underline{\xi}) : \boldsymbol{\sigma}^{i+1}(\underline{\xi}) = \boldsymbol{\rho}(\underline{\xi}) \quad (3.42)$$

En utilisant les propriétés de $\boldsymbol{\rho}(\underline{\xi})$ (cf. (3.28)), la dernière relation peut également s'écrire sous la forme :

$$\forall i, \forall \underline{\xi} \neq 0 : \mathbb{P}(\underline{\xi}) : (\boldsymbol{\sigma}^{i+1}(\underline{\xi}) - \boldsymbol{\rho}(\underline{\xi})) = 0 \quad (3.43)$$

On montre en annexe A que, pour tout champ $\mathbf{a}(\underline{\xi})$ vérifiant la propriété $\mathbb{P}(\underline{\xi}) : \mathbf{a}(\underline{\xi}) = 0$, alors $\boldsymbol{\Delta}^0(\underline{\xi}) : \mathbb{S}^0 : \mathbf{a}(\underline{\xi}) = \mathbf{a}(\underline{\xi})$. On a donc :

$$\forall \underline{\xi} \neq 0 : \boldsymbol{\Delta}^0(\underline{\xi}) : \mathbb{S}^0 : (\boldsymbol{\sigma}^i(\underline{\xi}) - \boldsymbol{\rho}(\underline{\xi})) = \boldsymbol{\sigma}^i(\underline{\xi}) - \boldsymbol{\rho}(\underline{\xi}) \quad (3.44)$$

ou encore :

$$\forall \underline{\xi} \neq 0 : \boldsymbol{\Delta}^0(\underline{\xi}) : \mathbb{S}^0 : \boldsymbol{\sigma}^i(\underline{\xi}) = \boldsymbol{\sigma}^i(\underline{\xi}) - \boldsymbol{\Upsilon}(\underline{\xi}) \quad (3.45)$$

Le schéma itératif (3.39) se simplifie donc en :

$$\begin{cases} \sigma^{i+1}(\underline{\xi}) = \sigma^i(\underline{\xi}) - \Delta^0(\underline{\xi}) : \dot{\epsilon}(\underline{\xi}) & \text{pour : } \underline{\xi} \neq 0 \\ \sigma^{i+1}(\underline{\xi}) = 0 & \text{pour : } \underline{\xi} = 0 \end{cases} \quad (3.46)$$

avec : $\dot{\epsilon}(\underline{\xi}) = \mathbb{S}(\underline{\xi}) * \sigma^i(\underline{\xi})$.

On peut donc observer que les forces de volume n'apparaissent plus dans les équations (3.46), le schéma itératif est donc équivalent à (1.45). Notons toutefois que le schéma (3.46) diffère de (1.45) par le premier terme de la série, donné par (3.40) qui fait explicitement intervenir les forces de volume $\underline{f}(\underline{x})$ qui, rappelons le, représentent ici le paramètre de chargement.

Le schéma itératif appliqué est résumé dans le tableau ci dessous :

Etape i=1 :	$\forall \underline{\xi}_n \neq 0 : \sigma^1(\underline{\xi}_n) = \Upsilon(\underline{\xi}), \quad \sigma^1(0) = 0$ $\dot{\epsilon}^1(\underline{\xi}_n) = \mathbb{S}(\underline{\xi}_n) * \sigma^1(\underline{\xi}_n)$	
Etape i :	$\dot{\epsilon}^i(\underline{x}_n)$ et $\sigma^i(\underline{x}_n)$ sont connus test de convergence $\sigma^{i+1}(\underline{\xi}_n) = \sigma^i(\underline{\xi}_n) - \Delta^0(\underline{\xi}_n) : \dot{\epsilon}^i(\underline{\xi}_n)$ $\dot{\epsilon}^{i+1}(\underline{\xi}_n) = \mathbb{S}(\underline{\xi}_n) * \sigma^{i+1}(\underline{\xi}_n)$	(3.47)

Le test de convergence appliqué est donné par (1.64) où $\epsilon^i(\underline{\xi}_n)$ est remplacé par le taux des déformations $\dot{\epsilon}^i(\underline{\xi}_n)$.

Le schéma (3.47) ne diffère du schéma (1.63) que par le premier terme de la série. Les résultats présentés au premier chapitre concernant le milieu de référence (voir section 1.3.3) s'appliquent donc toujours pour le problème d'écoulement. Pour les applications présentées dans la suite du chapitre, le milieu de référence utilisé est défini par $\mu_0 = 2\mu_M$. A convergence du schéma itératif, le taux des déformations est un champ compatible, on peut donc calculer le champ de vitesse qui lui est associé. En utilisant la condition d'incompressibilité ($\underline{v}(\underline{\xi}) \cdot \underline{\xi} = 0$), il vient :

$$\begin{aligned} \underline{v}(\underline{\xi}) &= -\frac{2i}{|\underline{\xi}|^2} \dot{\epsilon}(\underline{\xi}) \cdot \underline{\xi} & \text{pour : } \underline{\xi} \neq 0 \\ \underline{v}(\underline{\xi}) &=? & \text{pour : } \underline{\xi} = 0 \end{aligned} \quad (3.48)$$

À ce stade, le champ de vitesse est défini par ses coefficients de Fourier pour toutes les valeurs de $\underline{\xi}_n$, sauf pour $\underline{\xi}_n = 0$. Rappelons que $\underline{v}(\underline{\xi})$ pour $\underline{\xi} = 0$ correspond à la moyenne sur la cellule élémentaire du champ de vitesse, $\langle \underline{v}(\underline{x}) \rangle_V$, qui est exactement la grandeur recherchée en vue de la détermination du tenseur de perméabilité du milieu poreux périodique. D'autre part, le premier terme du schéma itératif $\Upsilon(\underline{\xi})$ reste indéterminé puisque les forces de volumes appliquées dans la phase solide n'ont pas été définies. La méthode employée pour déterminer ces efforts est décrite dans la section qui suit.

3.2.3 Détermination des efforts agissant dans la phase solide

Dans le schéma itératif décrit dans la section précédente, les forces ponctuelles $\underline{P}^{(m)}$ et les couples ponctuels $\underline{C}^{(m)}$ restent indéterminés. D'autre part la moyenne du champ de vitesse $\underline{V} = \langle \underline{v}(\underline{x}) \rangle_V$ reste également indéterminée à convergence du schéma itératif (3.39). On propose donc ici de décrire la méthodologie employée pour déterminer ces efforts et la moyenne du champ des vitesses.

Le champ des vitesses obtenu à partir de (3.48) est la solution du problème d'inhomogénéité (3.10) avec les forces de volume définies par (3.24). Compte tenu de la linéarité des équations, la solution pour le champ des vitesses peut s'écrire, dans le domaine de Fourier :

$$\begin{aligned} \forall \underline{\xi} \neq 0 : \underline{v}(\underline{\xi}) &= \underline{A}(\underline{\xi}) \cdot \underline{f}(\underline{\xi}) \\ \text{pour } \underline{\xi} = 0 : \underline{v}(\underline{\xi}) &= \underline{V} \end{aligned} \quad (3.49)$$

Les forces de volume sont définies par $6M$ forces ponctuelles pour une cellule élémentaire contenant M solides distincts. L'équilibre global de la cellule élémentaire est donné par l'équation (3.25). Elle se traduit par 3 équations scalaires pour les efforts ponctuels $\underline{P}^{(m)}$. Ceci signifie que le nombre d'efforts restant indéterminés est donc $6M - 3$. D'autre part la vitesse moyenne étant également indéterminée (soit trois inconnues supplémentaires), le champ de vitesse défini par (3.49) est donc défini par $6M$ inconnues.

Dans la suite, on choisit pour inconnues les forces $\underline{P}^{(m)}$ avec $m = 2..M$, la force $\underline{P}^{(1)}$ étant déterminée à partir de (3.25). On se propose de regrouper l'ensemble des inconnues dans un vecteur de dimension $6M$ noté $\{\lambda\}$:

$$\{\lambda\} = \left\{ \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ C_1^{(1)} \\ C_2^{(1)} \\ C_3^{(1)} \\ P_1^{(2)} \\ P_2^{(2)} \\ P_3^{(2)} \\ \dots \\ C_3^{(M)} \end{array} \right\} \quad (3.50)$$

On note par $\{\varphi\}$ le vecteur de dimension $6M$ regroupant les déplacements des corps rigides :

$$\{\varphi\} = \begin{Bmatrix} V_1^{(1)} \\ V_2^{(1)} \\ V_3^{(1)} \\ \Omega_1^{(1)} \\ \Omega_2^{(1)} \\ \Omega_3^{(1)} \\ V_1^{(2)} \\ V_2^{(2)} \\ V_3^{(2)} \\ \dots \\ \Omega_3^{(M)} \end{Bmatrix} \quad (3.51)$$

Compte tenu de (3.49), les déplacements rigides $\underline{V}^{(m)}$ et $\underline{\Omega}^{(m)}$ sont liés aux inconnues $\{\lambda\}$ par une relation affine :

$$\{\varphi\} = [A] \cdot \{\lambda\} + \{\varphi^0\} \quad (3.52)$$

Le vecteur $\{\varphi^0\}$ regroupe les déplacements observés dans les solides rigides $m = 1..M$ pour $\underline{V} = 0$, $\underline{P}^{(m)} = \underline{C}^{(m)} = 0$ pour $m = 1..M$.

Les efforts ponctuels $\underline{P}^{(m)}$ et $\underline{C}^{(m)}$ ainsi que la moyenne du champ des vitesses, regroupés dans le vecteur $\{\lambda\}$, sont donc obtenus en posant $\{\varphi\} = \{0\}$ (vecteur nul de dimension $6M$) et donc par la résolution du système linéaire :

$$[A] \cdot \{\lambda\} = -\{\varphi^0\} \quad (3.53)$$

Les composantes du vecteur $\{\varphi^0\}$ sont obtenues en résolvant le problème d'écoulement correspondant à $\{\lambda\} = \{0\}$. Les trois premières composantes de la matrice $[A]$ sont connues. En effet, les trois premières colonnes de la matrice $[A]$ sont associées aux inconnues V_1, V_2, V_3 . Or, toute augmentation d'une valeur $\Delta \underline{V}$ des composantes de \underline{V} entraîne la même augmentation $\Delta \underline{V}$ pour toutes les composantes de la vitesse $\underline{v}(\underline{x})$ et donc des déplacements rigides $\underline{V}^{(m)}$.

On peut donc écrire :

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ \dots & & & \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

Les autres colonnes de la matrice $[A]$ sont obtenues en résolvant $6M - 3$ problèmes d'écoulement définis par :

$$\{\lambda\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \{\lambda\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \dots \{\lambda\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3.55)$$

En résumé, la résolution d'un problème d'écoulement nécessite en fait la résolution de $6M - 2$ problèmes auxiliaires.

A titre d'exemple, lorsque la cellule contient une seule inclusion, la force $\underline{P}^{(1)}$ est nulle, compte tenu de la condition d'équilibre (3.25). Seules les composantes du couple $\underline{C}^{(1)}$ et de la vitesse macroscopique \underline{V} sont indéterminées, soit au total 6 inconnues. Le système linéaire (3.52) s'écrit donc (pour le cas tridimensionnel) :

$$\begin{Bmatrix} V_1^{(1)} \\ V_2^{(1)} \\ V_3^{(1)} \\ \Omega_1^{(1)} \\ \Omega_2^{(1)} \\ \Omega_3^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & A_{14} & A_{15} & A_{16} \\ 0 & 1 & 0 & A_{24} & A_{25} & A_{26} \\ 0 & 0 & 1 & A_{34} & A_{35} & A_{36} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & A_{45} & A_{46} \\ 0 & 0 & 0 & A_{54} & A_{55} & A_{56} \\ 0 & 0 & 0 & A_{64} & A_{65} & A_{66} \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ C_1^{(1)} \\ C_2^{(1)} \\ C_3^{(1)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} (V_1^{(1)})^0 \\ (V_2^{(1)})^0 \\ (V_3^{(1)})^0 \\ (\Omega_1^{(1)})^0 \\ (\Omega_2^{(1)})^0 \\ (\Omega_3^{(1)})^0 \end{Bmatrix} \quad (3.56)$$

Les composantes de $[A]$ et $\{\varphi^0\}$ sont obtenues en considérant dans (3.49) les chargements :

$$\begin{aligned} \text{chargement 1 : } & V_1 = V_2 = V_3 = 0, \quad C_1^{(1)} = 0, \quad C_2^{(1)} = 0, \quad C_3^{(1)} = 0 \\ \text{chargement 2 : } & V_1 = V_2 = V_3 = 0, \quad C_1^{(1)} = 1, \quad C_2^{(1)} = 0, \quad C_3^{(1)} = 0 \\ \text{chargement 3 : } & V_1 = V_2 = V_3 = 0, \quad C_1^{(1)} = 0, \quad C_2^{(1)} = 1, \quad C_3^{(1)} = 0 \\ \text{chargement 4 : } & V_1 = V_2 = V_3 = 0, \quad C_1^{(1)} = 0, \quad C_2^{(1)} = 0, \quad C_3^{(1)} = 1 \end{aligned} \quad (3.57)$$

Pour les problèmes bidimensionnels, le système est encore réduit puisque $C^{(1)} = C^{(2)} = V_{(3)} = 0$. Le nombre total de problèmes d'écoulement à résoudre peut être réduit lorsque la structure présente des symétries. C'est le cas notamment pour les problèmes traités dans la section suivante.

3.3 Validations de l'approche basée sur la TFR

Dans cette section on propose de mettre en oeuvre la méthode basée sur la TFR, décrite dans la section précédente, pour diverses configurations (écoulement à travers des réseaux de cylindres et sphères) et correspondant à des problèmes d'écoulement $2D$ et $3D$. Afin de valider l'approche, les résultats obtenus sont comparés avec des solutions issues de la littérature.

3.3.1 Écoulement à travers un réseau de cylindres

On considère un milieu périodique constitué de cylindres indéformables de section circulaire de rayon a ou de section carrée de côté $2a$, alignés suivant l'axe Ox_3 . Trois types de cellules sont étudiées ici et sont représentées sur la figure 3.1.

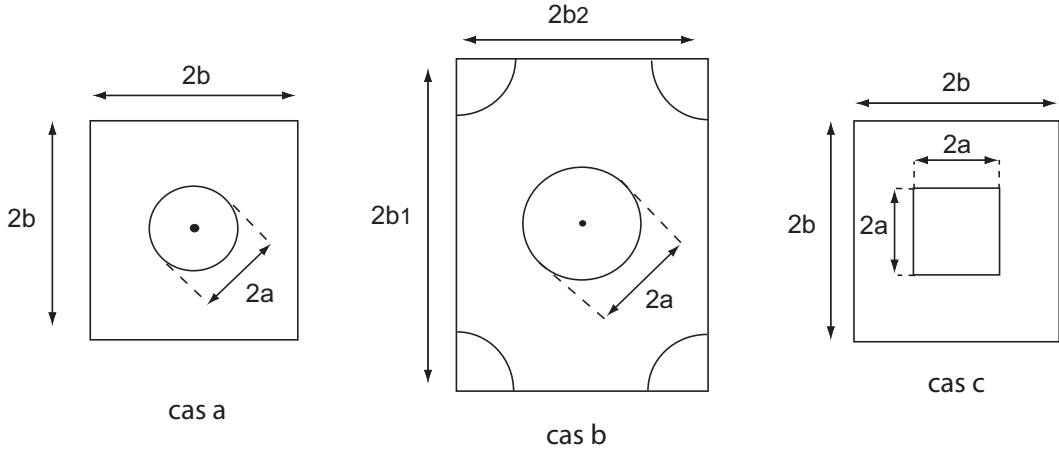


FIGURE 3.1 – Cellules élémentaire du milieu poreux périodique.

- a) Le premier exemple traité correspond à un arrangement carré de cylindres de section circulaire de rayon a . La cellule étudiée est définie sur la figure 3.1a.
- b) Le second exemple est celui du réseau hexagonal de cylindres de section circulaire de rayon a . La cellule élémentaire est définie par un rectangle de cotés $2b_1$ et $2b_2 = b_1\sqrt{3}$ respectivement suivant les axes x_1 et x_2 (cf. figure 3.1b).
- c) Le dernier exemple est représenté par la cellule élémentaire 3.1c. La microstructure étudiée correspond à un réseau carré de cylindres de section carrée de côté $2a$.

Compte tenu des symétries des cellules étudiées, le tenseur de perméabilité possède les propriétés suivantes $K_{11} = K_{22}$ et $K_{ij} = 0$ pour $i \neq j$. Les composantes K_{11} et K_{33} peuvent alors être obtenues par la résolution d'un problème plan et d'un problème anti-plan :

- Un écoulement transversal (problème plan) est généré en imposant le gradient de pression macroscopique $G_1 = 1$ et $G_2 = G_3 = 0$.
- Un écoulement longitudinal (problème anti-plan) est obtenu en imposant le gradient de pression macroscopique $G_3 = 1$ et $G_1 = G_2 = 0$.

Pour chacun des cas représentés sur la figure 3.1, les efforts ponctuels $\underline{P}^{(m)}$ et $\underline{C}^{(m)}$ sont nuls.

Dans les exemples a et c la cellule ne contient qu'une seule inclusion et l'on a donc, compte tenu de la condition d'équilibre (3.25), $\underline{P}^{(1)} = 0$. D'autre part, la cellule présente trois plans de symétries (les plans Ox_1x_2 , Ox_1x_3 et Ox_2x_3). Il n'est donc pas nécessaire

d'introduire un couple $\underline{C}^{(1)} = 0$ dans le solide rigide.

Dans le cas du réseau hexagonal (exemple *b*) la périodicité du réseau indique que les efforts ponctuels sont identiques pour tous les solides rigides. En utilisant la condition d'équilibre (3.25), on a donc $\underline{P}^{(m)} = 0$. D'autre part, pour les mêmes raisons de symétries que celles évoquées ci-dessus, les couples $\underline{C}^{(m)}$ sont également nuls.

Pour réaliser les calculs par la TFR, un nombre de vecteurs d'ondes $N = 64$ a été choisi. Sur la figure 3.2 est tracée la perméabilité normalisée, K_{11}/S (avec $S = 4b^2$ l'aire de la cellule élémentaire) en fonction du rapport a/b pour le cas de la cellule 3.1a. Sur la figure 3.3 est représentée la perméabilité longitudinale normalisée, K_{33}/S , en fonction du rapport a/b . A titre de validation, les résultats obtenus sont comparés avec ceux obtenus par Wang [81], Sangani et Acrivos [72], Sparrow et Loeffler [76], utilisant des développements en séries.

Les figures 3.4 et 3.5 présentent les résultats obtenus pour le cas 3.1b. Les comparaisons

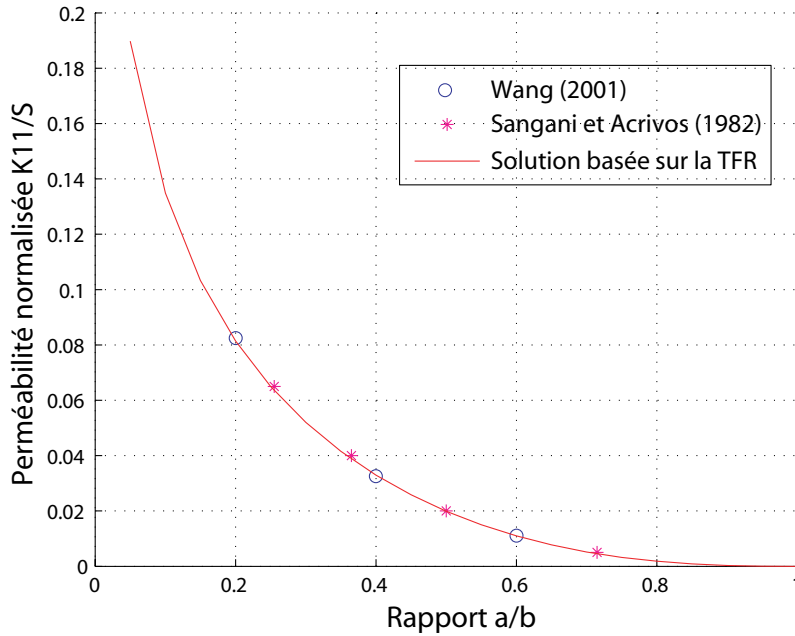


FIGURE 3.2 – Perméabilité normalisée K_{11}/S pour un écoulement transverse à travers un réseau de cylindres de section circulaire. Cas de l'arrangement carré.

avec des résultats issus de [81] valident les résultats obtenus par la TFR.

Enfin, sur les figures 3.6 et 3.7 on représente la perméabilité transverse et longitudinale normalisée en fonction du rapport a/b dans le cas d'une section carrée (cf. figure 3.1c). Des comparaisons avec les résultats issus des travaux de Wang [80] sont présentés dans le cas d'un écoulement transverse (c.f. figure 3.6).

3.3.2 Écoulement à travers un réseau de sphères

On se propose maintenant de valider l'approche basée sur la TFR dans le cas d'écoulement tridimensionnels à travers un réseau de sphères. On considère trois type de confi-

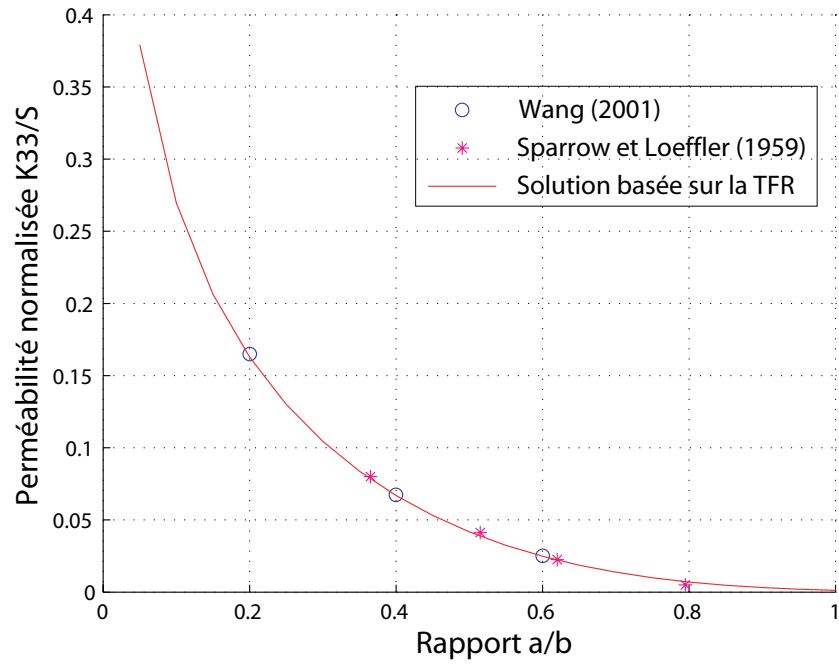


FIGURE 3.3 – Perméabilité normalisée K_{33}/S pour un écoulement longitudinal à travers un réseau de cylindres de section circulaire. Cas de l'arrangement carré.

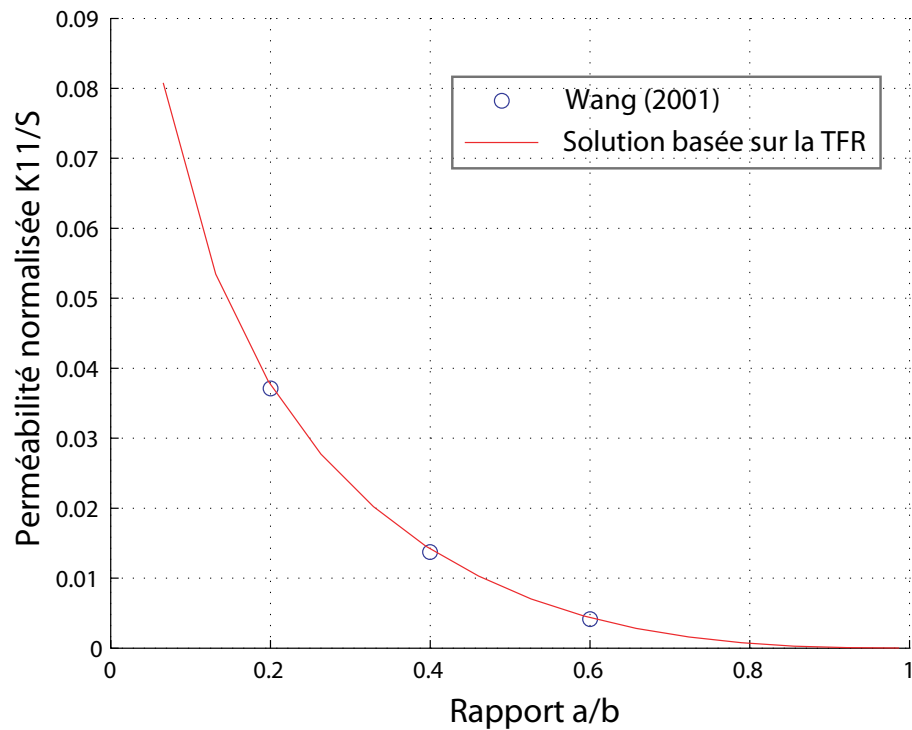


FIGURE 3.4 – Perméabilité normalisée K_{11}/S pour un écoulement transverse à travers un réseau de cylindres de section circulaire. Cas de l'arrangement hexagonal.

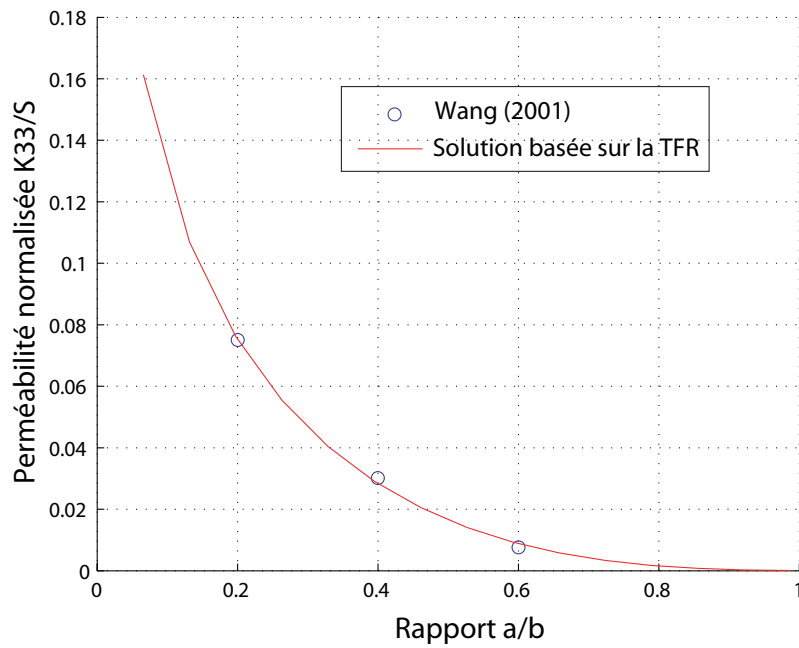


FIGURE 3.5 – Perméabilité normalisée K_{33}/S pour un écoulement longitudinal à travers un réseau de cylindres de section circulaire. Cas de l'arrangement hexagonal.

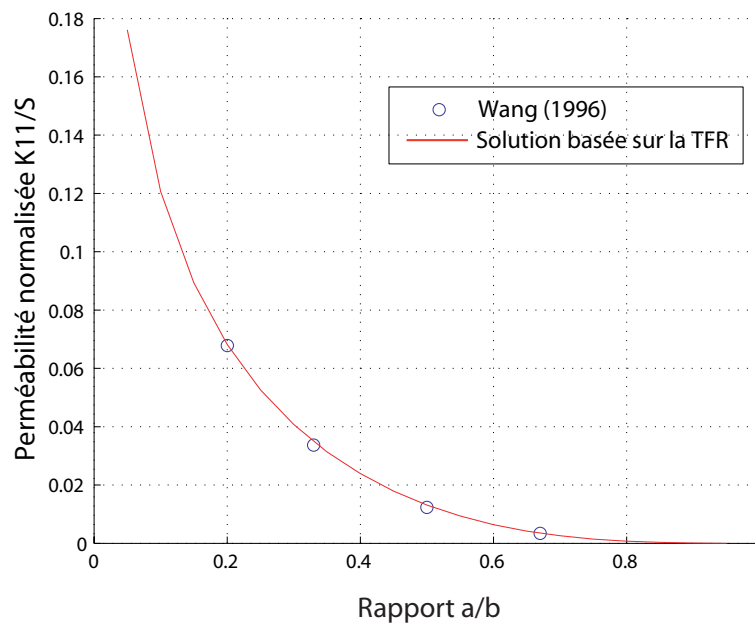


FIGURE 3.6 – Perméabilité normalisée K_{11}/S pour un écoulement transverse à travers un réseau de cylindres de section carrée.

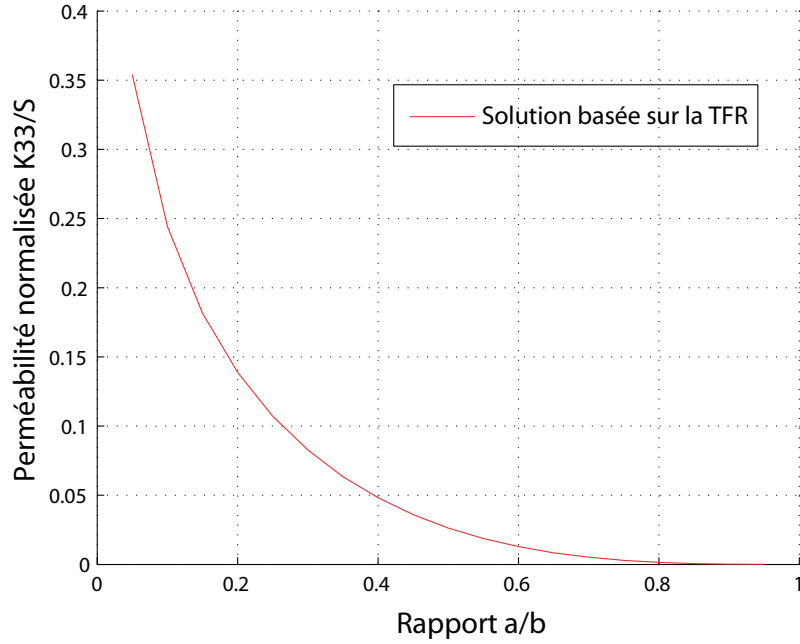


FIGURE 3.7 – Perméabilité normalisée K_{33}/S pour un écoulement longitudinal à travers un réseau de cylindres de section carrée.

gurations :

- L'arrangement cubique simple (CS). La cellule de base est définie par un cube de coté $2b$ et contient une sphère de rayon a . La concentration maximale est $\pi/6$ lorsque le rayon de la sphère atteint la valeur maximale $a = b$.
- L'arrangement cubique centré (CC). La cellule de base contient 2 sphère de rayon a . La concentration maximale est $\sqrt{3}\pi/8$ lorsque $a = b$.
- La structure cubique à faces centrées (CFC). La cellule contient 4 sphères de rayon a et la concentration est $\sqrt{2}\pi/6$. Il s'agit de la configuration la plus compacte.

Compte tenu des conditions de symétries des cellules de base, le tenseur de perméabilité est isotrope $K_{11} = K_{22} = K_{33}$ et $K_{ij} = 0$ pour $i \neq j$.

D'autre part, compte tenu des conditions de symétrie et de périodicité pour les cellules de bases considérées, la condition $\underline{v}(\underline{x}) = 0$ dans les inclusions est vérifiée pour $\underline{P}^{(m)} = 0$ et $\underline{C}^{(m)} = 0$.

Le cas d'un écoulement à travers des réseaux de sphères a été étudié par Sangani et Acrivos [73], Kadaksham et al. [45], Chapman et Higdon [25]. Ici, les résultats obtenus avec le schéma itératif sont comparés avec ceux de Chapman et Higdon [25]. Sur les figures 3.8, 3.9 et 3.10 on représente la perméabilité normalisée K_{33}/S (avec $S = 4b^2$) en fonction du rapport a/b (a étant le rayon des sphères rigides) pour chacune des configurations décrites ci-dessus.

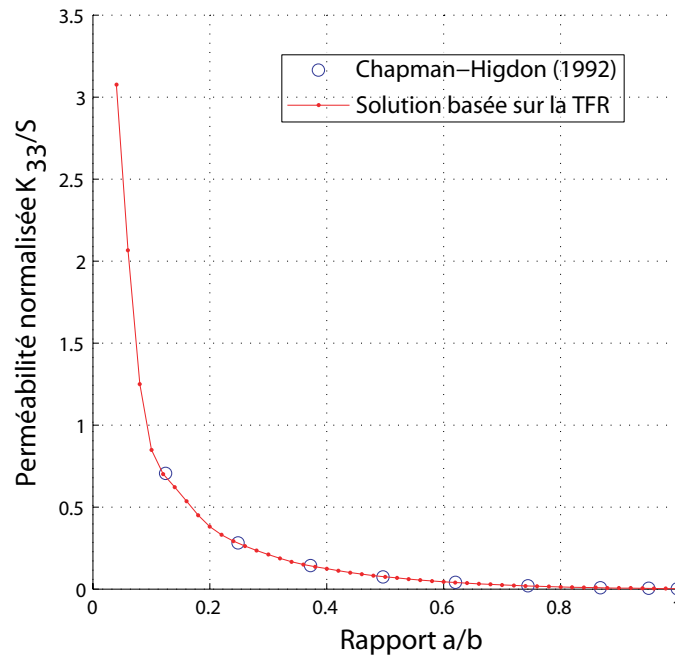


FIGURE 3.8 – Perméabilité normalisée K_{33}/S pour un réseau cubique simple de sphères.

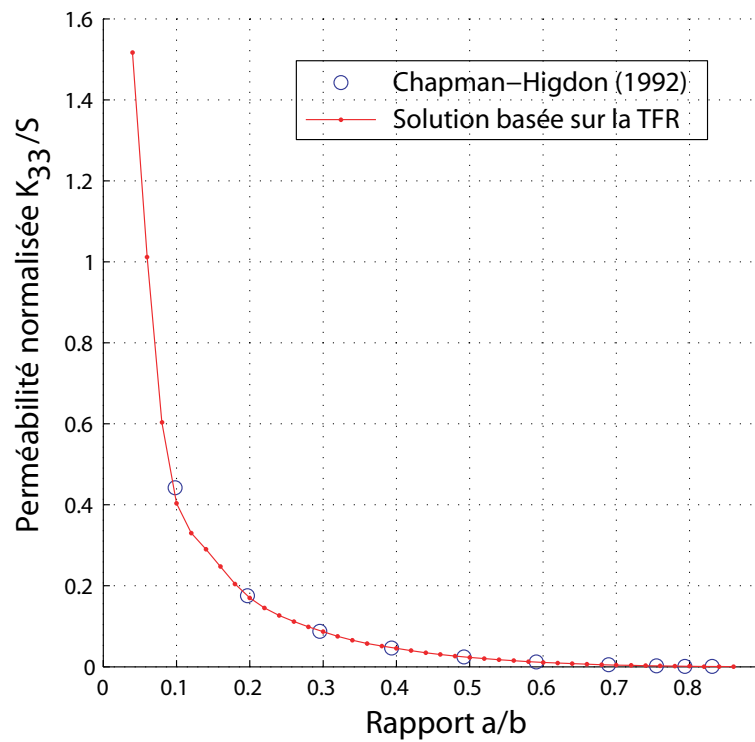


FIGURE 3.9 – Perméabilité normalisée K_{33}/S pour un réseau cubique centré de sphères.

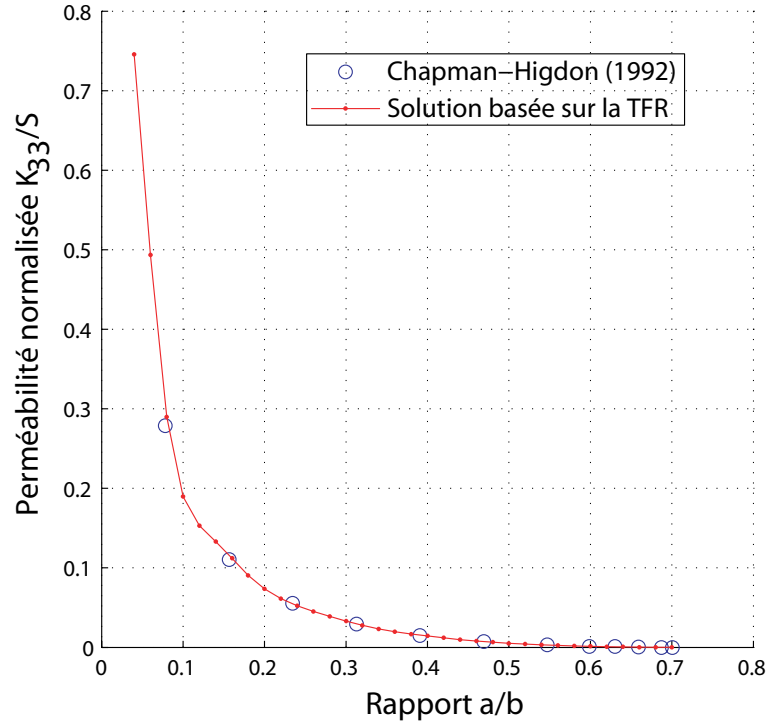


FIGURE 3.10 – Perméabilité normalisée K_{33}/S pour un réseau cubique à faces centrées de sphères.

3.4 Etude d'une cellule de base non symétrique

Dans les exemples traités précédemment, des configurations géométriques simples ont été considérées pour déterminer la perméabilité. Ces exemples ont permis de valider la démarche. Néanmoins, pour chacun des exemples traités, on a pu montrer que les conditions de symétrie nous amenaient à considérer des efforts ponctuels, $\underline{P}^{(m)}$ et $\underline{C}^{(m)}$, nuls. Afin de valider la procédure décrite en section 3.2.3, on se propose ici de traiter un exemple où ces efforts ponctuels sont non nuls.

On considère donc une cellule carrée de cotés $2b$ contenant deux cylindres indéformables de section circulaire de rayon a_1 et a_2 centrés en $(X_1^{(m)}, X_2^{(m)})$ pour $m = 1, 2$. Le cylindre rigide $m = 1$ est centré à l'origine, on pose donc $X_1^{(1)} = X_2^{(1)} = 0$. Les rayons des cylindres sont définis par : $a_1/b = 0.2$ et $a_2/b = 0.1$. L'écoulement est provoqué en imposant le gradient de pression G_1 .

On se propose de décrire les sollicitations élémentaires conduisant à la détermination de la matrice $[A]$ et du vecteur $\{\varphi^0\}$ dans (3.53) :

La première sollicitation correspond au gradient de pression $G_1 = 1$ imposé dans la phase fluide, les forces de volume $\underline{f}(\underline{x})$ en tout point \underline{x} de la cellule élémentaire sont données par (3.15) ou (3.16).

Les quatre autres chargements élémentaires sont décrits sur la figure 3.12 :

- Le second chargement correspond à une force $P_1^{(1)} = F$ (avec $F = 1$) imposée à l'inclu-

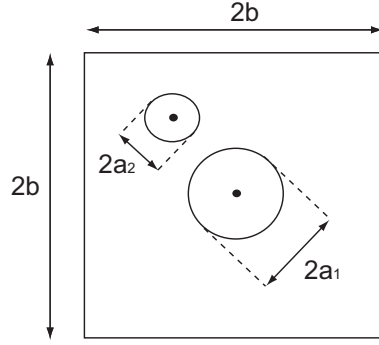


FIGURE 3.11 – Cellule élémentaire constituée de deux cylindres de rayons a_1 et a_2 .

sion $m = 1$ et une force $P_1^{(2)} = -F$ imposée à l'inclusion $m = 2$.

- Le troisième chargement correspond à une force $P_2^{(1)} = F$ (avec $F = 1$) imposée à l'inclusion $m = 1$ et une force $P_2^{(2)} = -F$ imposée à l'inclusion $m = 2$.
- Le quatrième correspond à un couple $\underline{C}^{(1)} = C\underline{e}_3$ imposé à l'inclusion $m = 1$ (avec $C = 1$).
- Le dernier chargement est défini par un couple $\underline{C}^{(2)} = C\underline{e}_3$ imposé à l'inclusion $m = 2$ (avec $C = 1$).

Le premier chargement détermine le vecteur $\{\varphi\}$ dans (3.52). Les quatre chargements suivants, permettent de calculer les composantes de la matrice $[A]$ dans (3.52). Les forces ponctuelles et la moyenne du champ des vitesses sont alors obtenus par la relation (3.53).

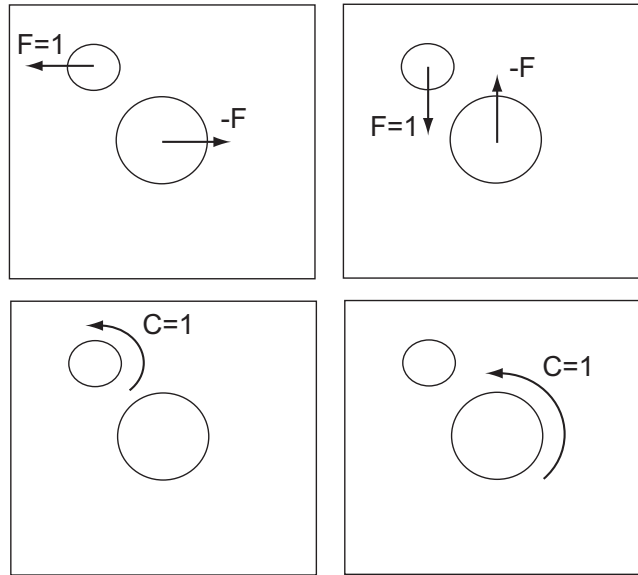


FIGURE 3.12 – Chargements élémentaires pour la cellule constituée de deux cylindres

A titre d'exemple, on considère la configuration suivante : $a_1/b = 0.2$, $a_2/b = 0.1$, $X_1^{(1)} = X_2^{(1)} = 0$ et $X_1^{(2)} = X_2^{(2)} = 0.6b$. Les figures 3.13, 3.14, 3.15, 3.16, 3.17 représentent

la vitesse locale normalisée $\bar{v}_1(\underline{x}) = v_1(\underline{x})\mu_p/(G_1S)$ en fonction des coordonnées x_1, x_2 pour chacun des chargements élémentaires.

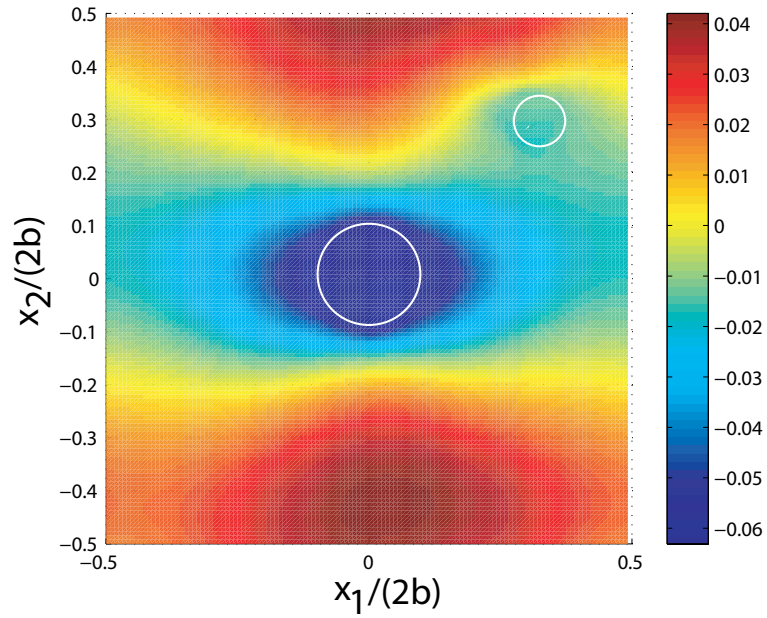


FIGURE 3.13 – Vitesse locale normalisée $\bar{v}_1(\underline{x}) = v_1(\underline{x})\mu_p/(G_1S)$ en fonction des coordonnées x_1, x_2 . Chargement 1 : $f_1 = G_1$ imposé dans la phase fluide et $f_1 = -(1 - f)/fG_1$ imposé dans la phase solide.

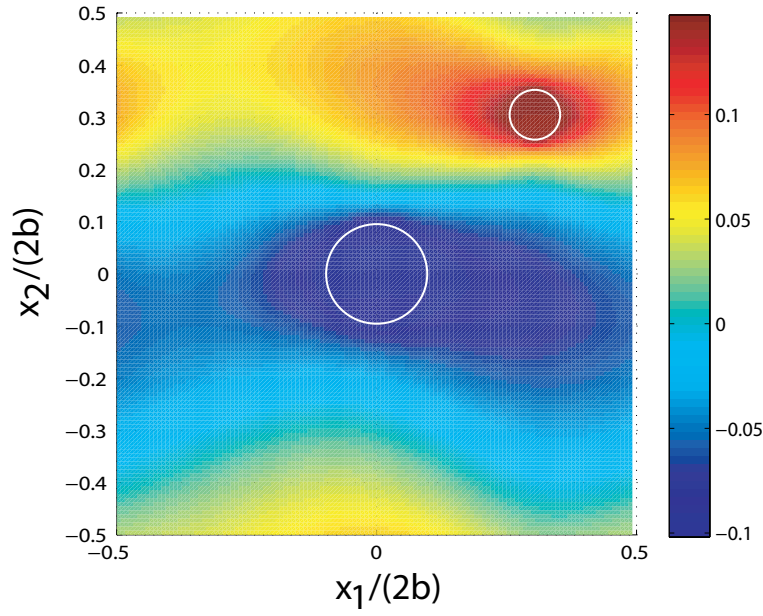


FIGURE 3.14 – Vitesse locale normalisée $\bar{v}_1(\underline{x}) = v_1(\underline{x})\mu_p/(G_1S)$ en fonction des coordonnées x_1, x_2 . Chargement 2 : $P_1^{(1)} = -P_1^{(2)} = 1$.

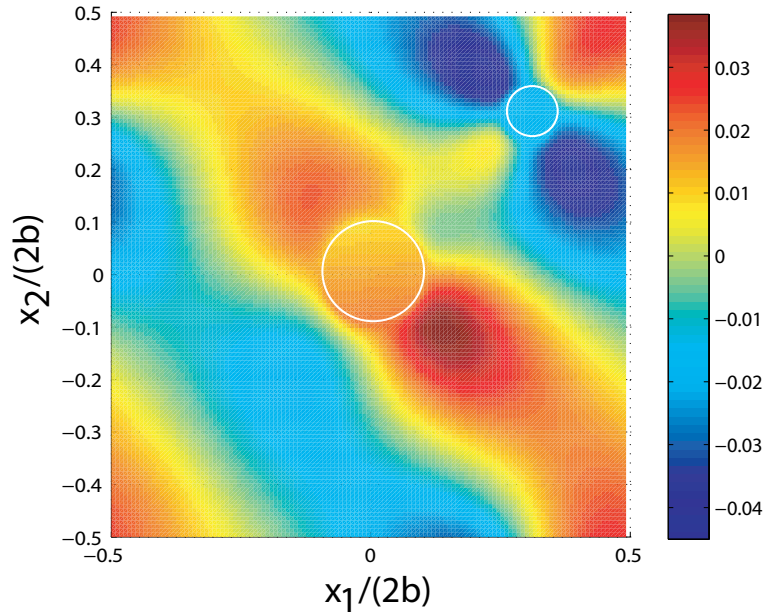


FIGURE 3.15 – Vitesse locale normalisée $\bar{v}_1(\underline{x}) = v_1(\underline{x})\mu_p/(G_1S)$ en fonction des coordonnées x_1, x_2 . Chargement 3 : $P_2^{(1)} = -P_2^{(2)} = 1$.

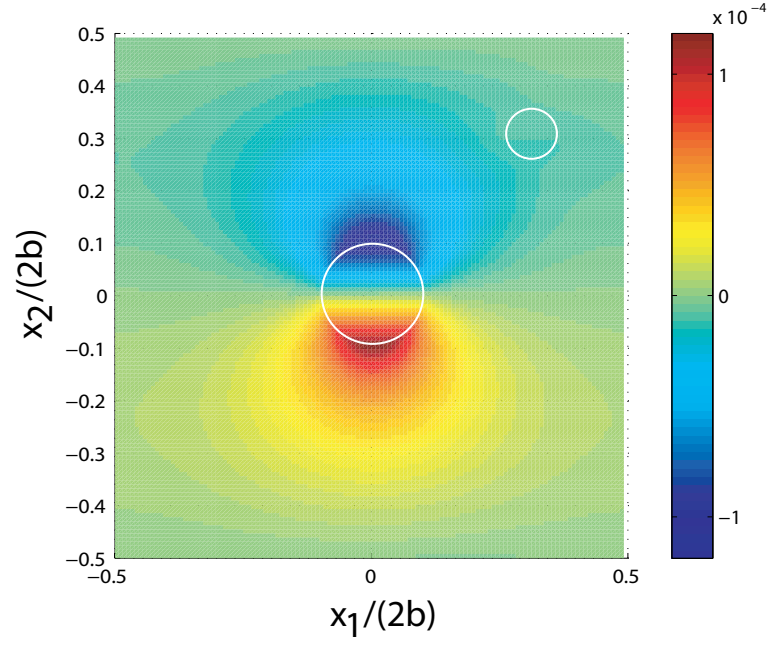


FIGURE 3.16 – Vitesse locale normalisée $\bar{v}_1(\underline{x}) = v_1(\underline{x})\mu_p/(G_1 S)$ en fonction des coordonnées x_1, x_2 . Chargement 4 : $C_3^{(1)} = 1$.

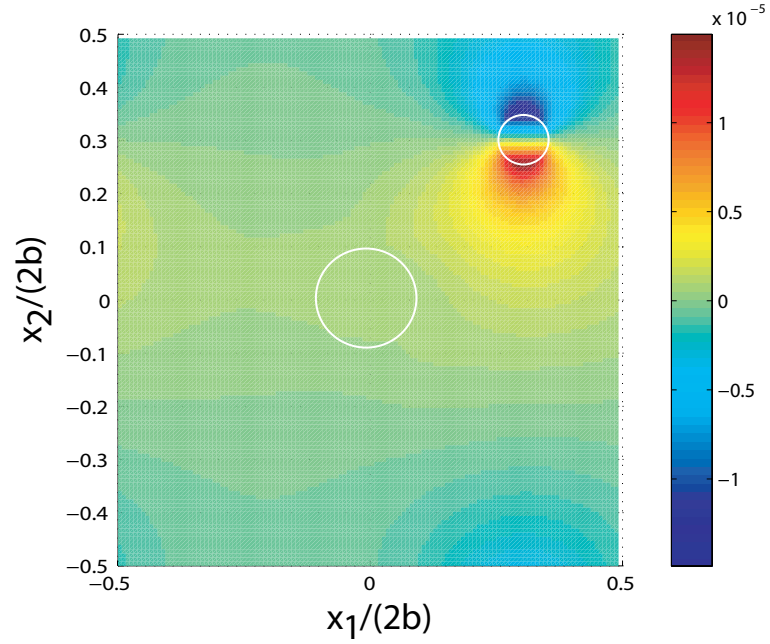


FIGURE 3.17 – Vitesse locale normalisée $\bar{v}_1(\underline{x}) = v_1(\underline{x})\mu_p/(G_1 S)$ en fonction des coordonnées x_1, x_2 . Chargement 5 : $C_3^{(2)} = 1$.

La solution exacte du problème d'écoulement est donc définie comme la somme d'un

champ uniforme V_1 et d'une combinaison linéaire des cinq champs représentés sur les figures 3.13, 3.14, 3.15, 3.16 et 3.17.

On se propose maintenant de mettre en oeuvre la méthode pour différentes configurations géométriques de la cellule élémentaire. Sur la figure 3.18 on représente la perméabilité transverse K_{11}/S (avec $S = 4b^2$) en fonction de la position $X_1^{(2)}$ de l'inclusion $m = 2$. La coordonnée $X_2^{(2)}$ étant prise égale à $0.3b$, $0.6b$ puis $0.9b$.

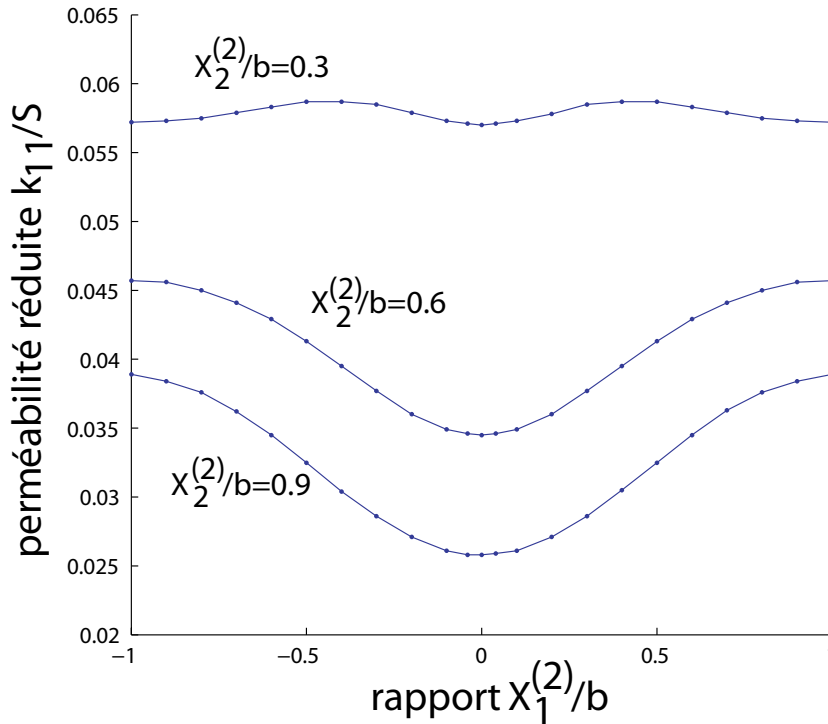


FIGURE 3.18 – Perméabilité transverse normalisée K_{11}/S en fonction de la position $X_2^{(2)}/b$ pour diverses valeurs de $X_1^{(2)}/b$

Sur la figure 3.19 on représente la perméabilité transverse K_{11}/S (avec $S = 4b^2$) en fonction de la position $X_2^{(2)}$ de l'inclusion $m = 2$. La coordonnée $X_1^{(2)}$ étant prise égale à $0.3b$, $0.6b$ puis $0.9b$.

Notons que, la cellule étudiée ne possédant plus de symétrie par rapport à ses axes Ox_1 et Ox_2 , la composante K_{12} du tenseur de perméabilité est non nulle. En outre, on représente sur la figure 3.20 la perméabilité transverse K_{12}/S (avec $S = 4b^2$) en fonction de la position $X_2^{(2)}$ de l'inclusion $m = 2$. La coordonnée $X_1^{(2)}$ étant prise égale à $0.3b$, $0.6b$ puis $0.9b$.

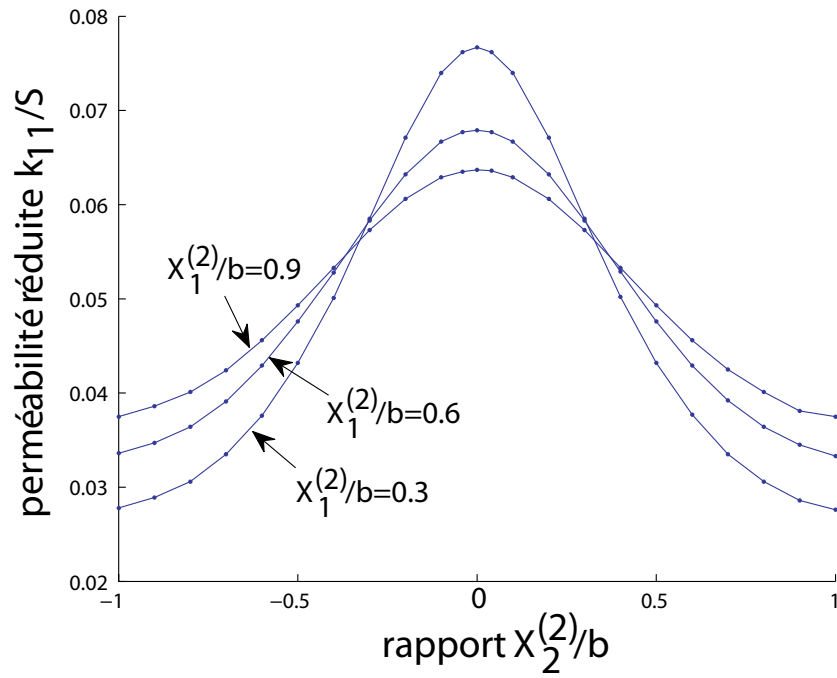


FIGURE 3.19 – Perméabilité transverse normalisée K_{11}/S en fonction de la position $X_1^{(2)}/b$ pour diverses valeurs de $X_2^{(2)}/b$

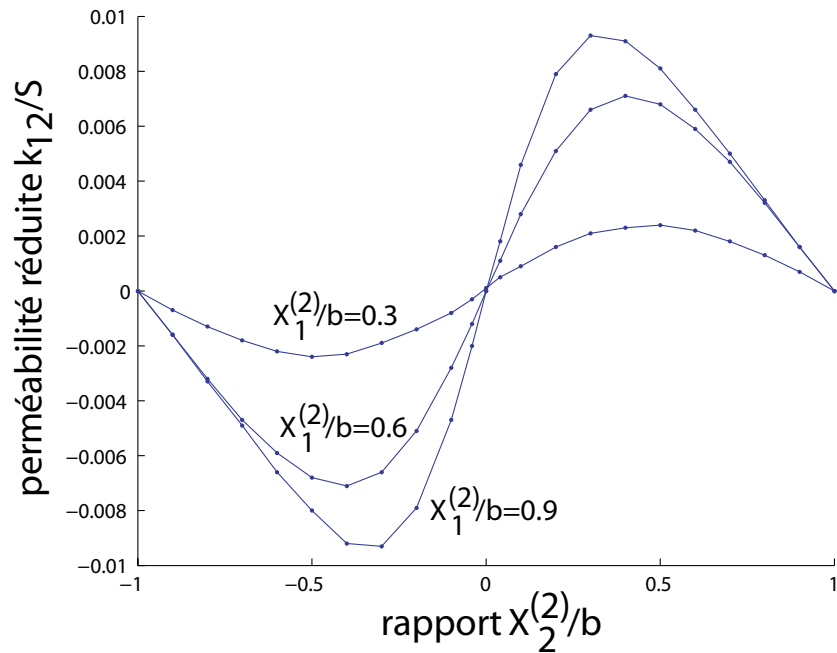


FIGURE 3.20 – Perméabilité transverse normalisée K_{12}/S en fonction de la position $X_1^{(2)}/b$ pour diverses valeurs de $X_2^{(2)}/b$

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons proposé une méthode numérique originale pour la détermination de la perméabilité de milieux poreux périodiques en régime statique. Pour cela nous avons étendu la méthode basée sur la TFR, initialement introduite pour la détermination des propriétés effectives des milieux composites, au cas de l'écoulement d'un fluide régi par les équations de Stokes.

La résolution du problème d'écoulement utilise un schéma en contrainte, adapté pour traiter le cas des contrastes infinis. L'écoulement est alors provoqué en imposant un gradient de pression dans la phase fluide.

L'introduction d'efforts ponctuels dans les solides rigides constitue une particularité liée à la nature du chargement imposé à la cellule élémentaire. Une méthodologie rigoureuse pour la détermination de ces efforts ponctuels a été présentée dans la section 3.2.3. La mise en oeuvre de la méthode et les comparaisons avec des résultats issus de la littérature pour des écoulement plans et tridimensionnels ont permis de valider la démarche.

Chapitre 4

Extension au contexte dynamique et prise en compte du glissement

On propose deux extensions de la méthode proposée au chapitre précédent pour la détermination de la perméabilité de milieux poreux périodiques.

Dans la première section on remplace la condition d'adhérence par une condition de glissement sur la surface du squelette solide. Ce type de condition aux limites est considéré notamment dans les écoulements de gaz raréfiés à faible nombre de Knudsen [46], [28], [83]. Les premières conditions aux limites traduisant un glissement de vitesse à la paroi ont été établies par Maxwell [54]. Le cadre usuel de l'homogénéisation des milieux poreux périodique (cf. introduction du chapitre 3) a été étendu par Allaire [4], Cioranescu et al. [27], [8] pour des conditions de glissement sur la paroi des solides. Dans le cadre d'une approche par la TFR, la condition de glissement sur la paroi introduit une discontinuité du champ de vitesses à l'interface solide/fluide. La méthodologie employée pour introduire cette discontinuité consiste à remplacer l'interface imparfaite par une interphase souple équivalente. La méthodologie employée est basée sur les travaux de [11, 12] que l'on étend ici au contexte des milieux poreux. On montre alors qu'une discontinuité du champ de vitesses peut être obtenue en introduisant une fonction de forme associée à l'interface fluide/solide. Nos résultats ont pu être validés à l'aide d'autres résultats issus de la littérature.

Dans la seconde section on propose de prendre en compte les effets dynamiques. On remplace les équations de Stokes par les équations de Navier-Stokes linéarisées en présence d'une source externe d'excitation de nature harmonique. Le cadre de l'homogénéisation des milieux poreux périodique a été étendu par [51, 6, 23] au contexte de la dynamique et rappelé brièvement dans la deuxième partie du chapitre. On présente ensuite la méthode numérique basée sur la TFR, que l'on valide par des comparaisons avec la solution exacte dans le cas d'un écoulement dans un tube cylindrique.

4.1 Prise en compte du glissement à l'interface solide/fluide

4.1.1 Description du problème

Les équations de Stokes et les conditions aux limites sont données par :

$$\begin{cases} \mu_p \Delta \underline{v}(\underline{x}) + \nabla p(\underline{x}) = 0 & \forall \underline{x} \in V_p \\ \operatorname{div}(\underline{v}(\underline{x})) = 0 & \forall \underline{x} \in V_p \\ v_n(\underline{x}) = 0, \quad v_t(\underline{x}) = c \nabla_n v_t(\underline{x}) & \forall \underline{x} \in \partial V_s \end{cases} \quad (4.1)$$

Dans l'équation ci-dessus $v_n(\underline{x}) = \underline{v}(\underline{x}) \cdot \underline{n}$ représente la composante normale du champ des vitesses $\underline{v}(\underline{x})$ à l'interface fluide/solide (désignée par ∂V_s). Le vecteur \underline{n} définit le vecteur unitaire pris sur l'interface ∂V_s et orienté du solide vers le fluide. Par $v_t(\underline{x})$ on désigne la composante tangentielle du champ des vitesses prise à l'interface ∂V_s et par ∇_n on définit la composante normale du gradient, $\nabla_n = \nabla \cdot \underline{n}$. Enfin, c est un paramètre du modèle d'interface ayant la dimension d'une longueur.

L'écoulement est provoqué en imposant le gradient de pression macroscopique \underline{G} (cf. équation (3.2)). Compte tenu de la linéarité des équations, la moyenne du champ des vitesses est liée au chargement imposé par une loi linéaire :

$$\underline{V} = \langle \underline{v}(\underline{x}) \rangle_V = \underline{K} \cdot \underline{G} \quad (4.2)$$

\underline{K} est le tenseur de perméabilité et (4.2) est une loi de Darcy. Ceci étant vrai parce que la moyenne $\langle \underline{v}(\underline{x}) \rangle_V$ exprime ici toujours un flux.

4.1.2 Le problème avec interphase équivalente

En élasticité, une interface est dite parfaite entre deux solides si le champ de déplacement et le vecteur contrainte sont continus à la traversée de cette surface. Dans le cas d'une interface imparfaite, le déplacement et/ou la contrainte sont discontinus à la traversée de celle-ci. Deux cas particuliers sont généralement considérés :

- une interface pour laquelle le champ de déplacement est discontinu tandis que le vecteur contrainte reste continu. Le saut du champ des déplacements est alors relié linéairement au vecteur contrainte agissant sur l'interface.
- une interface caractérisée par une discontinuité du vecteur contrainte, le déplacement étant maintenu continu à la traversée de la surface de contact. Le saut du champ des contraintes étant alors donné par une loi de type Young-Laplace étendu au contexte de l'élasticité [40], [69].

Récemment, les travaux de Karlbring et Mochvan [47],[48], Bovik [19], Benveniste et Miloh [11] et Benveniste [12], Hashin [42] ont montré qu'une interface imparfaite apparaît comme le cas limite d'une interphase souple ou rigide. Une interphase est définie par une couche de matière d'épaisseur constante h , petite devant les tailles caractéristiques de la microstructure et située entre la matrice et l'inclusion (cf. figure 4.1). Les modules élastiques de la matrice et de l'inclusion sont respectivement notés λ_M, μ_M et λ_I, μ_I . Les modules de

l'interphase différent de ceux des deux milieux environnants et sont notés λ_h, μ_h ⁴. Le cas

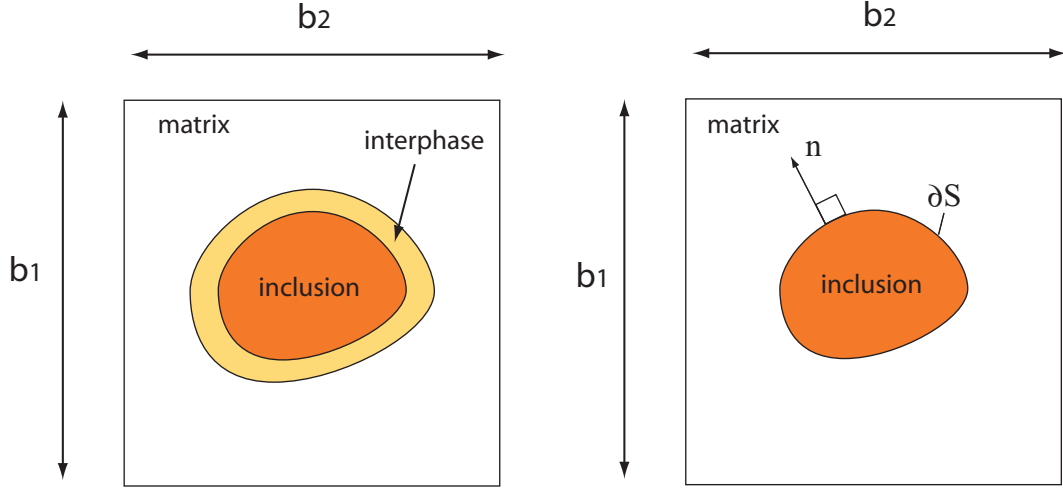


FIGURE 4.1 – Modèle à trois phases - Interface imparfaite équivalente

particulier d'une interphase "rigide" correspond à $\lambda_h = \lambda_{\partial S}/h$ et $\mu_h = \mu_{\partial S}/h$, où $\lambda_{\partial S}$ et $\mu_{\partial S}$ sont supposés rester finis lorsque la limite $h \rightarrow 0$ est considérée. Le cas d'une interphase "souple", qui nous intéresse plus particulièrement ici, correspond à $\lambda_h = h\lambda_{\partial S}$ et $\mu_h = h\mu_{\partial S}$ ($\lambda_{\partial S}$ et $\mu_{\partial S}$ restent finis lorsque la limite $h \rightarrow 0$ est prise). Dans ce dernier cas, on montre que l'interphase peut être remplacée par une interface imparfaite induisant un saut du champ de déplacement défini par :

$$\begin{cases} [u_n(\underline{x})]_{\partial S} = \frac{1}{\lambda_{\partial S} + 2\mu_{\partial S}} t_n(\underline{x}) \\ [u_t(\underline{x})]_{\partial S} = \frac{1}{2\mu_{\partial S}} t_t(\underline{x}) \end{cases} \quad (4.3)$$

Où $u_n(\underline{x})$ et $u_t(\underline{x})$ sont respectivement la composante normale et tangentielle du champ de déplacement. Par $[a(\underline{x})]_S$ on définit le saut de la quantité $a(\underline{x})$ à la traversée de ∂S :

$$[a(\underline{x})]_{\partial S} = a^+(\underline{x}) - a^-(\underline{x}) \quad (4.4)$$

où l'exposant + fait référence à la matrice et l'exposant - à l'inclusion.

Considérons le cas particulier suivant :

- L'interphase est incompressible ($\lambda_{\partial S} \rightarrow +\infty$), la composante normale du champ de déplacement reste continue à la traversée de ∂S , $[u_n(\underline{x})]_{\partial S} = 0$. On a donc $u_n^+(\underline{x}) = u_n^-(\underline{x})$.
- L'inclusion est rigide et le déplacement est nul en tout point de l'inclusion, alors $u_n^+(\underline{x}) = u_n^-(\underline{x}) = 0$ et $u_t(\underline{x})^- = 0$.
- La matrice est incompressible, la composante tangentielle $t_t^+(\underline{x})$ du vecteur contrainte peut être reliée au gradient de la composante tangentielle du déplacement, $u_t(\underline{x})$, par :

$$t_t(\underline{x}) = 2\mu_M \varepsilon_{tn}(\underline{x}) = \mu_M \nabla_n u_t^+(\underline{x}) \quad (4.5)$$

4. L'interphase est supposée isotrope. Le cas d'une interphase anisotrope a été traité par Benveniste [12]

où μ_M est le module de cisaillement de la matrice.

Sous ces conditions les composantes du champ de déplacement à l'interface sont données par :

$$u_n^+(\underline{x}), \quad u_t^+(\underline{x}) = \frac{\mu_M}{\mu_{\partial s}} \nabla_n u_t^+(\underline{x}) \quad (4.6)$$

qui correspond exactement à la dernière relation dans (4.1) en remplaçant μ_M par μ_p , le champ de déplacement par le champ de vitesses et en posant $\mu_{\partial s} = \mu_p/c$.

En résumé la condition de glissement à l'interface fluide/solide peut être obtenue en considérant une interphase incompressible, de viscosité dynamique $\mu_h = \mu_p h/c$ et d'épaisseur h petite devant la taille caractéristique de la microstructure (taille des pores, de la cellule élémentaire...).

4.1.3 Le schéma itératif

La condition de glissement est donc introduite en remplaçant le système d'équations (4.1) par le système d'équations (3.10) dans lequel le tenseur d'ordre quatre $\mathbb{S}(\underline{x})$ est donné par :

$$\mathbb{S}(\underline{x}) = \frac{1}{2\mu(\underline{x})} \mathbb{K} \quad \text{avec : } \mu(\underline{x}) = \begin{cases} \mu_p & \forall \underline{x} \in V_p \\ \mu_h = \frac{\mu_p h}{c} & \forall \underline{x} \in V_h \\ +\infty & \forall \underline{x} \in V_s \end{cases} \quad (4.7)$$

Où V_h désigne le volume de l'interphase. Lorsque la limite $h \rightarrow 0$ est considérée dans (4.7), le tenseur $\mathbb{S}(\underline{x})$ s'écrit :

$$\mathbb{S}(\underline{x}) = \left(\frac{1}{2\mu_p} I_p(\underline{x}) + \frac{c}{2\mu_p} \delta_s(\underline{x}) \right) \mathbb{K} \quad (4.8)$$

Où $\delta_s(\underline{x})$ est la fonction de Dirac associée à l'interface ∂V_s . Lorsque la transformée de Fourier exacte est remplacée par la transformée de Fourier Discrète (1.50), le tenseur $\mathbb{S}(\underline{x})$ est remplacé par $\mathbb{S}(\underline{x}_n)$ dans le schéma itératif, les \underline{x}_n représentant les positions des points de la grille dans le domaine réel. Or, l'utilisation d'une grille régulière suggère, qu'hormis dans le cas de microstructures très particulières, les points \underline{x}_n n'appartiennent pas à l'interface comme schématisé sur la figure 4.2. Une description du tenseur $\mathbb{S}(\underline{x})$ dans le domaine réel ne permet donc pas de prendre en compte la présence d'une interface imparfaite et donc la condition de glissement.

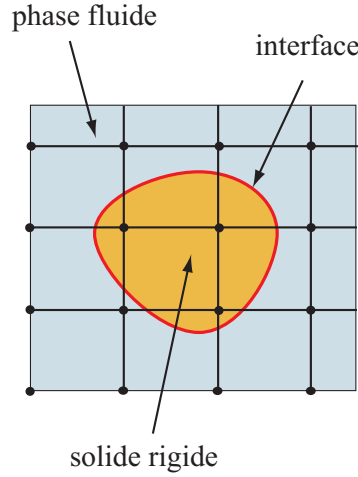


FIGURE 4.2 – Cellule élémentaire du milieux poreux avec interface imparfaite.

Considérons plutôt la transformée de Fourier de $\mathbb{S}(\underline{x})$ dans le domaine de Fourier :

$$\mathbb{S}(\underline{\xi}) = \frac{1}{2\mu_p} \left(I_p(\underline{\xi}) + \frac{c}{h} I_h(\underline{\xi}) \right) \mathbb{K} \quad (4.9)$$

où $I_p(\underline{\xi})$ et $I_h(\underline{\xi})$ sont les fonctions de forme associées au volume V_p et V_h respectivement. Le passage à la limite $h \rightarrow 0$ donne :

$$\mathbb{S}(\underline{\xi}) = \frac{1}{2\mu_p} \left(I_p(\underline{\xi}) + \eta I_{\partial s}(\underline{\xi}) \right) \mathbb{K} \quad (4.10)$$

Où η est un paramètre adimensionnel défini par $\eta = c/l$, l étant une taille caractéristique de l'inclusion. $I_{\partial s}(\underline{\xi})$ est la fonction de forme de l'interface ∂V_s , définie par :

$$I_{\partial s}(\underline{\xi}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{l}{h} I_h(\underline{\xi}) = \frac{l}{V} \int_{\partial V_s} \exp(i\underline{\xi} \cdot \underline{x}) dS \quad (4.11)$$

Des expressions analytiques de l'intégrale (4.11) peuvent être obtenues lorsque la phase V_s possède une forme géométrique simple. A titre d'exemple, considérons le cas d'une cellule carrée de cotés $2b$ contenant un cylindre de rayon a centré à l'origine. La fonction de forme associée à l'interface ∂V_s peut être déduite de l'expression (1.59). En effet :

$$\begin{aligned} I_{\partial s}(\underline{\xi}) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a}{h} \left(\frac{\pi(a+e)}{2b^2 \|\underline{\xi}\|} J_1((a+e)\|\underline{\xi}\|) - \frac{\pi a}{2b^2 \|\underline{\xi}\|} J_1(a\|\underline{\xi}\|) \right) \\ &= \frac{\pi a^2}{2b^2} J_0(a\|\underline{\xi}\|) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Lorsque l'interface ∂V_s est de forme quelconque, la fonction de forme $I_{\partial s}(\underline{\xi})$ peut être obtenue numériquement par discrétisation de la surface (cf. figure 4.3).

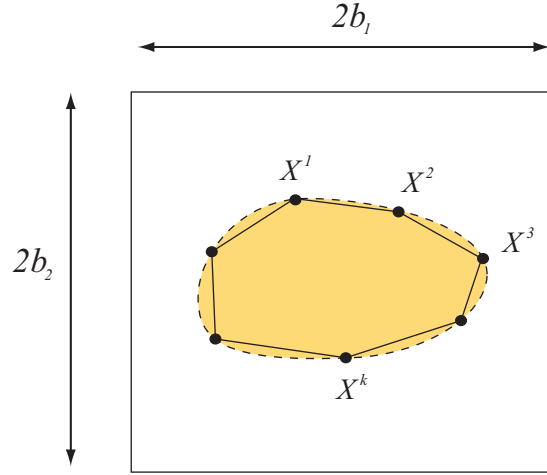


FIGURE 4.3 – Discrétisation de l'interface fluide/solide.

Dans le cas $2D$, la fonction de forme peut être obtenue par la relation :

$$I_{\partial s}(\underline{\xi}) = \sum_{n=1}^{K-1} \frac{\exp(i\underline{\xi} \cdot \underline{X}^{k+1}) - \exp(i\underline{\xi} \cdot \underline{X}^k)}{i\underline{\xi} \cdot (\underline{X}^{k+1} - \underline{X}^k)} |\underline{X}^{k+1} - \underline{X}^k| \quad (4.13)$$

où les \underline{X}^k sont les positions des points de discrétisation.

En résumé, la prise en compte d'une condition de glissement à l'interface solide/fluide est obtenue en considérant dans le schéma itératif (3.47) le tenseur $\mathbb{S}(\underline{\xi})$ défini par (4.10). Dès lors, la démarche décrite dans le chapitre 3, pour la détermination de la perméabilité en régime statique, peut être ici reconduite. Il reste toutefois à préciser le choix du milieu de référence permettant d'assurer la convergence du schéma itératif. D'autre part, nous avons montré que la condition de glissement est prise en compte en introduisant la fonction de forme $I_{\partial s}(\underline{\xi})$ qui n'est autre que la transformée de Fourier de la fonction de Dirac associée à la surface ∂V_s . La représentation de la fonction de Dirac dans le domaine de Fourier nécessite d'utiliser un grand nombre de vecteurs d'ondes et par conséquent nous serons amenés à examiner l'influence de la résolution sur la solution du problème d'écoulement et sur le calcul de la perméabilité.

4.1.4 Le choix du milieu de référence

Il reste à définir le milieu permettant d'obtenir la convergence du schéma itératif. En annexe B, on démontre que la condition de convergence du schéma itératif, formulé en contrainte, est obtenue si :

$$\forall \underline{x} : \frac{1}{\mu_0} > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu} \right) (\underline{x}) \quad (4.14)$$

Or, le module de cisaillement $\mu(\underline{x})$ du milieu hétérogène est défini par une fonction de Dirac à l'interface fluide/solide, ce qui conduit, théoriquement, à la valeur $\mu_0 = +\infty$

comme milieu de référence. Toutefois, dans le schéma itératif, nous avons adopté une représentation dans le domaine de Fourier du module de cisaillement $\mu(\underline{x})$ (à l'aide de la fonction de forme $I_{\partial s}(\underline{\xi})$ défini par (4.11)). La condition de convergence est donc remplacée par :

$$\forall \underline{x}_n : \frac{1}{\mu_0} > \frac{1}{2} \mathcal{F}^{-1} \left[\left(\frac{1}{\mu} \right) (\underline{\xi}) \right] (\underline{x}_n) \quad (4.15)$$

où \mathcal{F}^{-1} est la Transformée de Fourier Discrète inverse et $(1/\mu)(\underline{\xi})$ est défini par :

$$\left(\frac{1}{\mu} \right) (\underline{\xi}) = \frac{1}{2\mu_p} (I_p(\underline{\xi}) + \eta I_{\partial s}(\underline{\xi})) \quad (4.16)$$

Dans les tables 4.1 et 4.2, on donne le nombre d'itérations à convergence en fonction du module de cisaillement du milieu de référence, μ_0 , et pour diverses valeurs de η . Un nombre de vecteurs d'onde égal à 32 a été considéré pour obtenir les résultats du tableau 4.1 et les résultats indiqués dans le tableau 4.2 ont été obtenus avec 64 vecteurs d'onde. On observe que le milieu de référence dépend de la valeur de η mais dépend également fortement du choix du nombre de vecteurs d'ondes N . En fait, la souplesse $\mathbb{S}(\underline{x})$ diverge localement aux interfaces lorsque la résolution augmente. Ceci est du au fait que l'interphase souple est remplacée par une fonction de Dirac lorsque l'on fait tendre l'épaisseur vers zéro. La figure 4.4 représente le rapport $\mu_p/\mu(\underline{x})$ en fonction de x_1 pour $x_2 = 0$. On observe effectivement que la raideur diverge lorsque l'on augmente la résolution.

$\eta = 0.1$	μ_p/μ_0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
	Nbre iter.	29	16	13	13	14	14
$\eta = 0.5$	μ_p/μ_0	4.5	5	5.5	6	6.5	7
	Nbre iter.	22	19	20	20	21	21
$\eta = 1$	μ_p/μ_0	8	8.5	9	9.5	10	10.5
	Nbre iter.	49	28	27	28	29	30

TABLE 4.1 – Nombre d'itérations à convergence en fonction de μ_p/μ_0 et η pour $N = 32$.

$\eta = 0.1$	μ_p/μ_0	1.9	2	2.1	2.2	2.3	2.4
	Nbre iter.	48	27	19	18	18	19
$\eta = 0.5$	μ_p/μ_0	8.5	9	9.5	10	10.5	11
	Nbre iter.	44	27	20	19	20	20
$\eta = 1$	μ_p/μ_0	16	17	18	19	20	21
	Nbre iter.	100	44	45	46	48	50

TABLE 4.2 – Nombre d'itérations à convergence en fonction de μ_p/μ_0 et η pour $N = 64$.

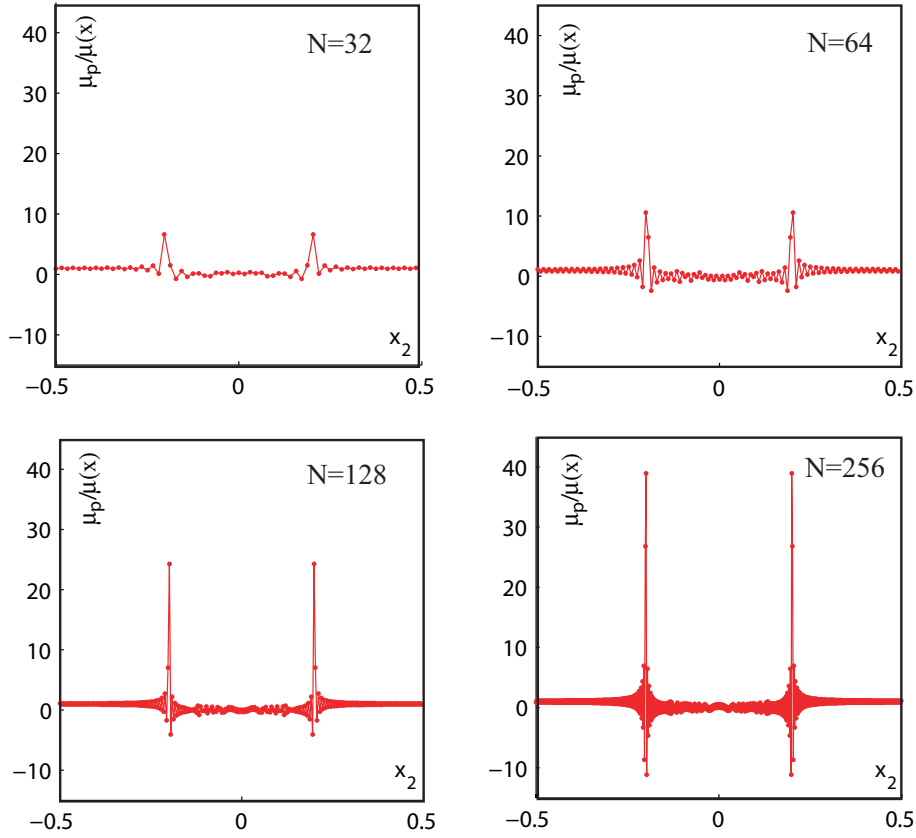


FIGURE 4.4 – Représentation de $\mu_p/\mu(\underline{x})$ en fonction de x_1 pour $x_2 = 0$ et pour diverses valeurs du nombre de vecteurs d'ondes N

On choisit pour milieu de référence optimal :

$$\forall \underline{x}_n : \frac{1}{\mu_0} = \frac{1}{2} \mathcal{F}^{-1} \left[\left(\frac{1}{\mu} \right) (\underline{\xi}) \right] (\underline{x}_n) + \frac{1}{2\mu_p} \quad (4.17)$$

qui respecte bien la condition de convergence (4.15). Le milieu de référence est donc évalué numériquement. On se propose maintenant de valider ce choix.

Sur la figure 4.5 on représente le rapport μ_p/μ_0 , correspondant au milieu de référence optimal, en fonction du paramètre η pour deux valeurs du nombre de vecteurs d'ondes N . Les points discrets (les étoiles) correspondent au milieu de référence optimal déterminé numériquement tandis que les lignes continues correspondent aux valeurs déduites de la relation (4.17). On notera que l'estimation du milieu de référence optimal obtenue avec la relation (4.17) est tout à fait satisfaisante.

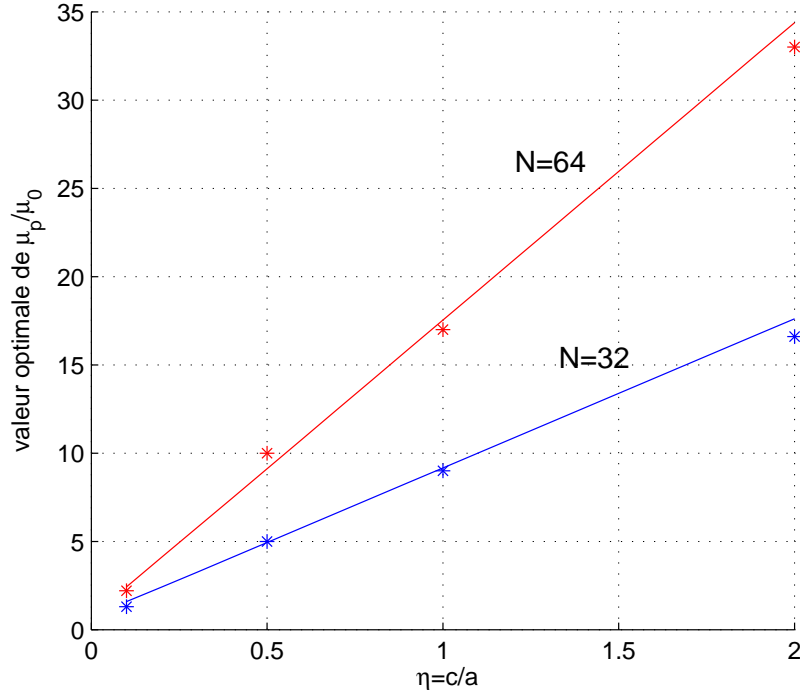


FIGURE 4.5 – Milieu de référence optimal en fonction de η pour $N = 32$ et $N = 64$.

4.1.5 Mise en oeuvre et comparaisons avec des résultats existants

On se propose de mettre en oeuvre la méthode dans le cas d'un écoulement à travers un réseau périodique de cylindres de rayons a . On considère la cellule élémentaire définie sur la figure 3.1a avec le rayon $a = 0.4b$. Sur la figure 4.6, on trace la vitesse normalisée $\bar{v}_1 = v_1 \mu_p / (G_1 S)$ en fonction de la position x_2/b pour $x_1 = 0$. Le cas $\eta = 0$ correspond à la condition d'adhérence sur les parois du squelette solide. Pour $\eta = 1$ on observe que le champ des vitesses est discontinu en $x_2 = \pm a$.

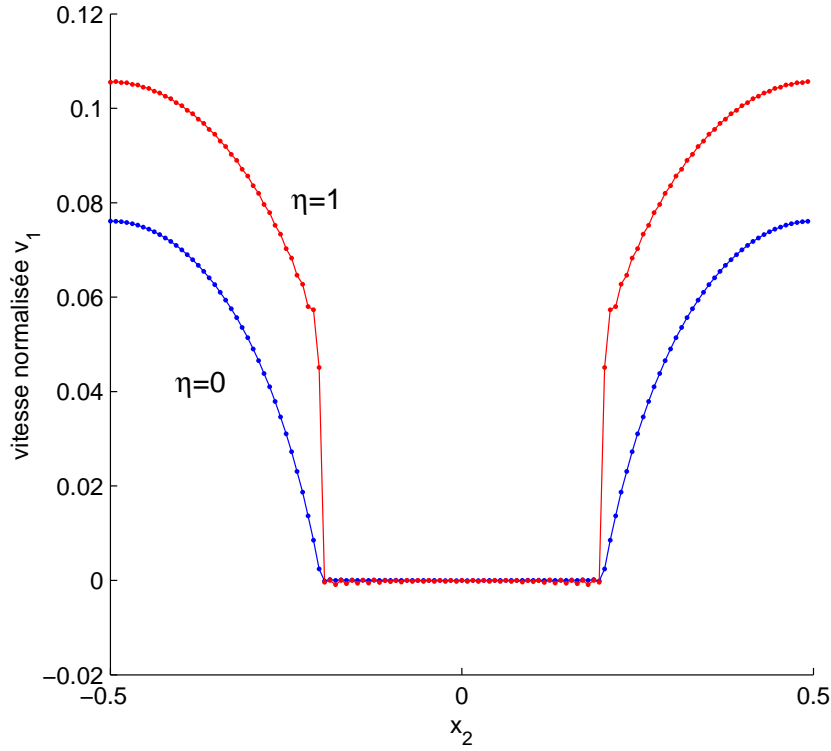


FIGURE 4.6 – Répartition du champ de vitesses \bar{v}_1 en $x_1 = 0$.

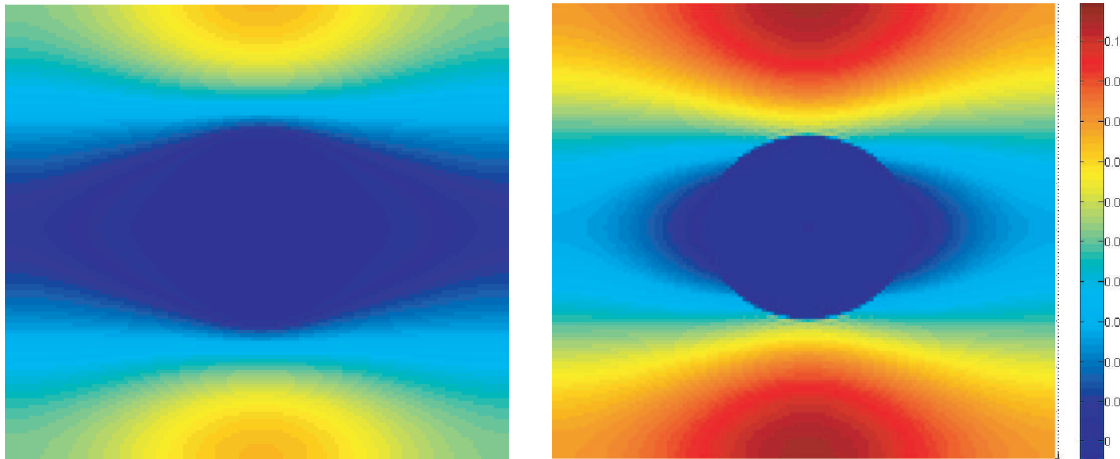


FIGURE 4.7 – Carte du champ \bar{v}_1 . A gauche : $\eta = 0$. A droite $\eta = 1$.

On propose de valider l'approche par des comparaisons avec les résultats de Wang [82]. On considère le cas d'un écoulement à travers un réseau périodique de cylindres de rayons a . Sur les figures 4.8, 4.9 on représente la perméabilité normalisée transverse K_{11}/S et

longitudinale K_{33}/S dans le cas d'un arrangement quadratique (cf. figure 3.1a). Sur les figures 4.10 et 4.11 on représente les composantes normalisées de la perméabilité pour un arrangement hexagonal (cf. figure 3.1b).

Le cas $\eta = 0$ correspond à la condition d'adhérence sur les parois du squelette solide. On observe que la perméabilité augmente de manière significative avec le paramètre η .

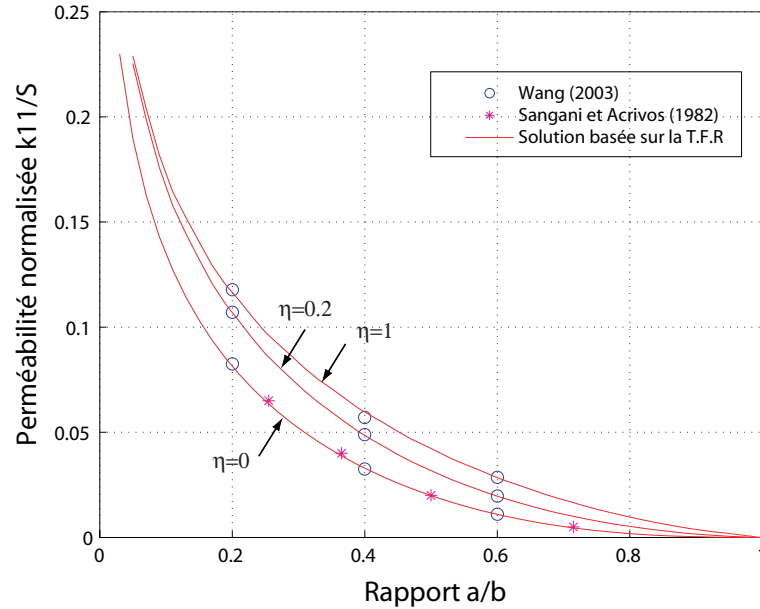


FIGURE 4.8 – Perméabilité transverse dans le cas d'un arrangement quadratique de cylindres de rayon a .

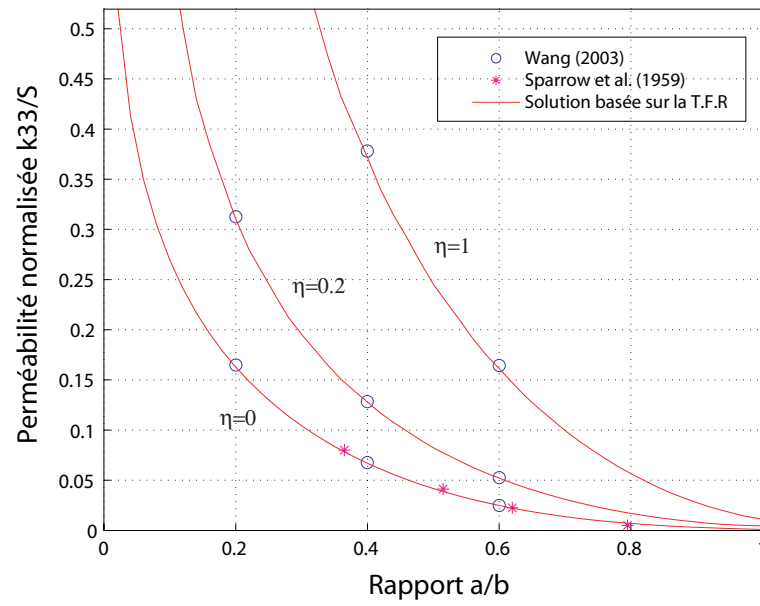


FIGURE 4.9 – Perméabilité longitudinale dans le cas d'un arrangement quadratique de cylindres de rayon a .

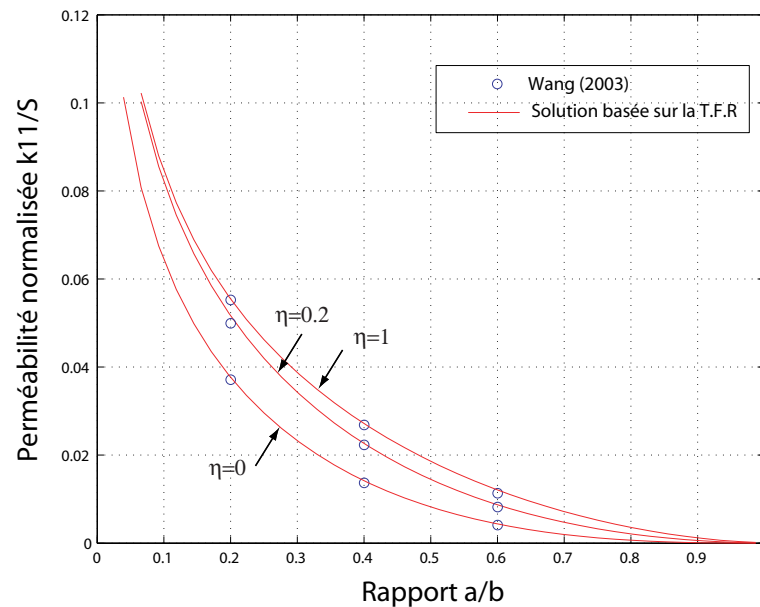


FIGURE 4.10 – Perméabilité transverse dans le cas d'un arrangement hexagonal de cylindres de rayon a .

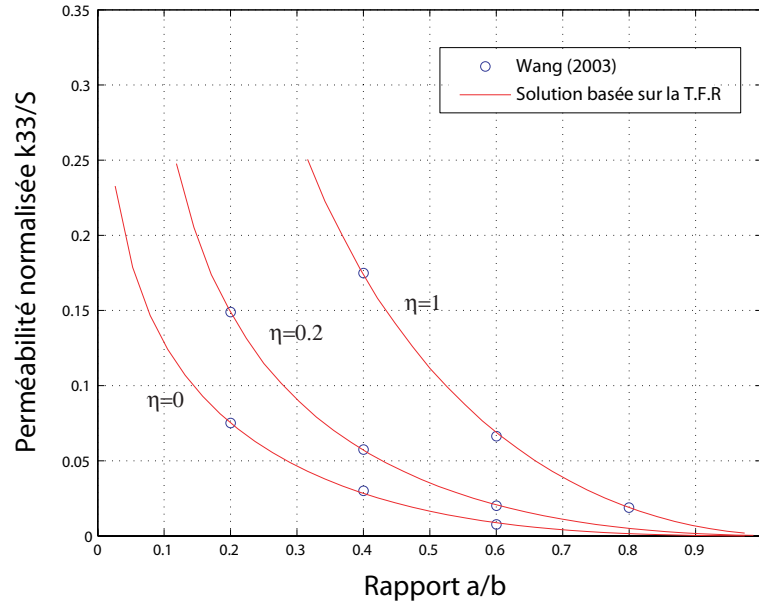


FIGURE 4.11 – Perméabilité longitudinale dans le cas d'un arrangement hexagonal de cylindres de rayon a .

4.2 Détermination de la perméabilité en régime dynamique

4.2.1 Homogénéisation des milieux poreux périodique en régime dynamique

On considère un milieu poreux saturé soumis à un régime de vibrations forcées de pulsation constante ω . L'écoulement est incompressible et l'on considère une condition d'adhérence sur la paroi du solide. Les vitesses sont suffisamment petites pour considérer le problème linéaire. Toutes les variables sont proportionnelles à $\exp(i\omega t)$ (où t est le temps), une simplification des équations par $\exp(i\omega t)$ est alors possible. En définitive, les équations régissant l'écoulement sont définies par :

$$\begin{cases} \mu_p \Delta \underline{v}(\underline{x}) + \nabla p(\underline{x}) = -i\omega \underline{v}(\underline{x}) & \forall \underline{x} \in V_p \\ \text{div}(\underline{v}(\underline{x})) = 0 & \forall \underline{x} \in V_p \\ \underline{v}(\underline{x}) = 0 & \forall \underline{x} \in \partial V_s \end{cases} \quad (4.18)$$

L'écoulement de Stokes apparaît alors comme le cas limite où $\omega = 0$.

Comme pour le cas statique (cf. chapitre 3), l'écoulement est provoqué en imposant le gradient de pression \underline{G} dans le champ des pressions locales (voir équation (3.2)). Le système (4.18) étant linéaire, la règle de localisation (3.3) reste valable dans le contexte dynamique. Le comportement homogénéisé peut donc être décrit par la loi de Darcy :

$$\underline{V} = \langle \underline{v}(\underline{x}) \rangle_V = \underline{K}(\omega) \cdot \underline{G} \quad (4.19)$$

Ici, $\mathbf{K}(\omega)$ est le tenseur de perméabilité, ses composantes sont complexes et fonctions de la pulsation ω . Les parties réelles et complexes des composantes de $\mathbf{K}(\omega)$ ne sont pas indépendantes puisqu'elles sont obtenues par la résolution d'un même problème. La perméabilité en régime statique est donnée par le réel $\mathbf{K}(0)$. Le problème d'écoulement (4.18) peut toujours se ramener à un problème d'élasticité de milieu composite :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\underline{\epsilon}}(\underline{x}) = \frac{1}{2}(\nabla \underline{v}(\underline{x}) + \nabla^t \underline{v}(\underline{x})) \quad \forall \underline{x} \in V \\ \dot{\underline{\epsilon}}(\underline{x}) = \mathbb{S}(\underline{x}) : \underline{\sigma}(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in V \\ \text{div}(\underline{\sigma}(\underline{x})) + \underline{f}(\underline{x}) = -i\omega \underline{v}(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in V \\ \underline{\sigma}(\underline{x}) \cdot \underline{n} \quad \text{antipériodique} \\ \underline{v}(\underline{x}) \quad \text{périodique} \end{array} \right. \quad (4.20)$$

Les forces de volume sont définies par $\underline{f} = \underline{G}$ dans la phase fluide. Comme pour le cas statique, on recherche l'expression de $\underline{f}(\underline{x})$ dans la phase solide permettant d'assurer l'équilibre global de la cellule élémentaire, à savoir :

$$\int_{\partial V} \underline{t}(\underline{x}) dS + \int_V \underline{f}(\underline{x}) dV + i\omega \int_V \underline{v}(\underline{x}) dV = 0 \quad (4.21)$$

$\underline{\sigma}(\underline{x})$ est un champ périodique et la première intégrale dans (3.13) est nulle. Il reste donc :

$$\frac{1}{V} \int_V \underline{f}(\underline{x}) dV + i\omega V = 0 \quad (4.22)$$

L'équilibre de la cellule est alors vérifié en choisissant des forces de volume de la forme :

$$\underline{f}(\underline{x}) = \begin{cases} \underline{G} & \forall \underline{x} \in V_p \\ -\frac{1-f}{f} \underline{G} - \frac{i\omega}{f} V & \forall \underline{x} \in V_s \end{cases} \quad (4.23)$$

Afin de bloquer les déplacement de corps rigide on introduit des forces ponctuelles $\underline{P}^{(m)}$ et $\underline{C}^{(m)}$ de manière similaire à (3.24). Les forces de volume sont donc choisies égales à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \underline{\xi} \neq 0 : \underline{f}(\underline{\xi}) = -\frac{1}{f} \left[\underline{G} + i\omega V \right] I_s(\underline{\xi}) + \sum_m \left[\underline{P}^{(m)} - \frac{i}{2} \underline{C}^{(m)} \wedge \underline{\xi} \right] \exp(i\underline{\xi} \cdot \underline{X}^{(m)}) \\ \text{pour } \underline{\xi} = 0 : \underline{f} = -i\omega V \end{array} \right. \quad (4.24)$$

Avec la condition suivante pour les $\underline{P}^{(m)}$:

$$\sum_m \underline{P}^{(m)} = 0 \quad (4.25)$$

4.2.2 Solution du problème d'inclusion

On introduit dans les équations (4.20) le milieu de référence de souplesse \mathbb{S}^0 . Les équations (4.20), dans le domaine de Fourier deviennent donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\underline{\epsilon}}(\underline{\xi}) = i\underline{v}(\underline{\xi}) \otimes \underline{\xi} \\ \dot{\underline{\epsilon}}(\underline{\xi}) = \mathbb{S}^0 : \underline{\sigma}(\underline{\xi}) + \underline{\eta}(\underline{\xi}) \\ i\underline{\sigma}(\underline{\xi}) \cdot \underline{\xi} + \underline{f}(\underline{\xi}) = -i\omega \underline{v}(\underline{\xi}) \end{array} \right. \quad (4.26)$$

où $\boldsymbol{\eta}(\underline{\xi})$ est le tenseur des déformations libre, défini par (3.30). La méthode de résolution du système d'équations (4.26) consiste à éliminer le taux des déformations $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{\xi})$ et le champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma}(\underline{\xi})$ au profit de la pression locale $p(\underline{\xi})$ et du champ des vitesses $\underline{v}(\underline{\xi})$. Tout d'abord, à partir des deux premières relations (4.26), on peut montrer que le champ des contraintes peut s'écrire de la manière suivante :

$$\boldsymbol{\sigma}(\underline{\xi}) = p(\underline{\xi})\mathbf{I} + 2\mu_0 \left[i\underline{v}(\underline{\xi}) \otimes \underline{\xi} - \boldsymbol{\eta}(\underline{\xi}) \right] \quad (4.27)$$

En injectant cette dernière relation dans l'équation d'équilibre (dernière relation dans (4.26)) et en tenant compte de la condition d'incompressibilité $\underline{v}(\underline{\xi}) \cdot \underline{\xi} = 0$, on obtient finalement :

$$\begin{cases} \left[-\mu_0 |\underline{\xi}|^2 + i\omega \right] \underline{v}(\underline{\xi}) + ip(\underline{\xi})\underline{\xi} = -\underline{f}(\underline{\xi}) + 2i\mu_0 \boldsymbol{\eta}(\underline{\xi}) \cdot \underline{\xi} \\ \underline{v}(\underline{\xi}) \cdot \underline{\xi} = 0 \end{cases} \quad (4.28)$$

De ces deux dernières relations, on peut déterminer la pression locale $p(\underline{\xi})$ et le champ des vitesses $\underline{v}(\underline{\xi})$:

$$\begin{cases} p(\underline{\xi}) = \frac{i}{|\underline{\xi}|^2} \underline{f} \cdot \underline{\xi} + 2\mu_0 \boldsymbol{\eta}(\underline{\xi}) : \mathbf{k} \\ \underline{v}(\underline{\xi}) = \frac{1}{\mu_0 |\underline{\xi}|^2 - i\omega} \mathbf{k}^\perp \cdot \underline{f} - \frac{2i\mu_0}{\mu_0 |\underline{\xi}|^2 - i\omega} \left[\boldsymbol{\eta}(\underline{\xi}) \cdot \underline{\xi} - \underline{\xi} \boldsymbol{\eta}(\underline{\xi}) : \mathbf{k} \right] \end{cases} \quad (4.29)$$

Le champ de contrainte, donné par (4.27), peut alors s'écrire :

$$\forall \underline{\xi} \neq 0 : \boldsymbol{\sigma}(\underline{\xi}) = \boldsymbol{\Upsilon}(\underline{\xi}, \omega) - \boldsymbol{\Delta}^0(\underline{\xi}, \omega) : \boldsymbol{\eta}(\underline{\xi}) \quad (4.30)$$

où $\boldsymbol{\Upsilon}(\underline{\xi}, \omega)$ est défini par :

$$\boldsymbol{\Upsilon}(\underline{\xi}, \omega) = \frac{2i\mu_0}{\mu_0 |\underline{\xi}|^2 - i\omega} \left[\underline{f}(\underline{\xi}) \otimes \underline{\xi} - \underline{f}(\underline{\xi}) \cdot \underline{\xi} \mathbf{k} \right] + \frac{i}{|\underline{\xi}|^2} \underline{f} \cdot \underline{\xi} \mathbf{I} \quad (4.31)$$

$\boldsymbol{\Delta}^0(\underline{\xi}, \omega)$ est un tenseur d'ordre quatre dont les composantes sont données par :

$$\boldsymbol{\Delta}^0(\underline{\xi}, \omega) = 2\mu_0 \left[3\mathbb{E}_1(\underline{\xi}) + \mathbb{E}_3(\underline{\xi}) - \frac{i\omega}{\mu_0 |\underline{\xi}|^2 - i\omega} \mathbb{E}_4(\underline{\xi}) \right] \quad (4.32)$$

Lorsque $\omega = 0$, on a $\boldsymbol{\Delta}^0(\underline{\xi}, 0) = 2\mu_0(3\mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_3)$ qui correspond bien au tenseur de Green pour les contraintes associé au milieu de référence de modules μ_0 et $\lambda_0 = +\infty$.

4.2.3 Résolution du problème d'écoulement par un schéma itératif

En remplaçant maintenant la déformation libre $\boldsymbol{\eta}(\underline{\xi})$ dans (4.30) on obtient l'équation de Lippmann-Schwinger du problème d'écoulement en régime dynamique :

$$\begin{cases} \forall \underline{\xi} \neq 0 : \boldsymbol{\sigma}(\underline{\xi}) = \boldsymbol{\Upsilon}(\underline{\xi}, \omega) - \boldsymbol{\Delta}^0(\underline{\xi}, \omega) : \left[(\mathbb{S}(\underline{\xi}) - \mathbb{S}^0) * \boldsymbol{\sigma}(\underline{\xi}) \right] \\ \text{pour } \underline{\xi} = 0 : \boldsymbol{\sigma}(\underline{\xi}) = 0 \end{cases} \quad (4.33)$$

La résolution de l'équation intégrale (4.33) peut être obtenue à l'aide du schéma itératif suivant :

$$\begin{cases} \sigma^{i+1}(\underline{\xi}) = \Upsilon(\underline{\xi}, \omega) - \Delta^0(\underline{\xi}, \omega) : [\dot{\epsilon}^i(\underline{\xi}) - \mathbb{S}^0 : \sigma^i(\underline{\xi})] & \text{pour : } \underline{\xi} \neq 0 \\ \sigma^{i+1}(\underline{\xi}) = 0 & \text{pour : } \underline{\xi} = 0 \end{cases} \quad (4.34)$$

avec $\dot{\epsilon}^i(\underline{\xi}) = \mathbb{S}(\underline{\xi}) * \sigma^i(\underline{\xi})$. Le premier terme de la série est défini par :

$$\forall \underline{\xi} : \sigma^{i=1}(\underline{\xi}) = \Upsilon(\underline{\xi}, \omega) \quad (4.35)$$

Dans le cas statique, le champ de contrainte σ^i vérifie l'équilibre local à chaque itération tandis que la condition de compatibilité pour $\dot{\epsilon}^i(\underline{\xi})$ n'est vérifiée qu'à convergence du schéma itératif. Dans le cas dynamique, l'équilibre local pour σ^i et la compatibilité pour $\dot{\epsilon}^i(\underline{\xi})$ ne sont vérifiés qu'à convergence du schéma itératif. La raison est que la condition d'équilibre fait ici intervenir le champ de vitesses (voir (4.20)). Or, le champ de vitesses n'intervient pas explicitement dans la relation de récurrence (4.34) puisque le champ $\dot{\epsilon}^i(\underline{\xi})$ n'est pas compatible.

On se propose de vérifier que la valeur de $\sigma(\underline{\xi})$ à convergence est effectivement bien la solution du problème d'inhomogénéité (4.20). Lorsque la convergence est atteinte, on a $\sigma^{i+1}(\underline{\xi}) = \sigma^i(\underline{\xi})$ et donc :

$$\forall \underline{\xi} \neq 0 \quad [\mathbb{I} - \Delta^0(\underline{\xi}, \omega) : \mathbb{S}^0] : \sigma^i(\underline{\xi}) = \Upsilon(\underline{\xi}, \omega) - \Delta^0(\underline{\xi}, \omega) : \dot{\epsilon}^i(\underline{\xi}) \quad (4.36)$$

De plus, on peut montrer que :

$$\forall \underline{\xi} \neq 0 \quad \Upsilon(\underline{\xi}, \omega) = [\mathbb{I} - \Delta^0(\underline{\xi}, \omega) : \mathbb{S}^0] : \rho(\underline{\xi}) \quad (4.37)$$

Où $\rho(\underline{\xi})$ est défini par (3.27). On a donc :

$$\forall \underline{\xi} \neq 0 \quad [\mathbb{I} - \Delta^0(\underline{\xi}, \omega) : \mathbb{S}^0] : [\sigma^i(\underline{\xi}) - \rho(\underline{\xi})] = -\Delta^0(\underline{\xi}, \omega) : \dot{\epsilon}^i(\underline{\xi}) \quad (4.38)$$

Or, en utilisant les résultats de l'annexe A, on montre que :

$$\forall \underline{\xi} \neq 0 \quad \mathbb{I} - \Delta^0(\underline{\xi}, \omega) : \mathbb{S}^0 = \mathbb{E}_2(\underline{\xi}) + \mathbb{E}_6(\underline{\xi}) + \frac{\mu_0 |\underline{\xi}|^2}{\mu_0 |\underline{\xi}|^2 - i\omega} \mathbb{E}_4(\underline{\xi}) \quad (4.39)$$

En projetant l'équation (4.38) suivant les tenseurs $\mathbb{E}_n(\underline{\xi})$ pour $n = 1, 2, 3, 4$ on obtient respectivement (en utilisant toujours l'annexe A) :

$$\begin{cases} \mathbb{E}_6(\underline{\xi}) : (\sigma^i(\underline{\xi}) - \rho(\underline{\xi})) = -6\mu_0 \mathbb{E}_1(\underline{\xi}) : \dot{\epsilon}^i(\underline{\xi}) \\ \mathbb{E}_2(\underline{\xi}) : (\sigma^i(\underline{\xi}) - \rho(\underline{\xi})) = 0 \\ 0 = -2\mu_0 \mathbb{E}_3(\underline{\xi}) : \dot{\epsilon}^i(\underline{\xi}) \\ \frac{\mu_0 |\underline{\xi}|^2}{\mu_0 |\underline{\xi}|^2 - i\omega} \mathbb{E}_4(\underline{\xi}) : (\sigma^i(\underline{\xi}) - \rho(\underline{\xi})) = \frac{2\mu_0 i\omega}{\mu_0 |\underline{\xi}|^2 - i\omega} \mathbb{E}_4(\underline{\xi}) : \dot{\epsilon}^i(\underline{\xi}) \end{cases} \quad (4.40)$$

Partant de l'équivalence $\mathbb{E}_2(\underline{\xi}) : (\underline{\sigma}^i(\underline{\xi}) - \underline{\rho}(\underline{\xi})) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{E}_6(\underline{\xi}) : (\underline{\sigma}^i(\underline{\xi}) - \underline{\rho}(\underline{\xi})) = 0$, on en déduit que $\mathbb{E}_1(\underline{\xi}) : \dot{\underline{\epsilon}}^i(\underline{\xi}) = 0$. En utilisant la troisième relation dans (4.40) on en déduit que :

$$\mathbb{Q}(\underline{\xi}) : \dot{\underline{\epsilon}}^i(\underline{\xi}) = (\mathbb{E}_1(\underline{\xi}) + \mathbb{E}_3(\underline{\xi})) : \dot{\underline{\epsilon}}^i(\underline{\xi}) = 0 \quad (4.41)$$

En d'autre mots, le champ $\dot{\underline{\epsilon}}^i(\underline{\xi})$ est un champ compatible. Il reste à vérifier que la condition d'équilibre est vérifiée. Pour cela, on utilise la seconde et la quatrième relation dans (4.40), il vient :

$$\mathbb{P}(\underline{\xi}) : (\underline{\sigma}^i(\underline{\xi}) - \underline{\rho}(\underline{\xi})) = \frac{2i\omega}{|\underline{\xi}|^2} \mathbb{E}_4(\underline{\xi}) : \dot{\underline{\epsilon}}^i(\underline{\xi}) \quad (4.42)$$

Rappelons que $\mathbb{P}(\underline{\xi}) : \underline{\rho}(\underline{\xi}) = \underline{\rho}(\underline{\xi})$ (voir (3.28)). De plus, le champ $\dot{\underline{\epsilon}}^i(\underline{\xi})$ étant compatible et à trace nulle, on a $\mathbb{E}_4(\underline{\xi}) : \dot{\underline{\epsilon}}^i(\underline{\xi}) = \dot{\underline{\epsilon}}^i(\underline{\xi}) = i(\underline{v} \otimes^s \underline{\xi})$. Il vient alors :

$$\mathbb{P}(\underline{\xi}) : \underline{\sigma}^i(\underline{\xi}) = \underline{\rho}(\underline{\xi}) - \frac{2\omega}{|\underline{\xi}|^2} (\underline{v} \otimes^s \underline{\xi}) \quad (4.43)$$

Cette équation est équivalente à la condition d'équilibre locale. On pourra également noter que cette dernière relation généralise la condition (3.26) au contexte dynamique. Enfin, on notera que la solution à convergence est indépendante du milieu de référence, ce qui n'était pas nécessairement trivial au vu du schéma itératif (4.34). Sur la base de ces résultats, on propose donc un critère de convergence basé à la fois sur la condition d'équilibre et la condition de compatibilité :

$$\max \left(\frac{\left\| \mathbb{P}(\underline{\xi}) : \left[\underline{\sigma}^i(\underline{\xi}) - \underline{\rho}(\underline{\xi}) - \frac{2i\omega}{|\underline{\xi}|^2} \dot{\underline{\epsilon}}^i(\underline{\xi}) \right] \right\|}{\left\| \underline{\sigma}^i(\underline{\xi}) - \underline{\rho}(\underline{\xi}) - \frac{2i\omega}{|\underline{\xi}|^2} \dot{\underline{\epsilon}}^i(\underline{\xi}) \right\|}, \frac{\|\mathbb{Q}(\underline{\xi}) : \dot{\underline{\epsilon}}^i(\underline{\xi})\|}{\|\dot{\underline{\epsilon}}^i(\underline{\xi})\|} \right) < \epsilon \quad (4.44)$$

A convergence du schéma itératif, le champ de vitesses est obtenu par la relation (3.48), relation dans laquelle la moyenne du champ de vitesses est indéterminée. Il reste à discuter de la méthodologie employée pour déterminer la moyenne des vitesses, \underline{V} et des efforts ponctuels $\underline{P}^{(m)}$ et $\underline{C}^{(m)}$. La prise en compte des effets dynamiques conduit à modifier quelque peu la démarche décrite à la section 3.2.3. Dans le cas statique, la vitesse \underline{V} apparaît uniquement comme une constante d'intégration. En effet rappelons que le champ de vitesses local s'écrit, dans le domaine de Fourier :

$$\begin{aligned} \forall \underline{\xi} \neq 0 : \underline{v}(\underline{\xi}) &= \underline{\mathbf{A}}(\underline{\xi}) \cdot \underline{f}(\underline{\xi}) \\ \text{pour } \underline{\xi} = 0 : \underline{v}(\underline{\xi}) &= \underline{V} \end{aligned} \quad (4.45)$$

Ainsi une augmentation d'une valeur $\Delta \underline{V}$ de la vitesse macroscopique \underline{V} entraîne la même augmentation du champ local $\underline{v}(\underline{x})$ et donc des vitesses $\underline{V}^{(m)}$ des solides rigides. Dans le contexte dynamique, les forces de volume dépendent explicitement de la vitesse moyenne \underline{V} (cf. équation (4.24)). En conséquence, on observe dans (4.45) que \underline{V} agit à la fois sur

le champ de vitesses $\underline{v}(\underline{x})$ comme une constante d'intégration mais agit également comme une force de volume. Donc une augmentation d'une valeur $\Delta \underline{V}$ de la vitesse macroscopique \underline{V} n'entraîne plus la même augmentation des vitesses $\underline{V}^{(m)}$ des solides rigides. En d'autres mots, les trois premières composantes de la matrice $[A]$, définie dans (3.52) ne sont plus simplement définies par (3.54) et doivent donc être déterminées de la même manière que les composantes A_{ij} pour $j = 4 \dots 6M$. L'ensemble des composantes de $[A]$ sont donc obtenues en imposant les chargements élémentaires :

$$\{\lambda\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \{\lambda\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \dots \{\lambda\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (4.46)$$

Ce qui élève à $6M + 1$ le nombre total de calculs élémentaires à réaliser pour une cellule contenant M solides rigides non connectés.

4.2.4 Écoulement dans un tube cylindrique

4.2.4.1 Détermination du champ de vitesses local

Hormis le cas d'un écoulement entre deux plans parallèles, un cas simple où l'on puisse obtenir une solution analytique est celui de l'écoulement dans un tube cylindrique de rayon a (voir [18, 75, 89, 44]). On se propose de rappeler cette solution qui permettra de valider l'approche numériques par TFR.

On considère donc une cellule élémentaire, carrée de cotés $2b$ contenant un cylindre de

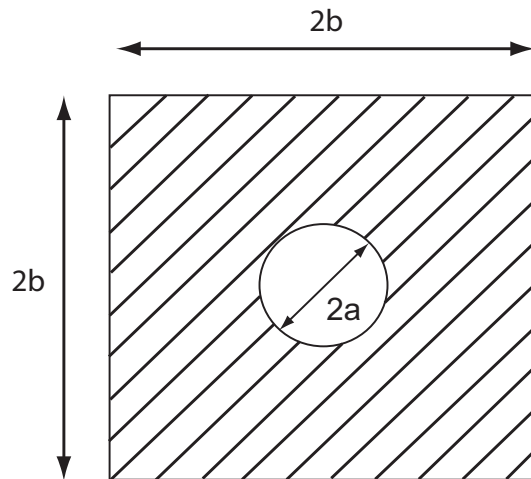


FIGURE 4.12 – Cellule élémentaire d'un écoulement à travers un tube cylindrique.

rayon a centré à l'origine et allongé suivant la direction Ox_3 . Le fluide occupe le domaine

$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq a$, le reste de la cellule étant occupée par le solide rigide. La cellule est définie sur la figure 4.12, où la partie hachurée représente le squelette indéformable du milieux poreux. L'écoulement est provoqué en imposant la composante G_3 du gradient de pression macroscopique. Le problème est de nature hors plan (pour le plan $x_1 - x_2$), la composantes non nulle du champ des vitesses, $v_3(\underline{x})$ est une fonction de la variable adimensionnée $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}/(2b)$ et on pose $R = a/(2b)$. Ainsi la condition d'adhérence se traduit par $v_3(R) = 0$. Le système d'équations (4.18) se réduit alors à :

$$\frac{\mu_p}{S} \left(\frac{\partial^2 v_3}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_3}{\partial r} \right) + G_3 = -i\omega v_3(r) \quad (4.47)$$

avec $S = 4b^2$.

En introduisant la vitesse normalisée $\bar{v}_3(r) = v_3(r)\mu_p/(G_3S)$ et la pulsation $\bar{\omega} = \omega S/\mu_p$, l'équation ci-dessus se réduit à :

$$\frac{\partial^2 \bar{v}_3}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial r} + 1 = -i\bar{\omega} \bar{v}_3(r) \quad (4.48)$$

dont la solution s'écrit :

$$\bar{v}_3(r) = \frac{i}{\bar{\omega}} + C_1 J_0(\sqrt{i\bar{\omega}}r) + C_2 K_0(-i\sqrt{i\bar{\omega}}r) \quad (4.49)$$

J_0 est la fonction de Bessel de première espèce et d'ordre 0, K_0 est la fonction de Bessel de seconde espèce et d'ordre 0. La fonction $K_0(x)$ diverge en $x = 0$, on pose donc $C_2 = 0$. Le coefficient C_1 est déterminé à l'aide de la condition d'adhérence $v_3(R) = 0$. On obtient finalement :

$$\bar{v}_3(r) = \frac{i}{\bar{\omega}} \left(1 - \frac{J_0(\sqrt{i\bar{\omega}}r)}{J_0(\sqrt{i\bar{\omega}}R)} \right) \quad (4.50)$$

On se propose maintenant de valider l'approche numérique par comparaison avec la solution exacte obtenue ci-dessus. Sur les figures 4.13 on trace la partie réelle et la partie imaginaire de la composante $\bar{v}_3(r)$ pour $r = 0..1/2$, $R = 0.4$ et pour diverses valeurs de la pulsation $\bar{\omega}$. La ligne continue correspond à la solution exacte et les points discrets (les étoiles) correspondent aux résultats obtenus numériquement.

Pour des faibles valeurs de la pulsation $\bar{\omega}$ le profil des vitesses est parabolique et la partie imaginaire est quasi nulle. Pour les fortes valeurs de la pulsation, la partie réelle de la vitesse diminue. La partie réelle de \bar{v}_3 peut devenir négative, c'est le cas pour $\bar{\omega} = \exp(6)$ et lorsque r est proche de zéro.

4.2.4.2 Calcul de la perméabilité dynamique

Le calcul de la perméabilité donne :

$$K_{33}(\bar{\omega}) = \frac{i\pi R^2}{\bar{\omega}S} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{i\bar{\omega}}R} \frac{J_1(\sqrt{i\bar{\omega}}R)}{J_0(\sqrt{i\bar{\omega}}R)} \right) \quad (4.51)$$

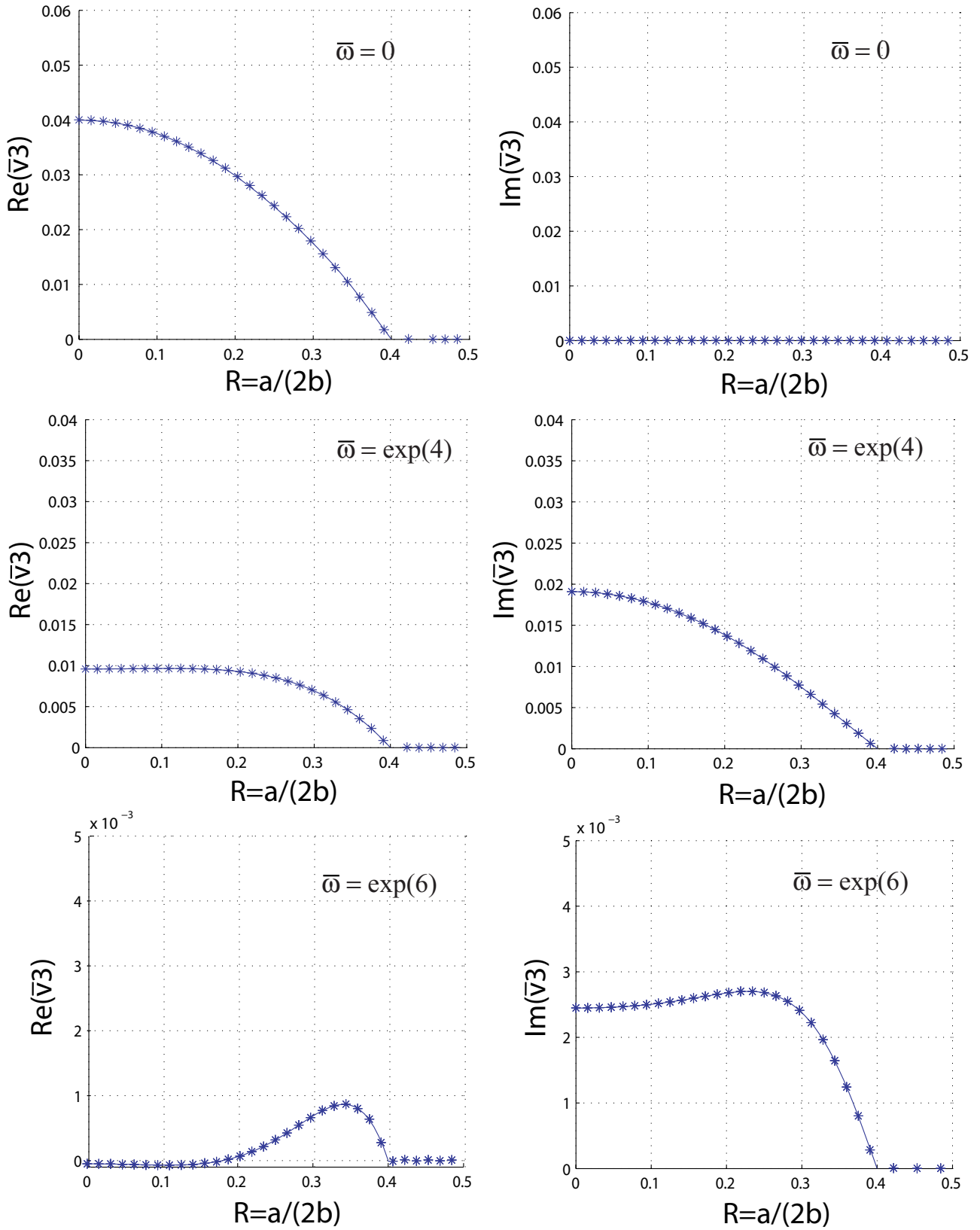


FIGURE 4.13 – Parties réelles et imaginaires du champ de vitesses normalisé $\bar{v}_3(r)$

où $S = 4b^2$ représente la surface de la cellule élémentaire.

Sur les figure 4.14 et 4.15 on trace (dans un repère log-log) la partie réelle et la partie imaginaire de la perméabilité dynamique $K_{33}(\bar{\omega})$ normalisée par la perméabilité statique $K_{33}(0)$. Comme pour les figures 4.13, la ligne continue correspond à la solution exacte tandis que les points discrets (les étoiles) correspondent aux résultats obtenus numériquement. Sur chacune des figures, on observe deux régimes distincts, mis en évidence par Sheng et Zhou [75] Zhou et Sheng [89], Charlaix et al. [26], Johnson et al. [44] sur d'autres types de microstructures :

- un premier correspondant aux faibles valeurs de la pulsation $\bar{\omega}$ pour lequel la partie réelle de la perméabilité dynamique est indépendante de $\bar{\omega}$ tandis que le logarithme de la partie imaginaire croît linéairement avec $\log(\bar{\omega})$. Les paramètres caractéristiques de cette droite peuvent être obtenus à partir du développement en série de $K_{33}(\bar{\omega})$ autour de $\bar{\omega} = 0$. Il vient :

$$K_{33}(\bar{\omega}) = \frac{\pi R^4}{8S} + i \frac{\pi R^6}{48S} \bar{\omega} + o(\bar{\omega}^2) \quad (4.52)$$

Dans ce premier régime, les effets visqueux sont prépondérants devant les effets inertiels.

- dans le second régime, le logarithme de la partie réelle et la partie imaginaire de la perméabilité décroît linéairement avec $\log(\bar{\omega})$. Les paramètres caractéristiques de ces droites sont obtenus par un développement en série de $K_{33}(\bar{\omega})$ en $\bar{\omega} = +\infty$. Il vient :

$$K_{33}(\bar{\omega}) = i \frac{\pi R^2}{S} \frac{1}{\bar{\omega}} + (1 - i) \frac{\pi R \sqrt{2}}{S} \frac{1}{\bar{\omega}^{3/2}} + o\left(\frac{1}{\bar{\omega}^2}\right) \quad (4.53)$$

Dans ce régime, ce sont les effets inertiels qui deviennent dominants.

4.3 Conclusion

Nous avons proposé une méthode de résolution des équations de Stokes pour un écoulement en milieu poreux périodique avec une condition de glissement à l'interface solide/fluide. La condition de glissement sur la paroi du squelette solide est obtenue en remplaçant cette interface imparfaite par une interphase souple équivalente. En fait, la souplesse y est choisie inversement proportionnelle à l'épaisseur de l'interphase. Ainsi on montre qu'après passage à la limite, la discontinuité du champ des vitesses à la traversée de la paroi est obtenue en introduisant une fonction de forme associée à l'interface. Les résultats mettent en évidence la capacité de la méthode à introduire une discontinuité des champs physiques dans une approche basée sur la TFR.

La seconde partie de ce chapitre a été consacrée à l'extension de l'approche développée au troisième chapitre au contexte dynamique. Les équations de Stokes ont donc été remplacées par les équations de Navier-Stokes linéarisées en présence d'une source externe d'excitation de nature harmonique et de pulsation ω . On propose alors une méthode de résolution basée sur un schéma itératif en contrainte faisant intervenir un tenseur de Green

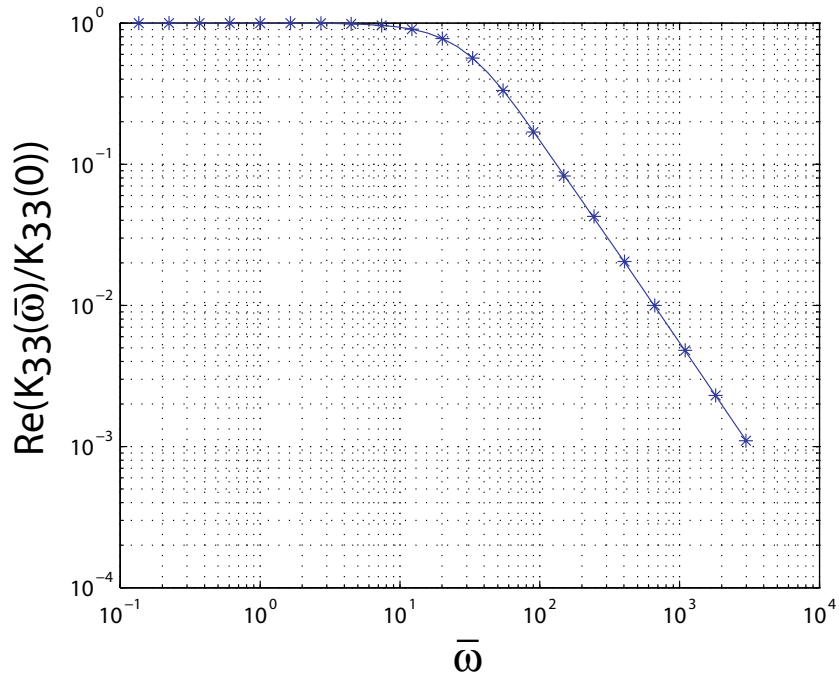


FIGURE 4.14 – Partie réelle de la perméabilité dynamique $K_{33}(\omega)$.

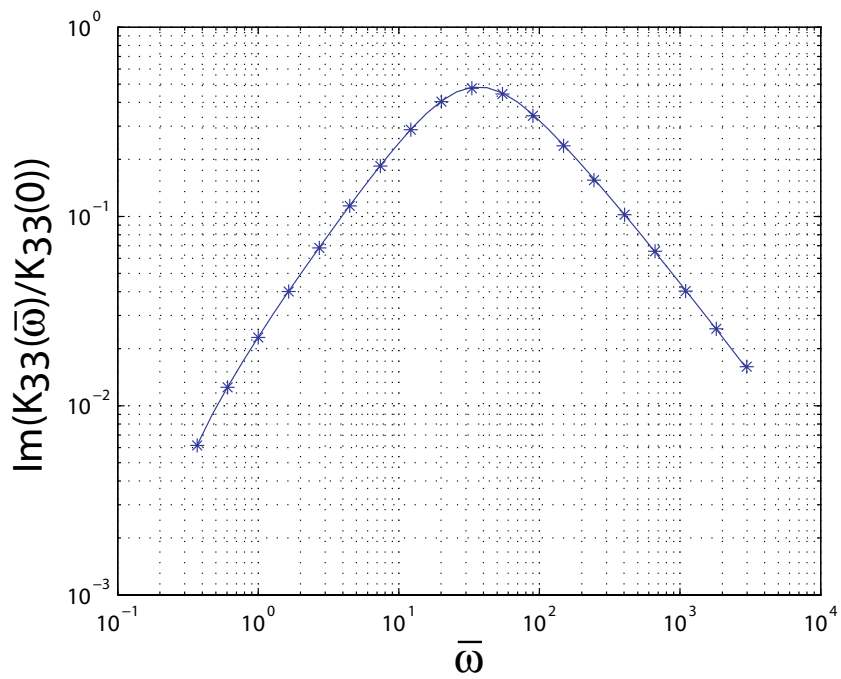


FIGURE 4.15 – Partie imaginaire de la perméabilité dynamique $K_{33}(\omega)$.

dépendant explicitement de la pulsation. La méthodologie a été mise en oeuvre dans le contexte d'un écoulement à travers un tube cylindrique et validée avec la solution exacte du problème.

Conclusion générale

L'étude proposée dans ce mémoire de thèse a été consacrée au développement d'outils numériques en vue de la détermination des propriétés effectives de structures périodiques. Ce travail a comporté deux parties distinctes, la première a été dédiée à la détermination du comportement macroscopique des composites, la seconde au calcul de la perméabilité de milieux poreux en régime statique et dynamique. Les méthodes de résolution numériques employées sont basées sur des schémas itératifs utilisant les fonctions de Green et la Transformée de Fourier Rapide (TFR).

Nous avons tout d'abord présenté une approche numérique à deux échelles pour la détermination du comportement des matériaux composites non linéaires régis par des lois en puissance. L'approche combine une méthode de résolution basée sur la TFR, à l'échelle locale, et une technique d'interpolation multidimensionnelle du potentiel des déformations, à l'échelle macroscopique. La démarche présente plusieurs avantages : elle est exacte, au sens où on n'effectue aucune approximation ; elle est séquentielle, puisque toutes les échelles sont traitées indépendamment les unes des autres.

La résolution des problèmes non linéaires locaux à l'aide d'un schéma itératif basé sur la TFR s'avère pertinent et ce particulièrement lorsque la microstructure est complexe. En effet la détermination de la forme discrétisée du potentiel macroscopique peut nécessiter un grand nombre de calculs locaux, l'utilisation de la TFR permet donc de réduire significativement les temps de calcul.

Nous avons reconstruit la loi de comportement macroscopique pour deux types de microstructure et différentes valeurs des paramètres des matériaux. Nous avons observé des légères oscillations au point de fort changement de courbure sur les courbes contraintes déformations. Ces oscillations résultent de la technique d'interpolation qui utilise une méthode de séparation des variables. Deux pistes d'amélioration sont envisageables :

- interpoler directement les composantes du tenseur des contraintes macroscopiques à partir de valeurs discrètes obtenues numériquement
- enrichir la méthode d'interpolation afin d'introduire des discontinuités du tenseur des rigidités tangentes.

La technique d'interpolation est peu coûteuse puisqu'elle repose sur une méthode de séparation de variable et conduit à l'interpolation de fonctions unidimensionnelles. Toutefois, un grand nombre de calculs locaux sont nécessaires, 21^3 pour les exemples bidimensionnels traités au chapitre 2. La mise en oeuvre de la méthode pour les problèmes tridimensionnels est encore exclue à l'état actuel pour les deux raisons suivantes :

- les calculs locaux doivent être réalisés sur des cellules parallélépipédiques et les temps de calcul sont donc multipliés par $2N_3$, N_3 étant le nombre de vecteur d'onde considéré

dans la troisième direction de l'espace.

- rappelons que l'interpolation est réalisée à l'aide d'une grille régulière dans l'espace des déformations macroscopiques. Ainsi le nombre total de calcul locaux, pour un problème tridimensionnel, augmente de $(1 + m)^3$ par rapport à un problème bidimensionnel ($1 + m$ étant le nombre de points de discrétisation sur chaque intervalle Δ_i des composantes de la déformation, E_i).

Le nombre total de calculs est donc multiplié par $2N_3(1 + m)^3$ pour un problème tridimensionnel. Si ce nombre peut être réduit lorsque la cellule élémentaire présente des symétries, il faudra faire appel dans un contexte plus général à d'autres stratégies pour réduire le nombre de calculs.

Nous avons proposé aux chapitres 3 et 4 une méthode numérique basée sur la transformée de Fourier pour la détermination de la perméabilité de milieux poreux saturés. Au chapitre 3, la méthode est décrite pour le cas des écoulements en régime statique. La méthode de résolution est basée sur un schéma itératif en contrainte similaire à celui utilisé pour le cas des composites élastiques (présenté au premier chapitre). Toutefois, nous avons montré que le problème présente une particularité lorsque la cellule élémentaire est constituée de solides non interconnectés. En effet, dans ce cas plusieurs calculs sur la cellule élémentaire sont alors nécessaires pour la résolution du problème d'écoulement. Ceci est dû à la présence d'efforts ponctuels dans les inclusions qui sont a priori indéterminés.

Si dans les structures réelles le squelette solide est a priori constitué d'un seul solide interconnecté, cette situation peut toutefois se présenter dans la situation suivante :

on cherche à estimer la valeur la perméabilité d'un milieu poreux non périodique à partir d'un calcul sur une cellule élémentaire "représentative" du milieu réel. Le milieu périodique fictif associé est obtenu par la répétition de la cellule dans chaque direction de l'espace. Ce processus peut conduire à un milieu fictif pour lequel on ait deux ou plusieurs solides non interconnectés. Dans ce cas la démarche que nous avons proposée apparaît tout à fait justifiée. En outre, la mise en oeuvre de notre approche pour des structures poreuses complexe et aléatoires constitue une des perspectives de ce travail.

Dans le dernier chapitre nous avons proposé deux extensions de l'approche visant à introduire les effets de glissement et les effets dynamiques. La prise en compte des effets de glissement est effectuée en adaptant, au cas des milieux poreux, les résultats établis dans [11] dans le contexte de l'élasticité. Ainsi, on montre que la condition de glissement peut être obtenue en remplaçant l'interface fluide/solide par une couche de fluide (l'interphase) d'épaisseur très faible et de viscosité dynamique petite. La possibilité d'introduire des discontinuités des champs physique sans recours au maillage de l'interface dans la méthode basée sur la TFR ouvre un certain nombre de perspectives dans d'autres domaines d'application.

Bibliographie

- [1] **Alcocer F. J., Kumar V., Singh P.**
Permeability of periodic porous media, *Physical Review E*. 1999, vol. 59 (1), pp. 711-714.
- [2] **Alcocer F. J., Singh P.**
Permeability of periodic arrays of cylinders for viscoelastic flows, *Physics of Fluids*. 2002, vol. 14 (7), pp. 2578-2581.
- [3] **Allaire G.**
Homogenization of the Stokes flow in a connected porous medium, *Asymptotic Analysis*. 1989, vol. 2 (3), pp. 203-222.
- [4] **Allaire G.**
Homogenization of the Navier-Stokes equations with a slip boundary condition. *Communications on Pure and Applied Mathematics*. 1991, vol. 44 (6), pp. 605-641.
- [5] **Auriault J.L., Sanchez-Palencia E.**
Study of macroscopic behavior of a deformable porous medium. *Journal de Mécanique*. 1977, vol. 16 (4), pp. 575-603.
- [6] **Auriault J.L.**
Dynamic behaviour of porous medium saturated by a newtonian fluid. *Int. J. Engng. Sci.* 1980, vol. 18, pp. 775-785.
- [7] **Auriault J.L., Boutin C., Geindreau C.**
Homogénéisation de phénomènes couplés en milieu hétérogène 1 : diffusion et dispersion. Hermès Sciences, 2009.
- [8] **Auriault J.L., Boutin C., Geindreau C.**
Homogénéisation de phénomènes couplés en milieu hétérogène 2 : quasi-statique et dynamique des milieux poreux. Hermès Sciences, 2009.
- [9] **Barrere J., Caltagirone J.P., Gipouloux O.**
Détermination numérique de la perméabilité en milieu poreux périodique tridimensionnel. *CR Acad. Sci. Paris, Sér. II*. 1990, vol. 310, pp. 347-352.
- [10] **Bhattacharya K., Suquet P.M.**
A model problem concerning recoverable strains of shape-memory polycrystals. *Proc. Roy. Soc. London A*. 2005, vol. 461, pp. 2797-2816.
- [11] **Benveniste Y., Miloh T.**
Imperfect soft and stiff interfaces in two-dimensional elasticity. *Mech. Mater.* 2001 (6), vol. 33, pp. 309-323.

- [12] **Benveniste Y.**
A general interface model for a three-dimensional curved thin anisotropic interphase between two anisotropic media. *J. Mech. Phys. Solids*. 2006, vol. 54 (4), pp. 708-734.
- [13] **Bilger N., Auslender F., Bornert M., Michel J.-C., Moulinec H., Suquet P., Zaoui A.**
Effect of a nonuniform distribution of voids on the plastic response of voided materials : a computational and statistical analysis. *Int. J. Solids Struct.* 2005, vol. 42, pp. 517-538.
- [14] **Bilger N., Auslender F., Bornert M., Moulinec H., Zaoui A.**
Bounds and estimates for the effective yield surface of porous media with a uniform or a nonuniform distribution of voids. *Eur. J. Mech., A/Solids*. 2007, vol. 26, pp. 810-836.
- [15] **Bonnet G.**
Effective properties of elastic periodic composite media with fibers. *J. Mech. Phys. Solids*. 2007, vol. 55, pp. 881-899.
- [16] **Bornert M., Bretheau T., Gilormini P.**
Homogénéisation en mécanique des matériaux, Tome 1, matériaux aléatoires élastiques et milieux périodiques, Hermès Sciences, 2001.
- [17] **Bornert M., Bretheau T., Gilormini P.**
Homogénéisation en mécanique des matériaux, Tome 2, comportements non linéaires et problèmes ouverts, Hermès Sciences, 2001.
- [18] **Boutin C.**
Dynamique des milieux poreux saturés déformables - Fonction de Green - Perméabilité dynamique. Thèse de l'Université Joseph Fourier, 1987.
- [19] **Bövik P.**
On the modelling of thin interface layers in elastic and acoustic scattering problems. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 1994, vol. 47, pp. 17-42.
- [20] **Brenner R., Lebensohn R.A., Castelnau O.**
Elastic anisotropy and yield surface estimates of polycrystals. *Int. J. Solids Struct.* 2009, vol. 46, pp. 3018-3026.
- [21] **Brisard S., Dormieux L.**
FFT-based methods for the mechanics of composites : A general variational framework. *Comput. Mater. Science*. 2010.
- [22] **Brown W.**
Solid mixture permittivities. *J. Comput. Math.* 1955, vol. 23, pp. 1514-1517.
- [23] **Burridge R., Keller J.B.**
Poroelasticity equations derived from microstructure. *J. Acoust. Soc. Am.* 1981, vol. 70 (4), pp. 1140-1146.
- [24] **Carol J.D., Chang J.J.**
Analysis of individual differences in multidimensional scaling via an N-way generalization of "Eckart-Young" decomposition. *Psychometrika*. 1970, vol. 35, pp. 283-319.

-
- [25] **Chapman A.M., Higdon J.J.L.**
Oscillatory Stokes flow in periodic porous media. *Phys. Fluids A*. 1992, vol. 4 (10), pp. 2099-2116.
 - [26] **Charlaix E., Kushnick A. P., Stokes J. P.**
Experimental Study of Dynamic Permeability in Porous Media. *Phys. Rev. Lett.* 1988, vol. 61, pp. 1595-1598.
 - [27] **Cioranescu D., Donato P., Ene H.I.**
Homogenization of the Stokes problem with non-homogeneous slip boundary conditions. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 1996, vol. 19 (11), pp. 857-881.
 - [28] **Colin S., Baldas L.**
Effets de raréfaction dans les micro-écoulements gazeux. *C. R. Physique*. 2004, vol 5. pp. 521-530.
 - [29] **Dvorak G.**
Transformation field analysis of inelastic composite materials. *Proc. R. Soc. Lond. A*. 1992, vol. 437, pp. 311-327.
 - [30] **Ene H.I., Sanchez-Palencia E.**
Equations and surface phenomena for the flow in a porous medium. *J. Mécanique*. 1975, vol. 14 (1), pp. 73-108.
 - [31] **Eshelby J.D.**
The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems. *Proc. Roy. Soc. London A*. 1957, vol. 241, pp. 376-386.
 - [32] **Eshelby J.D.**
The elastic field outside an ellipsoidal inclusion. *Proc. Roy. Soc. London A*. 1959, vol. 252, pp. 561-569.
 - [33] **Eyre D.J., Milton G.W.**
A fast numerical scheme for computing the response of composites using grid refinement. *The European Physical Journal-Applied Physics*. 1999, vol. 6 (1), pp. 41-47.
 - [34] **Feyel F.**
Multiscale FE2 elastoviscoplastic analysis of composite structures. *Comput. Mater. Sci.* 1999, vol. 16 (1-4), pp. 344-354.
 - [35] **Feyel F., Chaboche J.L.**
FE2 multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behaviour of long fibre SiC/Ti composite materials. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*. 2000, vol. 183 (3-4), pp. 309-330.
 - [36] **Feyel F.**
A multilevel finite element method (FE2) to describe the response of highly non-linear structures using generalized continua. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 2003, vol. 192 (28-30), pp. 3233-3244.
 - [37] **Ghosh S., Lee K., Suresh M.**
Multiple scale analysis of heterogeneous elastic structures using homogenization theory and Voronoï cell finite element method. *Int. J. Solids Struct.* 1995, vol. 21 (1), pp. 27-62.

- [38] **Ghosh S., Lee K., Raghavan P.**
A multi-level computational model for multi-scale damage analysis in composite and porous materials. *International Journal of Solids and Structures*. 2001, vol. 38, pp. 2335-2385.
- [39] **Glowinski R., LeTallec P.**
Augmented Lagrangian and Operator-Splitting Methods in Nonlinear Mechanics. Studies in Applied Mathematics, vol. 9. SIAM : Philadelphia, PA, 1989.
- [40] **Gurtin M.E., Murdoch A.I.**
A continuum theory of elastic material surfaces. *Arch. Rat. Mech. Anal.* 1975, vol. 57, pp. 291-323.
- [41] **Harshman A.**
Foundations of the PARAFAC procedure : Models and conditions for an "explanatory" multi-modal factor analysis. *UCLA working papers in phonetics*. 1970, vol. 16.
- [42] **Hashin Z.**
Thin interphase/imperfect interface in elasticity with application to coated fiber composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2002, vol. 50 (12), pp. 2509-2537.
- [43] **Idiart M.I., Willot F., Pellegrini Y.-P., Ponte Castañeda P.**
Infinite-contrast periodic composites with strongly nonlinear behavior : Effective-medium theory versus full-field simulations. *Int. J. Solids Struct.* 2009, vol. 46, pp. 3365-3382.
- [44] **Johnson D.L., Hemmick D.L., Kojima H.**
Probing porous media with first and second sound. I. Dynamic permeability. *J. appl. phys.* 1994, vol. 76 (1), pp. 104-114.
- [45] **Kadaksham A., Pillapakkam S.B., Singh P.**
Permeability of periodic arrays of spheres. *Mechanics Research Communications*. 2005, vol. 32 (6), pp. 659-665.
- [46] **Karniadakis G., Beskok A., Aluru N.**
Microflows and nanoflows. Springer, 2004.
- [47] **Klarbring A.**
Derivation of a model of adhesively bonded joints by the asymptotic expansion method. *International Journal of Engineering Science*. 1991, vol. 29 (4), pp. 493-512.
- [48] **Klarbring A., Movchan A.B.**
Asymptotic modelling of adhesive joints. *Mechanics of materials*. 1998, vol. 28 (1-4), pp. 137-145.
- [49] **Kroner E.**
Statistical Continuum Mechanics (Springer-Verlag, Wien, 1972).
- [50] **Lahellec N., Suquet P.**
Nonlinear composites : a linearization procedure which is exact to second-order in

the contrast and has no gap between the strain-energy formulation and the affine formulation. *C. R. Acad. Sci.* 2004, vol. 332, pp. 693-700.

- [51] **Levy T.**
Propagation of waves in a fluid-saturated porous elastic solid. *Int. J. Engng. Sci.* 1979, vol. 17, pp. 1005-1014.
- [52] **Levy T.**
Fluid flow through an array of fixed particles. *Int. J. Engng. Sci.* 1983, vol. 21 (1), pp. 11-23.
- [53] **Licht C, Suquet P.**
Augmented Lagrangian method applied to a problem of incompressible viscoplasticity arising in homogenization. In *Numerical Methods for Nonlinear Problems*, Taylor C. (ed.). Pineridge Press : Swansea, 1986, pp. 106-114.
- [54] **Maxwell J.C.**
On stresses in rarefied gases arising from inequalities of temperature. *Philos. Trans. Royal Soc.* 1879, vol. 170, pp. 231-256.
- [55] **Michel J. C., Moulinec H., Suquet P.**
Effective properties of composite materials with periodic microstructure : a computational approach. *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.* 1999, vol. 172, pp. 109-143.
- [56] **Michel J. C., Moulinec H., Suquet P.**
A computational method based on augmented lagrangians and fast Fourier transforms for composites with high contrast. *Comput. Model. Eng. Sci.* 2000, vol. 1 (2), pp. 9-88.
- [57] **Michel J. C., Moulinec H., Suquet P.**
A computational scheme for linear and non-linear composites with arbitrary phase contrast. *Int. J. Numer. Meth. Engrng.* 2001, vol. 52, pp. 139-160.
- [58] **Michel J. C., Suquet P.**
Nonuniform transformation field analysis. *Int. J. Solids and Structures.* 2003, vol. 40 (25), pp. 6937-6955.
- [59] **Milton G. W., Serkov S.K.**
Bounding the current in nonlinear conducting composites, *J. Mech. Phys. Solids.* 2000, vol. 48, pp. 1295-1324.
- [60] **Milton G. W.**
The Theory of Composites. Cambridge University Press, 2002.
- [61] **Moulinec H., Suquet P.**
A fast numerical method for computing the linear and nonlinear mechanical properties of composites. *C. R. Acad. Sci.* 1994, vol. 318 (11), pp. 1417-1423.
- [62] **Moulinec H., Suquet P.**
A numerical method for computing the overall response of nonlinear composites with complex microstructure. *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.* 1998, vol. 157, pp. 69-94.
- [63] **Moulinec H., Suquet P.**
Intraphase strain heterogeneity in nonlinear composites : a computational approach. *Eur. J. Mech. A.* 2003, vol. 22, pp. 751-770.

- [64] **Nemat-Nasser S., Hori M.**
Micromechanics : Overall Properties of Heterogeneous Materials. North- Holland, Amsterdam, 1999.
- [65] **Pham Huy H., Sanchez-Palencia E.**
Phénomènes de transmission à travers des couches minces de conductivité élevée. *J. Math. Anal. Appl.* 1974, vol. 47, pp. 284-309.
- [66] **Ponte-Castañeda P.**
The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composites. *J. Mech. Phys. Solids*, 39, 45-71, 1991.
- [67] **Ponte-Castañeda P., Zaidman M.**
Constitutive models for porous materials with evolving microstructure. *J. Mech. Phys. Solids*, 42, 1459-1492, 1994.
- [68] **Ponte-Castañeda P., Suquet P.**
Nonlinear composites. *Adv. Appl. Mech*, 34 : 171-302, 1998.
- [69] **Povstenko Y.Z.**
Theoretical investigation of phenomena caused by heterogeneous surface tension in solids. *J. Mech. Phys. Solids.*, 1993, vol. 41, pp. 1499-1514.
- [70] **Sanchez-Palencia E.**
Comportement limite d'un problème de transmission à travers une plaque faiblement conductrice. *C. R. Acad. Sci. Paris Serie A.* 1970, vol. 270, pp. 1026-1028.
- [71] **Sanchez-Palencia E.**
Nonhomogeneous Media and Vibration Theory, Lecture Notes in Physics, vol. 127, 1980. Springer, Berlin.
- [72] **Sangani A. S., Acrivos A.**
Slow flow past periodic arrays of cylinders with application to heat transfer. *Int. J. Multiphase Flow.* 1982, vol. 8 (3), pp. 193-206.
- [73] **Sangani A. S., Acrivos A.**
Slow flow through a periodic array of spheres. *Int. J. Multiphase Flow.* 1982, vol. 3 (4), pp. 343-360.
- [74] **Sawicki E.**
Numerical investigation of the fluid flow through rotating porous media at both the microscopic scale and macroscopic scale. Thèse, Université Joseph Fourier, Grenoble, 2004.
- [75] **Sheng P., Zhou M.Y.**
Dynamic permeability in porous media. *Physical review letters.* 1988, vol. 61 (14), pp. 1591-1594.
- [76] **Sparrow E.M., Loeffler A.L.**
Longitudinal laminar flow between cylinders arranged in a regular array. *A.I.Ch.E.J.* 1959, vol. 5, pp. 325-330.
- [77] **Suquet P. M.**
Overall potentials and extremal surfaces of power law or ideally plastic composites. *J. Mech. Phys. Solids.*, 1993, vol. 41 (6), pp. 981-1002.

-
- [78] **Vinogradov V., Milton G. W.**
An accelerated FFT algorithm for thermoelastic and non-linear composites. *Int. J. Num. Meth. Engng.* 2008, vol. 76, pp. 1678-1695.
 - [79] **Walpole L.J.**
Elastic behavior of composite materials : theoretical foundations. *Advances in App. Mech.*, 21 : 169-243, 1981.
 - [80] **Wang C. Y.**
Stokes flow through an array of rectangular fibers. *International Journal of Multi-phase Flow.* 1996, vol. 22 (1), pp. 185-194.
 - [81] **Wang C. Y.**
Stokes flow through a rectangular array of circular cylinders. *Fluid. Dyn. Res.* 2001, vol. 29, pp. 65-80.
 - [82] **Wang C. Y.**
Stokes slip flow through square and triangular arrays of circular cylinders. *Fluid. Dyn. Res.* 2003, vol. 32, pp. 233-246.
 - [83] **Zhang T., Jia L., Wang Z.**
Validation of Navier-Stokes equations for slip flow analysis within transition region. *Int. J. of Heat and Mass Transfer.* 2008, vol. 51, pp. 6323-6327.
 - [84] **Willot F., Pellegrini Y.-P., Ponte-Castaneda P.**
Localization of elastic deformation in strongly anisotropic, porous, linear materials with periodic microstructures : Exact solutions and dilute expansions. *J. Mech. Phys. Solids.* 2008, vol. 56, pp. 1245-1268.
 - [85] **Willot F., Jeulin D.**
Elastic behavior of composites containing Boolean random sets of inhomogeneities. *Int. J. Engng. Sci.* 2009, vol. 47, pp. 313-324.
 - [86] **Yvonnet J., Gonzalez D., He Q.-C**
Numerically explicit potentials for the homogenization of nonlinear elastic heterogeneous materials. *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.* 2009, vol. 198, pp. 2723-2737.
 - [87] **Zeman J., Vondrejč J., Novák J., Marek, I.**
Accelerating a FFT-based solver for numerical homogenization of periodic media by conjugate gradients. *J. Comput. Phys.* 2001, vol. 229, pp. 8065-8071.
 - [88] **Zhang T., Golub G.H.**
Rank-one approximation to high order tensor. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 2001, vol. 23 (2), pp. 534-550.
 - [89] **Zhou M.Y., Sheng P.**
First-principles calculations of dynamic permeability in porous media. *Physical Review B*, 1989, vol. 39 (16), pp. 12027-12039.

Annexe A

Décomposition dans la base de Walpole

On introduit les notations standards de la base de Walpole [79] pour les tenseurs d'ordre quatre présentant une symétrie de type isotrope transverse. Cette base permet notamment d'effectuer les opérations de produit doublement contracté et d'inversion de ces tenseurs sans grande difficulté.

Les éléments de la base de Walpole sont définis :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{E}_1(\underline{\xi}) = \frac{1}{2} \mathbf{k}^\perp \otimes \mathbf{k}^\perp \\ \mathbb{E}_2(\underline{\xi}) = \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} \\ \mathbb{E}_3(\underline{\xi}) = \mathbf{k}^\perp \underline{\otimes} \mathbf{k}^\perp - \mathbb{E}_1 \\ \mathbb{E}_4(\underline{\xi}) = \mathbf{k}^\perp \underline{\otimes} \mathbf{k} + \mathbf{k} \underline{\otimes} \mathbf{k}^\perp \\ \mathbb{E}_5(\underline{\xi}) = \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}^\perp, \quad \mathbb{E}_6(\underline{\xi}) = \mathbf{k}^\perp \otimes \mathbf{k} \end{array} \right. \quad (\text{A.1})$$

où \mathbf{k} et \mathbf{k}^\perp sont définis par :

$$\mathbf{k} = \frac{1}{|\underline{\xi}|^2} \underline{\xi} \otimes \underline{\xi}, \quad \mathbf{k}^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{k} \quad (\text{A.2})$$

avec la condition $\underline{\xi} \neq 0$.

Le produit doublement contracté de deux éléments de la base de Walpole est donné dans la table ci-dessous :

	$\mathbb{E}_1(\underline{\xi})$	$\mathbb{E}_2(\underline{\xi})$	$\mathbb{E}_3(\underline{\xi})$	$\mathbb{E}_4(\underline{\xi})$	$\mathbb{E}_5(\underline{\xi})$	$\mathbb{E}_6(\underline{\xi})$
$\mathbb{E}_1(\underline{\xi})$	$\mathbb{E}_1(\underline{\xi})$	0	0	0	0	$\mathbb{E}_6(\underline{\xi})$
$\mathbb{E}_2(\underline{\xi})$	0	$\mathbb{E}_2(\underline{\xi})$	0	0	$\mathbb{E}_5(\underline{\xi})$	0
$\mathbb{E}_3(\underline{\xi})$	0	0	\mathbb{E}_3	0	0	0
$\mathbb{E}_4(\underline{\xi})$	0	0	0	$\mathbb{E}_4(\underline{\xi})$	0	0
$\mathbb{E}_5(\underline{\xi})$	$\mathbb{E}_5(\underline{\xi})$	0	0	0	0	$2\mathbb{E}_2(\underline{\xi})$
$\mathbb{E}_6(\underline{\xi})$	0	$\mathbb{E}_6(\underline{\xi})$	0	0	$2\mathbb{E}_1(\underline{\xi})$	0

Tout tenseur d'ordre 4 isotrope transverse, peut être représenté dans la base de Walpole :

$$\mathbb{A} = a_1 \mathbb{E}_1(\underline{\xi}) + a_2 \mathbb{E}_2(\underline{\xi}) + a_3 \mathbb{E}_3(\underline{\xi}) + a_4 \mathbb{E}_4(\underline{\xi}) + a_5 \mathbb{E}_5(\underline{\xi}) + a_6 \mathbb{E}_6(\underline{\xi}) \quad (\text{A.3})$$

\mathbb{A} est symétrique si $a_5 = a_6$. Considérons un second tenseur d'ordre quatre, \mathbb{B} et notons par b_1, \dots, b_6 ces composantes dans la base de Walpole. Le produit doublement contracté de \mathbb{A} par \mathbb{B} s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbb{A} : \mathbb{B} = & (a_1 b_1 + 2a_6 b_5) \mathbb{E}_1(\underline{\xi}) + (a_2 b_2 + 2a_5 b_6) \mathbb{E}_2(\underline{\xi}) + a_3 b_3 \mathbb{E}_3(\underline{\xi}) + a_4 b_4 \mathbb{E}_4(\underline{\xi}) \\ & + (a_2 b_5 + a_5 b_1) \mathbb{E}_5(\underline{\xi}) + (a_1 b_6 + a_6 b_2) \mathbb{E}_6(\underline{\xi}) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

L'inverse de \mathbb{A} est :

$$\mathbb{A}^{-1} = \frac{a_2}{\Delta} \mathbb{E}_1(\underline{\xi}) + \frac{a_1}{\Delta} \mathbb{E}_2(\underline{\xi}) + \frac{1}{a_3} \mathbb{E}_3(\underline{\xi}) + \frac{1}{a_4} \mathbb{E}_4(\underline{\xi}) - \frac{a_5}{\Delta} \mathbb{E}_5(\underline{\xi}) - \frac{a_6}{\Delta} \mathbb{E}_6(\underline{\xi}) \quad (\text{A.5})$$

avec $\Delta = a_1 a_2 - 2a_5 a_6$.

La décomposition sur les $\mathbb{E}_n(\underline{\xi})$ de l'identité d'ordre quatre, \mathbb{I} , et des tenseurs isotropes $\mathbb{K} = \mathbb{I} - \mathbb{J}$ et $\mathbb{J} = \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbb{I} &= \mathbb{E}_1(\underline{\xi}) + \mathbb{E}_2(\underline{\xi}) + \mathbb{E}_3(\underline{\xi}) + \mathbb{E}_4(\underline{\xi}) \\ \mathbb{K} &= \frac{1}{3} (\mathbb{E}_1(\underline{\xi}) + 2\mathbb{E}_2(\underline{\xi})) + \mathbb{E}_3(\underline{\xi}) + \mathbb{E}_4(\underline{\xi}) - \frac{1}{3} (\mathbb{E}_5(\underline{\xi}) + \mathbb{E}_6(\underline{\xi})) \\ \mathbb{J} &= \frac{1}{3} (2\mathbb{E}_1(\underline{\xi}) + \mathbb{E}_2(\underline{\xi})) + \frac{1}{3} (\mathbb{E}_5(\underline{\xi}) + \mathbb{E}_6(\underline{\xi})) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Les tenseur de Green $\mathbf{\Gamma}^0(\underline{\xi})$ et $\mathbf{\Delta}^0(\underline{\xi})$ sont donnés par :

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma}^0(\underline{\xi}) &= \frac{1}{\lambda_0 + 2\mu_0} \mathbb{E}_2(\underline{\xi}) + \frac{1}{2\mu_0} \mathbb{E}_4(\underline{\xi}) \\ \mathbf{\Delta}^0(\underline{\xi}) &= \frac{2\mu_0(3\lambda_0 + 2\mu_0)}{\lambda_0 + 2\mu_0} \mathbb{E}_1(\underline{\xi}) + 2\mu_0 \mathbb{E}_3(\underline{\xi}) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Pour tout tenseur $\mathbb{C}^0 = 3\lambda_0 \mathbb{J} + 2\mu_0 \mathbb{I}$ (et $\mathbb{S}^0 = (\mathbb{C}^0)^{-1}$), on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma}^0(\underline{\xi}) : \mathbb{C}^0 &= \mathbb{P}(\underline{\xi}) + \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + 2\mu_0} \mathbb{E}_5(\underline{\xi}) \\ \mathbf{\Delta}^0(\underline{\xi}) : \mathbb{S}^0 &= \mathbb{Q}(\underline{\xi}) - \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + 2\mu_0} \mathbb{E}_6(\underline{\xi}) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Où $\mathbb{P}(\underline{\xi})$ et $\mathbb{Q}(\underline{\xi})$ sont définis par (1.22) On a donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{I} - \mathbf{\Gamma}^0 : \mathbb{C}^0 &= \mathbb{Q}(\underline{\xi}) - \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + 2\mu_0} \mathbb{E}_5 \\ \mathbb{I} - \mathbf{\Delta}^0 : \mathbb{S}^0 &= \mathbb{P}(\underline{\xi}) + \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + 2\mu_0} \mathbb{E}_6 \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Pour tout champ $\mathbf{a}(\underline{\xi})$ vérifiant la propriété $\forall \underline{\xi} \neq 0 : \mathbb{Q}(\underline{\xi}) : \mathbf{a}(\underline{\xi}) = 0$, on a $\forall \underline{\xi} : \mathbb{E}_n(\underline{\xi}) : \mathbf{a}(\underline{\xi}) = 0$ pour $n = 1, 3, 5$. En conséquence :

$$\forall \underline{\xi} \neq 0 : \mathbf{\Gamma}^0(\underline{\xi}) : \mathbb{C}^0 : \mathbf{a}(\underline{\xi}) = \mathbf{a}(\underline{\xi}) \quad (\text{A.10})$$

Pour tout champ $\mathbf{a}(\underline{\xi})$ vérifiant la propriété $\forall \underline{\xi} \neq 0 : \mathbb{P}(\underline{\xi}) : \mathbf{a}(\underline{\xi}) = 0$, on a $\forall \underline{\xi} : \mathbb{E}_n(\underline{\xi}) : \mathbf{a}(\underline{\xi}) = 0$ pour $n = 2, 4, 6$. En conséquence :

$$\forall \underline{\xi} \neq 0 : \mathbf{\Delta}^0(\underline{\xi}) : \mathbb{S}^0 : \mathbf{a}(\underline{\xi}) = \mathbf{a}(\underline{\xi}) \quad (\text{A.11})$$

Annexe B

Conditions de convergence du schéma itératif en contrainte

On établit les conditions de convergence de la série de Neumann définie par la relation de récurrence (1.47). La démonstration donnée ci-dessous est une reformulation en contrainte de celle proposée dans [57] pour le schéma itératif en déformation.

On recherche donc la convergence du schéma itératif (3.39) :

$$\begin{cases} \sigma^{i+1}(\underline{\xi}) = \Upsilon(\underline{\xi}) - \Delta^0(\underline{\xi}) : \left[(\mathbb{S}(\underline{\xi}) - \mathbb{S}^0) * \sigma^i(\underline{\xi}) \right] & \text{pour : } \underline{\xi} \neq 0 \\ \sigma^{i+1}(\underline{\xi}) = 0 & \text{pour : } \underline{\xi} = 0 \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Où $\mathbb{S}(\underline{x})$ est défini par :

$$\mathbb{S}(\underline{x}) = \frac{1}{3k(\underline{x})} \mathbb{J} + \frac{1}{2\mu(\underline{x})} \mathbb{K} \quad (\text{B.2})$$

Où $k(\underline{x})$ et $\mu(\underline{x})$ sont respectivement le module de compressibilité et le module de cisaillement du milieu hétérogène. La relation de récurrence s'écrit, dans le domaine réel :

$$\sigma^{i+1}(\underline{x}) = \Upsilon(\underline{x}) - \Delta^0(\underline{x}) * \left[(\mathbb{S}(\underline{x}) - \mathbb{S}^0) : \sigma^i(\underline{x}) \right] \quad (\text{B.3})$$

La vitesse de convergence du schéma itératif est liée au rayon spectral de l'opérateur $-\Delta^0(\underline{x}) * (\mathbb{S}(\underline{x}) - \mathbb{S}^0)$. Introduisons alors par β une valeur propre de l'opérateur $\Delta^0(\underline{x}) * (\mathbb{S}(\underline{x}) - \mathbb{S}^0)$ et notons par $\sigma_\beta(\underline{x})$ le vecteur propre associé à β et tel que $\langle \sigma_\beta(\underline{x}) \rangle_V = 0$. On a alors :

$$\beta \sigma_\beta(\underline{x}) = -\Delta^0(\underline{x}) * (\mathbb{S}(\underline{x}) - \mathbb{S}^0) : \sigma_\beta(\underline{x}) \quad (\text{B.4})$$

Compte tenu de la propriété (1.36), $\sigma_\beta(\underline{x})$ est un champ équilibré, $\mathbb{P}(\underline{\xi}) : \underline{e}_\beta(\underline{\xi}) = 0$. Or, pour tout champ équilibré $\sigma_\beta(\underline{\xi})$, on a (voire annexe A) :

$$\forall \underline{\xi} \neq 0 : \Delta^0(\underline{\xi}) : \mathbb{S}^0 : \sigma_\beta(\underline{\xi}) = \sigma_\beta(\underline{\xi}) \quad (\text{B.5})$$

Soit encore :

$$\forall \underline{\xi} \neq 0 : \underline{\Delta}^0(\underline{x}) * \mathbb{S}^0 : \underline{\sigma}_\beta(\underline{x}) = \underline{\sigma}_\beta(\underline{x}) \quad (\text{B.6})$$

On a donc, en combinant cette dernière relation avec (B.4) :

$$\underline{\sigma}_\beta(\underline{x}) = \underline{\Delta}^0(\underline{x}) * (\mathbb{S}'(\underline{x}) - \mathbb{S}^0) : \underline{\sigma}_\beta(\underline{x}) \quad (\text{B.7})$$

Où $\mathbb{S}'(\underline{x}) = \mathbb{S}(\underline{x}) - (1 - \beta)\mathbb{S}^0$. On observe que $\underline{\sigma}_\beta(\underline{x})$ dans (B.7) est la solution du problème d'inhomogénéité :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\varepsilon}_\beta(\underline{x}) = \frac{1}{2}(\nabla \underline{u}_\beta(\underline{x}) + \nabla^t \underline{u}_\beta(\underline{x})) \quad \forall \underline{x} \in V \\ \underline{\varepsilon}_\beta(\underline{x}) = \mathbb{S}'(\underline{x}) : \underline{\sigma}_\beta(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in V \\ \text{div}(\underline{\sigma}_\beta(\underline{x})) = 0 \quad \forall \underline{x} \in V \\ \underline{\sigma}_\beta(\underline{x}) \cdot \underline{n} \text{ antipériodique} \\ \underline{u}_\beta(\underline{x}) \text{ périodique} \\ \langle \underline{\varepsilon}_\beta(\underline{x}) \rangle_V = \langle \underline{\sigma}_\beta(\underline{x}) \rangle_V = 0 \end{array} \right. \quad (\text{B.8})$$

La solution du problème d'inhomogénéité (B.8) est la solution triviale $\underline{\sigma}_\beta(\underline{x}) = 0$ si le tenseur d'ordre quatre $\mathbb{S}'(\underline{x})$ est défini positif ou négatif. Pour que $\underline{\sigma}_\beta(\underline{x})$ soit un vecteur propre de $-\underline{\Delta}^0(\underline{x}) * (\mathbb{S}(\underline{x}) - \mathbb{S}^0)$, il faut nécessairement que $\mathbb{S}'(\underline{x})$ ne soit pas défini positif ou négatif. Le problème (B.8) possède donc une solution non triviale si :

$$\exists \underline{x}_1, \frac{1}{k'(\underline{x}_1)} \leq 0 \text{ ou } \frac{1}{\mu'(\underline{x}_1)} \leq 0 \text{ et } \exists \underline{x}_2, \frac{1}{k'(\underline{x}_2)} \geq 0 \text{ or } \frac{1}{\mu'(\underline{x}_2)} \geq 0 \quad (\text{B.9})$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} \beta &\geq \min \left\{ \min_{\underline{x}} \left(1 - \frac{k_0}{k(\underline{x})} \right), \min_{\underline{x}} \left(1 - \frac{\mu_0}{\mu(\underline{x})} \right) \right\} \\ \beta &\leq \max \left\{ \max_{\underline{x}} \left(1 - \frac{k_0}{k(\underline{x})} \right), \max_{\underline{x}} \left(1 - \frac{\mu_0}{\mu(\underline{x})} \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

La condition suffisante pour obtenir la convergence du schéma itératif est que $|\beta| < 1$, soit :

$$\forall \underline{x} : \frac{1}{k_0} > \frac{1}{2} \frac{1}{k(\underline{x})} > 0 \text{ et } \frac{1}{\mu_0} > \frac{1}{2} \frac{1}{\mu(\underline{x})} \quad (\text{B.11})$$

Annexe C

Formulations en contrainte basées sur un Lagrangien augmenté

La formulations duale des schémas itératifs (1.82) et (1.85) est obtenue en appliquant la règle suivante :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon &\Leftrightarrow \sigma \\
 e &\Leftrightarrow s \\
 W(\mathbf{E}) &\Leftrightarrow W^*(\Sigma) \\
 w(\varepsilon) &\Leftrightarrow w^*(\sigma) \\
 \mathcal{K}(\mathbf{E}) &\Leftrightarrow \mathcal{S}(\Sigma) \\
 \mathbb{C}(\underline{x}) &\Leftrightarrow \mathbb{S}(\underline{x}) \\
 \mathbb{C}^0 &\Leftrightarrow \mathbb{S}^0
 \end{aligned} \tag{C.1}$$

A titre d'exemple cela signifie que, dans les équations présentées en section 1.4, on remplace ε par σ tandis que σ est remplacé par ε .

D'autre par on applique également la règle suivante :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_\varepsilon &\Rightarrow \mathcal{L}_\sigma^* \\
 \mathcal{L}_\varepsilon^* &\Rightarrow \mathcal{L}_\sigma \\
 \tau &\Rightarrow \eta
 \end{aligned} \tag{C.2}$$

Qui signifie, par exemple, que \mathcal{L}_ε est remplacé \mathcal{L}_σ^* .

Considérons tout d'abord la forme duale du schéma itératif (1.82). La réécriture du principe du minimum conduit à :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 W^*(\Sigma) = \sup_{\lambda} \inf_s \inf_{\sigma \in \mathcal{S}(\Sigma)} \mathcal{L}_\sigma^*(\sigma(\underline{x}), s(\underline{x}), \lambda(\underline{x})) \\
 \mathcal{L}_\sigma^*(\sigma(\underline{x}), s(\underline{x}), \lambda(\underline{x})) = \langle w^*(s(\underline{x})) \rangle_V + \langle \lambda(\underline{x}) : (\sigma(\underline{x}) - s(\underline{x})) \rangle_V \\
 \quad + \frac{1}{2} \langle (\sigma(\underline{x}) - s(\underline{x})) : \mathbb{S}^0 : (\sigma(\underline{x}) - s(\underline{x})) \rangle_V \\
 w^*(\sigma(\underline{x})) = \frac{1}{2} \sigma(\underline{x}) : \mathbb{S}(\underline{x}) : \sigma(\underline{x}) \\
 \mathcal{S}(\Sigma) = \{ \sigma(\underline{x}), \langle \sigma(\underline{x}) \rangle_V = \Sigma, \text{div}(\sigma(\underline{x})) = 0, \sigma(\underline{x}).\underline{n} \text{ antipériodique} \}
 \end{array} \right. \tag{C.3}$$

Le schéma itératif associé est alors donné par :

$$\begin{aligned}
 \text{Etape i=1 : } & \mathbf{s}^1(\underline{x}_n) = \Sigma \text{ et } \lambda^1(\underline{x}_n) = 0 \\
 \text{Etape i : } & \mathbf{s}^i(\underline{x}_n) \text{ et } \lambda^i(\underline{x}_n) \text{ sont connus} \\
 & \boldsymbol{\eta}^i(\underline{x}_n) = \lambda^i(\underline{x}_n) - \mathbb{S}^0 : \mathbf{s}^i(\underline{x}_n) \\
 & \boldsymbol{\eta}^i(\underline{\xi}_n) = \mathcal{F}(\boldsymbol{\eta}^i(\underline{x}_n)) \\
 & \forall \underline{\xi}_n \neq 0 : \boldsymbol{\sigma}^{i+1}(\underline{\xi}_n) = -\Delta^0(\underline{\xi}_n) : \boldsymbol{\eta}^i(\underline{\xi}_n), \boldsymbol{\sigma}^{i+1}(0) = \Sigma \\
 & \boldsymbol{\sigma}^{i+1}(\underline{x}_n) = \mathcal{F}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}^{i+1}(\underline{\xi}_n)) \\
 & \mathbf{s}^{i+1}(\underline{x}_n) = [\mathbb{S}(\underline{x}_n) + \mathbb{S}^0]^{-1} : [\mathbb{S}^0 : \boldsymbol{\sigma}^{i+1}(\underline{x}_n) + \lambda^i(\underline{x}_n)] \\
 & \lambda^{i+1}(\underline{x}_n) = \lambda^i(\underline{x}_n) + \mathbb{S}^0 : (\boldsymbol{\sigma}^{i+1}(\underline{x}_n) - \mathbf{s}^{i+1}(\underline{x}_n)) \\
 & \text{test de convergence}
 \end{aligned}
 \tag{C.4}$$

Le critère de convergence utilisé est :

$$\max \left(\frac{\|\boldsymbol{\sigma}^i(\underline{x}_n) - \mathbf{s}^i(\underline{x}_n)\|}{\|\Sigma\|}, \frac{\|\lambda^i(\underline{x}_n) - \mathbb{S}(\underline{x}_n) : \boldsymbol{\sigma}^i(\underline{x}_n)\|}{\|\mathbb{S}(\underline{x}_n) : \Sigma\|} \right) \leq \epsilon
 \tag{C.5}$$

S'agissant maintenant de la forme duale du schéma itératif (1.85), on a pour le principe de minimum :

$$\left\{ \begin{aligned}
 W(\mathbf{E}) &= \sup_{\lambda} \inf_{\mathbf{e}} \inf_{\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{K}(\mathbf{E})} \mathcal{L}_{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}), \mathbf{e}(\underline{x}), \lambda(\underline{x})) \\
 \mathcal{L}_{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}), \mathbf{e}(\underline{x}), \lambda(\underline{x})) &= \langle w(\mathbf{e}(\underline{x})) \rangle_V + \langle \lambda(\underline{x}) : (\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) - \mathbf{e}(\underline{x})) \rangle_V \\
 &\quad + \frac{1}{2} \langle (\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) - \mathbf{e}(\underline{x})) : \mathbb{C}^0 : (\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) - \mathbf{e}(\underline{x})) \rangle_V \\
 w(\mathbf{e}(\underline{x})) &= \frac{1}{2} \mathbf{e}(\underline{x}) : \mathbb{C}(\underline{x}) : \mathbf{e}(\underline{x}) \\
 \mathcal{K}(\mathbf{E}) &= \{\underline{v}(\underline{x}) = \mathbf{E}.\underline{x} + \underline{v}^*(\underline{x}), \underline{v}^*(\underline{x}) \text{ périodique}\}
 \end{aligned} \right.
 \tag{C.6}$$

Le schéma itératif associé s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \text{Etape i=1 : } & \mathbf{e}^1 = 0 \text{ et } \lambda^1 = 0 \\
 \text{Etape i : } & \mathbf{e}^i(\underline{x}_n) \text{ et } \lambda^i(\underline{x}_n) \text{ sont connus} \\
 & \boldsymbol{\eta}^i(\underline{x}_n) = \mathbf{e}^i(\underline{x}_n) - \mathbb{S}^0 : \lambda^i(\underline{x}_n) \\
 & \boldsymbol{\eta}^i(\underline{\xi}_n) = \mathcal{F}(\boldsymbol{\eta}^i(\underline{x}_n)) \\
 & \boldsymbol{\sigma}^{i+1}(\underline{\xi}_n) = \Sigma - \Delta^0 : \boldsymbol{\eta}^i(\underline{\xi}_n) \\
 & \boldsymbol{\sigma}^{i+1}(\underline{x}_n) = \mathcal{F}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}^{i+1}(\underline{\xi}_n)) \\
 & \boldsymbol{\varepsilon}^{i+1}(\underline{x}_n) = \mathbb{C}^0 : \boldsymbol{\sigma}^{i+1}(\underline{x}_n) + \boldsymbol{\eta}^i(\underline{x}_n) \\
 & \mathbf{e}^{i+1}(\underline{x}_n) = (\mathbb{C}(\underline{x}_n) + \mathbb{C}^0)^{-1} : (\lambda^i(\underline{x}_n) + \mathbb{C}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}^{i+1}(\underline{x}_n)) \\
 & \lambda^{i+1}(\underline{x}_n) = \lambda^i(\underline{x}_n) + \mathbb{C}^0 : (\boldsymbol{\varepsilon}^{i+1}(\underline{x}_n) - \mathbf{e}^{i+1}(\underline{x}_n)) \\
 & \text{test de convergence}
 \end{aligned}
 \tag{C.7}$$

Le processus itératif est alors stoppé lorsque :

$$\max\left(\frac{\|\boldsymbol{\varepsilon}^i(\underline{x}_n) - \boldsymbol{e}^i(\underline{x}_n)\|}{\|\boldsymbol{E}\|}, \frac{\|\boldsymbol{\lambda}^i(\underline{x}_n) - \mathbb{C}(\underline{x}_n) : \boldsymbol{\varepsilon}^i(\underline{x}_n)\|}{\|\mathbb{C}(\underline{x}_n) : \boldsymbol{E}\|}\right) \leq \epsilon \quad (\text{C.8})$$

Résumé : Cette étude est consacrée au développement d'outils numériques basés sur la Transformée de Fourier Rapide (TFR) en vue de la détermination des propriétés effectives des structures périodiques. La première partie est dédiée aux matériaux composites. Au premier chapitre, on présente et on compare les différentes méthodes de résolution basée sur la TFR dans le contexte linéaire. Au second chapitre, on propose une approche à deux échelles, pour la détermination du comportement des composites non linéaires. La méthode couple, les techniques de résolution basées sur la TFR à l'échelle locale et des techniques d'interpolation multidimensionnelle à l'échelle macroscopique. L'approche présente de nombreux avantages faces aux approches existantes, en outre elle ne nécessite aucune approximation et elle parfaitement séquentielle puisqu'elle ne requiert le traitement simultané des deux échelles. La loi de comportement macroscopique obtenue est implémentée dans un code de calcul par éléments finis. Des illustrations dans le cas d'un problème de flexion sont proposées. La deuxième partie du travail on propose des schéma itératifs basés sur la TFR pour la détermination de la perméabilité des milieux poreux saturés. Au chapitre trois, on décrit la démarche dans le cas des écoulements en régime quasi-statique. Deux extensions de cette méthode sont proposées au quatrième chapitre. La première concerne la prise en compte des effets de glissement sur la paroi de la matrice poreuse. La méthodologie employée repose sur le concept d'interphase et d'interface équivalente, introduite dans le contexte de l'élasticité des composites et adaptée ici au cas des milieux poreux. Enfin, on présente une seconde extension au cas des écoulements en régime dynamique.

Mots clés : Milieux périodiques, Matériaux composites, Milieux Poreux, Homogénéisation, Transformée de Fourier Rapide.

Abstract : This study is devoted to developing numerical tools based on Fast Fourier Transform (FFT) for determining the effective properties of periodic structures. The first part is devoted to composite materials. In the first chapter, we present and we compare the different FFT-based methods in the context of linear composites. In the second chapter, we propose a two-scale approach for determining the behavior of nonlinear composites. The method uses both FFT-based iterative schemes at the local scale and multidimensional interpolation technics at the macroscopic scale. This approach has many advantages over existing ones, particularly, it requires no approximations and it is sequential in the sense that it is not required to process both scales simultaneously. The macroscopic constitutive law has been derived and implemented in a finite element code. Some illustrations in the case of a beam bending are proposed. The second part of the work is dedicated to the formulation of FFT based iterative schemes for the determination or the permeability of saturated porous media. In chapter three, we present the approach in the context of quasi-static flows. Two extensions of this method are proposed in the fourth chapter. The first concerns the slip effects which occurs at the interface between solid and fluid. The methodology use the concept of interface and the equivalent interphase, initially introduced in the context of elastic composites and adapted here to the case of porous media. Finally, we present the extension of the method in the dynamic context.

Keywords : Periodic Media, Composite Materials, Porous Media, Homogenization, Fast Fourier Transform.