

09.02
2013

Mécanique Numérique Probabiliste

Etude d'une poutre en flexion simple



Christian NADER, Talal EL KANJ

Soumis à Mr. Emmanuel ROUBIN
<emmanuel.roubin@lmt.ens-cachan.fr>

Christian NADER et Talal EL KANJ
Compte rendu du TP



Question 1 : Problème de Fredholm

Problème de Fredholm: $\int_P C(x,y) \Psi(y) dy = \lambda \Psi(x)$

On multiplie par w et on intègre :

N_a est la fonction de forme, on a alors :

$$\Psi(x) = \sum N_a(x) \Psi_a(x) = \underline{N} \underline{\Psi}$$

$$W(x) = \sum N_a(x) w_a(x) = \underline{N} \underline{w}$$

$$C(x,y) = \underline{N}^T \underline{C} \underline{N}$$

$$* \underline{H} \underline{C} \underline{H} \underline{\Psi} = \lambda \underline{H} \underline{\Psi} : \text{à démontrer}$$

On remplace dans ① :

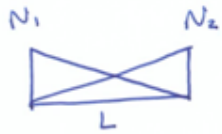
$$\int_P \underline{w}^T \underline{N}(x) \int_P \underline{N}^T(x) \underline{C} \underline{N}(y) \underline{N}^T(y) \underline{\Psi} dy dx = \int_P \lambda \underline{w}^T \underline{N}(x) \underline{N}^T(x) \underline{\Psi} dx$$

On sépare ceux qui dépendent de x et ceux qui dépendent de y :

$$\underline{w}^T \int_P \underline{N}(x) \underline{N}^T(x) dx \underline{C} \int_P \underline{N}(y) \underline{N}^T(y) dy \underline{\Psi} = \underline{w}^T \lambda \int_P \underline{N}(x) \underline{N}^T(x) dx \underline{\Psi}$$

$$\text{d'où : } \underline{H} \underline{C} \underline{H} \underline{\Psi} = \lambda \underline{H} \underline{\Psi}$$

Calcul de \underline{M}_e :



$$\underline{N} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}$$

$$N_1 = 1 - x/L$$

$$N_2 = x/L$$

$$\underline{M}_e = \int_0^L \underline{N} \underline{N}^T dx$$

$$= \int_0^L \begin{bmatrix} 1 - x/L \\ x/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - x/L & x/L \end{bmatrix} dx$$

$$= \int_0^L \begin{bmatrix} (1 - x/L)^2 & x/L (1 - x/L) \\ \frac{x}{L} (1 - x/L) & (x/L)^2 \end{bmatrix} dx$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{L(1 - x/L)^3}{3} & \frac{x^2}{2L} - \frac{x^3}{3L^2} \\ \frac{x^2}{2L} - \frac{x^3}{3L^2} & \frac{x^3}{3L^2} \end{bmatrix}_0^L$$

$$= \begin{bmatrix} L/3 & L/6 \\ L/6 & L/3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Question 2 : Générateur de réalisation de champs aléatoire Gaussiens corrélés :

Pour cette question on a implémenté une fonction $[f]=F(n,l,k,l_c,s)$

n : nombre d'élément

l : longueur de la poutre

k : nombre des valeurs propres

l_c : longueur de corrélation de la fonction Gaussienne

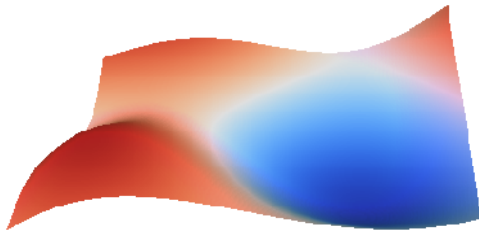
s : écart-type

L'intérêt de ce générateur est d'assurer la corrélation et la continuité des rigidités des éléments de la poutre.

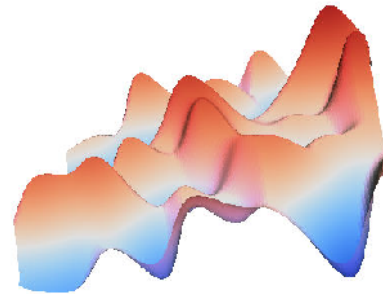
La longueur de corrélation L_c :

Un champ à grande longueur de corrélation est dit fortement corrélé Fig. 2.1(a).

Au contraire on dira qu'il est faiblement corrélé si sa longueur de corrélation est faible Fig. 2.1(b).



(a) Grande longueur de corrélation



(b) Petite longueur de corrélation

Figure 1 Mise en évidence de l'effet de la longueur de corrélation sur un champ aléatoire

La différence entre ces deux réalisations peut être vue en terme de "contenu fréquentiel". Un champ fortement corrélé ne possède que très peu de "modes" par rapport à un faiblement corrélé.

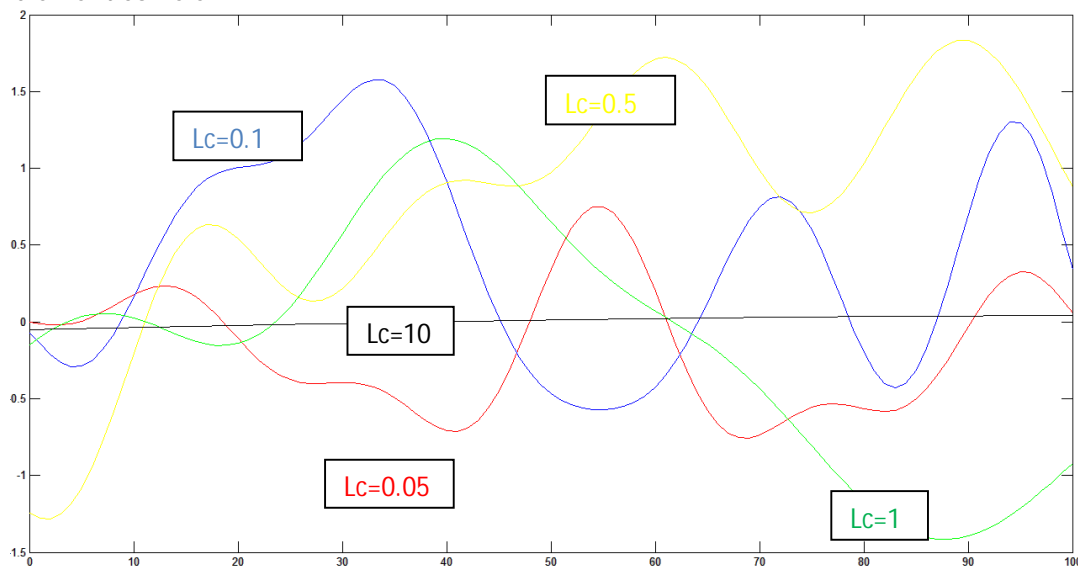
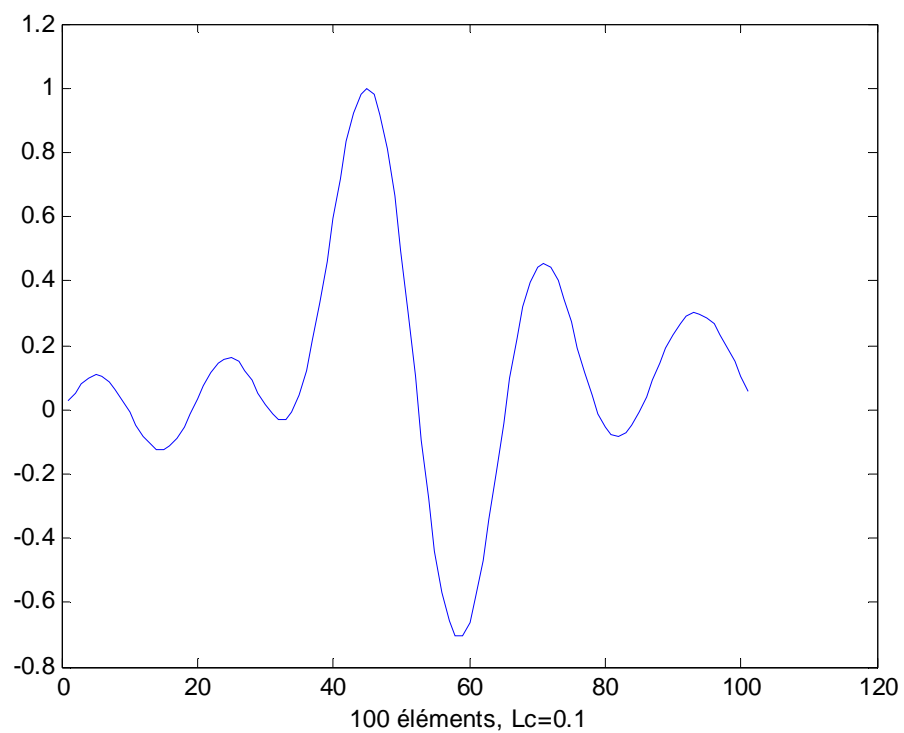
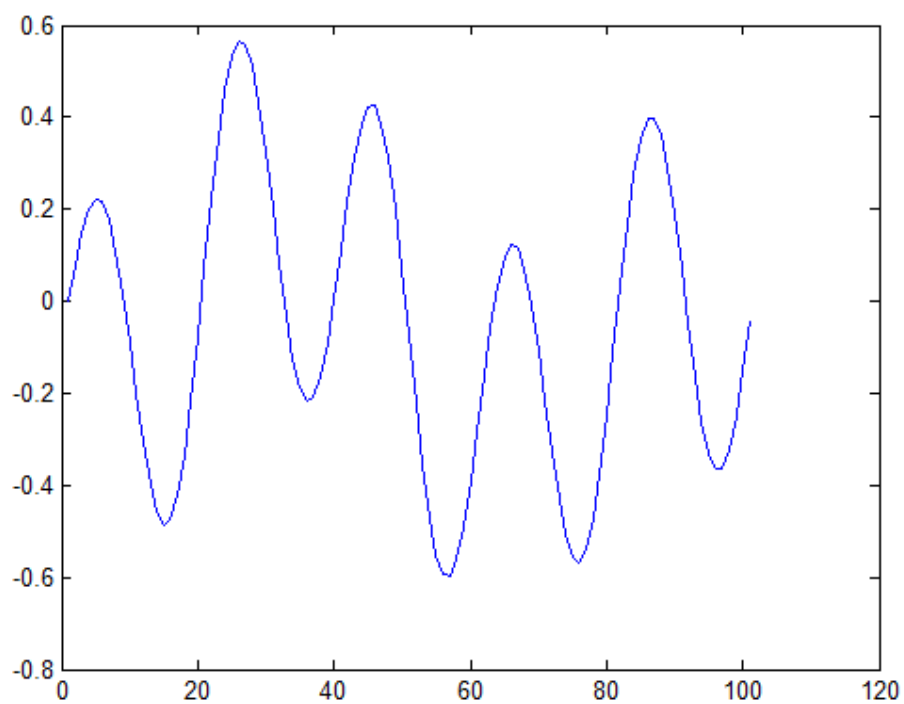


Figure 2 : La variation de f suivant la longueur de corrélation

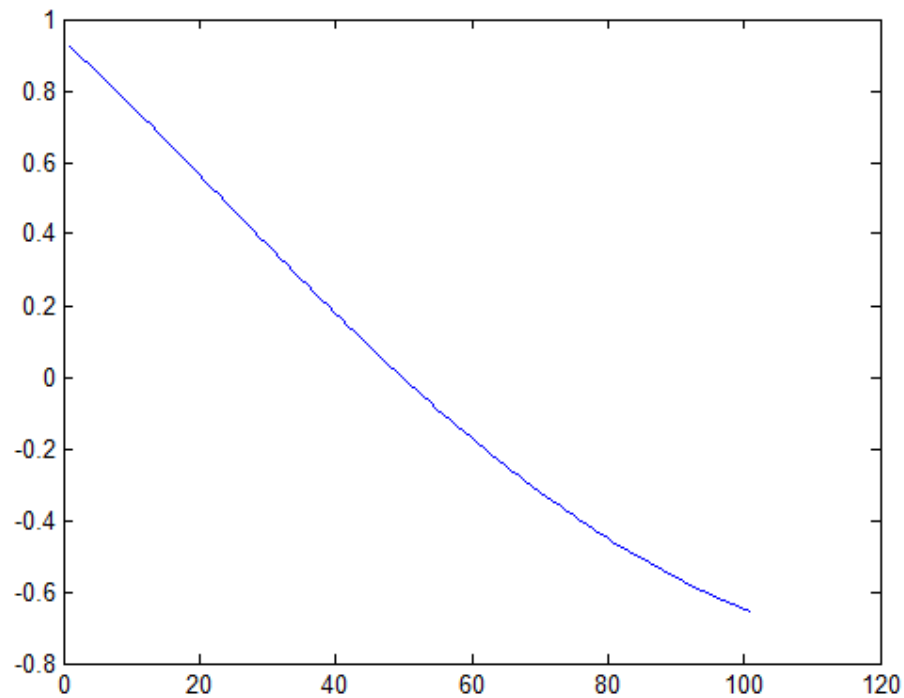
Quelques réalisations séparées ($l=5$ m) :



Rapport $\eta=L_c / L$ grand:



Rapport $\eta = L_c / L$ petit:



Question 3 : Implémentation d'un solveur pour le problème de flexion en prévoyant que EI peut dépendre de x.

Pour ce fait, on a implémenté une fonction nommée 'solveur(l,ei,force)' qui prend comme paramètre la longueur de la poutre et sa valeur EI et fait sortir la déformée le long de la poutre avec le nombre minimale des nœuds pour avoir un erreur de 0.1% avec la solution analytique de référence.

Ainsi pour $EI=10^6$, $l=5$ et $F=6$ KN on obtient :

```
>> solveur (5,10^6,6)
```

```
ans =
```

```
45          (c'est le nombre de nœuds minimal pour erreur=0.1)
```

```
>>
```

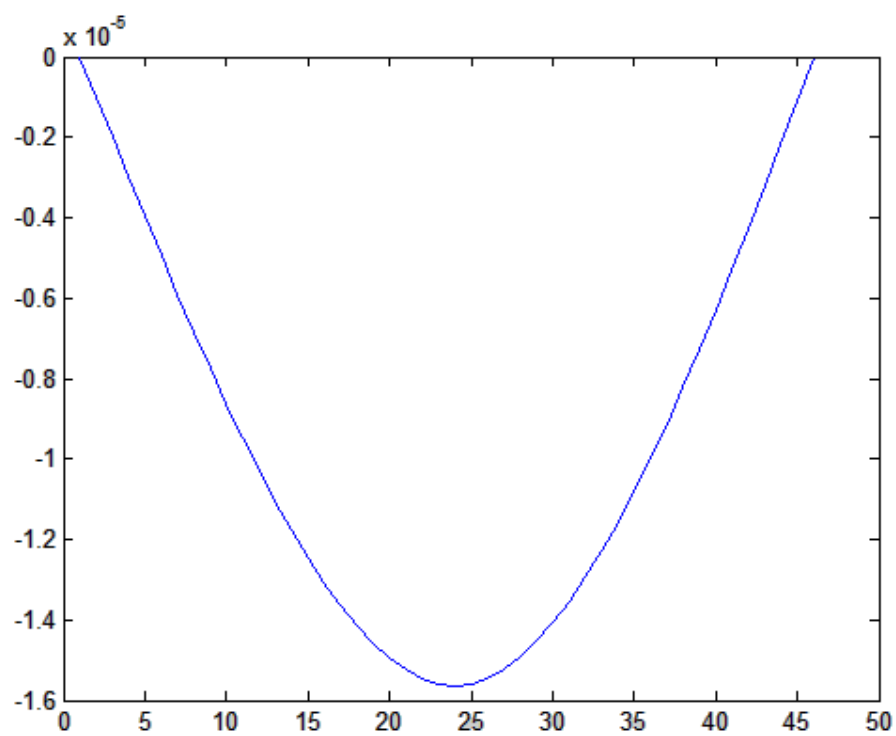
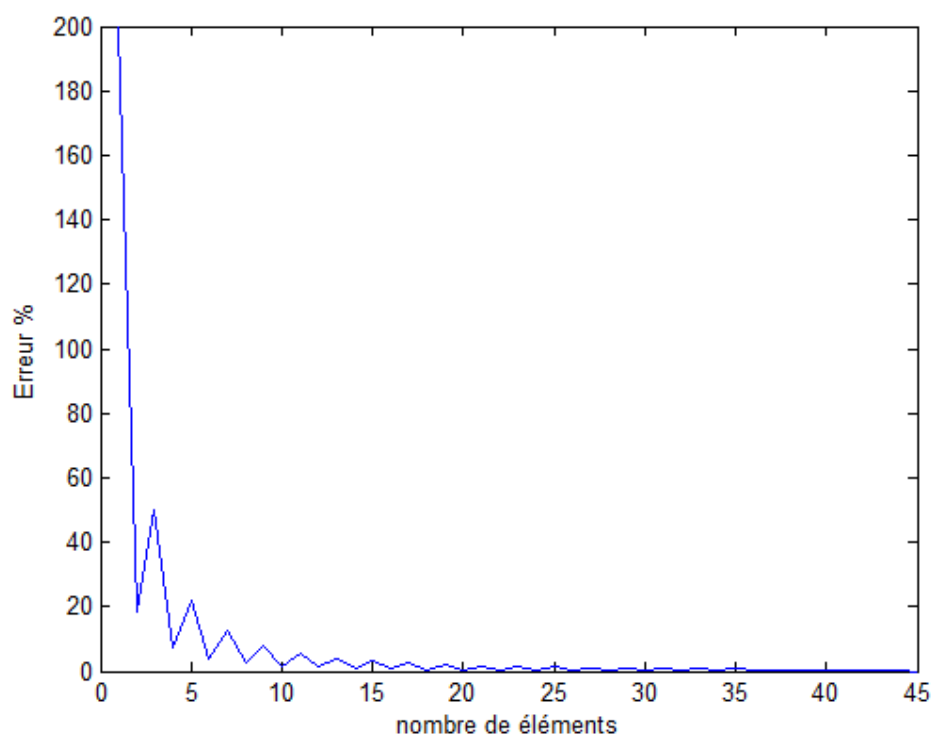


Figure 3 : La déformée tout au long de la poutre pour n=45

Graphe de l'erreur en fonction du nbr d'éléments:



Question 4 : L'utilité de la méthode de Monte-Carlo en mettant la différence entre les problèmes additifs et les problèmes multiplicatifs.

Pour cette question, on a implanté une méthode montecarlo(m, l, ei, vei, force) qui cherche la flèche par la méthode de Monte-Carlo et par une deuxième méthode qui consiste à chercher d'abord la moyenne des EI des 'm' poutres puis chercher la flèche.

L'erreur entre ces deux méthodes est encore calculée.

m=50 : le nombre des poutres

l=5 : longueur de la poutre

ei=10⁶ : Espérance [EI]

sei=2*10¹⁰ : écart-type [EI]

force = 6 KN

```
>> montecarlo(50,5,10^6,2*10^10,6)
```

```
v1 =
```

```
1.5773e-005
```

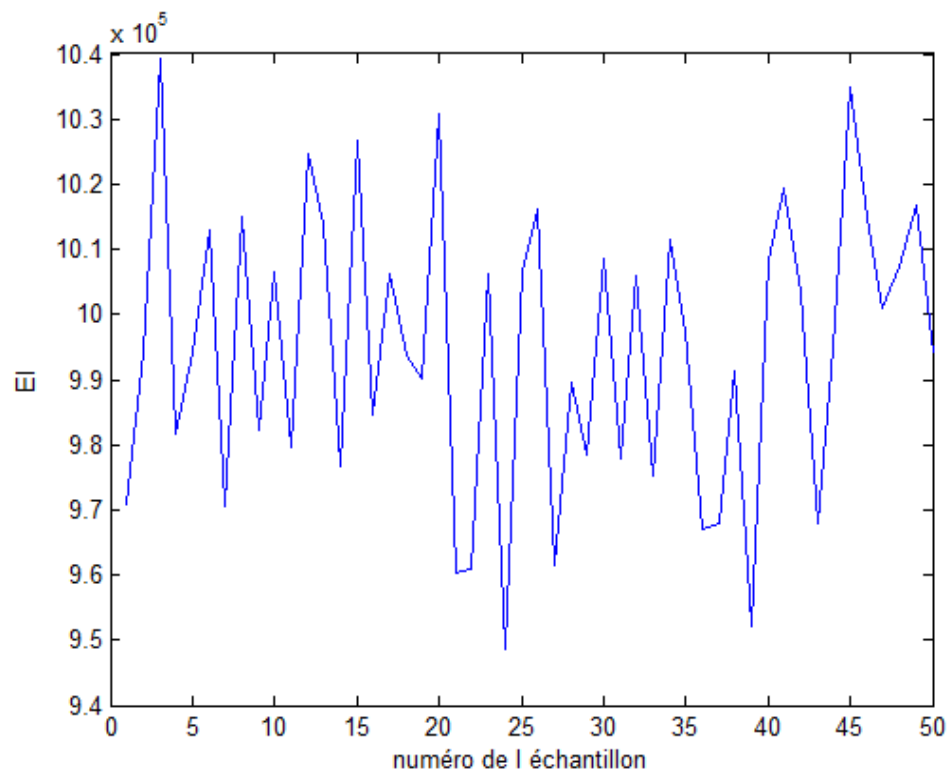
```
v2 =
```

```
1.5766e-005
```

```
erreur =
```

```
0.0445
```

```
>>
```



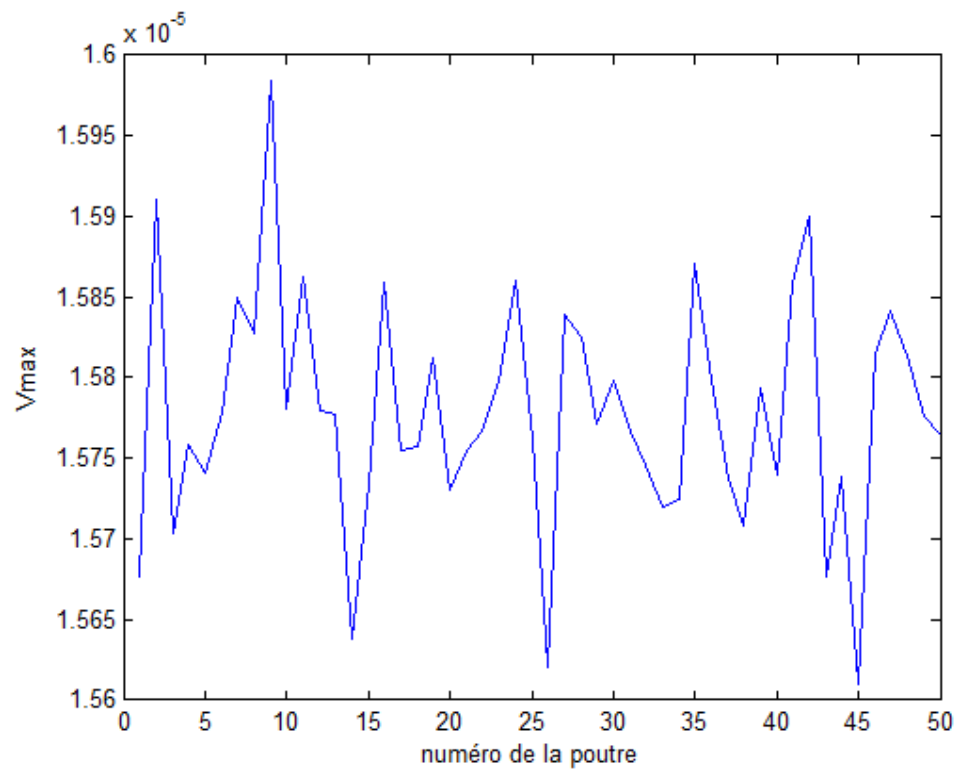
On peut conclure de cette erreur l'intérêt de la méthode de Monte-Carlo.

Question 5 : Mettre en œuvre la méthode Monte-Carlo pour le problème probabiliste.

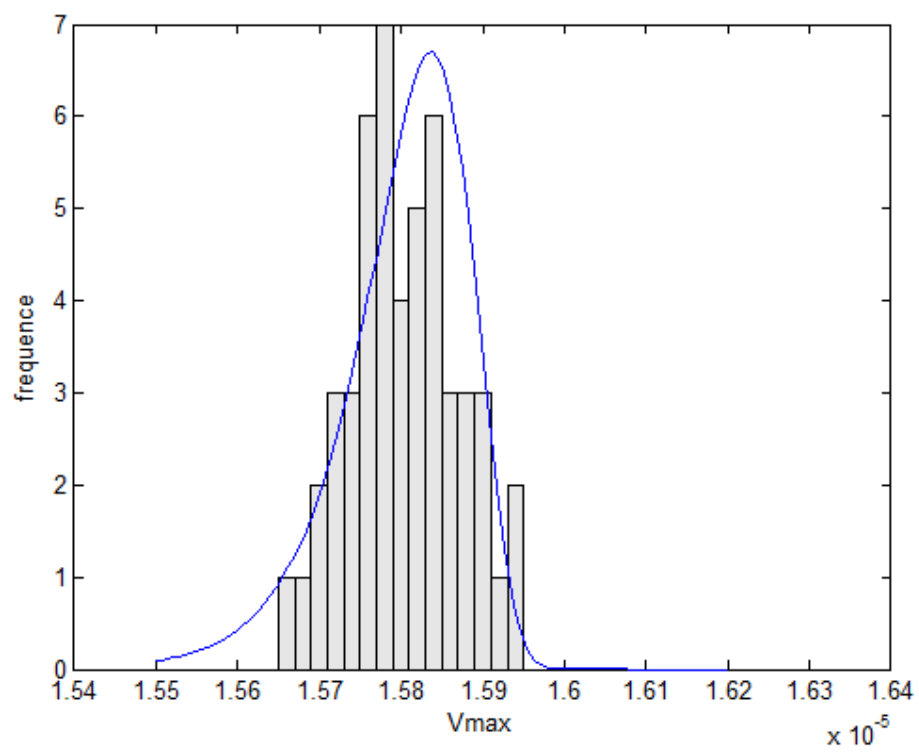
On va prendre 50 poutres de longueurs 5m chacune, et chacune divisées en 100 éléments. En utilisant la question 4, on a affecté à chaque poutre un EI moyen, qui on va faire fluctuer en fonction de l'abscisse en utilisant la fonction F de la question 2 qui génère un champ aléatoire corrélé.

De cette façon on trouve la flèche maximal de chaque poutre par la méthode de Monte-Carlo. Enfin, quand on trace le résultat en fonction des échantillons on obtient :

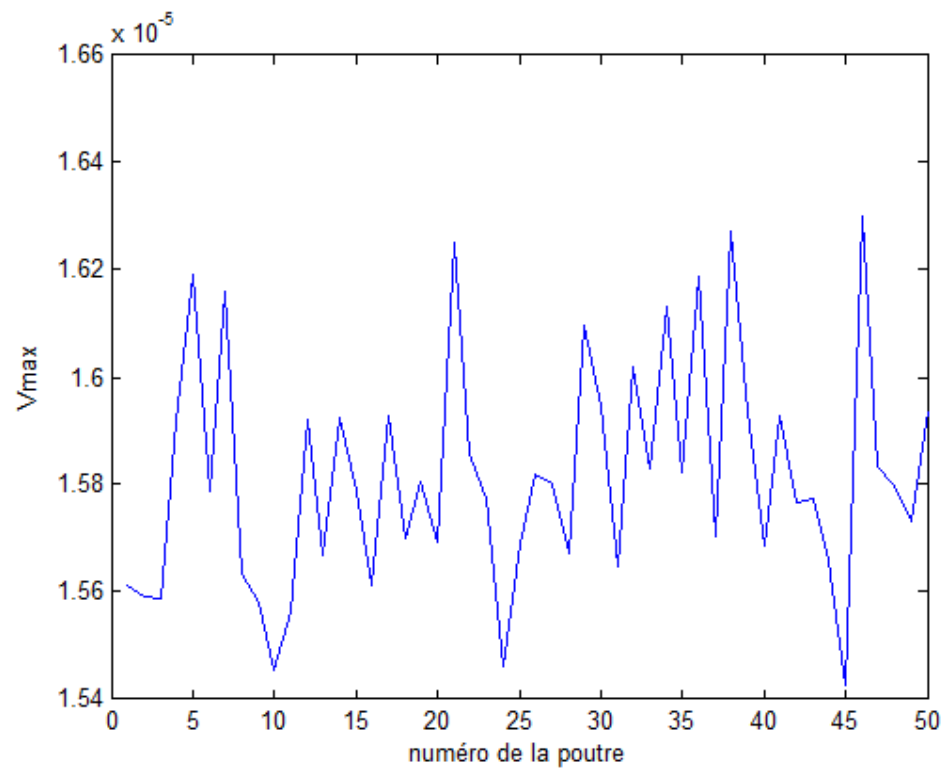
Pour $L_c=0.1$:

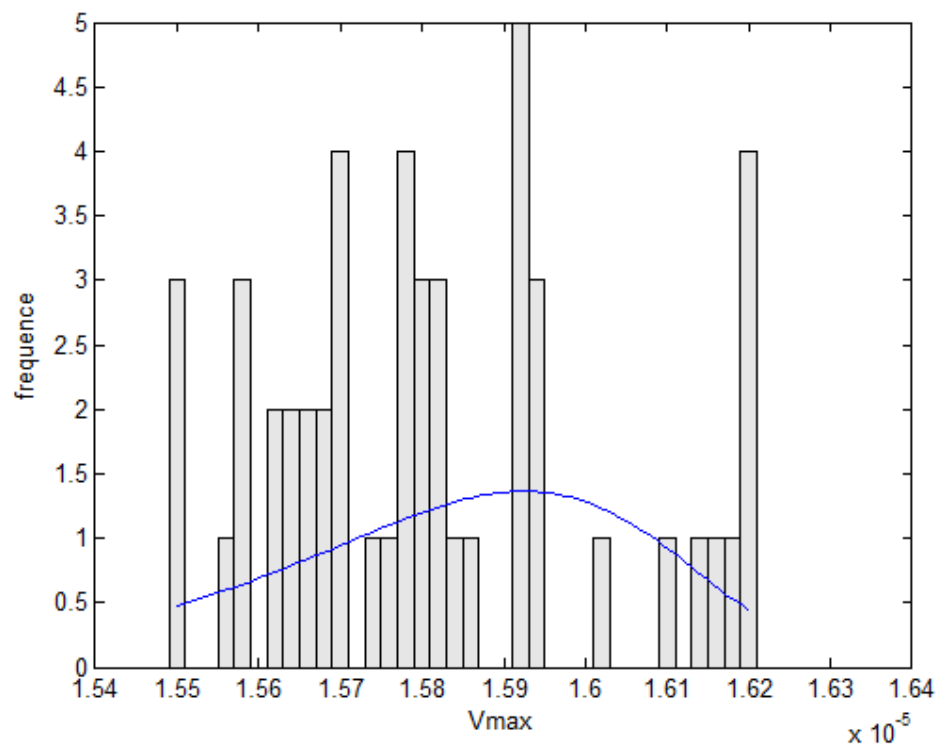


Enfin pour mieux suivre ce qui se passe on trace l'histogramme pour avoir une idée de comment est répartie la réponse en fonction des différentes longueurs de corrélations.

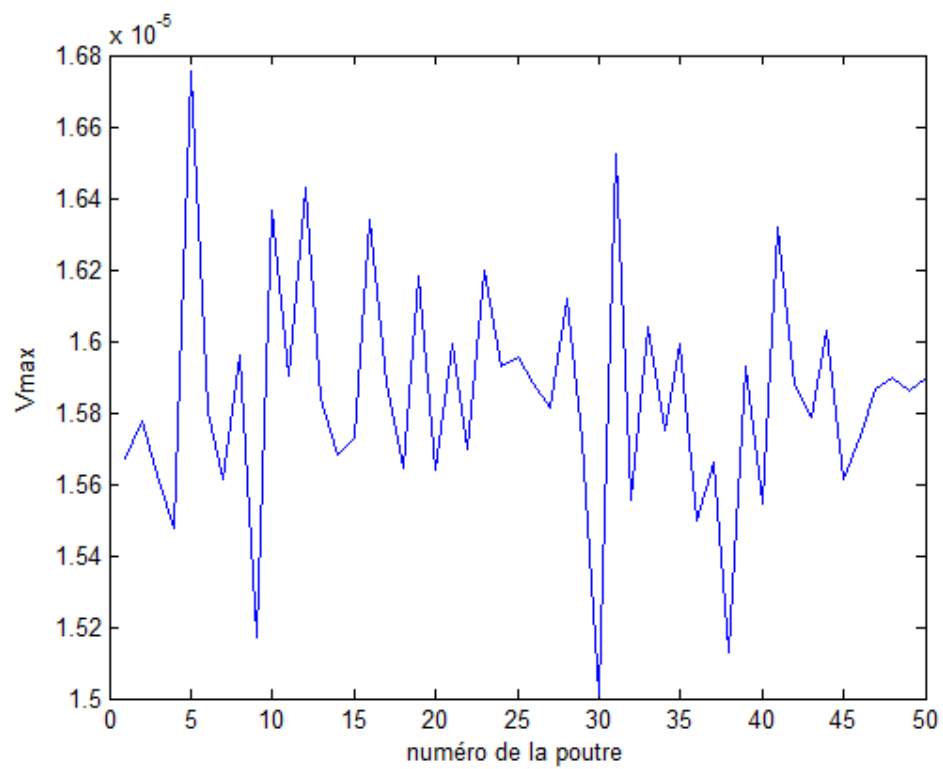


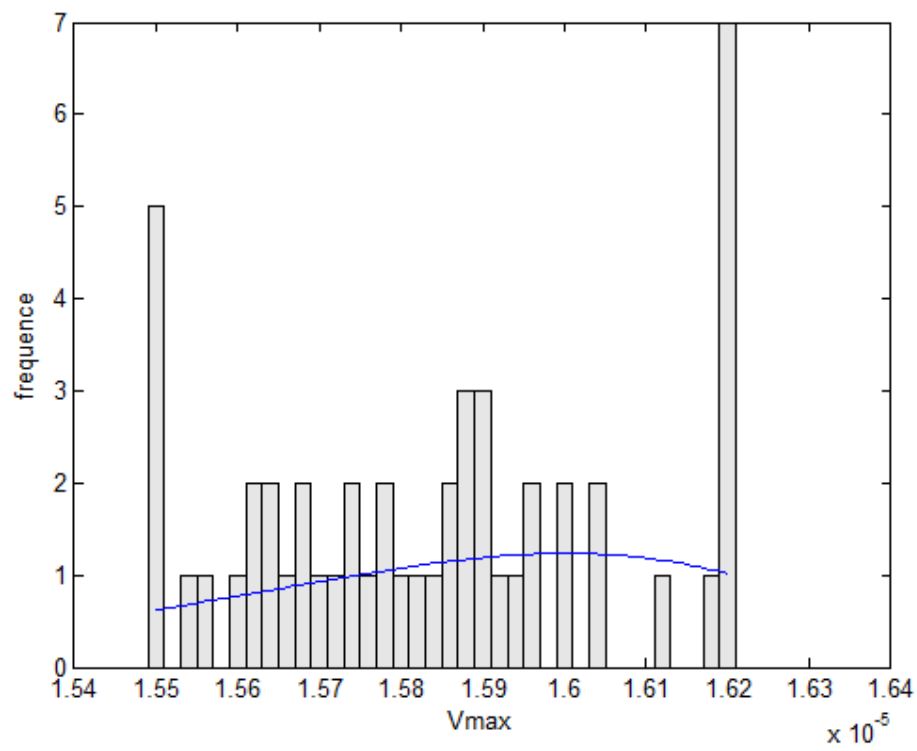
Pour $L_c=1$:



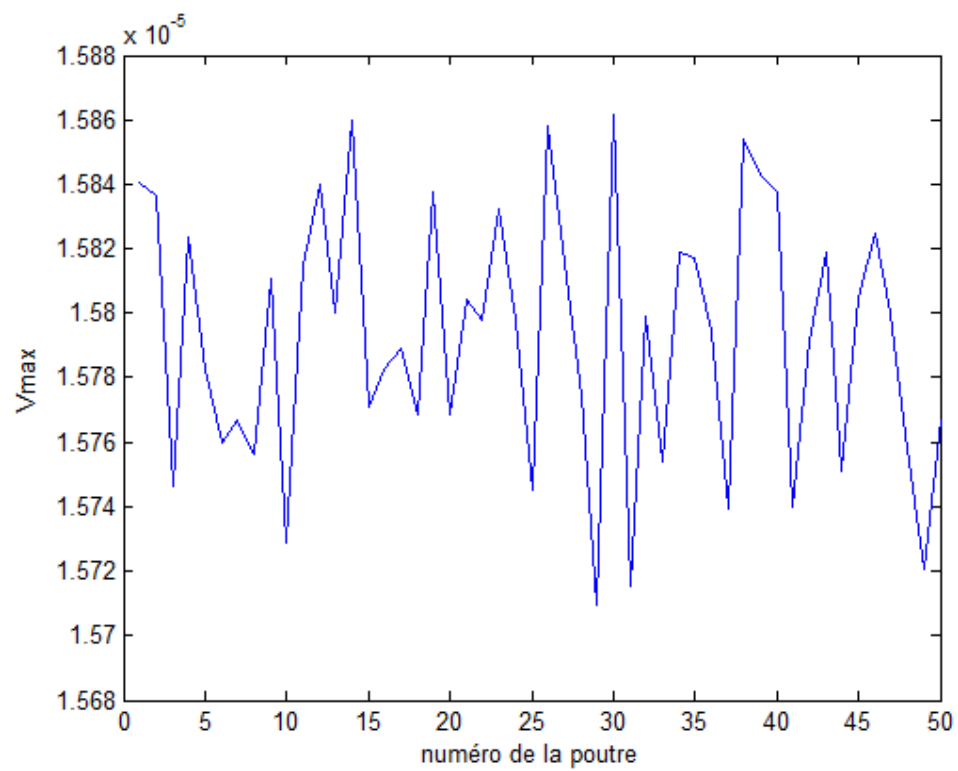


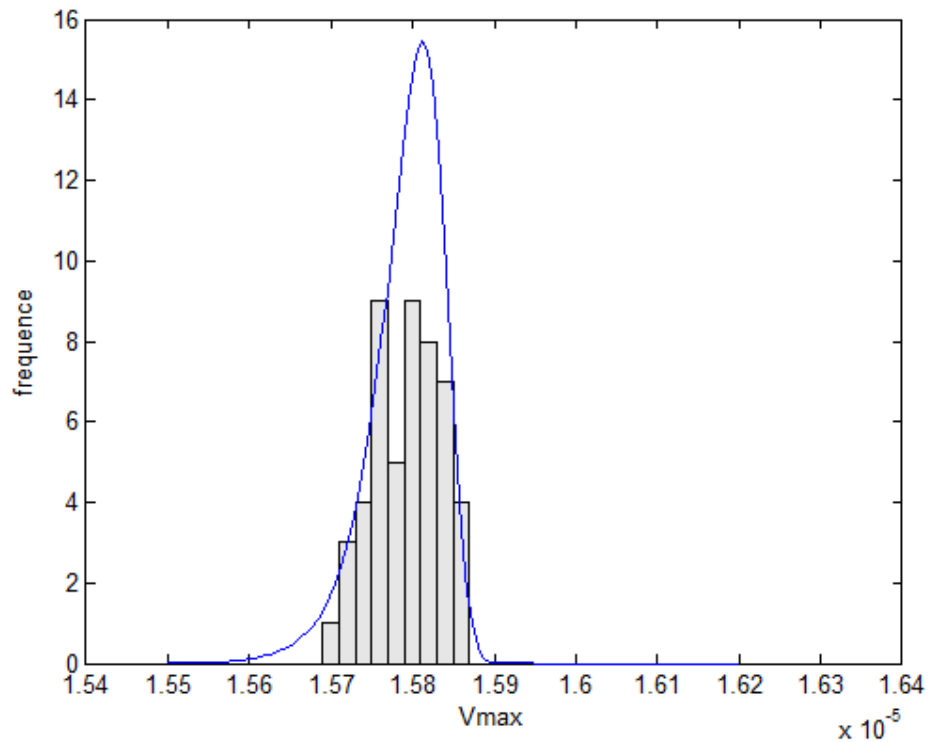
Pour $L_c=4$:





Pour $L_c=0.0001$:





Conclusion: on déduit que une valeur très petite de L_c va nous donnée une répartition très concentrée, par contre une valeur grande le L_c (par rapport à L) va résulter par une répartition très étaler. On prédit alors une valeur optimale du rapport L_c/L aux alentours de i/n avec n : le nombre d'élément par poutre et i telque $1 < i \ll n$.

Question Bonus : Effet d'échelle

L'effet d'échelle dont on parle ici revient au principe de Mariotte (1686) qui dit :

« a long rope and a short one always support the same weight unless that in a long rope there may happen to be some faulty place in which it will break sooner than in a shorter", which he called the principle of "inequality of matter whose absolute resistance is less in one place than in another".

Dans notre problème on a une poutre soumise à la traction simple, cette poutre ayant un critère de rupture local σ_y qui est aléatoire le long de la poutre, et puisque un comportement fragile est pris pour la poutre (béton) on a alors que le critère de rupture globale (pour chaque poutre) est égale à $\sigma_f = \text{minimum}(\sigma_y(x))$.

Alors pour une longueur de corrélation fixe (soit $L_c=1$) on va varier le rapport $\eta=L_c/L$ enfin de tracer le graphe $E(\sigma_f)$ contre η .

Notons que la logique derrière cela est facile et mène à montrer le fait que à une petite dimension on raccorde une grande longueur de corrélation (et inversement pour une poutre grande) justement pour respecter le principe qui dit qu'une poutre à grande échelle tend à avoir plus de défauts que celle à échelle réduite, donc une plus grande fluctuation de σ_y le long de la poutre.

Résolution:

On a intérêt à faire varier L_c de la façon suivante : $L/n < L_c < L$

Avec L : longueur de la poutre

n : nombre d'éléments de chaque poutre (le même pour toutes les poutres, soit 20)

en fait on va varier η et non pas L_c , on aura alors : $1/n < \eta < 1$

de cette façon on aura comme voulu, que pour une petite poutre une longueur de corrélation grande et pour une grande poutre une petite longueur de corrélation.

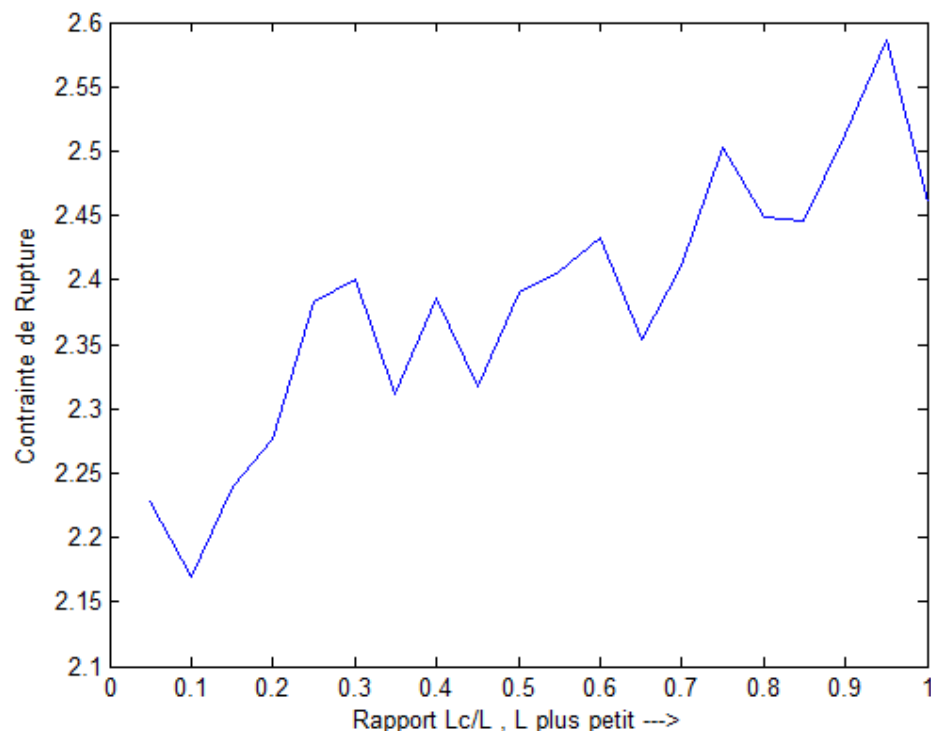
Pour varier σ_y le long d'une poutre on va utiliser le champ aléatoire gaussien corrélé de la question 2, alors pour chaque poutre on va avoir un vecteur $\sigma_y(n,1)$, et $\sigma_f(i,1) = \min([\sigma_y])$ (si on est sur la poutre numéro 'i')

La valeur de σ_y pour chaque poutre sera donnée par une distribution aléatoire log-normal en prenant comme espérance $E\sigma_y = 2.4$ MPa et variance $V\sigma_y = 0.1$

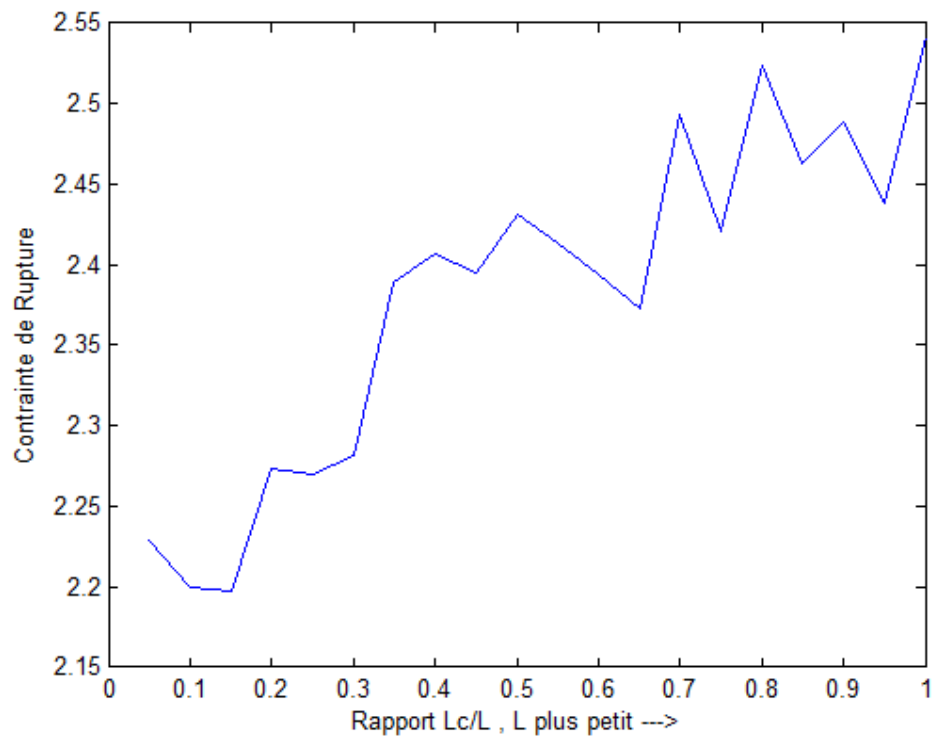
Pour les implémenter dans la fonction il faut faire une inversion des valeurs de la loi normale à la loi log-normal, on obtient les valeurs suivantes : $s^2 = 0.0017346$; $\text{moy} = 0.8746$

On a donc trois boucles dans notre code, la première fait varier η (n fois, avec un pas de $1/n$) dans laquelle on varie m (le nombre de poutres, soit 20) et pour chaque ' m ' on fait varier ' x ' (x étant les nœuds des n éléments de la poutre).

Alors pour $n=20$, $k=10$, $m=20$ et $L_c=1$: Plot ($E(\sigma_f)$, η) donne



Pour être sûr on refait avec les même valeurs, on obtient :



Conclusion:

On voit clairement que pour une valeur de L_c/L élevé, donc L petite, que la contrainte de rupture globale est plus grande que si L est grande, démontrant ainsi le principe de l'effet d'échelle.

End ;