

# 1η Εργασία

## Χρυσολόγου Γεώργιος (ΑΕΜ: 10782)

Το σύστημα ενός απλού εκκρεμούς με ροπή εισόδου, μετά από γραμμικοποίηση ( $\sin(q) \approx q$ ), περιγράφεται από την σχέση:

$$m * L^2 * \ddot{q}(t) + c * \dot{q}(t) + m * g * L * q(t) = u(t) \quad (1),$$

όπου  $q(t)$  η γωνία εκτροπής του εκκρεμούς,  $m$  η μάζα,  $L$  το μήκος του εκκρεμούς,  $c$  ένας σταθερός συντελεστής απόσβεσης,  $g$  η επιτάχυνση της βαρύτητας και  $u(t)$  μία είσοδος ελέγχου.

### Θέμα 1

#### Ερώτημα α):

Παρακάτω δίνεται η μαθηματική ανάλυση που απαιτείται ώστε να γραφούν οι εξισώσεις κατάστασης του συστήματος:

$$\text{Έστω } x(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T = [q(t) \ \dot{q}(t)]^T$$

$$\text{Θα ισχύει: } \dot{x}_1(t) = x_2(t), \dot{x}_2(t) = \ddot{q}(t)$$

Λύνοντας την (1) ως προς  $\ddot{q}(t)$ , προκύπτει ότι:

$$\ddot{q}(t) = -\frac{c}{m*L^2} * \dot{q}(t) - \frac{g}{L} * q(t) + \frac{1}{m*L^2} * u(t) \quad (2)$$

Επομένως:

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{c}{m*L^2} * x_2(t) - \frac{g}{m*L^2} * x_1(t) + \frac{1}{m*L^2} * u(t)$$

Άρα καταλήγουμε στην σχέση:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -\frac{g}{L} * q(t) - \frac{c}{m*L^2} * x_2(t) + \frac{1}{m*L^2} * u(t) \end{bmatrix}$$

Το παραπάνω μπορεί να γραφεί και ως:

$$\dot{x}(t) = A * x(t) + B * u(t),$$

$$\text{όπου } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} & -\frac{c}{m*L^2} \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m*L^2} \end{bmatrix}.$$

Όσον αφορά την συνάρτηση μεταφοράς, αυτή προκύπτει εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη της εξίσωσης (2) και μετατρέποντας την στην μορφή  $Q(s) = H(s) * U(s)$ , όπου  $Q(s)$  ο μετασχηματισμός Laplace της γωνίας εκτροπής  $q(t)$  που αποτελεί έξοδο του συστήματος και  $U(s)$  ο μετασχηματισμός Laplace της εισόδου ελέγχου  $u(t)$ . Αναλυτικά:

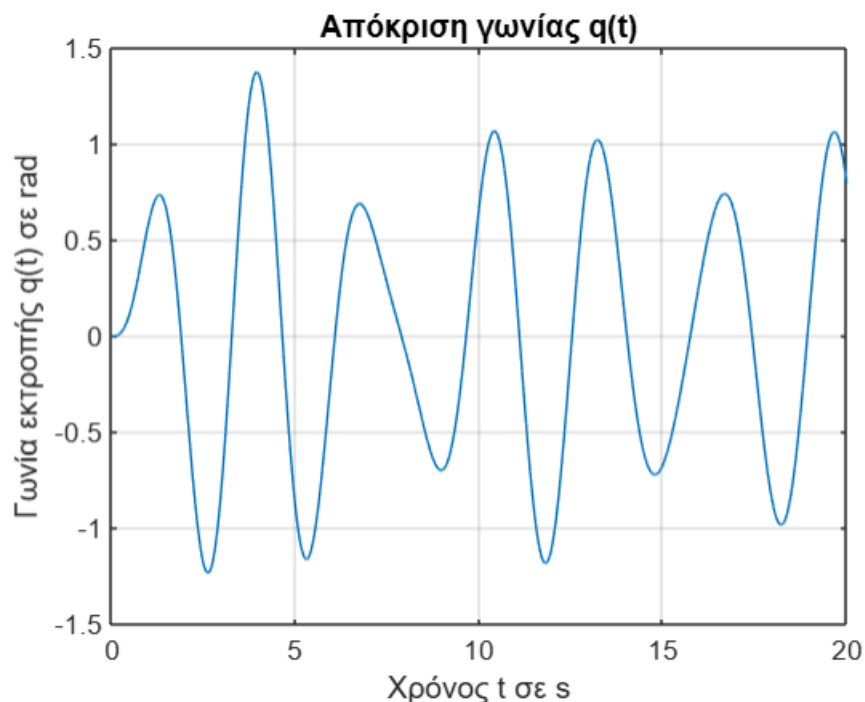
$$(2) \xRightarrow{LT} s^2 * Q(s) = -\frac{c}{m*L^2} * s * Q(s) - \frac{g}{L} * Q(s) + \frac{1}{m*L^2} * U(s) \Rightarrow Q(s) = \frac{1}{m*L^2*s + c*s + m*L*g} * U(s)$$

$$\text{Επομένως, η συνάρτηση μεταφοράς είναι η } H(s) = \frac{1}{m*L^2*s + c*s + m*L*g}.$$

#### Ερώτημα β):

Οι γραφικές παραστάσεις των καταστάσεων του συστήματος  $q(t)$  και  $\dot{q}(t)$  που προκύπτουν από την προσομοίωση της απόκρισης του συστήματος με μηδενικές αρχικές συνθήκες,  $m = 0.75$ ,  $L = 1.25$ ,

$c = 0.15$ ,  $g = 9.81$ , είσοδο  $u(t) = A_0 * \sin(\omega t)$  όπου  $A_0 = 4$  και  $\omega = 2$ , χρόνο προσομοίωσης 20s και βήμα ολοκλήρωσης  $\Delta t = 10^{-4}$  είναι οι εξής:



## Θέμα 2

### Ερώτημα α):

Μετά την δειγματοληψία των μετρήσιμων μεγεθών με περίοδο δειγματοληψίας  $T_s = 0.1$ , για την εκτίμηση των παραμέτρων με εφαρμογή της Μεθόδου Ελαχίστων Τετραγώνων, είναι απαραίτητο το σύστημα να εκφραστεί σε γραμμική παραμετροποιημένη μορφή. Παρακάτω δίνεται η μαθηματική ανάλυση, στην οποία έχει χρησιμοποιηθεί φίλτρο  $\Lambda(s)$  :

Από την (2) έχουμε:

$$\ddot{q} = -\frac{c}{m*L^2} * \dot{q} - \frac{g}{L} * q + \frac{1}{m*L^2} * u$$

Διαιρώντας όλα τα μέλη με το φίλτρο  $\Lambda(s)$  και πραγματοποιώντας την προσέγγιση  $\ddot{q} = s * \dot{q}$  για το μη μετρήσιμο μέγεθος  $\ddot{q}$ :

$$\frac{s*\dot{q}}{\Lambda(s)} = -\frac{c}{m*L^2} * \frac{\dot{q}}{\Lambda(s)} - \frac{g}{L} * \frac{q}{\Lambda(s)} + \frac{1}{m*L^2} * \frac{u}{\Lambda(s)} \quad (3)$$

Η παραπάνω εξίσωση γράφεται σε μορφή εξίσωσης πινάκων ως εξής:

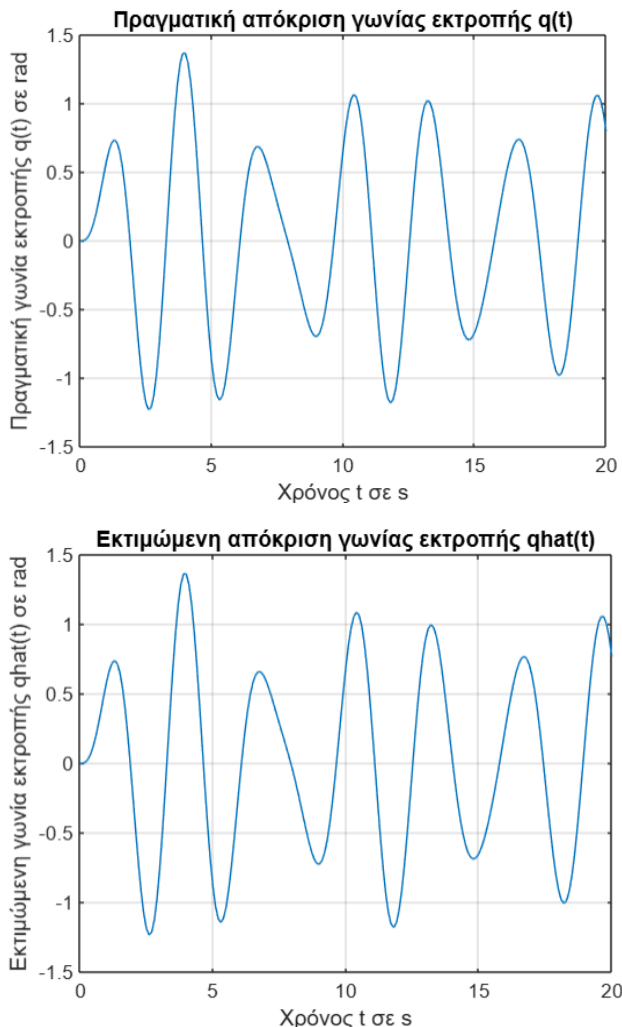
$$Y = \theta^T * J$$

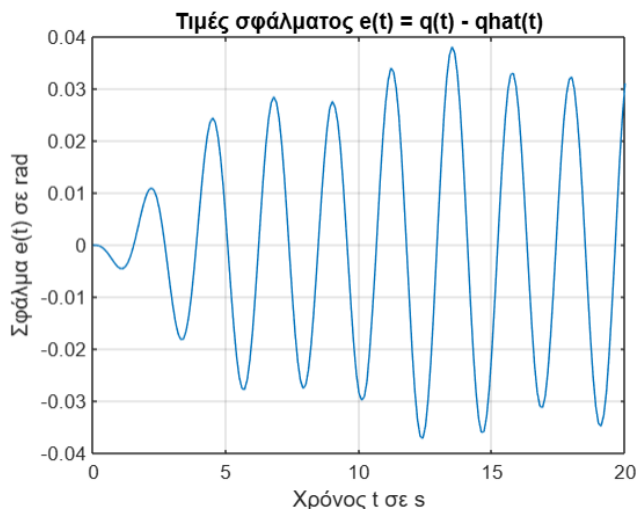
$$\text{όπου } Y = \frac{s*\dot{q}}{\Lambda(s)}, \quad \theta^T = \left[ \frac{c}{m*L^2} \quad \frac{g}{L} \quad \frac{1}{m*L^2} \right] \text{ και } J = \left[ -\frac{\dot{q}}{\Lambda(s)} \quad -\frac{q}{\Lambda(s)} \quad \frac{u}{\Lambda(s)} \right]$$

Οι τιμές των  $Y$  και  $J$  είναι γνωστές καθώς τα μεγέθη  $u$ ,  $q$  και  $\dot{q}$  είναι μετρήσιμα και έχουν δειγματοληπτηθεί. Επομένως, με εφαρμογή της Μεθόδου Ελαχίστων Τετραγώνων, μπορούν να εκτιμηθούν οι τιμές των στοιχείων του πίνακα  $\theta$  και στη συνέχεια να υπολογιστούν οι τιμές των παραμέτρων  $m$ ,  $L$  και  $c$ .

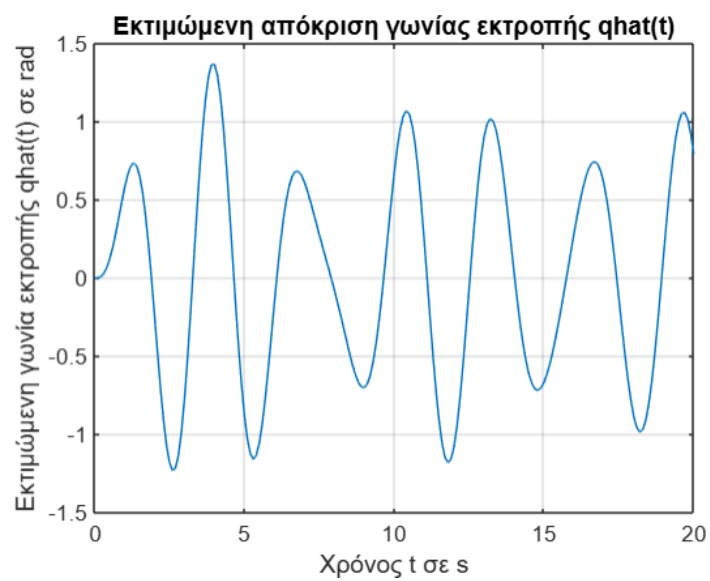
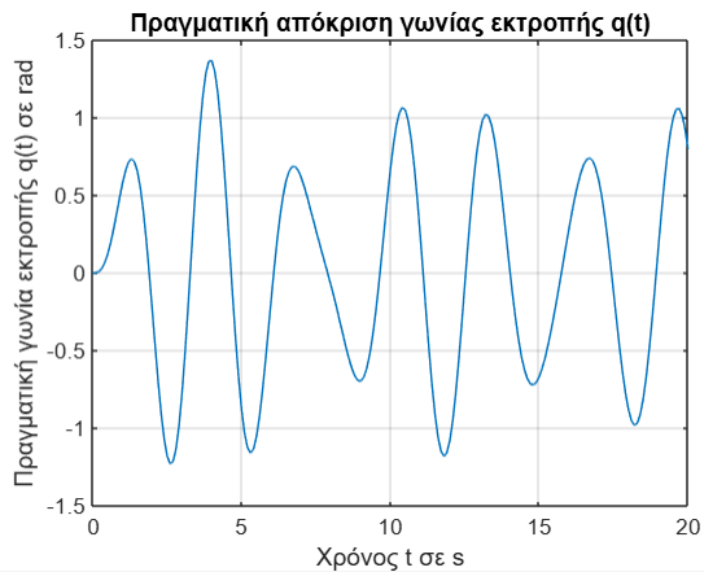
Είναι γνωστό από την θεωρία ότι η επιλογή του φίλτρου  $\Lambda(s)$  αποτελεί σημαντικό παράγοντα για την απόδοση της μεθόδου. Το φίλτρο που θα χρησιμοποιηθεί θα πρέπει να έχει πόλους αποκλειστικά με αρνητικό πραγματικό μέρος και να είναι τάξης μεγαλύτερης ή ίσης από τον μεγαλύτερο σε τάξη (δύναμη του  $s$ ) αριθμητή που εμφανίζεται στην εξίσωση (3). Για τους παραπάνω λόγους, κατόπιν δοκιμών, χρησιμοποιήθηκαν δύο φίλτρα, το  $\Lambda_1(s) = s + 1$  και το  $\Lambda_2(s) = s^2 + 3s + 2$ .

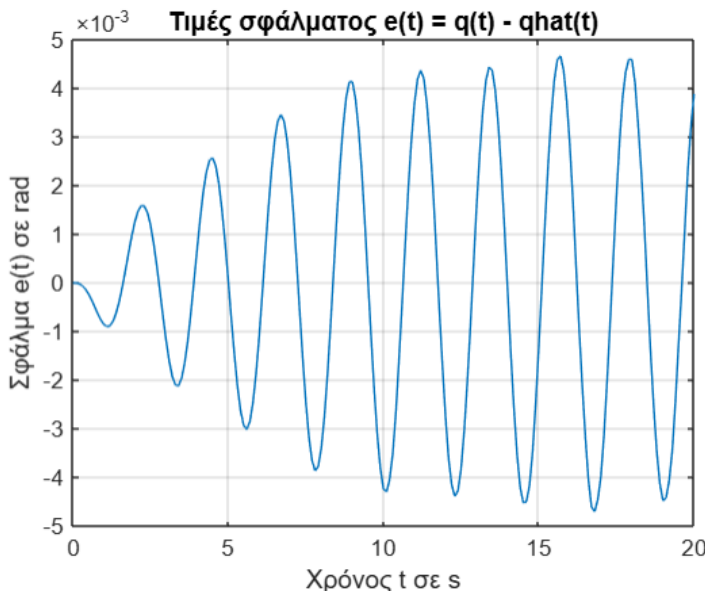
Με υλοποίηση της παραπάνω διαδικασίας σε κώδικα Matlab, οι ζητούμενες γραφικές παραστάσεις που προκύπτουν με χρήση του φίλτρου  $\Lambda_1(s)$ :





Οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις με χρήση του φίλτρου  $\Lambda_2(s)$ :





Όπως φαίνεται από τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις, το σφάλμα  $e(t) = q(t) - \hat{q}(t)$  εμφανίζει ημιτονοειδή μορφή σε σχέση με τον χρόνο και λαμβάνει αρκετά μικρές τιμές. Ως συμπέρασμα, η μέθοδος Ελαχίστων τετραγώνων, με αυτές τις επιλογή φίλτρου  $\Lambda(s)$ , λειτουργεί αποδοτικά. Αυτό αποδεικνύεται, επιπλέον, από την σύγκριση των γραφικών παραστάσεων της απόκρισης του  $q(t)$  και του  $\hat{q}(t)$  οι οποίες εμφανίζουν πολύ σημαντική ομοιότητα (αναμενόμενο λαμβάνοντας υπόψιν το πολύ μικρό σφάλμα) καθώς και από τις τιμές των εκτιμώμενων παραμέτρων. Συγκεκριμένα, για τις παραμέτρους  $m = 0.75, L = 1.25, c = 0.15$ , οι εκτιμήσεις είναι  $\hat{m} = 0.7525$ ,  $\hat{L} = 1.2417$ ,  $\hat{c} = 0.1456$  με το φίλτρο  $\Lambda_1(s)$  και  $\hat{m} = 0.7499$ ,  $\hat{L} = 1.2489$ ,  $\hat{c} = 0.1501$  με το φίλτρο  $\Lambda_2(s)$ , τιμές που προσεγγίζουν σε μεγάλο βαθμό τις πραγματικές.

Συγκρίνοντας την απόδοση του μοντέλου με το φίλτρο  $\Lambda_1(s)$  και του μοντέλου με το φίλτρο  $\Lambda_2(s)$ , είναι εμφανές ότι η χρήση του δεύτερου φίλτρου, το οποίο είναι μεγαλύτερης τάξης, οδηγεί σε ακριβέστερη εκτίμηση των παραμέτρων και μικρότερο σφάλμα  $e(t) = q(t) - \hat{q}(t)$ .

## Ερώτημα β):

Σε σύγκριση με την μαθηματική ανάλυση στο προηγούμενο ερώτημα, η θεώρηση ότι μετρήσιμα μεγέθη αποτελούν μόνο τα  $u(t)$  και  $q(t)$  οδηγεί σε ορισμένες διαφοροποιήσεις. Πιο συγκεκριμένα:

Κατά την διαίρεση της αρχικής εξίσωσης (2) με το φίλτρο  $\Lambda(s)$ , γίνονται οι προσεγγίσεις  $\dot{q} = s * q$  και  $\ddot{q} = s^2 * q$ . Ως αποτέλεσμα, η εξίσωση διαμορφώνεται ως εξής:

$$\frac{s^2 * q}{\Lambda(s)} = -\frac{c}{m * L^2} * \frac{s * q}{\Lambda(s)} - \frac{g}{L} * \frac{q}{\Lambda(s)} + \frac{1}{m * L^2} * \frac{u}{\Lambda(s)}$$

και σε μορφή πινάκων:

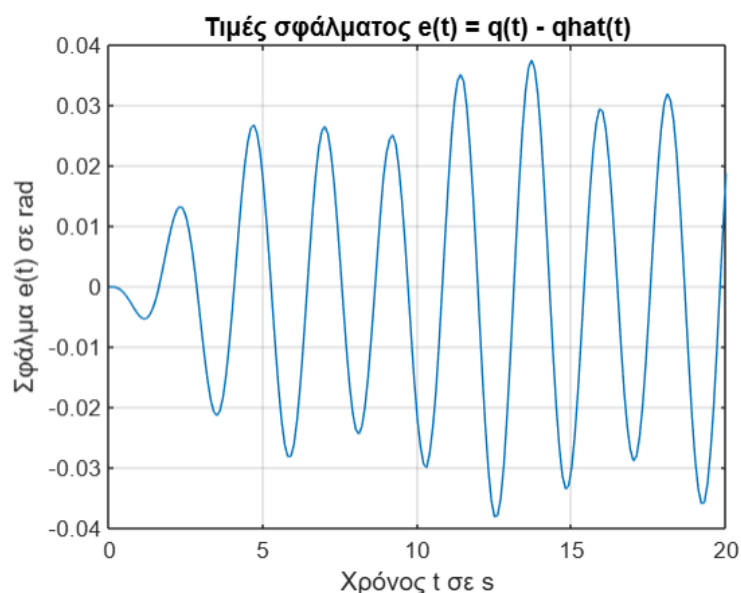
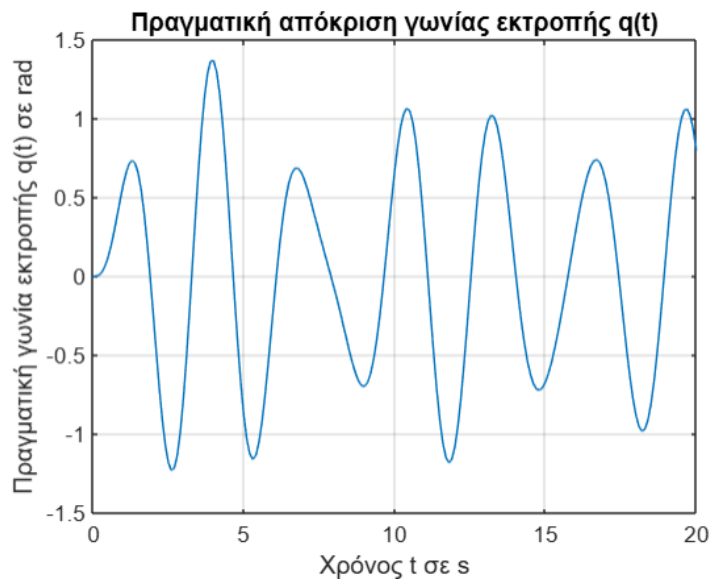
$$Y = \theta^T * J$$

$$\text{όπου } Y = \frac{s^2 * q}{\Lambda(s)}, \quad \theta^T = \left[ \frac{c}{m * L^2} \quad \frac{g}{L} \quad \frac{1}{m * L^2} \right] \text{ και } J = \left[ -\frac{s * q}{\Lambda(s)} \quad -\frac{q}{\Lambda(s)} \quad \frac{u}{\Lambda(s)} \right]$$

Παρόμοια με το ερώτημα α), οι τιμές των  $Y$  και  $J$  είναι γνωστές καθώς τα μεγέθη  $u$ ,  $q$  είναι μετρήσιμα και έχουν δειγματοληπτηθεί. Επομένως, με εφαρμογή της Μεθόδου Ελαχίστων Τετραγώνων, μπορούν να εκτιμηθούν οι τιμές των στοιχείων του πίνακα  $\theta$  και στη συνέχεια να υπολογιστούν οι τιμές των παραμέτρων  $m$ ,  $L$  και  $c$ .

Στην περίπτωση αυτή, είναι αναγκαία η χρήση φίλτρου 2<sup>ης</sup> ή μεγαλύτερης τάξης καθώς εμφανίζεται ο όρος  $s^2$  στον αριθμητή του όρου στο αριστερό μέλος της εξίσωσης. Για λόγους ακριβείας στην σύγκριση με το προηγούμενο ερώτημα, χρησιμοποιήθηκε το ίδιο με παραπάνω φίλτρο 2<sup>ης</sup> τάξης  $A_2(s) = s^2 + 3s + 2$ .

Οι ζητούμενες γραφικές παραστάσεις που προκύπτουν:



Παρατηρείται ότι οι γραφικές παραστάσεις της απόκρισης του  $q(t)$  και του  $\hat{q}(t)$  εμφανίζουν μεγάλη ομοιότητα. Ωστόσο, σε σύγκριση με τα αποτελέσματα του ερωτήματος α), οι τιμές του σφάλματος  $e(t) = q(t) - \hat{q}(t)$  είναι αισθητά μεγαλύτερες (μία τάξη μεγέθους) για το ίδιο φίλτρο

$$A_2(s) = s^2 + 3s + 2.$$

Αποδεικνύεται, λοιπόν, ότι η έλλειψη τιμών του μεγέθους  $\dot{q}(t)$ , η οποία αντιμετωπίζεται με την προσέγγιση  $\dot{q} = s * q$ , οδηγεί σε μείωση της ακρίβειας της Μεθόδου Ελαχίστων Τετραγώνων, όταν η σύγκριση πραγματοποιείται με χρήση ίδιου φίλτρου στις δύο περιπτώσεις (μετρήσιμο και μη μετρήσιμο  $\dot{q}(t)$ ). Το συμπέρασμα αυτό ενισχύεται από την σύγκριση των τιμών των εκτιμώμενων παραμέτρων με τις πραγματικές. Συγκεκριμένα:

$$\hat{m} = 0.7512, \hat{L} = 1.2438, \hat{c} = 0.1371$$

Ως διαπίστωση, αν και η Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων οδηγεί σε ικανοποιητικά αποτελέσματα με μετρήσιμα μόνο τα  $u(t)$  και  $q(t)$ , λειτουργεί αισθητά πιο αποδοτικά στην περίπτωση που υπάρχουν τιμές και για το  $\dot{q}(t)$ .

Αξίζει να σημειωθεί ότι το μοντέλο που προκύπτει σε αυτό το ερώτημα εμφανίζει σχεδόν ίδια ακρίβεια με το μοντέλο με μετρήσιμο  $\dot{q}(t)$  και φίλτρο 1<sup>ης</sup> τάξης.

### Θέμα 3

Στα πλαίσια της επίλυσης των ερωτημάτων του Θέματος 3, ως τετραγωνικό σφάλμα εκτίμησης παραμέτρων ορίστηκε  $ParametersError = (m - \hat{m})^2 + (L - \hat{L})^2 + (c - \hat{c})^2$ . Το σφάλμα αυτό αποτελεί μία έκφραση της συνολικής απόκλισης των εκτιμώμενων τιμών από τις πραγματικές τιμές των παραμέτρων.

#### Ερώτημα α):

Με την προσθήκη λευκού Gaussian θορύβου ( $\mu = 0, \sigma = 0.05$ ) στα δεδομένα δειγματοληψίας, η ακρίβεια των εκτιμήσεων των μοντέλων επηρεάζεται σημαντικά. Ακολουθούν ορισμένα χαρακτηριστικά παραδείγματα στα οποία γίνεται εμφανής η επίδραση του θορύβου στην απόδοση των μοντέλων:

##### 1<sup>ο</sup> παράδειγμα:

Μοντέλο με μετρήσιμο  $q\_dot$  και φίλτρο 1ης τάξης  
Οι εκτιμώμενες τιμές των παραμέτρων είναι:  
Μάζα  $m$ : 0.7464  
Μήκος εκκρεμούς  $L$ : 1.2637  
Συντελεστής απόσβεσης  $c$ : 0.1126  
Τετραγωνικό σφάλμα εκτίμησης παραμέτρων: 0.0016

Μοντέλο με μετρήσιμο  $q\_dot$  και φίλτρο 2ης τάξης  
Οι εκτιμώμενες τιμές των παραμέτρων είναι:  
Μάζα  $m$ : 0.7400  
Μήκος εκκρεμούς  $L$ : 1.2789  
Συντελεστής απόσβεσης  $c$ : 0.1170  
Τετραγωνικό σφάλμα εκτίμησης παραμέτρων: 0.0020

Μοντέλο με μη μετρήσιμο  $q\_dot$   
Οι εκτιμώμενες τιμές των παραμέτρων είναι:  
Μάζα  $m$ : 0.7461  
Μήκος εκκρεμούς  $L$ : 1.2581  
Συντελεστής απόσβεσης  $c$ : 0.1184  
Τετραγωνικό σφάλμα εκτίμησης παραμέτρων: 0.0011

## 2<sup>ο</sup> παράδειγμα:

Μοντέλο με μετρήσιμο  $q_{\text{dot}}$  και φίλτρο 1ης τάξης  
Οι εκτιμώμενες τιμές των παραμέτρων είναι:  
Μάζα  $m$ : 0.7415  
Μήκος εκκρεμούς  $L$ : 1.2495  
Συντελεστής απόσβεσης  $c$ : 0.1550  
Τετραγωνικό σφάλμα εκτίμησης παραμέτρων: 0.0001

Μοντέλο με μετρήσιμο  $q_{\text{dot}}$  και φίλτρο 2ης τάξης  
Οι εκτιμώμενες τιμές των παραμέτρων είναι:  
Μάζα  $m$ : 0.7361  
Μήκος εκκρεμούς  $L$ : 1.2717  
Συντελεστής απόσβεσης  $c$ : 0.1582  
Τετραγωνικό σφάλμα εκτίμησης παραμέτρων: 0.0007

Μοντέλο με μη μετρήσιμο  $q_{\text{dot}}$   
Οι εκτιμώμενες τιμές των παραμέτρων είναι:  
Μάζα  $m$ : 0.7414  
Μήκος εκκρεμούς  $L$ : 1.2606  
Συντελεστής απόσβεσης  $c$ : 0.1316  
Τετραγωνικό σφάλμα εκτίμησης παραμέτρων: 0.0005

## 3<sup>ο</sup> παράδειγμα:

Μοντέλο με μετρήσιμο  $q_{\text{dot}}$  και φίλτρο 1ης τάξης  
Οι εκτιμώμενες τιμές των παραμέτρων είναι:  
Μάζα  $m$ : 0.7402  
Μήκος εκκρεμούς  $L$ : 1.2465  
Συντελεστής απόσβεσης  $c$ : 0.1837  
Τετραγωνικό σφάλμα εκτίμησης παραμέτρων: 0.0012

Μοντέλο με μετρήσιμο  $q_{\text{dot}}$  και φίλτρο 2ης τάξης  
Οι εκτιμώμενες τιμές των παραμέτρων είναι:  
Μάζα  $m$ : 0.7372  
Μήκος εκκρεμούς  $L$ : 1.2606  
Συντελεστής απόσβεσης  $c$ : 0.1973  
Τετραγωνικό σφάλμα εκτίμησης παραμέτρων: 0.0025

Μοντέλο με μη μετρήσιμο  $q_{\text{dot}}$   
Οι εκτιμώμενες τιμές των παραμέτρων είναι:  
Μάζα  $m$ : 0.7434  
Μήκος εκκρεμούς  $L$ : 1.2499  
Συντελεστής απόσβεσης  $c$ : 0.1605  
Τετραγωνικό σφάλμα εκτίμησης παραμέτρων: 0.0002

Παρακάτω αναφέρονται τα τετραγωνικά σφάλματα εκτίμησης παραμέτρων των ίδιων τριών μοντέλων χωρίς την παρουσία θορύβου, οι εκτιμήσεις των οποίων υπολογίστηκαν στο Θέμα 2.

Για το μοντέλο με μετρήσιμο  $\dot{q}(t)$  και χρήση του φίλτρου 1<sup>ης</sup> τάξης:  
*Τετραγωνικό σφάλμα εκτίμησης παραμέτρων*  $= 9.45 * 10^{-5}$

Για το μοντέλο με μετρήσιμο  $\dot{q}(t)$  και χρήση του φίλτρου 2<sup>ης</sup> τάξης:  
*Τετραγωνικό σφάλμα εκτίμησης παραμέτρων*  $= 1.23 * 10^{-6}$

Για το μοντέλο με μη μετρήσιμο  $\dot{q}(t)$  και χρήση του φίλτρου 2<sup>ης</sup> τάξης:  
*Τετραγωνικό σφάλμα εκτίμησης παραμέτρων*  $= 2.06 * 10^{-4}$

Συγκρίνοντας την ακρίβεια των εκτιμήσεων του ίδιου μοντέλου με και χωρίς την παρουσία θορύβου, συμπεραίνεται ότι η επίδραση του θορύβου οδηγεί σε σημαντική μείωση της ακρίβειας του μοντέλου. Η διαπίστωση αυτή αφορά και τα τρία μοντέλα.

Όσον αφορά την αντοχή του κάθε μοντέλου στην επίδραση του θορύβου, το μοντέλο με μετρήσιμο  $\dot{q}(t)$  και χρήση του φίλτρου 2<sup>ης</sup> τάξης εμφανίζει το μεγαλύτερο σφάλμα σε όλα τα παραπάνω παραδείγματα



καθώς και στην πλειοψηφία των πειραμάτων που διενεργήθηκαν. Μεταξύ των άλλων δύο μοντέλων, αυτού με μετρήσιμο  $\dot{q}(t)$  και του φίλτρο 1<sup>ης</sup> τάξης και αυτού με μη μετρήσιμο  $\dot{q}(t)$  και του φίλτρο 2<sup>ης</sup> τάξης, το τετραγωνικό σφάλμα εκτίμησης παραμέτρων του πρώτου είναι συχνότερα μεγαλύτερο, χωρίς, όμως, να σπανίζουν και οι περιπτώσεις στις οποίες σημειώνεται το αντίθετο.

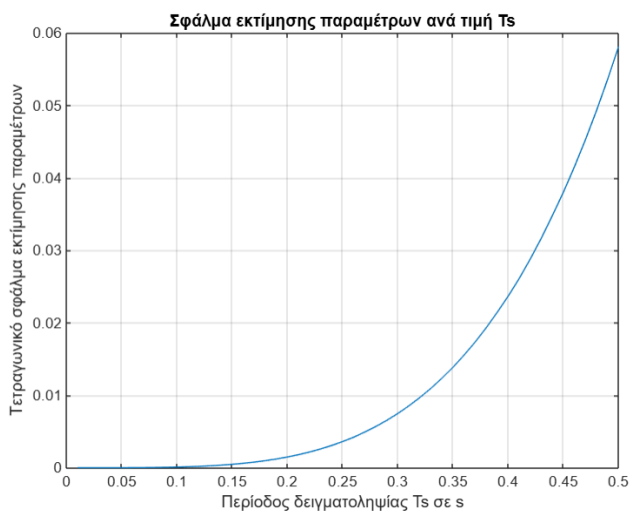
Ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα παρατήρηση αποτελεί η μικρότερη τιμή τετραγωνικού σφάλματος εκτίμησης παραμέτρων κατά την χρήση φίλτρο 1<sup>ης</sup> τάξης, όταν το  $\dot{q}(t)$  είναι μετρήσιμο, στην συντριπτική πλειοψηφία των πειραμάτων. Υποδεικνύεται, λοιπόν, ότι η χρήση φίλτρο μεγαλύτερης τάξης δεν συνεπάγεται βελτίωση της απόδοσης του μοντέλου όταν υπάρχει παρουσία θορύβου.

## Ερώτημα β):

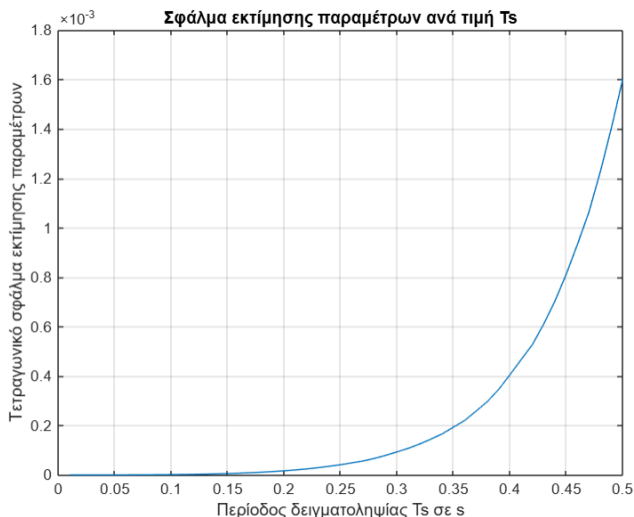
Για να μελετηθεί η επίδραση της μεταβολής της περιόδου δειγματοληψίας  $T_s$  στην ακρίβεια των εκτιμώμενων παραμέτρων, υπολογίστηκε το τετραγωνικό σφάλμα εκτίμησης παραμέτρων για τιμές της περιόδου δειγματοληψίας  $T_s$  από 0.01 έως 0.5 με βήμα 0.01 .

Παρακάτω απεικονίζονται οι γραφικές παραστάσεις *ParametersError* ανά τιμή  $T_s$  που προκύπτουν στην περίπτωση που το  $\dot{q}(t)$  είναι μετρήσιμο και χρησιμοποιούνται τα φίλτρα  $\Lambda_1(s)$  και  $\Lambda_2(s)$ .

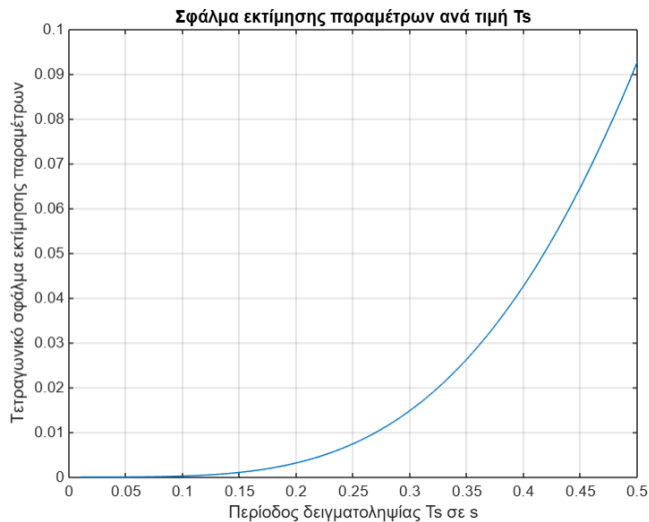
Χρήση φίλτρο  $\Lambda_1(s) = s + 1$ :



Χρήση φίλτρο  $\Lambda_2(s) = s^2 + 3s + 2$ :



Η αντίστοιχη γραφική παράσταση στην περίπτωση που το  $\dot{q}(t)$  δεν είναι μετρήσιμο (και χρησιμοποιείται το φίλτρο  $\Lambda_2(s)$ ) είναι η εξής:



Όσον αφορά την επίδραση της περιόδου δειγματοληψίας  $T_s$  στην ακρίβεια εκτίμησης των παραμέτρων, γίνεται αντιληπτό και από τις δύο γραφικές παραστάσεις ότι η αύξηση της οδηγεί σε μεγαλύτερο σφάλμα στην εκτίμηση των παραμέτρων. Μάλιστα, η αύξηση αυτή εμφανίζει εκθετική συμπεριφορά, δηλαδή ο ρυθμός αύξησης του σφάλματος γίνεται μεγαλύτερος καθώς η περίοδος δειγματοληψίας  $T_s$  λαμβάνει όλο και υψηλότερες τιμές.

Διαπιστώνεται από τις γραφικές παραστάσεις που αφορούν τα δύο μοντέλα με μετρήσιμο  $\dot{q}(t)$  και διαφορετικά φίλτρα ότι το φίλτρο 2<sup>ης</sup> τάξης οδηγεί σε πολύ μεγαλύτερη αντοχή του μοντέλου στην μεταβολή της περιόδου δειγματοληψίας, καθώς η τιμή του τετραγωνικού σφάλματος εκτίμησης παραμέτρων λαμβάνει αρκετά μικρότερες τιμές σε σχέση με τις αντίστοιχες του μοντέλου με το φίλτρο 1<sup>ης</sup> τάξης.

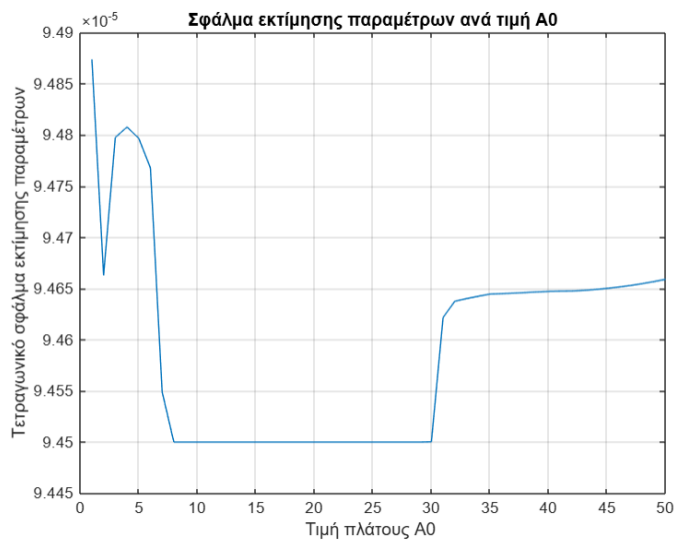
Συγκρίνοντας τις γραφικές παραστάσεις των μοντέλων της περίπτωσης του μετρήσιμου  $\dot{q}(t)$  και της περίπτωσης του μη μετρήσιμου  $\dot{q}(t)$  (για το ίδιο φίλτρο 2<sup>ης</sup> τάξης), είναι φανερό ότι το μοντέλο στην περίπτωση του μετρήσιμου  $\dot{q}(t)$  είναι πολύ λιγότερο ευαίσθητο στην αύξηση της περιόδου δειγματοληψίας  $T_s$ . Παρότι τα δύο μοντέλα για πολύ μικρές τιμές της  $T_s$  έχουν τετραγωνικό σφάλμα εκτίμησης παραμέτρων κοντά στο μηδέν, η αύξηση της  $T_s$  οδηγεί το μοντέλο της περίπτωσης του μη μετρήσιμου  $\dot{q}(t)$  να έχει αρκετά μικρότερη ακρίβεια. Σε αντίθεση, το σφάλμα του μοντέλου της περίπτωσης του μετρήσιμου  $\dot{q}(t)$  διατηρείται σε αρκετά χαμηλότερες τιμές, υποδεικνύοντας την μεγάλη συμβολή των μετρήσεων του  $\dot{q}(t)$  στον υπολογισμό εκτιμήσεων των παραμέτρων χωρίς σημαντική απόκλιση από τις πραγματικές τιμές τους, ακόμα και για μεγάλες τιμές της περιόδου δειγματοληψίας  $T_s$ .

### Ερώτημα γ):

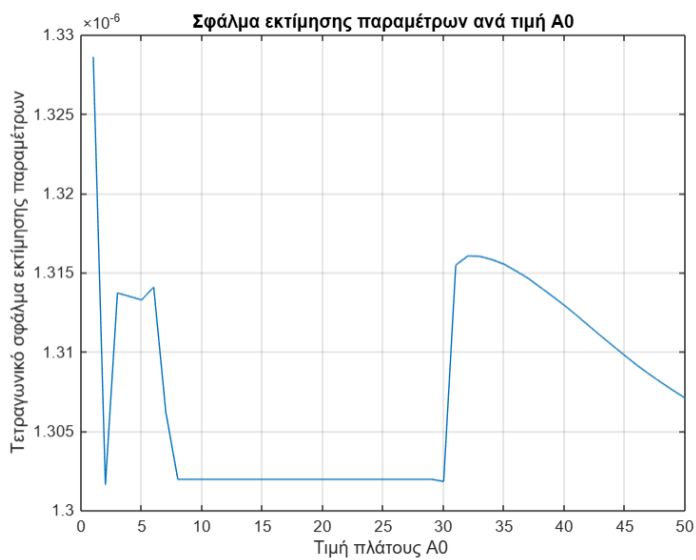
Για να μελετηθεί η επίδραση της μεταβολής του πλάτους  $A_0$  της εισόδου στην ακρίβεια των εκτιμώμενων παραμέτρων, υπολογίστηκε το τετραγωνικό σφάλμα εκτίμησης παραμέτρων για τιμές του πλάτους  $A_0$  από 1 έως 50 με βήμα 1.

Παρακάτω απεικονίζονται οι γραφικές παραστάσεις *ParametersError* ανά τιμή  $A_0$  που προκύπτουν στην περίπτωση που το  $\dot{q}(t)$  είναι μετρήσιμο και χρησιμοποιούνται τα φίλτρα  $\Lambda_1(s)$  και  $\Lambda_2(s)$ .

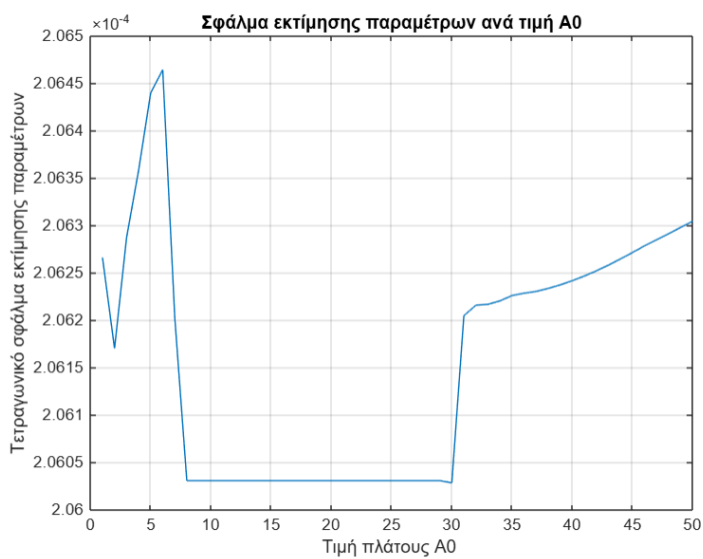
Χρήση φίλτρου  $L_1(s) = s + 1$ :



Χρήση φίλτρου  $L_2(s) = s^2 + 3s + 2$ :



Η αντίστοιχη γραφική παράσταση στην περίπτωση που το  $\dot{q}(t)$  δεν είναι μετρήσιμο (και χρησιμοποιείται το φίλτρο  $L_2(s)$ ) είναι η εξής:



Οι παραπάνω γραφικές παραστάσεις, σε συνδυασμό με την εκτύπωση των τιμών των εκτιμώμενων παραμέτρων στο Matlab, οδηγούν στο συμπέρασμα ότι το τετραγωνικό σφάλμα εκτίμησης παραμέτρων παραμένει ίδιο παρά την μεταβολή του πλάτους  $A_0$ . Να σημειωθεί ότι η μορφή των γραφικών παραστάσεων δεν είναι μία ευθεία γραμμή παράλληλη στον οριζόντια άξονα λόγω περιορισμών στην ακρίβεια σε υπολογισμούς του Matlab.

Διαπιστώνεται, λοιπόν, ότι η μεταβολή του πλάτους  $A_0$  δεν επιδρά στην ακρίβεια του μοντέλου, ανεξάρτητα αν το  $\dot{q}(t)$  αποτελεί μετρήσιμο ή μη μετρήσιμο μέγεθος.