1η Εργαστηριακή Άσκηση

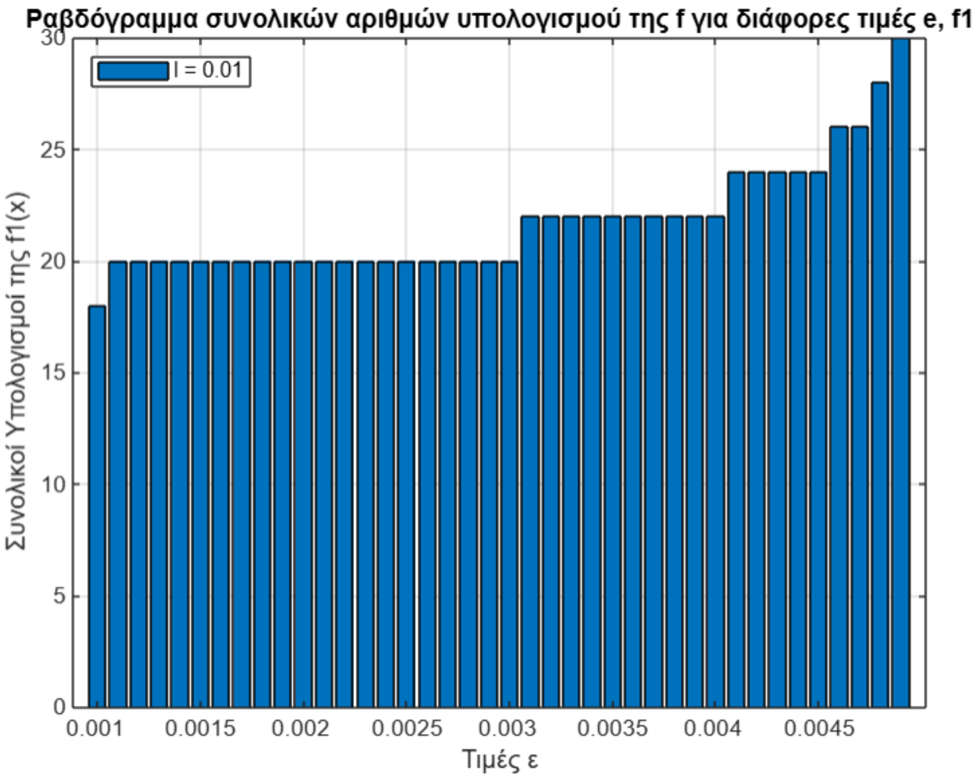
Χρυσολόγου Γεώργιος (ΑΕΜ: 10782)

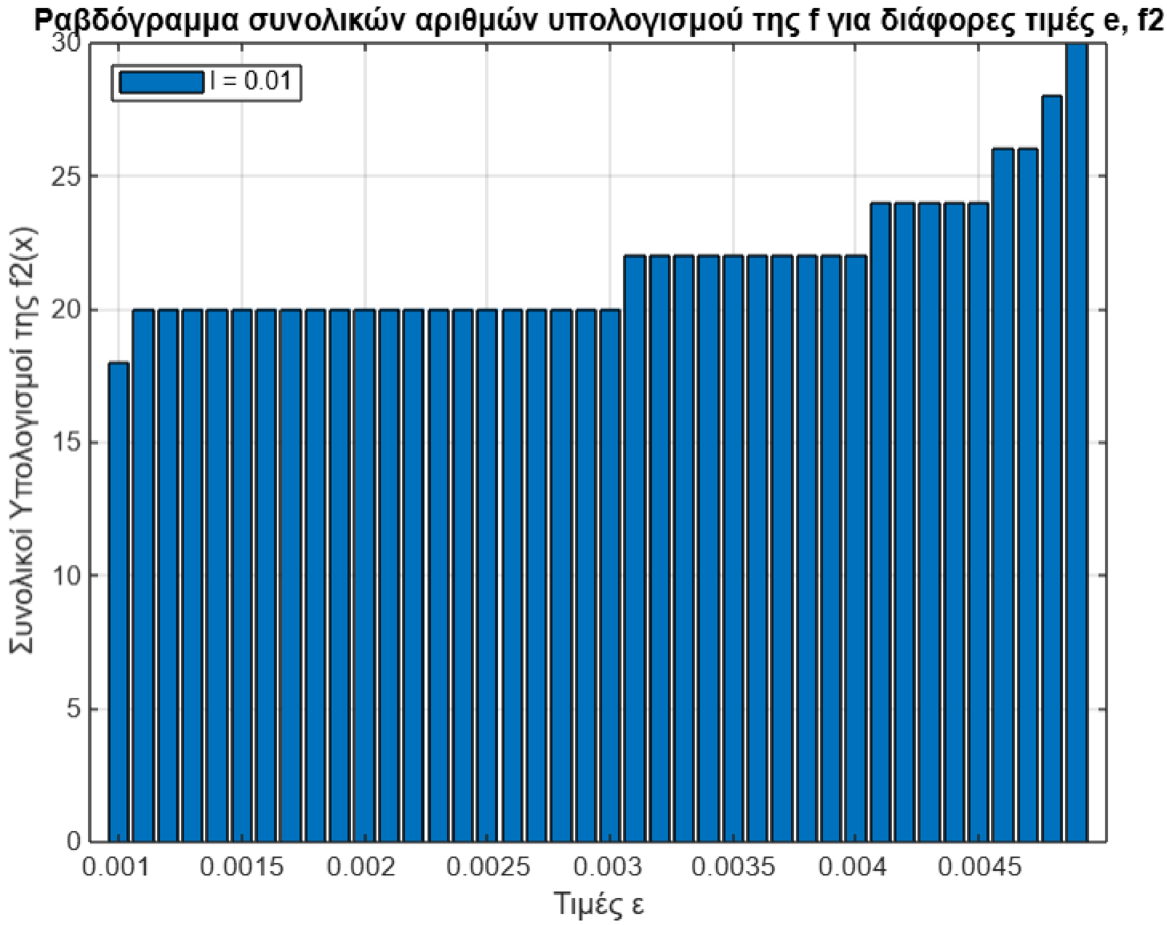
Περιγραφή προβλήματος: Για μία δοσμένη αυστηρά σχεδόν-κυρτή συνάρτηση f σε ένα δοσμένο διάστημα [a1, b1] του πεδίου ορισμού της , αναζητούμε ένα υποδιάστημα [a, b] (του $[a_1, b_1]$) το οποίο να έχει εύρος μικρότερο από μία τιμή l (δηλαδή να ισχύει b-a < l) και να περιέχει το ολικό ελάχιστο της συνάρτησης f στο αρχικό διάστημα $[a_1, b_1]$.

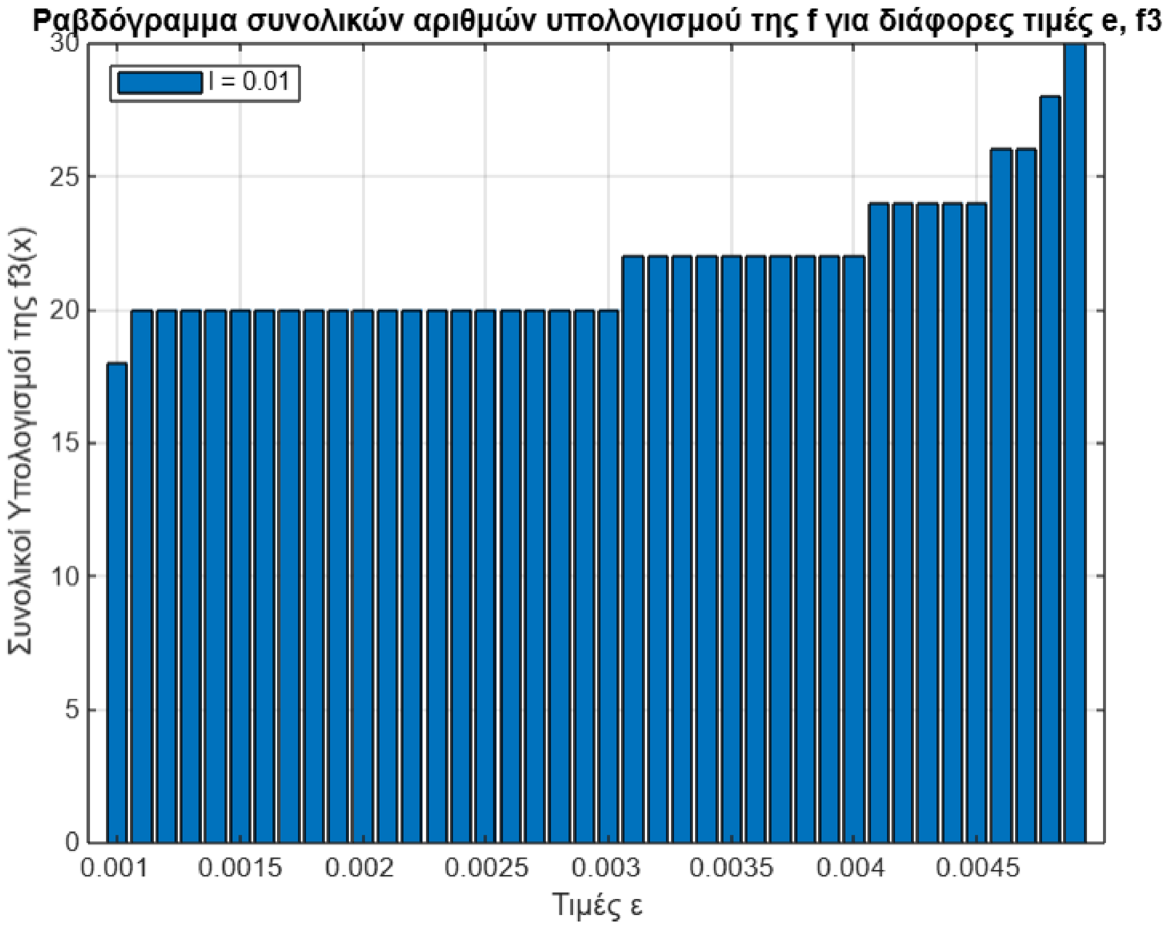
Θέμα 1 (Μέθοδος διχοτόμου)

Εξήγηση τρόπου λειτουργίας: Σύμφωνα με την μέθοδο διχοτόμου, χωρίζεται, σε κάθε επανάληψη, το διάστημα αναζήτησης σε 3 ανισομερή υποδιαστήματα $[a_1, x_1]$, $[x_1, x_2]$ και $[x_2, b_1]$, όπου τα σημεία x_1 και x_2 είναι μετατοπισμένα κατά μία προεπιλεγμένη σταθερά ε αριστερά και δεξιά, αντίστοιχα, από την διχοτόμο του διαστήματος αναζήτησης . Στην συνέχεια υπολογίζονται οι τιμές f(x_1), f(x_2) και, με χρήση του θεωρήματος 5.1.1 του βιβλίου, επιλέγεται το νέο διάστημα αναζήτησης, το οποίο είναι το $[a_1, x_2]$, αν f(x_1)< f(x_2) ή το $[x_1, b_1]$, αν f(x_1)> f(x_2). Η επανάληψη ολοκληρώνεται. Στην επόμενη επανάληψη επιλέγονται εκ νέου τα σημεία x_1 και x_2 ώστε να είναι μετατοπισμένα κατά ε δεξιά και αριστερά από την διχοτόμο του νέου διαστήματος εμπιστοσύνης και η παραπάνω διαδικασία σύγκρισης f(x1) και f(x2) επαναλαμβάνεται. Στην αρχή κάθε επανάληψης, δηλαδή πριν τον ορισμό των νέων x_1 και x_2, ελέγχεται αν το εύρος του νέου διαστήματος αναζήτησης είναι μικρότερο από την προεπιλεγμένη σταθερά l. Εάν συμβεί αυτό, ο αλγόριθμος τερματίζεται και το τελικό διάστημα αναζήτησης, το οποίο έχει εύρος μικρότερο από l, περιέχει το ελάχιστο της συνάρτησης. Για να συγκλίνει η μέθοδος σε ένα τέτοιο διάστημα, είναι απαραίτητο για τις δύο σταθερές να ισχύει 2*ε < l.

Διαγράμματα 1^{o} ζητουμένου:

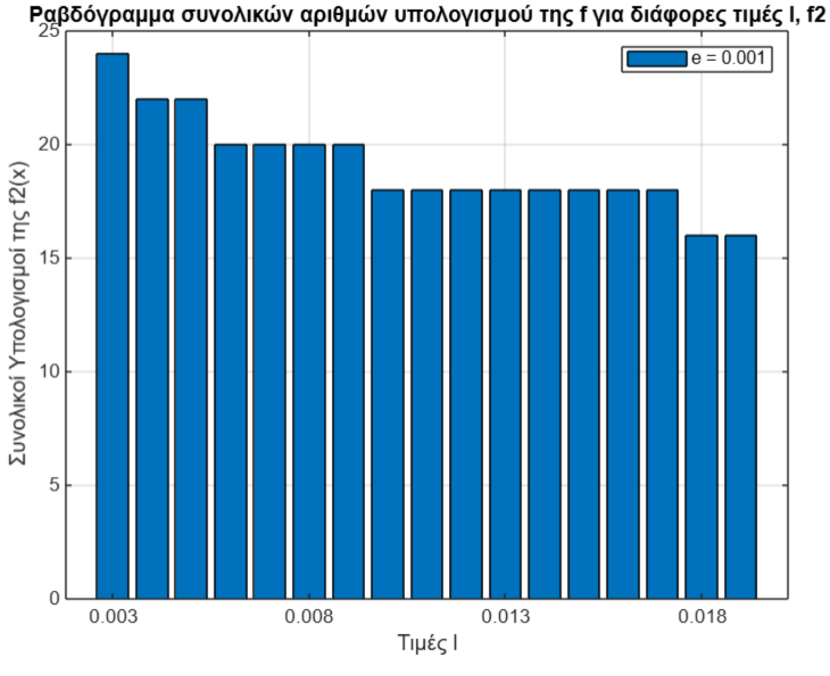



Ραβδόγραμμα συνολικών αριθμών υπολογισμού της f για διάφορες τιμές e, f2
I = 0.01
Συνολικοί Υπολογισμοί της f2(x)
Τιμές ε
0.001
0.0015
0.002
0.0025
0.003
0.0035
0.004
0.0045
0
5
10
15
20
25
30


Ραβδόγραμμα συνολικών αριθμών υπολογισμού της f για διάφορες τιμές e, f3
I = 0.01
Συνολικοί Υπολογισμοί της f3(x)
Τιμές ε
0.001
0.0015
0.002
0.0025
0.003
0.0035
0.004
0.0045
0
5
10
15
20
25
30

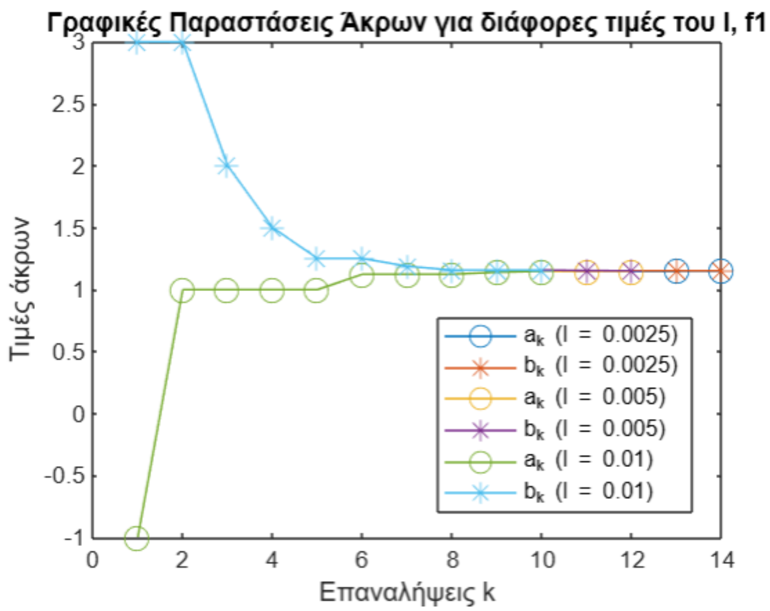
Παρατηρούμε ότι οι τρεις γραφικές παραστάσεις που προκύπτουν, για l = 0.01 και ίδιες τιμές ε, είναι απολύτως όμοιες. Αυτό μας υποδεικνύει ότι ο συνολικός αριθμός υπολογισμών n της κάθε συνάρτησης , για σταθερό l και δεδομένο αρχικό διάστημα αναζήτησης $[a_1, b_1]$, εξαρτάται μόνο από την επιλογή του ε και όχι από την ίδια την συνάρτηση. Επιπλέον, διαπιστώνουμε ότι με την αύξηση της σταθεράς ε, αυξάνεται σταδιακά και η τιμή του n. Αυτό σημαίνει ότι για ε_0, n_0 και ε_1, n_1 , αν ισχύει $\varepsilon_1 > \varepsilon_0$, τότε θα ισχύει $n_1 \geq n\_0$.

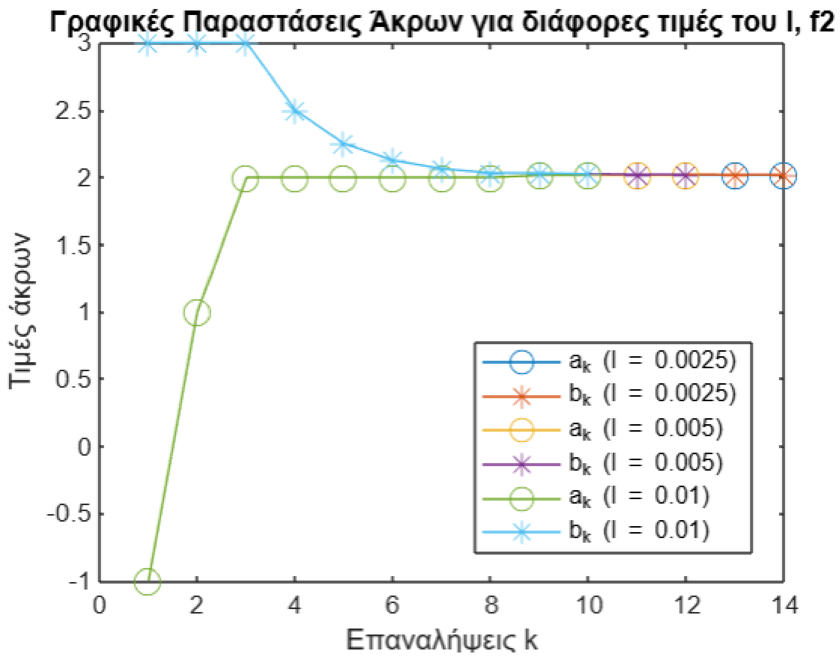
Διαγράμματα 2ο ζητουμένου (ε = 0.001) :

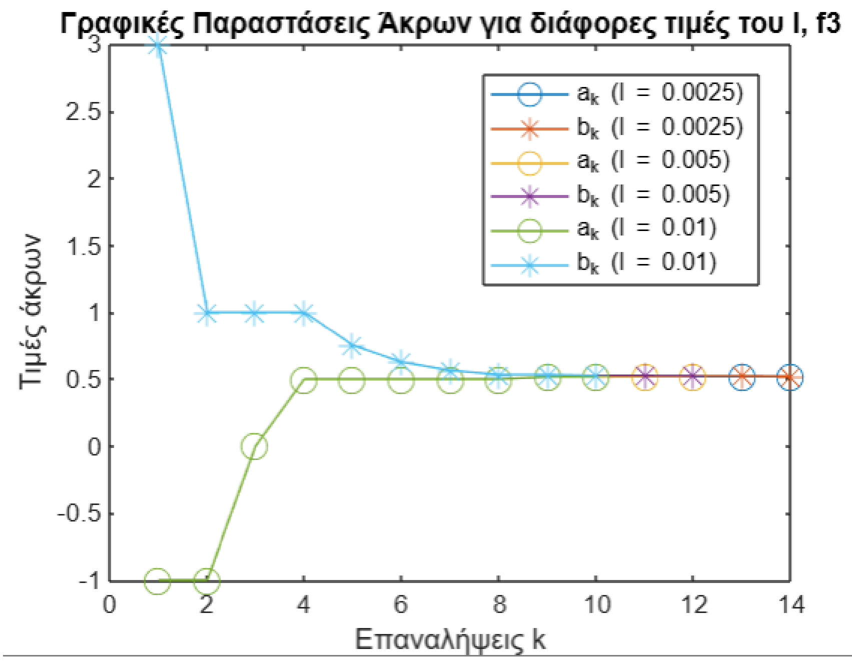


Παρόμοια με το 1º ζητούμενο, παρατηρούμε ότι οι τρεις γραφικές παραστάσεις που προκύπτουν, για ε = 0.001 και ίδιες τιμές l, είναι απολύτως όμοιες. Αυτό μας υποδεικνύει ότι ο συνολικός αριθμός υπολογισμών n της κάθε συνάρτησης , για σταθερό ε και δεδομένο αρχικό διάστημα αναζήτησης $[a_1, b_1]$, εξαρτάται μόνο από την επιλογή του l και όχι από την ίδια την συνάρτηση. Επιπλέον, διαπιστώνουμε ότι με την αύξηση του τελικού εύρους του διαστήματος αναζήτησης l, η τιμή του n σταδιακά μειώνεται. Αυτό σημαίνει ότι για l_0, n_0 και l_1, n_1 , αν ισχύει $l_1 > l_0$, τότε θα ισχύει $n_1 \leq n_0$. Η διαπίστωση αυτή είναι λογική αφού με την αύξηση του τελικού εύρους του διαστήματος αναζήτησης μειώνεται η ακρίβεια που απαιτούμε από την μέθοδο, άρα και ο συνολικός αριθμός επαναλήψεων της, σε κάθε μία από τις οποίες γίνονται 2 υπολογισμοί της συνάρτησης (εκτός από την τελευταία επανάληψη) . Επιπλέον, συμφωνεί με την υπόδειξη του βιβλίου ότι το n είναι ο μικρότερος δυνατός θετικός ακέραιος που ικανοποιεί την ανισότητα $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} < \frac{l}{(b_1 - a_1)}$. Η ανισότητα αυτή δείχνει την συνάρτηση του n μόνο από την τιμή l και το αρχικό διάστημα αναζήτησης, ενώ παράλληλα φανερώνει και την τάση της τιμής του n να μειώνεται καθώς αυξάνεται η τιμή του l.

Διαγράμματα 3º ζητουμένου:







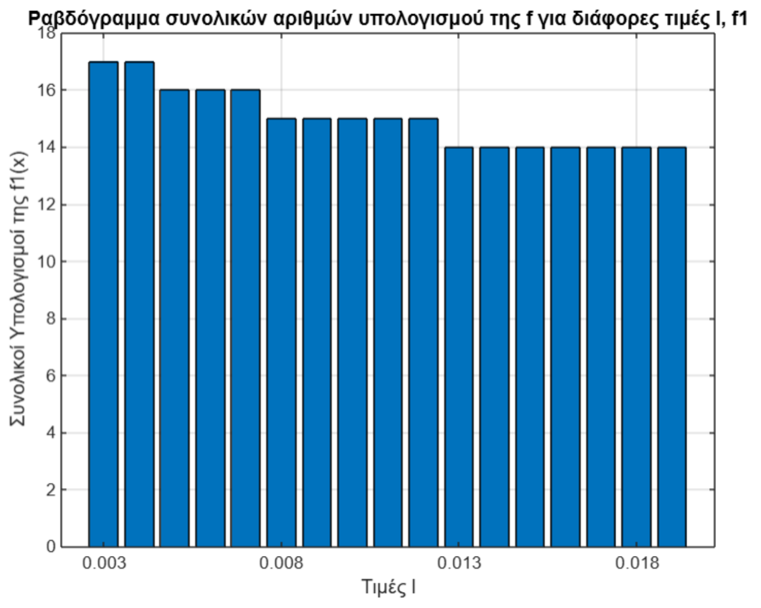
Παρατηρούμε ότι οι τρεις καμπύλες του κάθε άκρου του διαστήματος αναζήτησης, a και b, είναι όμοιες για τις τρεις διαφορετικές τιμές l. Μόνο σε περίπτωση που μεγεθύνουμε κατά πολύ είναι εμφανής μία ελάχιστη διαφορά ανάμεσα στις τρεις τιμές του a και του b, αντίστοιχα, σε μία συγκεκριμένη επανάληψη για τις τρεις τιμές l. Είναι, επίσης, φανερό ότι ο αριθμός των συνολικών επαναλήψεων είναι ίδιος σε κάθε συνάρτηση για ίδια τιμή l (όπως φαίνεται από τα χρώματα των καμπυλών). Επιπλέον, διακρίνουμε ότι σε κάθε συνάρτηση, όσο μικρότερη είναι η τιμή του l, τόσο λιγότερες είναι και οι συνολικές επαναλήψεις. Αυτό γίνεται αντιληπτό καθώς σε κάθε γραφική παράσταση οι καμπύλες a_k και b_k για l = 0.0025 έχουν δεξί άκρο στο σημείο k=14, ενώ οι αντίστοιχες για l = 0.01 έχουν δεξί άκρο στο σημείο k=10. Οι διαπιστώσεις αυτές συμφωνούν με τις αντίστοιχες των προηγούμενων ζητουμένων.

Πλεονεκτήματα / Μειονεκτήματα: Το κύριο πλεονέκτημα της μεθόδου διχοτόμου είναι η απλότητα της υλοποίησης της καθώς αποτελείται από μόνο δύο βήματα. Ωστόσο, η ανάγκη πολλών υπολογισμών της συνάρτησης για την εύρεση του ζητούμενου διαστήματος, δηλαδή η αργή σύγκλιση της σε σχέση με τις υπόλοιπες μεθόδους, αποτελεί μειονέκτημα.

Θέμα 2 (Μέθοδος χρυσού τομέα)

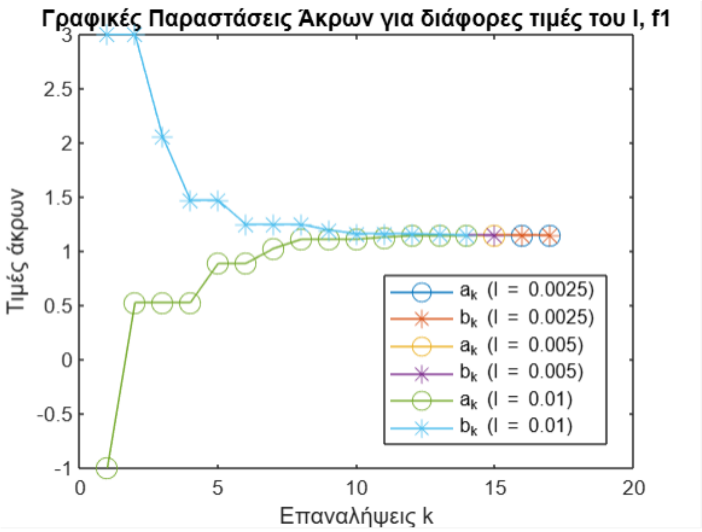
Εξήγηση τρόπου λειτουργίας: Σύμφωνα με την μέθοδο χρυσού τομέα, χωρίζεται, σε κάθε επανάληψη, το διάστημα αναζήτησης σε 3 ανισομερή υποδιαστήματα $[a_k, x_{1k}]$, $[x_{1k}, x_{2k}]$ και $[x_{2k}, b_k]$. Στην συνέχεια υπολογίζονται οι τιμές f(x_{1k}), f(x_{2k}) και, με χρήση του θεωρήματος 5.1.1 του βιβλίου, επιλέγεται το νέο διάστημα αναζήτησης, το οποίο είναι το $[a_k, x_{2k}]$ αν f(x_{1k})< f(x_{2k}) ή το $[x_{1k}, b_k]$ αν f(x_{1k})> f(x_{2k}). Κάθε νέο διάστημα αναζήτησης $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ συνδέεται με το προηγούμενο $[a_k,b_k]$ μέσω της σχέσης $a_{k+1} - b_{k+1}$ = γ * $(a_k - b_k)$ (1) όπου γ σταθερά αναλογίας τέτοια ώστε 0<γ<1 . Στην 1η επανάληψη, τα x_{11} και x_{21} αρχικοποιούνται ώστε $x_{11} = a_1 + (1-\gamma) * (b_1 - a_1)$ και $x_{21} = a_1 + \gamma * (b_1 - a_1)$. Σε κάθε νέα επανάληψη, επιλέγεται x_{1k+1} = x_{2k} (2) ή x_{2k+1} = x_{1k} (3) ώστε να απαιτείται μόνο ένας νέος υπολογισμός της f σε κάθε νέα επανάληψη (εκτός της 1ης επανάληψης). Τελικά, για να ικανοποιούνται οι σχέσεις (1) και (2) ή (1) και (3), αποδεικνύεται ότι θα πρέπει γ = 0.618 περίπου . Για x_{1k+1} = x_{2k} (περίπτωση f(x_{1k})< f(x_{2k})) είναι x_{2k+1} = $a_{k+1} + \gamma * (b_{k+1} - a_{k+1})$ και για x_{2k+1} = x_{1k} (περίπτωση f(x_{1k})> f(x_{2k})) είναι x_{1k+1} = $a_{k+1} + \gamma * (b_{k+1} - a_{k+1})$. Στην συνέχεια υπολογίζεται η τιμή f(x_{1k+1}) ή f(x_{2k+1}) αντίστοιχα (ανάλογα την περίπτωση). Η επανάληψη ολοκληρώνεται. Στην αρχή κάθε επανάληψης, δηλαδή πριν τον ορισμό των νέων x_1 και x_2, ελέγχεται αν το εύρος του νέου διαστήματος αναζήτησης είναι μικρότερο από την προεπιλεγμένη σταθερά l. Εάν συμβεί αυτό, ο αλγόριθμος τερματίζεται και το τελικό διάστημα αναζήτησης, το οποίο έχει εύρος μικρότερο από l, περιέχει το ελάχιστο της συνάρτησης. Συμπερασματικά, η μέθοδος χρυσού τομέα χωρίζει, ακολουθιακά, το αρχικό διάστημα σε ολοένα και μικρότερα διαστήματα, όπου το εύρος του νέου διαστήματος εξαρτάται από το εύρος του προηγούμενου μέσω της σταθεράς αναλογίας γ. Το κάθε νέο διάστημα καθορίζεται με βάση το θεώρημα 5.1.1 έως ότου καταλήξουμε σε ένα διάστημα εύρους μικρότερου από την σταθερά l.

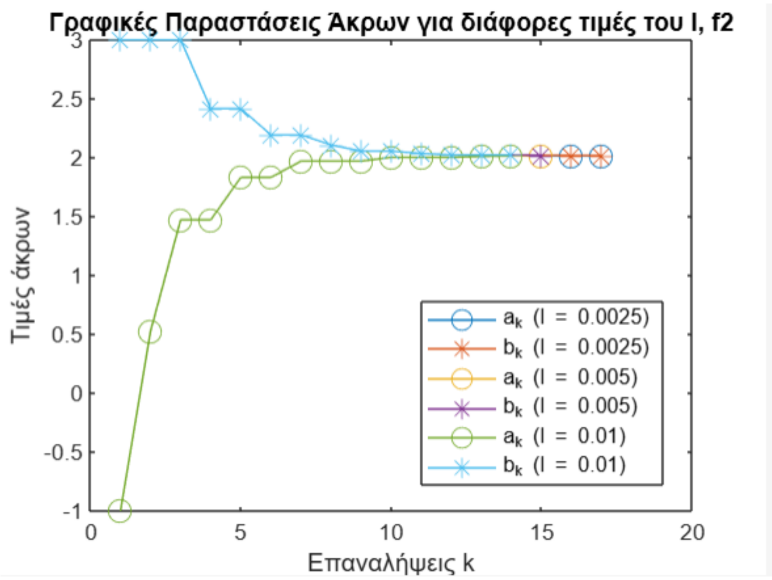
Διαγράμματα 1ο ζητουμένου:

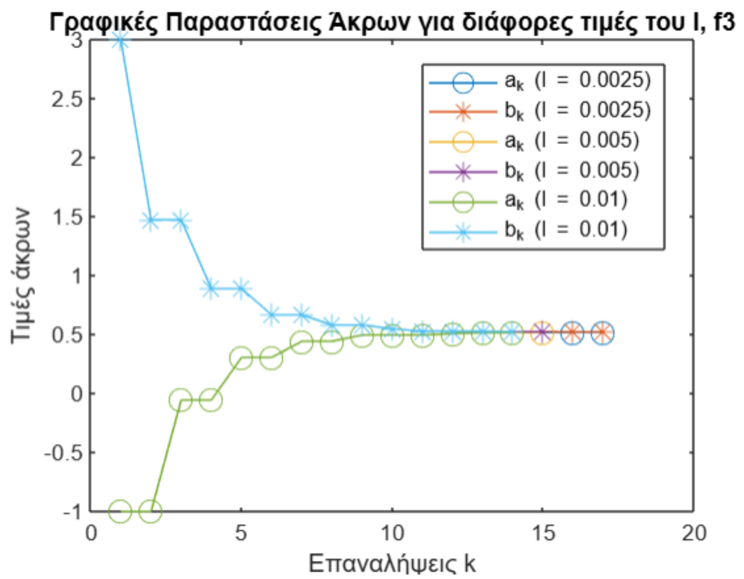


Παρόμοια με την μέθοδο διχοτόμησης, παρατηρούμε ότι οι τρεις γραφικές παραστάσεις που προκύπτουν, για τις ίδιες τιμές l, είναι απολύτως όμοιες. Αυτό μας υποδεικνύει ότι ο συνολικός αριθμός υπολογισμών n της κάθε συνάρτησης , για δεδομένο αρχικό διάστημα αναζήτησης $[a_1, b_1]$, εξαρτάται μόνο από την επιλογή του l και όχι από την ίδια την συνάρτηση. Επιπλέον, διαπιστώνουμε ότι με την αύξηση του τελικού εύρους του διαστήματος αναζήτησης l, η τιμή του n σταδιακά μειώνεται. Αυτό σημαίνει ότι για $l_0, n_0 \; και \; l_1, n_1$, αν ισχύει $l_1 > l_0$, τότε θα ισχύει $n_1 \leq n_0$. Η διαπίστωση αυτή είναι λογική αφού με την αύξηση του τελικού εύρους του διαστήματος αναζήτησης μειώνεται η ακρίβεια που απαιτούμε από την μέθοδο, άρα και ο συνολικός αριθμός επαναλήψεων της, σε κάθε μία από τις οποίες γίνεται ένας υπολογισμός της συνάρτησης (εκτός από την πρώτη επανάληψη που γίνονται δύο και από την τελευταία που δεν γίνεται κανένας υπολογισμός). Επιπλέον, συμφωνεί με την υπόδειξη του βιβλίου ότι το n είναι ο μικρότερος δυνατός θετικός ακέραιος που ικανοποιεί την ανισότητα $(0.618)^{n-1} \leq \frac{l}{b_1-a_1}$. Η ανισότητα αυτή δείχνει την συνάρτηση του n μόνο από την τιμή l και το αρχικό διάστημα αναζήτησης, ενώ παράλληλα φανερώνει και την τάση της τιμής του n να μειώνεται καθώς αυξάνεται η τιμή του l.

Διαγράμματα 2ο ζητουμένου:







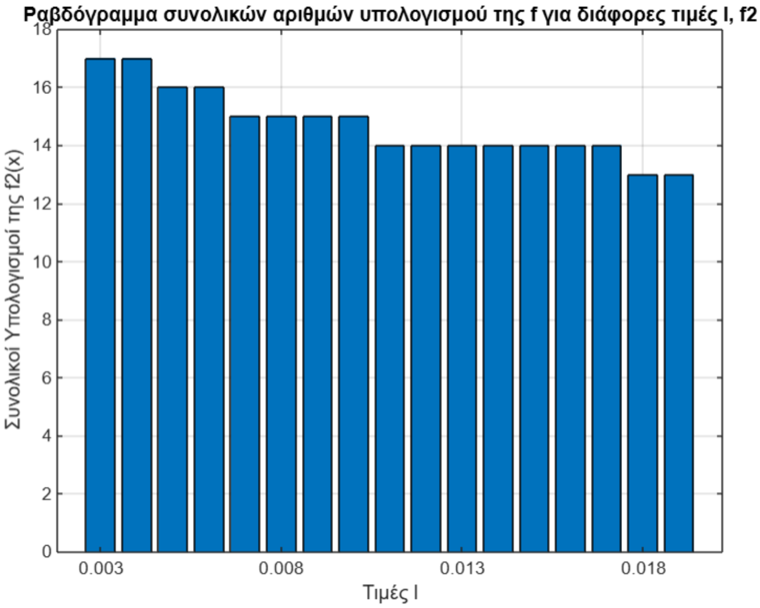
Παρόμοια με την μέθοδο διχοτόμησης, παρατηρούμε ότι οι τρεις καμπύλες του κάθε άκρου του διαστήματος αναζήτησης, a και b, είναι όμοιες για τις τρεις διαφορετικές τιμές l. Μόνο σε περίπτωση που μεγεθύνουμε κατά πολύ είναι εμφανής μία ελάχιστη διαφορά ανάμεσα στις τρεις τιμές του a και του b, αντίστοιχα, σε μία συγκεκριμένη επανάληψη για τις τρεις τιμές l. Είναι, επίσης, φανερό ότι ο αριθμός των συνολικών επαναλήψεων είναι ίδιος σε κάθε συνάρτηση για ίδια τιμή l (όπως φαίνεται από τα χρώματα των καμπυλών). Επιπλέον, διακρίνουμε ότι σε κάθε συνάρτηση, όσο μικρότερη είναι η τιμή του l, τόσο λιγότερες είναι και οι συνολικές επαναλήψεις (άρα και οι συνολικοί υπολογισμού της συνάρτησης) . Αυτό γίνεται αντιληπτό καθώς σε κάθε γραφική παράσταση οι καμπύλες a_k $και$ b_k για l = 0.0025 έχουν δεξί άκρο στο σημείο k=17, ενώ οι αντίστοιχες για l = 0.01 έχουν δεξί άκρο στο σημείο k=14. Οι διαπιστώσεις αυτές συμφωνούν με τις αντίστοιχες του προηγούμενου ζητουμένου.

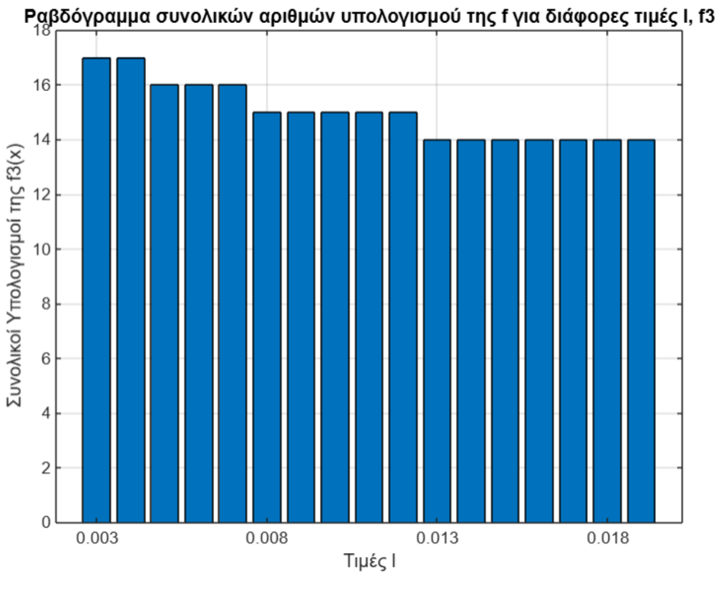
Πλεονεκτήματα / Μειονεκτήματα: Το κύριο πλεονέκτημα της μεθόδου χρυσού τομέα είναι η απλότητα της υλοποίησης της καθώς αποτελείται από μόνο τρία βήματα. Παρά την γρηγορότερη σύγκλιση της μεθόδου σε σχέση με την αντίστοιχη της διχοτόμησης, εξακολουθεί να είναι αρκετά αργή καθώς απαιτεί αρκετά μεγάλο αριθμό υπολογισμών της συνάρτησης για την ολοκλήρωση της.

Θέμα 3 (Μέθοδος Fibonacci)

Εξήγηση τρόπου λειτουργίας: Η μέθοδος αυτή, σε αντίθεση με τις δύο προηγούμενες, απαιτεί τον, εκ των προτέρων, προσδιορισμό του συνολικού αριθμού υπολογισμών της συνάρτησης n. Ο αριθμός n υπολογίζεται ως ο μικρότερος δυνατός θετικός ακέραιος αριθμός για τον οποίο ικανοποιείται η ανισότητα $F_n > \frac{b_1 - a_1}{l}$ όπου F_n ο n-οστός όρος της ακολουθίας Fibonacci. Σύμφωνα με την μέθοδο Fibonacci, χωρίζεται, σε κάθε επανάληψη, το διάστημα αναζήτησης σε 3 ανισομερή υποδιαστήματα $[a_k, x_{1k}]$, $[x_{1k}, x_{2k}]$ και $[x_{2k}, b_k]$. Στην συνέχεια υπολογίζονται οι τιμές f(x_{1k}), f(x_{2k}) και, με χρήση του θεωρήματος 5.1.1 του βιβλίου, επιλέγεται το νέο διάστημα αναζήτησης, το οποίο είναι το [a,x2] αν f(x_{1k})< f(x_{2k}) ή το [x1,b] αν f(x_{1k})> f(x_{2k}). Στην 1η επανάληψη, τα x_{11} και x_{21} αρχικοποιούνται ώστε $x_{11} = a_1 + (\frac{F_{n-2}}{F_n}) * (b_1 - a_1)$ και $x_{21} = a_1 + (\frac{F_{n-1}}{F_n}) * (b_1 - a_1)$. Κάθε νέο διάστημα αναζήτησης $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ συνδέεται με το προηγούμενο $[a_k, b_k]$ μέσω της σχέσης $a_{k+1} - b_{k+1}$ = $(\frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}})$ * $a_k - b_k$. Για x_{1k+1} = x_{2k} (περίπτωση f(x_{1k})< f(x_{2k})) είναι x_{2k+1} = $a_{k+1} + (\frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k}}) * (b_{k+1} - a_{k+1})$ και για x_{2k+1} = x_{1k} (περίπτωση f(x_{1k})> f(x_{2k})) είναι x_{1k+1} = $a_{k+1} + (\frac{F_{n-k-2}}{F_{n-k}}) * (b_{k+1} - a_{k+1})$. Στην συνέχεια υπολογίζεται η τιμή f(x_{1k+1}) ή f(x_{2k+1}) αντίστοιχα (ανάλογα την περίπτωση). Κατόπιν, ελέγχεται εάν k=n-2 και αν ο έλεγχος είναι εσφαλμένος η επανάληψη ολοκληρώνεται και η διαδικασία επαναλαμβάνεται. Αντίθετα, εάν ο έλεγχος είναι ορθός, ορίζεται x_{1n} = x_{1n-1} (= x_{1k+1}) και x_{2n} = x_{1n-1} (= x_{1k+1}) + ε. Ορίζεται, επίσης, $a_n = x_{1n}$, $b_n = b_{n-1}$ αν f(x_{1n})< f(x_{2n}) ή $a_n = a_{n-1}$, $b_n = x_{2n}$ αν f(x_{1n})> f(x_{2n}). Ο αλγόριθμος τερματίζεται και το τελικό διάστημα αναζήτησης, το οποίο έχει εύρος μικρότερο από l, περιέχει το ελάχιστο της συνάρτησης. Συμπερασματικά, η μέθοδος Fibonacci χωρίζει, ακολουθιακά, το αρχικό διάστημα σε ολοένα και μικρότερα διαστήματα, όπου το εύρος του νέου διαστήματος εξαρτάται από το εύρος του προηγούμενου μέσω του όρου $\frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}$ ο οποίος, σε αντίθεση με την μέθοδο χρυσού τομέα, δεν είναι σταθερός, αλλά αλλάζει ανά επανάληψη. Το κάθε νέο διάστημα καθορίζεται με βάση το θεώρημα 5.1.1 έως ότου καταλήξουμε σε ένα διάστημα εύρους μικρότερου από την σταθερά l.

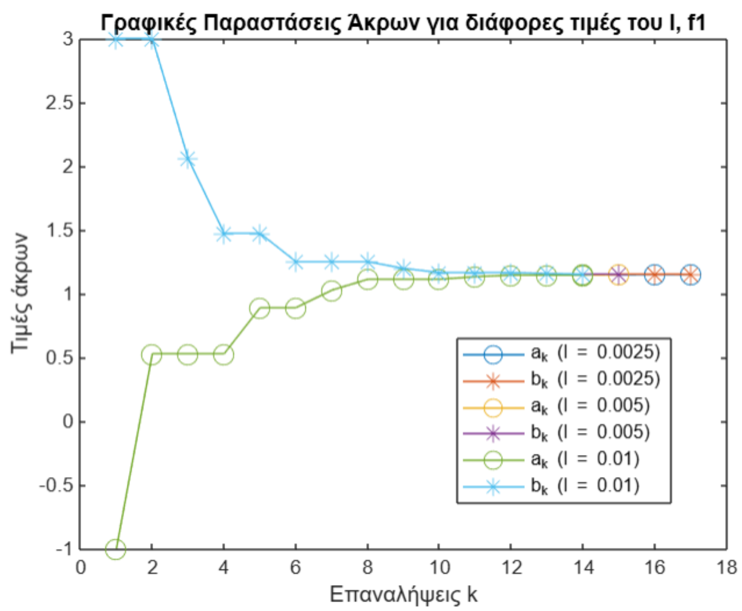
Διαγράμματα 1ο ζητουμένου (ε = 0.00001):

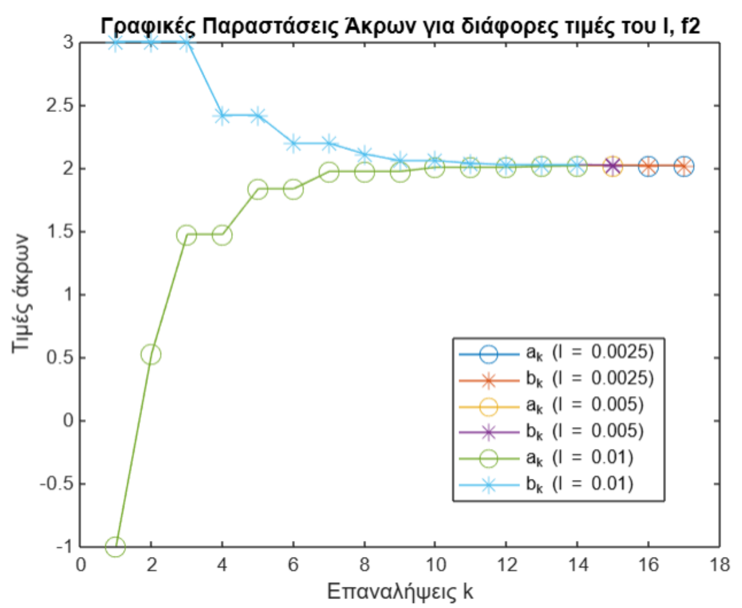


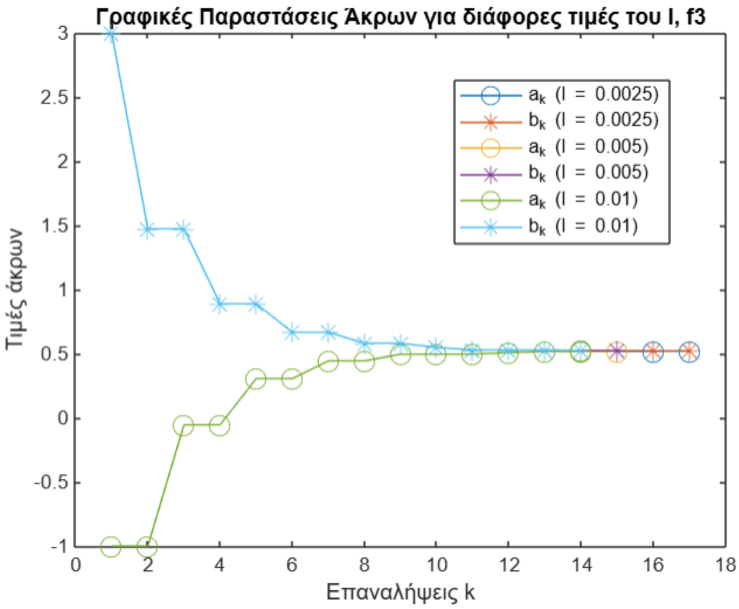


Παρόμοια με τις δύο προηγούμενες μεθόδους, παρατηρούμε ότι οι τρεις γραφικές παραστάσεις που προκύπτουν, για τις ίδιες τιμές l, είναι απολύτως όμοιες. Αυτό μας υποδεικνύει ότι ο συνολικός αριθμός υπολογισμών n της κάθε συνάρτησης , για δεδομένο αρχικό διάστημα αναζήτησης $[a_1, b_1]$, εξαρτάται μόνο από την επιλογή του l και όχι από την ίδια την συνάρτηση. Επιπλέον, διαπιστώνουμε ότι με την αύξηση του τελικού εύρους του διαστήματος αναζήτησης l, η τιμή του n σταδιακά μειώνεται. Αυτό σημαίνει ότι για $l_0, n_0 \; και \; l_1, n_1$, αν ισχύει $l_1 > l_0$, τότε θα ισχύει $n_1 \leq n_0$. Η διαπίστωση αυτή είναι λογική αφού με την αύξηση του τελικού εύρους του διαστήματος αναζήτησης μειώνεται η ακρίβεια που απαιτούμε από την μέθοδο, άρα και ο συνολικός αριθμός υπολογισμών της συνάρτησης. Ακόμη, οι διαπιστώσεις αυτές συμφωνούν και με την ανισότητα $F_n > \frac{b_1 - a_1}{l}$, η οποία δείχνει την εξάρτηση του n μόνο από την τιμή l και το αρχικό διάστημα αναζήτησης, ενώ παράλληλα φανερώνει και την τάση της τιμής του n να μειώνεται καθώς αυξάνεται η τιμή του l, δεδομένου ότι οι τιμές της ακολουθίας Fibonacci αυξάνονται με την αύξηση του n.

Διαγράμματα 2ο ζητουμένου:







Παρόμοια με τις δύο προηγούμενες μεθόδους, παρατηρούμε ότι οι τρεις καμπύλες του κάθε άκρου του διαστήματος αναζήτησης, a και b, είναι όμοιες για τις τρεις διαφορετικές τιμές l. Μόνο σε περίπτωση που μεγεθύνουμε κατά πολύ είναι εμφανής μία ελάχιστη διαφορά ανάμεσα στις τρεις τιμές του a και του b, αντίστοιχα, σε μία συγκεκριμένη επανάληψη για τις τρεις τιμές l. Είναι, επίσης, φανερό ότι ο αριθμός των συνολικών επαναλήψεων είναι ίδιος σε κάθε συνάρτηση για ίδια τιμή l (όπως φαίνεται από τα χρώματα των καμπυλών). Επιπλέον, διακρίνουμε ότι σε κάθε συνάρτηση, όσο μικρότερη είναι η τιμή του l, τόσο λιγότερες είναι και οι συνολικές επαναλήψεις (άρα και οι συνολικοί υπολογισμού της συνάρτησης) . Αυτό γίνεται αντιληπτό καθώς σε κάθε γραφική παράσταση οι καμπύλες $a_k \; και \; b_k$ για l = 0.0025 έχουν δεξί άκρο στο σημείο k=17, ενώ οι αντίστοιχες για l = 0.01 έχουν δεξί άκρο στο σημείο k=14. Οι διαπιστώσεις αυτές συμφωνούν με τις αντίστοιχες του προηγούμενου ζητουμένου.

Πλεονεκτήματα / Μειονεκτήματα: Το κύριο πλεονέκτημα της μεθόδου Fibonacci είναι ταχύτητα της σύγκλισης της καθώς απαιτεί τον μικρότερο αριθμό υπολογισμών της συνάρτησης ,μεταξύ των μεθόδων που δεν χρησιμοποιούν παραγώγους, ώστε να ολοκληρωθεί. Επιπλέον, η γνώση εκ των προτέρων του αριθμού των υπολογισμών n είναι ιδιαίτερα χρήσιμη καθώς μπορούμε να καθορίσουμε αν είναι εφικτή ή όχι η εκτέλεση της μεθόδου, και πόση υπολογιστική ισχύ θα χρειαστούμε για την εκτέλεση της σε περίπτωση που είναι εφικτή . Ωστόσο, τα μειονέκτημα της είναι η αρκετά πολυπλοκότερη υλοποίηση της σε σχέση με τις άλλες μεθόδους, καθώς αποτελείται από πέντε βήματα σε συνδυασμό με την δυσκολία υπολογισμού μεγάλων όρων της ακολουθίας Fibonacci.

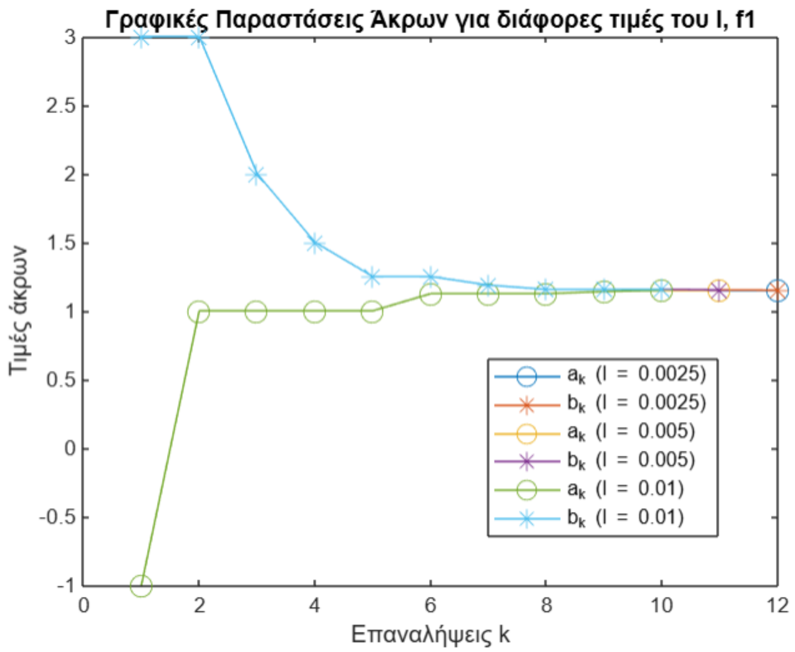
Θέμα 4 (Μέθοδος διχοτόμου με χρήση παραγώγων)

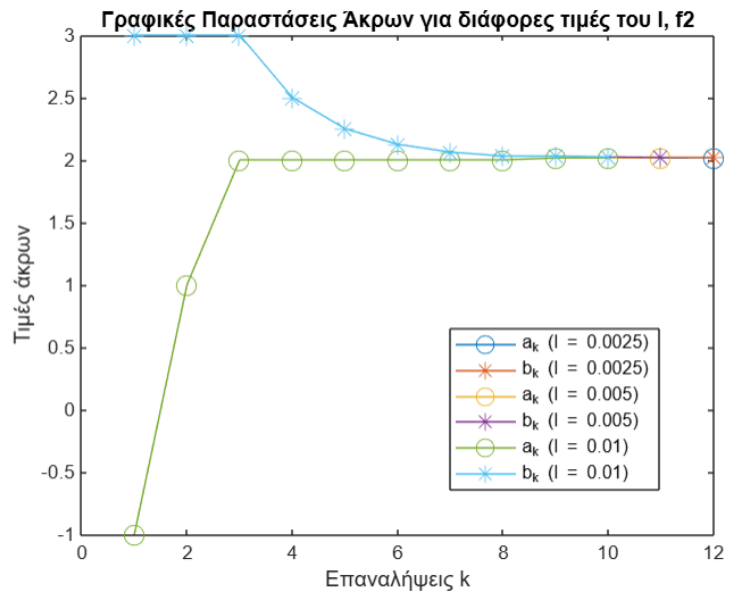
Εξήγηση τρόπου λειτουργίας: Η μέθοδος αυτή, όπως και η μέθοδος Fibonacci, απαιτεί τον, εκ των προτέρων, προσδιορισμό του συνολικού αριθμού υπολογισμών της παραγώγου της συνάρτησης n. Ο αριθμός n υπολογίζεται ως ο μικρότερος δυνατός θετικός ακέραιος που ικανοποιεί την ανισό-ισότητα $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{l}{b_1 - a_1}$. Σύμφωνα με την μέθοδο διχοτόμου με χρήση παραγώγων, επιλέγεται, σε κάθε επανάληψη, το x_k να βρίσκεται στην διχοτόμο του διαστήματος αναζήτησης $[a_k, b_k]$. Κατόπιν, υπολογίζεται η τιμή $f(x_k)$. Αν $f(x_k) = 0$, το x_k είναι το ολικό ελάχιστο της συνάρτησης στο διάστημα [a,b] και ο αλγόριθμος τερματίζεται. Αν $f(x_k) > 0$, ορίζεται $a_{k+1} = a_k$ και $b_{k+1} = x_k$, ελέγχεται αν k=n όπου ο αλγόριθμος τερματίζεται και η επανάληψη ολοκληρώνεται. Αν $f(x_k) < 0$, ορίζεται $a_{k+1} = x_k$ και $b_{k+1} = b_k$ και ακουλουθεί η ίδια διαδικασία. Συμπερασματικά, η μέθοδος διχοτόμου με χρήση παραγώγου υπολογίζει την τιμή της παραγώγου της συνάρτησης στο μέσο του εκάστοτε διαστήματος αναζήτησης και, ανάλογα το πρόσημο, επιλέγει εάν το νέο διάστημα αναζήτησης θα είναι το διάστημα από το μέσο έως το δεξί άκρο του παρόντος διαστήματος ή το διάστημα από το αριστερό άκρο έως το μέσο αντίστοιχα. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται έως ότου ο συνολικός αριθμός υπολογισμών της παραγώγου της συνάρτησης (ή αλλιώς ο αριθμός των επαναλήψεων) φτάσει στην προκαθορισμένη τιμή n.

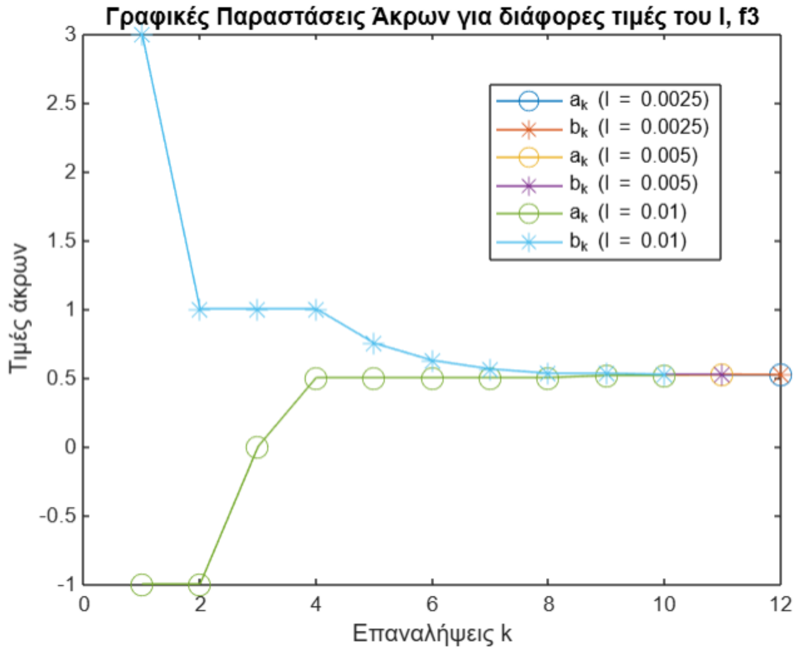
Διαγράμματα 1ο ζητουμένου:

Παρόμοια με τις τρεις προηγούμενες μεθόδους, παρατηρούμε ότι οι τρεις γραφικές παραστάσεις που προκύπτουν, για τις ίδιες τιμές l, είναι απολύτως όμοιες. Αυτό μας υποδεικνύει ότι ο συνολικός αριθμός υπολογισμών n της κάθε συνάρτησης , για δεδομένο αρχικό διάστημα αναζήτησης $[a_1, b_1]$, εξαρτάται μόνο από την επιλογή του l και όχι από την ίδια την συνάρτηση. Επιπλέον, διαπιστώνουμε ότι με την αύξηση του τελικού εύρους του διαστήματος αναζήτησης l, η τιμή του n σταδιακά μειώνεται. Αυτό σημαίνει ότι για $l_0, n_0 \; και \; l_1, n_1$, αν ισχύει $l_1 > l_0$, τότε θα ισχύει $n_1 \leq n_0$. Η διαπίστωση αυτή είναι λογική αφού με την αύξηση του τελικού εύρους του διαστήματος αναζήτησης μειώνεται η ακρίβεια που απαιτούμε από την μέθοδο, άρα και ο συνολικός αριθμός υπολογισμών της συνάρτησης. Ακόμη, οι διαπιστώσεις αυτές συμφωνούν και με την ανισό-ισότητα $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{l}{b_1 - a_1}$, η οποία δείχνει την εξάρτηση του n μόνο από την τιμή l και το αρχικό διάστημα αναζήτησης, ενώ παράλληλα φανερώνει και την τάση της τιμής του n να μειώνεται καθώς αυξάνεται η τιμή του l, δεδομένου ότι οι τιμές της ακολουθίας Fibonacci αυξάνονται με την αύξηση του n.

Διαγράμματα 2ο ζητουμένου:







Παρόμοια με τις τρεις προηγούμενες μεθόδους, παρατηρούμε ότι οι τρεις καμπύλες του κάθε άκρου του διαστήματος αναζήτησης, a και b, είναι όμοιες για τις τρεις διαφορετικές τιμές l. Μόνο σε περίπτωση που μεγεθύνουμε κατά πολύ είναι εμφανής μία ελάχιστη διαφορά ανάμεσα στις τρεις τιμές του a και του b, αντίστοιχα, σε μία συγκεκριμένη επανάληψη για τις τρεις τιμές l. Είναι, επίσης, φανερό ότι ο αριθμός των συνολικών επαναλήψεων είναι ίδιος σε κάθε συνάρτηση για ίδια τιμή l (όπως φαίνεται από τα χρώματα των καμπυλών). Επιπλέον, διακρίνουμε ότι σε κάθε συνάρτηση, όσο μικρότερη είναι η τιμή του l, τόσο λιγότερες είναι και οι συνολικές επαναλήψεις (άρα και οι συνολικοί υπολογισμού της συνάρτησης) . Αυτό γίνεται αντιληπτό καθώς σε κάθε γραφική παράσταση οι καμπύλες $a_k \; και \; b_k$ για l = 0.0025 έχουν δεξί άκρο στο σημείο k=12, ενώ οι αντίστοιχες για l = 0.01 έχουν δεξί άκρο στο σημείο k=10. Οι διαπιστώσεις αυτές συμφωνούν με τις αντίστοιχες του προηγούμενου ζητουμένου.

Πλεονεκτήματα / Μειονεκτήματα: Τα πλεονεκτήματα της μεθόδου αυτής, λόγω της χρήσης της παραγώγου, είναι η πολύ μεγάλη απλότητα στην υλοποίηση της, καθώς υπολογίζεται σε κάθε επανάληψη μια τιμή x_k αντί για δύο τιμές x_{1k} και x_{2k}, σε συνδυασμό με την σημαντικά γρηγορότερη σύγκλιση της, αφού απαιτεί αρκετά μικρότερο αριθμό υπολογισμών της παραγώγου της αντικειμενικής συνάρτησης, σε σχέση με τον αντίστοιχο αριθμό υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης στις υπόλοιπες μεθόδους. Ακόμη, όπως και στην περίπτωση της μεθόδου Fibonacci, η εκ των προτέρων γνώση του αριθμού των υπολογισμών n είναι ιδιαίτερα βοηθητική. Το μειονέκτημα της μεθόδου, ωστόσο, είναι η προϋπόθεση της παραγωγισμότητας της αντικειμενικής συνάρτησης καθώς και η ανάγκη εύρεσης της παραγώγου της αντικειμενικής συνάρτησης, η οποία σε περιπτώσεις πολύπλοκων συναρτήσεων μπορεί να καταστεί δύσκολη και χρονοβόρα.

Σύγκριση των μεθόδων με βάση την αποδοτικότητα τους: Θα συγκρίνουμε την αποδοτικότητα των τεσσάρων μεθόδων με βάση των αριθμό υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης (ή της παραγώγου στην περίπτωση της 4ης μεθόδου. Οι συγκρίσεις αυτές αφορούν τις περιπτώσεις και των 3 συναρτήσεων, αφού παραπάνω διαπιστώθηκε ότι η μορφή της συνάρτησης δεν επηρεάζει τον αριθμό υπολογισμών της και στις τέσσερις μεθόδους.

Όσον αφορά τις τρεις μεθόδους οι οποίες δεν χρησιμοποιούν παραγώγους, η αποδοτικότερη είναι η μέθοδος Fibonacci και ακολουθεί η μέθοδος χρυσού τομέα. Αυτό γίνεται αντιληπτό από τις μορφές των διαγραμμάτων. Για τις ίδιες τιμές l, φαίνεται ότι ο αριθμός υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης είναι εμφανώς μεγαλύτερος στην περίπτωση της μεθόδου διχοτόμου σε σχέση με τις άλλες δύο.

Μεταξύ των μεθόδων χρυσού τομέα και Fibonacci, παρατηρούμε ότι, για μικρές τιμές l, απαιτούν τον ίδιο αριθμό υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης. Καθώς οι τιμές l αυξάνονται, σημειώνουμε όλο και περισσότερες τιμές l για τις οποίες ο αριθμός υπολογισμών της f δεν είναι ίδιος και για τις δύο μεθόδους. Συγκεκριμένα, για τις τιμές l από 0.003 έως και 0.019, για l = 0.007, 0.011, 0.012, 0.018, 0.019 η μέθοδος Fibonacci απαιτεί έναν υπολογισμό λιγότερο.

Όσον αφορά την μέθοδο διχοτόμου με χρήση παραγώγων, είναι αδιαμφισβήτητα η αποδοτικότερη. Απαιτεί αισθητά μικρότερο αριθμό υπολογισμών της παραγώγου της αντικειμενικής συνάρτησης σε σχέση με τις υπόλοιπες μεθόδους για όλες τις διαφορετικές τιμές l .