

**ANÁLISIS DE STABILITY AND NUMERICAL SIMULATION OF PREY-PREDATOR SYSTEM WITH
HOLLING TYPE-II FUNCTIONAL RESPONSES FOR ADULT PREY**

Pedro Pablo Álvarez Portelles

Grupo C212
Ciencia de la Computación
Facultad de Matemática y Computación
Universidad de La Habana. Cuba

Amanda Cordero Lezcano

Grupo C212
Ciencia de la Computación
Facultad de Matemática y Computación
Universidad de La Habana. Cuba

Marlon Díaz Pérez

Grupo C212
Ciencia de la Computación
Facultad de Matemática y Computación
Universidad de La Habana. Cuba

Christopher Guerra Herrero

Grupo C212
Ciencia de la Computación
Facultad de Matemática y Computación
Universidad de La Habana. Cuba

Abel Llerena Domínguez

Grupo C212
Ciencia de la Computación
Facultad de Matemática y Computación
Universidad de La Habana. Cuba

TAREAS A REALIZAR

En el Informe debe Presentar:

- Informe de la Tarea Investigativa II. Título del artículo analizado
- Autores del trabajo.
- Resumen del trabajo.
- Introducción del trabajo debe de mensionar, los autores del artículo analizado, la revista donde se publicó. Año. Factor de impacto de la revista. Valoración del artículo: Explicación sobre lo que trata el artículo, problemática que se propone resolver, técnicas utilizadas.
- Otro epígrafe para presentar las ecuaciones que ilustran el modelo matemático utilizado. Condiciones iniciales o de frontera. Resultados a los que arriban. Ejemplos numéricos: Reproducción de los algunos de los ejemplos o experimentos numéricos que se expliquen en el artículo, utilizando para ello (RK4/Euler explícito o implícito) estudiado en clases y comparar resultados. Buscar puntos de equilibrio en caso de existir y analizar la estabilidad de dichos puntos. Pueden usarse para ello recursos computacionales. Presentar el diagrama de fases entre un par variables incógnitas, valorando su comportamiento.
- Conclusiones: Una valoración de lo que usted ha aprendido con este trabajo, como valora la posibilidad de que se pueda continuar esta línea de investigación.

- Bibliografía Consultada.
- Anexos: Incluir pseudo códigos de sus programas.
- Valoraremos las iniciativas que presenten, como pueden ser, interfaces gráficas, bases de datos, elementos vinculen con otras asignaturas de la especialidad.

RESUMEN

Este artículo examina la estabilidad local de un modelo de presa-depredador con estructura de etapas en las poblaciones de presas. Se analizan los puntos de equilibrio y se realiza una exploración numérica para mostrar la existencia de un ciclo límite estable. Los resultados confirman los hallazgos analíticos y revelan el comportamiento dinámico local del modelo, considerando las interacciones entre presas jóvenes, adultas y depredadores. Se resalta la importancia de las condiciones para la estabilidad del punto de equilibrio interior. Además, se plantea la necesidad de investigar las bifurcaciones de Hopf en estudios futuros para comprender mejor el comportamiento global del modelo. Estos hallazgos contribuyen a ampliar nuestro conocimiento sobre la dinámica de los sistemas presa-depredador con estructura de etapas.

1 INTRODUCCIÓN

El propósito de este documento es hacer un análisis de *Stability and Numerical Simulation of Prey-predator System with Holling Type-II Functional Responses for Adult Prey*, artículo elaborado por la especialista analítica Dian Savitri. Fue presentado en el MISEIC (Mathematics, Informatics, Science and Education International Conference) en 2019 y publicado en Journal of Physics: Conference Series, bajo la licencia de IOP Publishing. Factor de impacto de la revista: 0.227, en la fecha de publicación del artículo. Actualmente la revista tiene un factor de impacto de 0.21.

Objetivos del artículo: Se analiza la estabilidad local del modelo presa-depredador. El modelo fue construido a partir de dos presas que involucran una estructura de etapa y un depredador. Posee tres equilibrios positivos: el original, la extinción del depredador y el punto interior. El artículo hace un estudio de la dinámica del comportamiento de las interacciones presa-depredador, estructuradas por etapas con la función de respuesta Holling tipo II (esta respuesta funcional se refiere al cambio en el comportamiento de los individuos en función de la densidad del huésped o presa) para presas adultas. En un sistema dinámico, si hay ciclos límites, entonces el punto de equilibrio interior es el centro, en estos hace referencia a que los ciclos límites fueron generados por "Hopf Bifurcation" (bifurcación: es el cambio de estabilidad de un sistema que se produce debido a cambios en los valores de los parámetros). El apartado considera la estabilidad de los equilibrios en detalle con las condiciones de existencia e ilustra la estabilidad local de los equilibrios, además cuenta con simulaciones numéricas para ilustrar los resultados.

El estudio pretende detectar los ciclos límites con sus retratos de fase y mostrar numéricamente que existe un ciclo límite estable.

Técnicas utilizadas:

- Criterio Routh Hurwitz: consiste en un simple procedimiento o algoritmo para poder determinar si existe alguna raíz o polo en el semiplano derecho del plano complejo "s", donde si al menos existe una raíz el sistema es inestable, caso contrario si no hay ninguna raíz en el semiplano derecho el sistema es estable.
- Usando python y una implementación computacional del método Runge-Kutta de orden 4 se resolvió el sistema presa-depredador.

1.1 Estructura del trabajo

*Insertar especie d índice

2 RESULTADOS FUNDAMENTALES.

Ecuaciones que ilustran el modelo matemático utilizado:

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{k}\right) - \beta x - \alpha xz \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = \beta x - \frac{\eta yz}{y+m} - \mu y \quad (2)$$

$$\frac{dz}{dt} = \alpha_1 xz + \rho z^2 - \frac{\eta_1 z^2}{y+m} \quad (3)$$

El término $rx(1 - \frac{x}{k})$ de (1) es conocido como ecuación logística y se compone por:

x : población de presas juveniles.

t : tiempo.

r constante que define la tasa de crecimiento.

k : capacidad de carga o persistencia.

Esta primera ecuación representa el modelo de crecimiento poblacional en las presas jóvenes. Para ello se tuvo en cuenta:

- La tasa de reproducciones proporcional a la población existente.
- La tasa de reproducción es proporcional a la cantidad de recursos disponibles.
- La competición por los recursos disponibles tiende a limitar el crecimiento poblacional.

βx representa las presas que se vuelven adultas.

β : factor de conversión de presa joven a presa adulta

La velocidad con que varía la población de presas x es proporcional al número de encuentros con los depredadores z según la ecuación de Lotka-Volterra:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha xz$$

α : tasa de eliminación de presas por parte de los depredadores.

Por otra parte (2) se refiere a la población de presas adultas.

El primer término de la ecuación ya fue analizado anteriormente, es la cantidad de presas jóvenes que se convierten en adultas.

El proceso de eliminación de presas por los depredadores se describe a partir del modelo Holling Tipo II, que establece:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\eta yz}{y+m}y$$

donde:

η : valor máximo de la tasa de reducción per cápita de presas adultas debido a los depredadores.

m : coeficiente de protección ambiental para las presas adultas.

Además se considera las presas que mueren de forma natural μy .

μ : tasa de mortalidad en presas adultas.

Por último (3) modela la población de depredadores. $\alpha_1 xz + \rho z^2$ representa el crecimiento según disponibilidad de alimentos favoritos de los depredadores.

α_1 : tasa de disponibilidad de alimentos favoritos de los depredadores.

ρz^2 es el crecimiento intrínseco.

ρ : tasa de crecimiento intrínseco.

Además se considera que esta población decrece a partir del modelo de Leslie-Gower modificado:

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{\rho z^2}{ny + c}$$

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{\frac{\rho}{x} z^2}{y + \frac{c}{n}}$$

n : calidad energética de la presa como alimento.

c : tamaño máximo de disponibilidad de alimentos alternativos.

$$\frac{\rho}{n} = n_1$$

$$\frac{c}{n} = m$$

n_1 : crecimiento intrínseco dividido por el aporte de las presas al depredador.

m : impacto de la escasez de presas, en la supervivencia y reproducción de los depredadores.

ANÁLISIS DE LOS PUNTOS DE EQUILIBRIO Y SU ESTABILIDAD

Los puntos de equilibrio para este sistema son aquellos que satisfacen:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0$$

Estos puntos son:

- $P_1 = (0, 0, 0)$
- $P_2 = \left(\frac{k(r-\beta)}{r}, \frac{\beta k(r-\beta)}{\mu r}, 0 \right)$
- $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$

La estabilidad de los puntos de equilibrio se puede analizar calculando la matriz Jacobiana. Para nuestro sistema sería:

$$J(x^*, y^*, z^*) = \begin{pmatrix} r - \frac{2rx}{k} - \beta - \alpha z & 0 & -\alpha x \\ \beta & \frac{-nz}{y+m} + \frac{nyz}{(y+m)^2} - \mu & \frac{-ny}{y+m} \\ \alpha_1 z & \frac{n_1 z^2}{(y+m)^2} & 2pz - \frac{2n_1 z}{y+m} + \alpha_1 x \end{pmatrix}$$

La ecuación característica está dada por el $\det(J(x^*, y^*, z^*) - I) = 0$ donde (x^*, y^*, z^*) es un punto de equilibrio del sistema. Nosotros solo analizaremos la estabilidad de los puntos de equilibrio no negativos por la parte real de los eigenvalores de la matriz Jacobiana. Para P_1 sería:

$$\begin{vmatrix} (-\beta + r) - \lambda & 0 & 0 \\ \beta & -\mu - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

De ahí que sus eigenvalores están dados por $((-\beta + r) - \lambda)(-\mu - \lambda)(-\lambda) = 0$. Pero esta ecuación siempre tiene valor negativo $\lambda_1 = -$, también si $r < \beta$, pero $\lambda_3 = 0$. Por tanto en P_1 el sistema es inestable.

Para P_2 sería:

$$\begin{vmatrix} (\beta + r) - \lambda & 0 & \frac{\alpha k(\beta - r)}{r} \\ \beta & -\mu - \lambda & \frac{n\beta k(\beta - r)}{r\mu(\frac{\beta k(r - \beta)}{r\mu} + m)} \\ 0 & 0 & \frac{\alpha_1 k(\beta - r)}{r} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Que luego de un poco de trabajo algebraico obtendrías $\lambda_1 = \beta - r, \lambda_2 = \text{cosa no entiendo}, \lambda_3 = \frac{\alpha_1 k(\beta - r)}{r}$. Por lo que P_2 es inestable.

En el caso P_3 sería:

$$J(x_3, y_3, z_3) = \begin{pmatrix} r - \frac{2rx_3}{k} - \beta - \alpha z_3 & 0 & -\alpha x_3 \\ \beta & \frac{-nz_3}{y_3+m} + \frac{ny_3 z_3}{(y_3+m)^2} - \mu & \frac{-ny_3}{y_3+m} \\ \alpha_1 z_3 & \frac{n_1 z_3^2}{(y_3+m)^2} & 2pz_3 - \frac{2n_1 z_3}{y_3+m} + \alpha_1 x_3 \end{pmatrix}$$

La ecuación característica entonces es de la forma:

$$\lambda^3 + \gamma_1 \lambda^2 + \gamma_2 \lambda + \gamma_3 = 0$$

Si usamos el criterio Routh-Hurwitz para analizar la estabilidad en P_3 veremos que este tiene una parte real negativa si y solo si $\gamma_1 > 0, \gamma_3 > 0$ y $\gamma_1 \gamma_2 - \gamma_3 > 0$, la coexistencia en P_3 es local y asintóticamente estable.

MÉTODOS Y ALGORITMOS UTILIZADOS

Ejemplos Numéricos. Reproducción de los experimentos

Para reproducir los experimentos se utilizó el método de Runge-Kutta de orden 4 (RK4), programado en Python 3.10 y haciendo uso de librerías para la manipulación eficiente de vectores como Numpy y Scipy.

El método de Runge-Kutta es método de un paso en el cual se usa un tamaño de paso h para calcular los siguientes valores a partir de valores previos.

Como en este trabajo se utiliza un sistema de tres ecuaciones, es necesario de manera análoga crear otras variables l y m para las funciones y y z . El pseudocódigo sería de la siguiente manera:

for $i = 0$ to $n - 1$:

$$xn = x[i]; yn = y[i]; zn = z[i]$$

$$k_1 = f_1(t_n, x_n, y_n, z_n)$$

$$l_1 = f_2(t_n, x_n, y_n, z_n)$$

$$m_1 = f_3(t_n, x_n, y_n, z_n)$$

$$k_2 = f_1(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_1}{2}, y_n + \frac{l_1}{2}, z_n + \frac{m_1}{2})$$

$$l_2 = f_2(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_1}{2}, y_n + \frac{l_1}{2}, z_n + \frac{m_1}{2})$$

$$m_2 = f_3(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_1}{2}, y_n + \frac{l_1}{2}, z_n + \frac{m_1}{2})$$

$$k_3 = f_1(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_2}{2}, y_n + \frac{l_2}{2}, z_n + \frac{m_2}{2})$$

$$l_3 = f_2(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_2}{2}, y_n + \frac{l_2}{2}, z_n + \frac{m_2}{2})$$

$$m_3 = f_3(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_2}{2}, y_n + \frac{l_2}{2}, z_n + \frac{m_2}{2})$$

$$k_4 = f_1(t_n + h, x_n + k_3, y_n + l_3, z_n + m_3)$$

$$l_4 = f_2(t_n + h, x_n + k_3, y_n + l_3, z_n + m_3)$$

$$m_4 = f_3(t_n + h, x_n + k_3, y_n + l_3, z_n + m_3)$$

$$t[i + 1] = t[i] + h$$

$$x[i + 1] = \frac{h}{6}(k_1 + \frac{k_2}{2} + \frac{k_3}{3} + k_4)$$

$$y[i + 1] = \frac{h}{6}(l_1 + \frac{l_2}{2} + \frac{l_3}{3} + l_4)$$

$$z[i + 1] = \frac{h}{6}(m_1 + \frac{m_2}{2} + \frac{m_3}{3} + m_4)$$

El tamaño de paso se estableció para todos los experimentos en $h = 2^{-10}$ con el cual se obtienen resultados muy exactos teniendo en cuenta que el error de RK4 es del orden $O(h^5)$, con lo que tendríamos que el error sería aproximadamente del orden de $e \approx 2^{-50}$.

Reproducción de los experimentos

Para los experimentos se utilizaron para los parámetros los valores de la siguiente tabla:

#	r	α	α_1	η	η_1	K	ρ	m
1	0.82	1.56	1.12	2.41	1.83	12.0	1.38	0.13
2	1.32	1.56	0.72	2.41	0.41	2.8	1.38	0.23
3	1.32	0.76	0.72	0.6	0.41	2.8	0.78	0.23
4	0.82	0.76	0.72	1.2	0.41	2.8	1.38	0.23
5	1.32	1.16	0.72	0.31	0.41	2.8	0.78	0.23

Además, se usó fijo $\beta = 0.87$ y $\mu = 0.11$.

Primer experimento

En el primer conjunto de experimentos se usaron los valores iniciales $[x_0 = 3.01, y_0 = 5.05, z_0 = 4.28]$ (1.1) y $[x_0 = 4.6, y_0 = 5.9, z_0 = 3.1]$ (1.2).

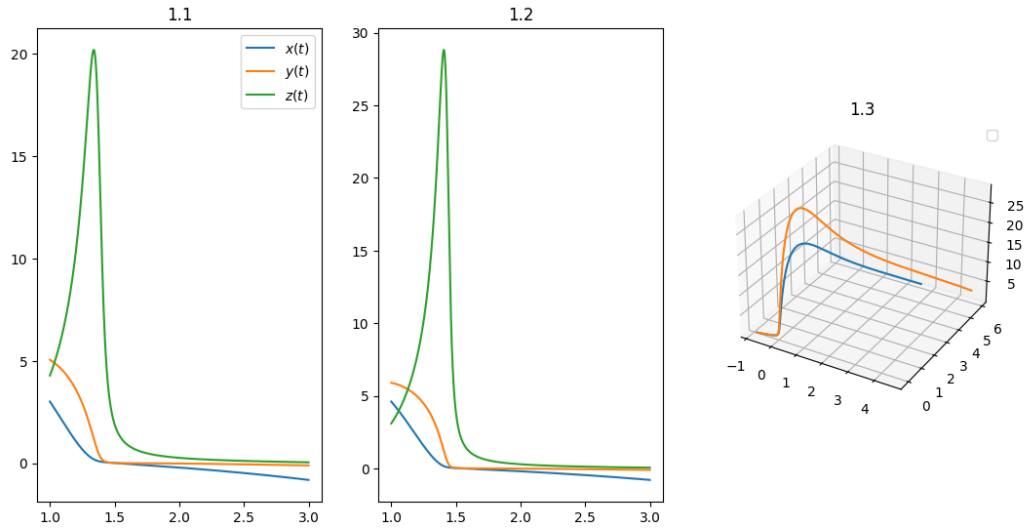


Figure 1: Experimento #1

Segundo experimento

En el segundo conjunto de experimentos, se usaron valores tal que $\eta > \beta$ y $\eta > \alpha$. De valores iniciales se utilizaron $[x_0 = 0.3, y_0 = 2.4, z_0 = 3.9]$ (2.1), $[x_0 = 0.6, y_0 = 2.4, z_0 = 3.9]$ (2.2) y $[x_0 = 2.1, y_0 = 1.2, z_0 = 1.1]$

La simulación muestra que todos los valores van al punto de equilibrio interior.

Tercer experimento

En el tercer experimento, se usaron valores tal que $\alpha > \beta$. Los valores iniciales usados fueron $[x_0 = 0.3, y_0 = 2.4, z_0 = 3.9]$. La simulación muestra que los valores van al punto de equilibrio.

Cuarto experimento

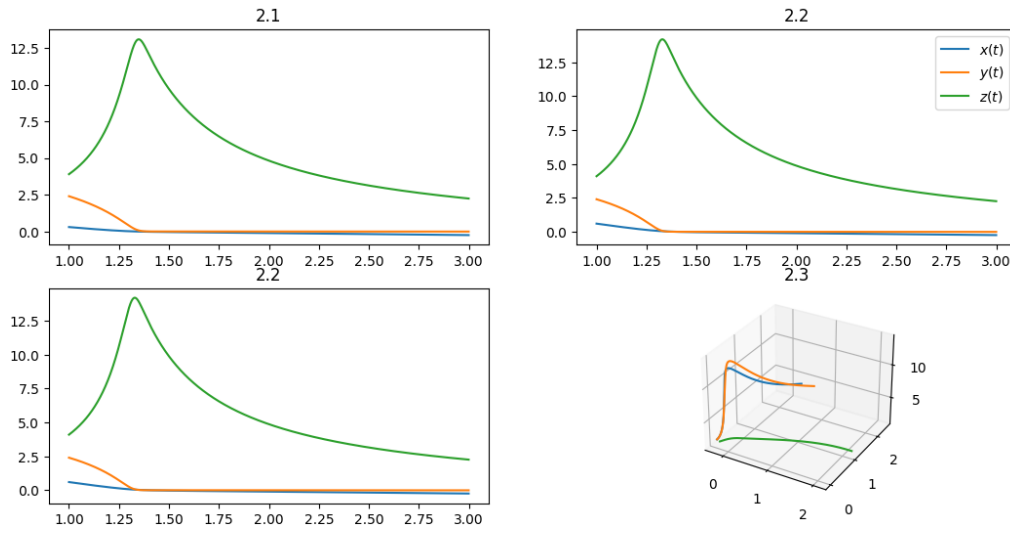


Figure 2: Experimento #2

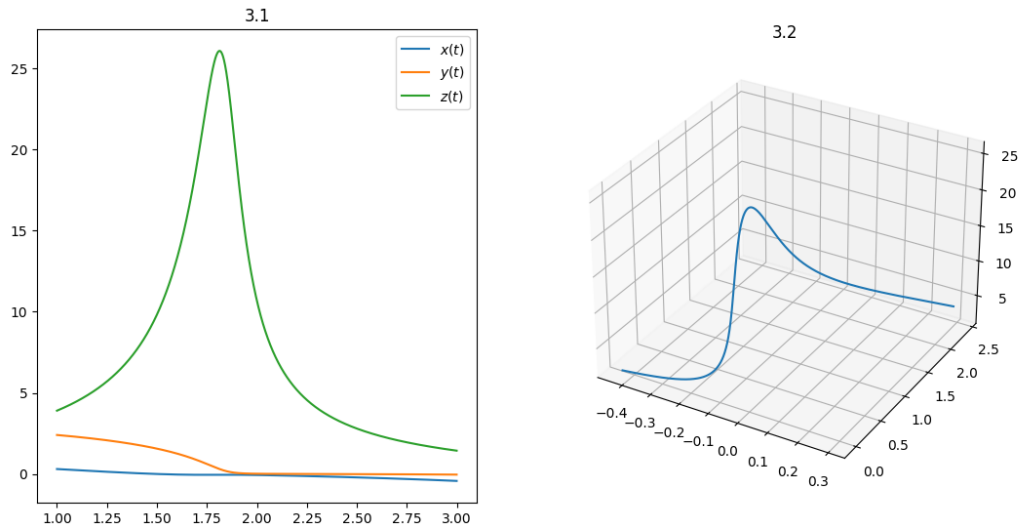


Figure 3: Experimento #3

En el cuarto experimento, se usaron valores tal que $\eta = \alpha$. Los valores iniciales usados fueron $[x_0 = 1.2, y_0 = 2.1, z_0 = 4.28]$. La simulación muestra que los valores van al punto de equilibrio.

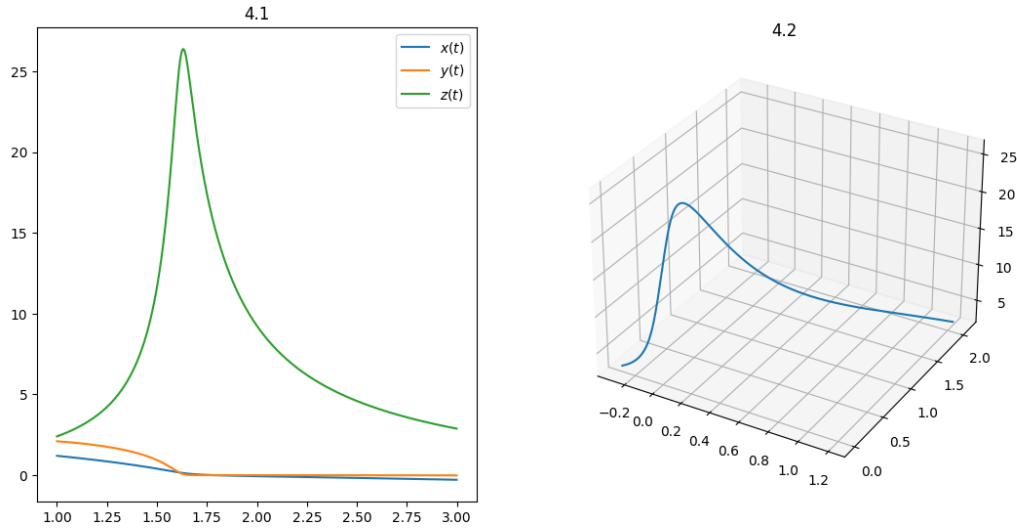


Figure 4: Experimento #4

Quinto experimento

En el quinto experimento, se usaron valores tal que $\eta > \beta$ y $\eta > \alpha$. Los valores iniciales usados fueron $[x_0 = 1.2, y_0 = 2.1, z_0 = 2.4]$. La simulación muestra que los valores van al punto de equilibrio.

CONCLUSIONES

Este estudio ha examinado la estabilidad local de un modelo de interacción presa-depredador con estructura de etapas en las poblaciones de presas. Se han identificado y analizado los puntos de equilibrio, encontrando tres equilibrios positivos: el original, la extinción del depredador y el punto interior. Se ha demostrado que el punto interior es localmente estable bajo ciertas condiciones. Las simulaciones numéricas han respaldado

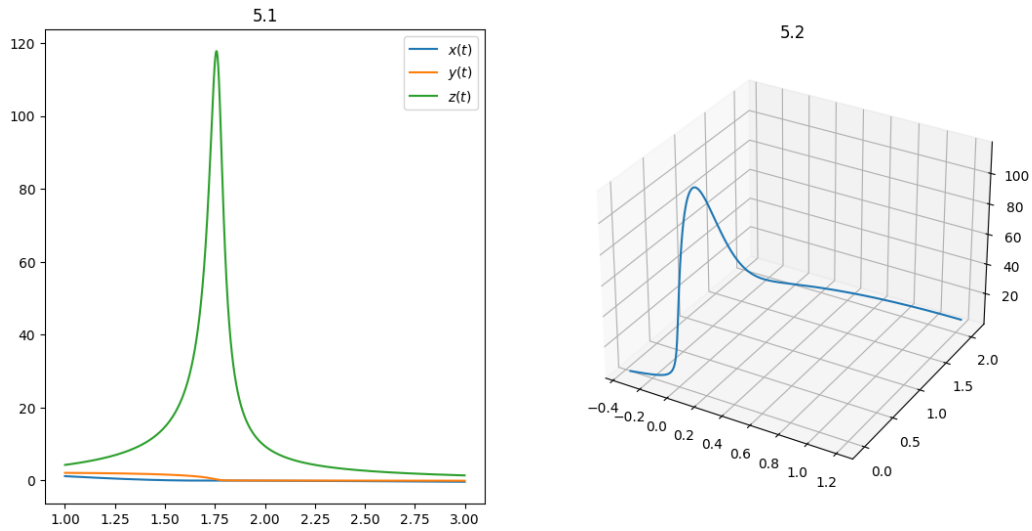


Figure 5: Experimento #5

los resultados analíticos, proporcionando evidencia adicional del comportamiento local y global del modelo. Además, se ha detectado la existencia de un ciclo límite estable, lo que destaca la importancia de considerar la estructura de etapas en la dinámica presa-depredador. Estos hallazgos contribuyen a mejorar nuestra comprensión de los sistemas ecológicos y proporcionan una base sólida para futuras investigaciones sobre bifurcaciones y estabilidad global en este tipo de modelos.

AGRADCIEMIENTOS

-Creo q nadie :)

3 ANEXOS

-Tercero B?