

Análisis de Stability and Numerical Simulation of Prey-predator System with Holling Type-II Functional Responses for Adult Prey

#### C212

- -Pedro Álvarez
- -Amanda Cordero
- -Marlon Díaz
- -Christopher Guerra
- -Abel Llerena

### Aspectos generales del artículo

Autora: Dian Savitri

► Presentado en: MISEIC(2019)

Publicado en: Journal of Physics, Conference Series

► Factor de impacto: 0.227

► Factor de impacto de la revista: 0.21

VNIVERSIDAD DF LA HABANA



## Aspectos generales del artículo

- ► Objetivo del artículo: Analizar la estabilidad del modelo presa-depredador.
- ➤ Valoración del artículo: Los autores consideramos que presenta varios errores, tanto tipográfico como de contenidos. Su factor de impacto es relativamente bajo. Sin embargo consideramos que se tratan temáticas muy interesantes y de gran utilidad para el desarrollo de la ecología.





# Estructura del trabajo

- ► Modelo matemático
- Análisis de los puntos de equilibrio
- Simulaciones numéricas

NNIVED SIDAD



## Ecuaciones que ilustran el modelo utilizado

$$\frac{dx}{dt} = rx(1 - \frac{x}{k}) - \beta x - \alpha xz$$

$$\frac{dy}{dt} = \beta x - \frac{\eta yz}{y+m} - \mu y$$

$$\frac{dz}{dt} = \alpha_1 xz + \rho z^2 - \frac{\eta_1 z^2}{y+m}$$



$$\frac{dx}{dt} = rx(1 - \frac{x}{k}) - \beta x - \alpha xz$$

x: población de presas juveniles.

t: tiempo.

r: constante que define la tasa de crecimiento.

k: capacidad de carga o persistencia

 $\beta$ : factor de conversión de presa joven a presa adulta

 $\alpha$ : tasa de eliminación de presas por parte de los depredadores.





$$\frac{dy}{dt} = \beta x - \frac{\eta yz}{y+m} - \mu y$$

 $\eta$ : valor máximo de la tasa de reducción per cápita de presas adultas debido a los depredadores.

m: coeficiente de protección ambiental para las presas adultas.

 $\mu$ : tasa de mortalidad en presas adultas.



$$\frac{dz}{dt} = \alpha_1 xz + \rho z^2 - \frac{\eta_1 z^2}{y + m}$$

 $\alpha_1$ : tasa de disponibilidad de alimentos favoritos de los depredadores.

 $\rho$ : tasa de crecimiento intrínseco.

 $\eta_1$ : relación del crecimiento intríseco y el factor de conversión de depredación a presa adulta.

m: pérdida residual de los depredadores.

Aquí discrepamos. Consideramos que Savitri pudo tener un error tipográfico, pues en lo adelante asume nuestra ecuación, además [2] defiende este modelo.

VNIVERSIDAD DE LA HABANA



# Análisis de los puntos de equilibrio y su estabilidad

Los puntos de equilibrio para este sistema son aquellos que satisfacen:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0$$

Estos puntos son:

$$P_1 = (0,0,0)$$

$$\triangleright P_2 = (\frac{k(r-\beta)}{r}, \frac{\beta k(r-\beta)}{\mu r}, 0)$$

$$ightharpoonup P_3 = (x_3, y_3, z_3)$$





#### Matriz Jacobiana

$$\left( \begin{array}{cccc} r - \frac{2rx}{k} - \beta - \alpha z & 0 & -\alpha x \\ \beta & \frac{-nz}{y+m} + \frac{nyz}{(y+m)^2} - \mu & \frac{-ny}{y+m} \\ \alpha_1 z & \frac{n_1z^2}{(y+m)^2} & 2pz - \frac{2n_1z}{y+m} + \alpha_1 x \end{array} \right)$$

Junio 2023





Para  $P_1$  sería:

$$\begin{vmatrix} (-\beta+r)-\lambda & 0I & 0\\ \beta & -\mu-\lambda & 0\\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

 $\lambda_1 = -$ 

Por tanto en  $P_1$  el sistema es inestable.

En este punto, Savitri se refiere a -1 + r donde nosotros a  $-\beta + r$ . Consideramos que haya sido un error tipográfico, pues como bien ella afirma, esta matriz se obtiene al sustituir el punto de equilibrio (0, 0, 0).

Junio 2023



Para  $P_2$  sería:

$$\begin{vmatrix} (\beta+r)-\lambda & 0 & \frac{\alpha k(\beta-r)}{r} \\ \beta & -\mu-\lambda & \frac{n\beta k(\beta-r)}{r\mu(\frac{\beta k(r-\beta)}{r}+m)} \\ 0 & 0 & \frac{\alpha_1 k(\beta-r)}{r}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda_1 = \beta - r, \lambda_2 = cosaqnoentiendo, \lambda_3 = \frac{\alpha_1 k(\beta - r)}{r}$$
  
Por lo que  $P_2$  es inestable.

En la tercera fila, tercera columna, [1] olvida restar  $\lambda$ , asumimos error tipográfico [1] considera este punto estable, diferimos de su resultado





#### En el caso de $P_3$ :

$$J(x_3, y_3, z_3) = \begin{pmatrix} r - \frac{2rx_3}{k} - \beta - \alpha z_3 & 0 & -\alpha x_3 \\ \beta & \frac{-nz_3}{y_3 + m} + \frac{ny_3 z_3}{(y_3 + m)^2} - \mu & \frac{-ny_3}{y_3 + m} \\ \alpha_1 z_3 & \frac{n_1 z_3^2}{(y_3 + m)^2} & 2pz_3 - \frac{2n_1 z_3}{y_3 + m} + \alpha_1 x_3 \end{pmatrix}$$

Junio 2023





$$\lambda^3 + \gamma_1 \lambda^2 + \gamma_2 \lambda + \gamma_3 = 0$$

Estable  $\leftrightarrow \gamma_1 > 0, \gamma_3 > 0$  y  $\gamma_1 \gamma_2 - \gamma_3 > 0$ 

La coexistencia en  $P_3$  es local y asintóticamente estable.

Aquí [1] trabaja con  $\lambda^2$  — traza  $\lambda$  + determinante, esto no es aplicable para sistemas mayores que dos, ni es resultado de simplificación alguna

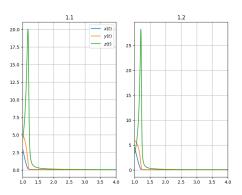
Junio 2023

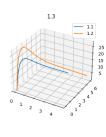




### Primer experimento

En el primer conjunto de experimentos se usaron los valores iniciales  $[x_0 = 3.01, y_0 = 5.05, z_0 = 4.28]$  y  $[x_0 = 4.6, y_0 = 5.9, z_0 = 3.1]$ 





Junio 2023

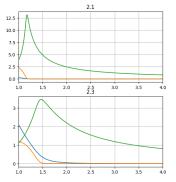


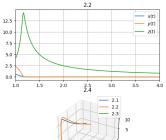
# Segundo experimento

Se usaron valores tal que  $\eta > \beta$  y  $\eta > \alpha$ .

$$[x_0 = 0.3, y_0 = 2.4, z_0 = 3.9], [x_0 = 0.6, y_0 = 2.4, z_0 = 3.9],$$

$$[x_0 = 2.1, y_0 = 1.2, z_0 = 1.1]$$







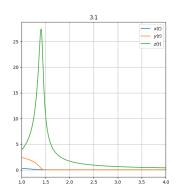
Junio 2023

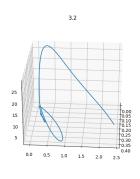


## Tercer experimento

Se usaron valores tal que  $\alpha > \beta$  [ $x_0 = 0.3, y_0 = 2.4, z_0 = 3.9$ ]

Este experimento difiere del resultado dado por [1]

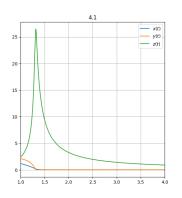


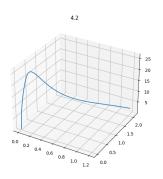




### Cuarto experimento

Se usaron valores tal que  $\eta = \alpha$ . [ $x_0 = 1.2, y_0 = 2.1, z_0 = 4.28$ ]





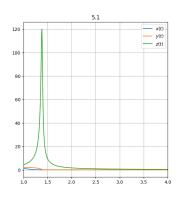
Junio 2023

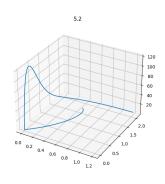


### Quinto experimento

Se usaron valores tal que  $\eta > \beta$  y  $\eta > \alpha$ .

$$[x_0 = 1.2, y_0 = 2.1, z_0 = 2.4]$$





Junio 2023



► Hemos examinado la estabilidad de un modelo de interacción presa-depredador.

Junio 2023 20





- Hemos examinado la estabilidad de un modelo de interacción presa-depredador.
- Se han identificado y analizado los puntos de equilibrio, encontrando tres equilibrios positivos:
  - El inicial
  - La extinción del depredador
  - Un punto interior

VNIVERSIDAD

Junio 2023



- ► Hemos examinado la estabilidad de un modelo de interacción presa-depredador.
- Se han identificado y analizado los puntos de equilibrio, encontrando tres equilibrios positivos:
  - El inicial
  - La extinción del depredador
  - Un punto interior
- ► Se ha demostrado que el punto interior es localmente estable bajo ciertas condiciones.

Junio 2023 20





Las simulaciones numéricas han respaldado los resultados analíticos.

Junio 2023





- Las simulaciones numéricas han respaldado los resultados analíticos.
- Estos hallazgos contribuyen a mejorar nuestra comprensión de los sistemas ecológicos.

Junio 2023 21





- Las simulaciones numéricas han respaldado los resultados analíticos.
- Estos hallazgos contribuyen a mejorar nuestra comprensión de los sistemas ecológicos.
- Esta línea de trabajo podría continuar estudiando los términos que componen el modelo para lograr un mayor ajuste a la realidad de la naturaleza.

Junio 2023 21







Análisis de Stability and Numerical Simulation of Prey-predator System with Holling Type-II Functional Responses for Adult Prey

#### C212

- -Pedro Álvarez
- -Amanda Cordero
- -Marlon Díaz
- -Christopher Guerra
- -Abel Llerena