

**ANÁLISIS DE STABILITY AND NUMERICAL SIMULATION OF PREY-PREDATOR SYSTEM WITH
HOLLING TYPE-II FUNCTIONAL RESPONSES FOR ADULT PREY [1]**

Pedro Pablo Álvarez Portelles

Grupo C212
Ciencia de la Computación
Facultad de Matemática y Computación
Universidad de La Habana. Cuba

Amanda Cordero Lezcano

Grupo C212
Ciencia de la Computación
Facultad de Matemática y Computación
Universidad de La Habana. Cuba

Marlon Díaz Pérez

Grupo C212
Ciencia de la Computación
Facultad de Matemática y Computación
Universidad de La Habana. Cuba

Christopher Guerra Herrero

Grupo C212
Ciencia de la Computación
Facultad de Matemática y Computación
Universidad de La Habana. Cuba

Abel Llerena Domínguez

Grupo C212
Ciencia de la Computación
Facultad de Matemática y Computación
Universidad de La Habana. Cuba

RESUMEN

Este artículo constituye un análisis de [1], el cual examina la estabilidad de un modelo de presa-depredador. Se analizan los puntos de equilibrio y se realiza una exploración numérica para mostrar los resultados. Estos confirman los hallazgos analíticos y revelan el comportamiento del modelo, considerando las interacciones entre presas jóvenes, adultas y depredadores.

1 INTRODUCCIÓN

El propósito de este documento es hacer un análisis de [1], artículo elaborado por la especialista analítica Dian Savitri. Fue presentado en el MISEIC (Mathematics, Informatics, Science and Education International Conference) en 2019 y publicado en Journal of Physics: Conference Series, bajo la licencia de IOP Publishing. Factor de impacto del artículo: 0.227, en la fecha de publicación del artículo. Actualmente la revista tiene un factor de impacto de 0.21.

Valoración del artículo: Los autores consideramos que [1] presenta varios errores, tanto tipográfico como de contenidos. Su factor de impacto es relativamente bajo. Sin embargo consideramos que se tratan temáticas muy interesantes y de gran utilidad para el desarrollo de la ecología.

Objetivo del artículo: Analizar la estabilidad de un modelo presa-depredador.

El modelo fue construido a partir de dos presas que involucran una estructura de etapa y un depredador. Posee tres equilibrios positivos: el original, la extinción del depredador y un punto interior. El artículo hace un estudio de la dinámica del comportamiento de las interacciones presa-depredador, con la función de respuesta Holling tipo II (esta respuesta funcional se refiere al cambio en el comportamiento de los individuos en función de la densidad del huésped o presa) para presas adultas. El apartado considera la estabilidad de los equilibrios en detalle con las condiciones de existencia e ilustra la estabilidad local de los equilibrios, además cuenta con simulaciones numéricas para ilustrar los resultados.

Técnicas utilizadas:

- Criterio Routh Hurwitz: consiste en un simple procedimiento o algoritmo para poder determinar si existe alguna raíz o polo en el semiplano derecho del plano complejo “s”, donde si al menos existe una raíz el sistema es inestable, caso contrario si no hay ninguna raíz en el semiplano derecho el sistema es estable.
- Usando python y una implementación computacional del método Runge-Kutta de orden 4 se resolvió el sistema presa-depredador.

1.1 Estructura del trabajo

- Modelo matemático
- Análisis de los puntos de equilibrio
- Simulaciones numéricas

2 RESULTADOS FUNDAMENTALES.

Ecuaciones que ilustran el modelo matemático utilizado:

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{k}\right) - \beta x - \alpha xz \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = \beta x - \frac{\eta yz}{y+m} - \mu y \quad (2)$$

$$\frac{dz}{dt} = \alpha_1 xz + \rho z^2 - \frac{\eta_1 z^2}{y+m} \quad (3)$$

Ecuación 1

- El término $rx\left(1 - \frac{x}{k}\right)$ de (1) es conocido como ecuación logística y se compone por:

x : población de presas juveniles.

t : tiempo.

r : constante que define la tasa de crecimiento.

k : capacidad de carga o persistencia.

Esta primera ecuación representa el modelo de crecimiento poblacional en las presas jóvenes. Para ello se tuvo en cuenta:

- La tasa de reproducción es proporcional a la población existente.

- La tasa de reproducción es proporcional a la cantidad de recursos disponibles.
- La competición por los recursos disponibles tiende a limitar el crecimiento poblacional.
- βx representa las presas que se vuelven adultas.

β : factor de conversión de presa joven a presa adulta

- La velocidad con que varía la población de presas x es proporcional al número de encuentros con los depredadores z según la ecuación de Lotka-Volterra:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha xz$$

α : tasa de eliminación de presas por parte de los depredadores.

Ecuación 2 Por otra parte (2) se refiere a la población de presas adultas.

- El primer término de la ecuación ya fue analizado anteriormente, es la cantidad de presas jóvenes que se convierten en adultas.
- El proceso de eliminación de presas por los depredadores se describe a partir del modelo Holling Tipo II, que establece:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\eta yz}{y + m}$$

donde:

η : valor máximo de la tasa de reducción per cápita de presas adultas debido a los depredadores.

m : coeficiente de protección ambiental para las presas adultas.

- Además se considera las presas que mueren de forma natural μy .
- μ : tasa de mortalidad en presas adultas.

Ecuación 3 Por último (3) modela la población de depredadores.

- $\alpha_1 xz$ responde al modelo de Lotka-Volterra. Esta ecuación representa que el crecimiento de los depredadores es proporcional a la caza de presas juveniles.
- α_1 : tasa de crecimiento de los depredadores debido a la caza de presas juveniles.

- ρz^2 es el crecimiento intrínseco.

ρ : tasa de crecimiento intrínseco.

- El tercer término representa la tasa de mortalidad en el esquema de Leslie Gower.

η_1 : relación del crecimiento intrínseco y el factor de conversión de depredación a presa adulta.

m : pérdida residual de los depredadores.

Esta consideración está basada en la idea de una relación entre la reducción de la población de depredadores y la disponibilidad per cápita de sus comida favorita. Esta disponibilidad está condicionada por la abundancia de alimentos y las características medioambientales.

En 3 discrepamos de [1]. Consideramos que Savitri pudo tener un error tipográfico, pues en lo adelante asume nuestra ecuación, además [2] defiende este modelo.

ANÁLISIS DE LOS PUNTOS DE EQUILIBRIO Y SU ESTABILIDAD

Los puntos de equilibrio para este sistema son aquellos que satisfacen:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0$$

Estos puntos son:

- $P_1 = (0, 0, 0)$
- $P_2 = \left(\frac{k(r-\beta)}{r}, \frac{\beta k(r-\beta)}{\mu r}, 0 \right)$
- $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$

La estabilidad de los puntos de equilibrio se puede analizar calculando la matriz Jacobiana. Para nuestro sistema sería:

$$J(x^*, y^*, z^*) = \begin{pmatrix} r - \frac{2rx}{k} - \beta - \alpha z & 0 & -\alpha x \\ \beta & \frac{-nz}{y+m} + \frac{nyz}{(y+m)^2} - \mu & \frac{-ny}{y+m} \\ \alpha_1 z & \frac{n_1 z^2}{(y+m)^2} & 2pz - \frac{2n_1 z}{y+m} + \alpha_1 x \end{pmatrix}$$

La ecuación característica está dada por el $\det(J(x^*, y^*, z^*) - I) = 0$ donde (x^*, y^*, z^*) es un punto de equilibrio del sistema. Nosotros solo analizaremos la estabilidad de los puntos de equilibrio no negativos por la parte real de los valores propios de la matriz Jacobiana. Para P_1 sería:

$$\begin{vmatrix} (-\beta + r) - \lambda & 0 & 0 \\ \beta & -\mu - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

En este punto, [1] se refiere a $-1 + r$ donde nosotros a $-\beta + r$. Consideramos que haya sido un error tipográfico, pues como bien ella afirma, esta matriz se obtiene al sustituir el punto de equilibrio $(0, 0, 0)$.

De ahí que sus valores propios están dados por $((-\beta + r) - \lambda)(-\mu - \lambda)(-\lambda) = 0$. Pero esta ecuación siempre tiene valor negativo $\lambda_1 = -$, también si $r < \beta$, pero $\lambda_3 = 0$. Por tanto en P_1 el sistema es inestable.

Para P_2 sería:

$$\begin{vmatrix} (\beta - r) - \lambda & 0 & \frac{\alpha k(\beta - r)}{r} \\ \beta & -\mu - \lambda & \frac{n\beta k(\beta - r)}{r\mu(\frac{\beta k(r-\beta)}{r} + m)} \\ 0 & 0 & -\frac{\alpha_1 k(\beta - r)}{r} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

En la tercera fila, tercera columna, [1] olvida restar λ , asumimos error tipográfico

Que luego de un poco de trabajo algebraico obtendrías $\lambda_1 = \beta - r, \lambda_2 = \text{cosa no entiendo}, \lambda_3 = \frac{\alpha_1 k(\beta - r)}{r}$. Por lo que P_2 es inestable.

[1] considera este punto estable, diferimos de su resultado

En el caso P_3 sería:

$$J(x_3, y_3, z_3) = \begin{pmatrix} r - \frac{2rx_3}{k} - \beta - \alpha z_3 & 0 & -\alpha x_3 \\ \beta & \frac{-nz_3}{y_3+m} + \frac{ny_3 z_3}{(y_3+m)^2} - \mu & \frac{-ny_3}{y_3+m} \\ \alpha_1 z_3 & \frac{n_1 z_3^2}{(y_3+m)^2} & 2pz_3 - \frac{2n_1 z_3}{y_3+m} + \alpha_1 x_3 \end{pmatrix}$$

La ecuación característica entonces es de la forma:

$$\lambda^3 + \gamma_1 \lambda^2 + \gamma_2 \lambda + \gamma_3 = 0$$

Aquí [1] trabaja con $\lambda^2 - \text{traza } \lambda + \text{determinante}$, esto no es aplicable para sistemas mayores que dos, ni es resultado de simplificación alguna

Si usamos el criterio Routh-Hurwitz para analizar la estabilidad en P_3 veremos que este tiene una parte real negativa si y solo si $\gamma_1 > 0, \gamma_3 > 0$ y $\gamma_1 \gamma_2 - \gamma_3 > 0$, la coexistencia en P_3 es local y asintóticamente estable.

MÉTODOS Y ALGORITMOS UTILIZADOS

Ejemplos Numéricos. Reproducción de los experimentos

Para reproducir los experimentos se utilizó el método de Runge-Kutta de orden 4 (RK4), programado en Python 3.10 y haciendo uso de librerías para la manipulación eficiente de vectores como Numpy y Scipy.

El metodo de Runge-Kutta es método de un paso en el cual se usa un tamaño de paso h para calcular los siguientes valores a partir de valores previos.

Como en este trabajo se utiliza un sistema de tres ecuaciones, es necesario de manera análoga crear otras variables l y m para las funciones y y z . El pseudocódigo sería de la siguiente manera:

for $i = 0$ to $n - 1$:

$$xn = x[i]; yn = y[i]; zn = z[i]$$

$$k_1 = f_1(t_n, x_n, y_n, z_n)$$

$$l_1 = f_2(t_n, x_n, y_n, z_n)$$

$$m_1 = f_3(t_n, x_n, y_n, z_n)$$

$$k_2 = f_1(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_1}{2}, y_n + \frac{l_1}{2}, z_n + \frac{m_1}{2})$$

$$l_2 = f_2(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_1}{2}, y_n + \frac{l_1}{2}, z_n + \frac{m_1}{2})$$

$$m_2 = f_3(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_1}{2}, y_n + \frac{l_1}{2}, z_n + \frac{m_1}{2})$$

$$k_3 = f_1(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_2}{2}, y_n + \frac{l_2}{2}, z_n + \frac{m_2}{2})$$

$$l_3 = f_2(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_2}{2}, y_n + \frac{l_2}{2}, z_n + \frac{m_2}{2})$$

$$m_3 = f_3(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_2}{2}, y_n + \frac{l_2}{2}, z_n + \frac{m_2}{2})$$

$$k_4 = f_1(t_n + h, x_n + k_3, y_n + l_3, z_n + m_3)$$

$$l_4 = f_2(t_n + h, x_n + k_3, y_n + l_3, z_n + m_3)$$

$$m_4 = f_3(t_n + h, x_n + k_3, y_n + l_3, z_n + m_3)$$

$$t[i + 1] = t[i] + h$$

$$x[i + 1] = \frac{h}{6}(k_1 + \frac{k_2}{2} + \frac{k_3}{3} + k_4)$$

$$y[i + 1] = \frac{h}{6}(l_1 + \frac{l_2}{2} + \frac{l_3}{3} + l_4)$$

$$z[i + 1] = \frac{h}{6}(m_1 + \frac{m_2}{2} + \frac{m_3}{3} + m_4)$$

El tamaño de paso se estableció para todos los experimentos en $h = 2^{-10}$ con el cual se obtienen resultados muy exactos teniendo en cuenta que el error de RK4 es del orden $O(h^5)$, con lo que tendríamos que el error sería aproximadamente del orden de $e \approx 2^{-50}$.

Reproducción de los experimentos

Para los experimentos se utilizaron para los parámetros los valores de la siguiente tabla:

#	r	α	α_1	η	η_1	K	ρ	m
1	0.82	1.56	1.12	2.41	1.83	12.0	1.38	0.13
2	1.32	1.56	0.72	2.41	0.41	2.8	1.38	0.23
3	1.32	0.76	0.72	0.6	0.41	2.8	0.78	0.23
4	0.82	0.76	0.72	1.2	0.41	2.8	1.38	0.23
5	1.32	1.16	0.72	0.31	0.41	2.8	0.78	0.23

Además, se usó fijo $\beta = 0.87$ y $\mu = 0.11$.

note que [1] da dos interpretaciones diferentes para la variable m , sin embargo ambos conceptos se simulan con igual magnitud

Primer experimento

En el primer conjunto de experimentos se usaron los valores iniciales $[x_0 = 3.01, y_0 = 5.05, z_0 = 4.28]$ (1.1) y $[x_0 = 4.6, y_0 = 5.9, z_0 = 3.1]$ (1.2).

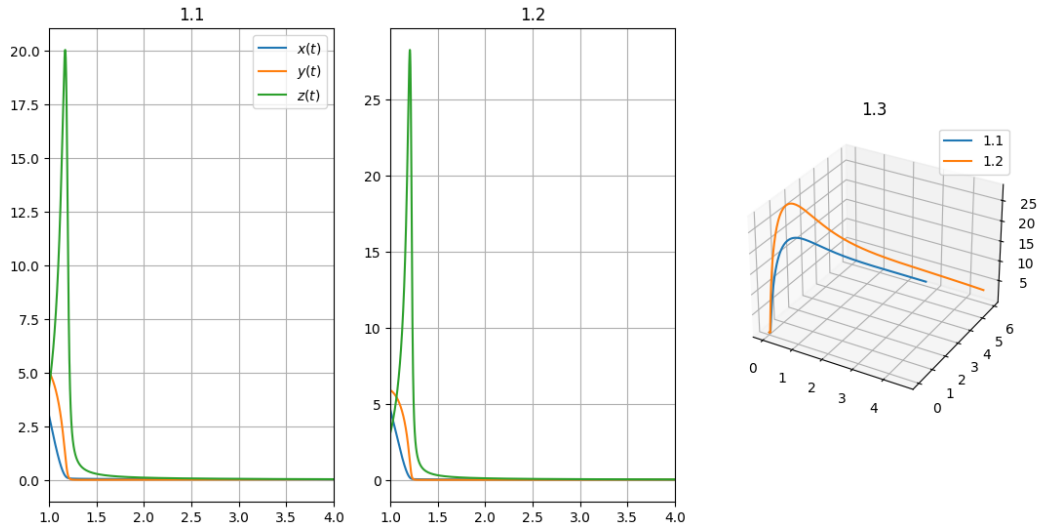


Figure 1: Experimento #1

Segundo experimento

En el segundo conjunto de experimentos, se usaron valores tal que $\eta > \beta$ y $\eta > \alpha$. De valores iniciales se utilizaron $[x_0 = 0.3, y_0 = 2.4, z_0 = 3.9](2.1)$, $[x_0 = 0.6, y_0 = 2.4, z_0 = 3.9](2.2)$ y $[x_0 = 2.1, y_0 = 1.2, z_0 = 1.1]$. La simulación muestra que todos los valores van al punto de equilibrio interior.

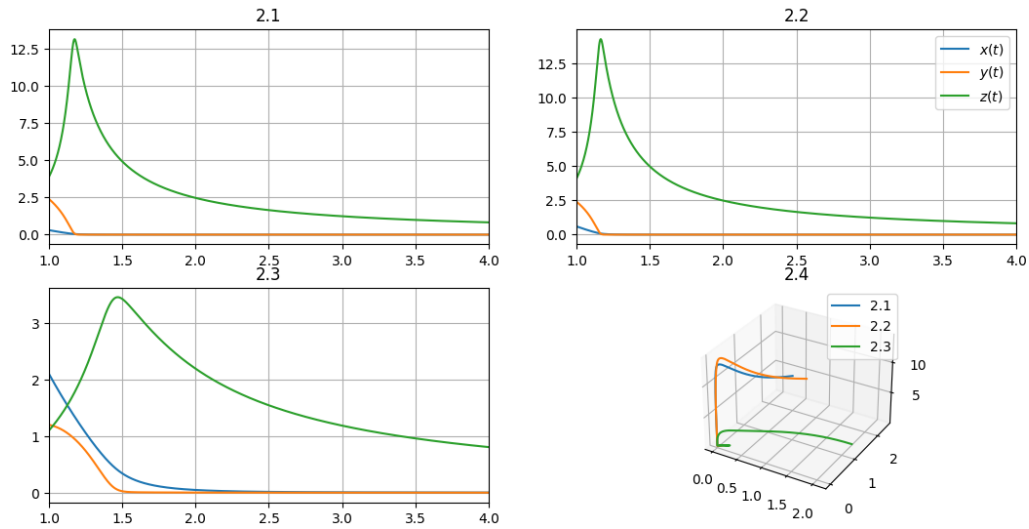


Figure 2: Experimento #2

Tercer experimento

En el tercer experimento, se usaron valores tal que $\alpha > \beta$ Los valores iniciales usados fueron $[x_0 = 0.3, y_0 = 2.4, z_0 = 3.9]$. La simulación muestra que los valores van al punto de equilibrio.

Este experimento difiere del resultado dado por [1]

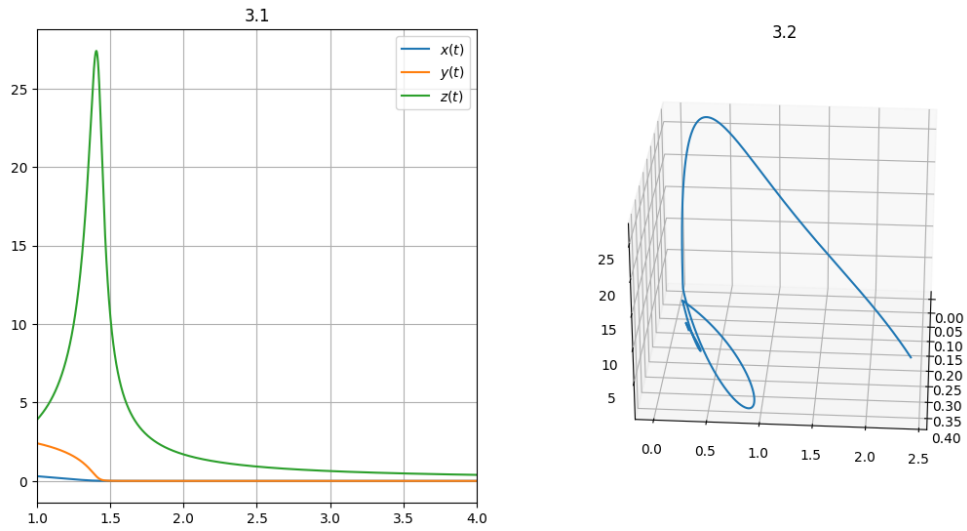


Figure 3: Experimento #3

Cuarto experimento

En el cuarto experimento, se usaron valores tal que $\eta = \alpha$. Los valores iniciales usados fueron $[x_0 = 1.2, y_0 = 2.1, z_0 = 4.28]$. La simulación muestra que los valores van al punto de equilibrio.

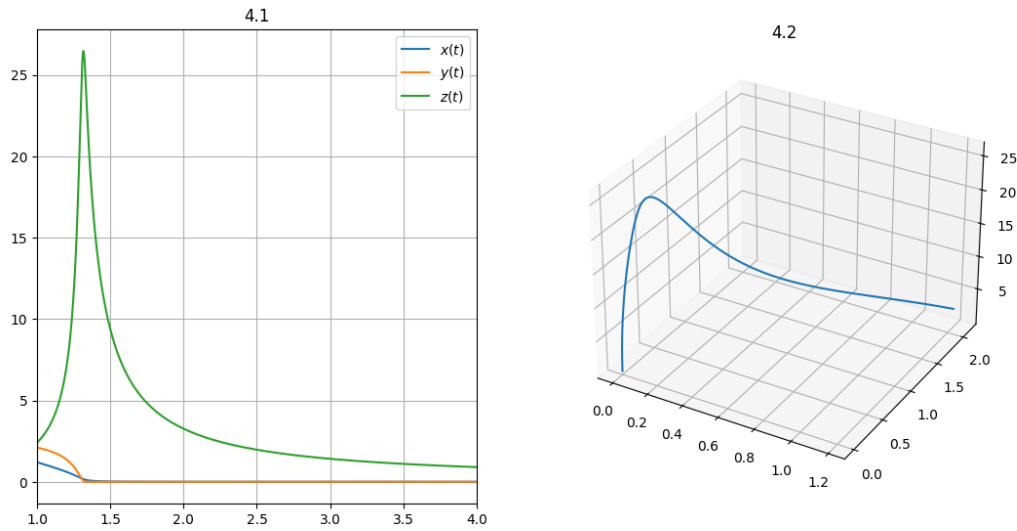


Figure 4: Experimento #4

Quinto experimento

En el quinto experimento, se usaron valores tal que $\eta > \beta$ y $\eta > \alpha$. Los valores iniciales usados fueron $[x_0 = 1.2, y_0 = 2.1, z_0 = 2.4]$. La simulación muestra que los valores van al punto de equilibrio.

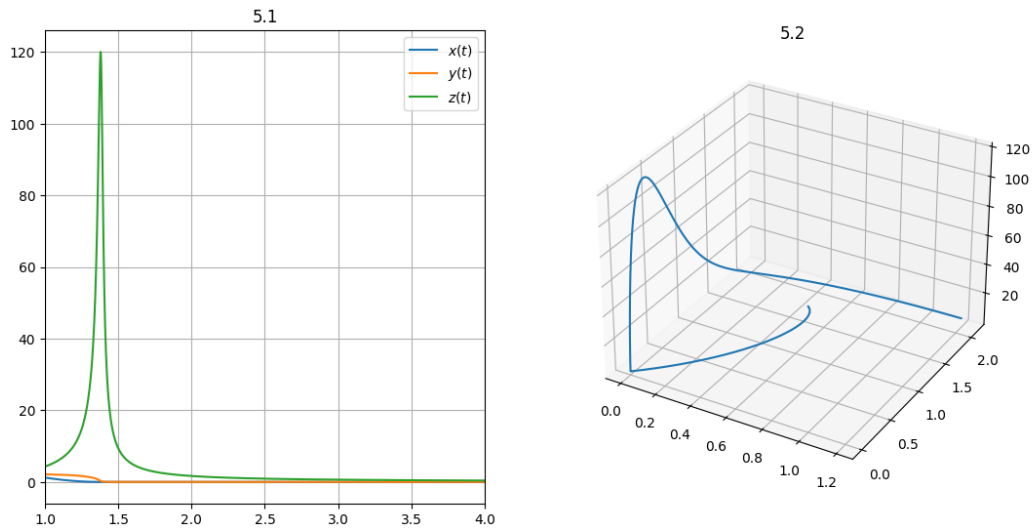


Figure 5: Experimento #5

CONCLUSIONES

Este estudio ha examinado la estabilidad de un modelo de interacción presa-depredador con estructura de etapas en las poblaciones de presas. Se han identificado y analizado los puntos de equilibrio, encontrando tres equilibrios positivos: el inicial, la extinción del depredador y el punto interior. Se ha demostrado que el punto interior es localmente estable bajo ciertas condiciones. Las simulaciones numéricas han respaldado los resultados analíticos, proporcionando evidencia adicional del comportamiento del modelo. Estos hallazgos contribuyen a mejorar nuestra comprensión de los sistemas ecológicos. Esta línea de trabajo podría continuar estudiando los términos que componen el modelo para lograr un mayor ajuste a la realidad de la naturaleza.

Referencias

- [1] D. Savitri, Stability and Numerical Simulation of Prey-predator System with Holling Type-II Functional Responses for Adult Prey.
- [2] L. Gauer esa