TD 3 : Applications linéaires

Exercice 1. Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1. $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad f_1(x) = x^2$
2. $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad f_2(x) = \frac{2x}{1+x^2}$
3. $f_3 : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}; \quad f_3(x) = \frac{x+1}{x-1}$
4. $f_4 : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}\backslash\{1\}; \quad f_4(x) = \frac{x+1}{x-1}$
5. $f_5 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad f_5(x,y) = 2x+5y$
6. $f_6 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; \quad f_6(x,y) = (2x, 5y)$
7. $f_7 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; \quad f_7(x,y) = (2x+5y, 3x)$
8. $f_8 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; \quad f_8(x,y) = (x^2, x+y)$
9. $f_9 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}; \quad f_9(x,y,z) = x+y+z$
10. $f_{10} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2; \quad f_{10}(x,y,z) = (x+y+z, y+z)$
11. $f_{11} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2; \quad f_{11}(x,y,z) = (x+y+z, xyz)$
12. $f_{12} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; \quad f_{12}(x,y,z) = (2x+5z, 2y+5z, z)$

Exercice 2. Les applications suivantes de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ sont-elles linéaires ?

1. $f_1(x,y,z) = (3x+2y-z, x-y-3z)$
2. $f_2(x,y,z) = (x+y+z, xyz)$
3. $f_3(x,y) = (2x+3y, x)$
4. $f_4(x,y) = (x^2, x+y)$
5. $f_5(x) = (x, 2x)$
6. $f_6(x,y) = \cos(x) + \cos(y)$

Exercice 3. On considère les applications linéaires suivantes de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Pour chacune d'elle, déterminer une base de l'image de f, le rang de f, une base du noyau de f ainsi qu'un système d'équation de l'image de f.

1. $f(x,y) = (2x+y, 4x+6y)$
2. $f(x,y) = (x+y, 2x-y, -4x+5y)$
3. $f(x,y,z) = (3x+2y+z, 2y+5z)$
4. $f(x,y,z) = (y, z, 0)$
5. $f(x,y,z) = (x-y, x+z)$
6. $f(x,y,z) = (x+2z, -x+4y+10z, 2x+y+7z)$
7. $f(x,y,z,t) = (y-t, x+z, y-t, x+z)$
8. $f(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} 2x+y+3t \\ -x+3y+4z+2t \\ x+4y+4z+5t \\ 7y+8z+7t \end{pmatrix}$
9. $f(x,y,z,t,u) = \begin{pmatrix} x-y-z \\ 2y+z+2t+3u \\ 2x+2y+t+3u \\ x+y+t+2u \end{pmatrix}$

Exercice 4. Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. Soit T l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ définie par $T(P) = P + P' + P''$.

a) Montrer que T est une application linéaire.

b) Montrer que T est injective et en déduire que T est bijective.

Exercice 5. Soit f l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ définie par $f(P) = Q$ avec

$$Q(X) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X).$$

a) Montrer que f est une application linéaire.

b) Calculer $f(X^p)$; quel est son degré? En déduire $\ker f, \mathrm{Im} f$ et le rang de f.

Exercice 6. Soit f une application linéaire de E dans F. Montrer que si f est bijective, alors sa bijection réciproque f^{-1} est linéaire.

Exercice 7. On considère l'application:

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (2x-y, x+y). \end{array}$$

a) f est-elle linéaire ?

b) Prouver que $f \circ f = 3(f - Id)$.

c) En déduire que f est inversible et calculer f^{-1}.

Exercice 8. Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. Montrer que f est de la forme suivante:

$$f(x,y,z) = (a_1x + a_2y + a_3z, b_1x + b_2y + b_3z, c_1x + c_2y + c_3z).$$

Exercice 9. Trouver une application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que

$$f(1,1,0) = (1,2,1), \quad f(1,0,1) = (2,1,3), \quad f(1,1,1) = (4,2,1).$$

Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, calculer $f(x,y,z)$.

Exercice 10. A quelle condition sur a et b existe-t-il une application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que

$$f(1,1) = (1,2), \quad f(1,2) = (3,6), \quad f(2,3) = (a,b)?$$

Exercice 11. Soit, pour un réel α, l'application f_α de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même définie par:

$$f_\alpha(x,y) = (x\cos\alpha - y\sin\alpha, x\sin\alpha + y\cos\alpha).$$

a) Montrer que f_α est linéaire.

b) Monter que $f_\alpha \circ f_\beta = f_{\alpha+\beta}$. En déduire que f_α est bijective.