Université de Marne la Vallée | **Licence L2-SM**
2011/2012 | **Algèbre**

Examen du 22 mai 2012. Deux heures, sans document, ni calculatrice, ni téléphone portable.

Exercice 1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m & m \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. Pour quelles valeurs de m l'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Dans ce cas, donner une base dans laquelle la matrice de f est diagonale. Soit D cette matrice diagonale. Donner D, la matrice de passage P, ainsi que la relation qui lie A, P et D.
3. Montrer que A est trigonalisable pour toutes les valeurs de m et calculer une matrice semblable triangulaire. Donner la matrice de passage.

Exercice 2. **Question de cours.** Soit E un espace euclidien. Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 3. Soit E un espace euclidien. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.
1. **Question de cours.** Donner la définition de la projection orthogonale de E sur F. (On la notera p.)
2. Montrer que $p \circ p = p$. En déduire que les seules valeurs propres possibles de p sont 0 ou 1.
3. Montrer que p est un endomorphisme symétrique de E.
4. Soit $E = \mathbb{R}^3$, muni de son produit scalaire usuel et soit F le plan d'équation $x + y - z = 0$. Soit p la projection orthogonale de E sur F.
  a. Calculer la matrice de p dans la base canonique.
  b. p est-elle une isométrie de E ?

Exercice 4. Soit q la forme quadratique de $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$q(u) = x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz \quad ; \quad u = (x, y, z).$$

1. Écrire la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Notons M cette matrice.
2. Soit φ la forme bilinéaire symétrique associée à q. Donner l'expression de $\varphi(u, v)$ où $v = (x_1, y_1, z_1)$.
3. Utiliser l'algorithme des carrés de Gauss pour trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de q est diagonale. Écrire cette matrice diagonale, qu'on notera M'. Expliciter les nouvelles coordonnées (x', y', z') en fonction de (x, y, z).
4. Si on note P la matrice de passage de la base canonique à la nouvelle base, donner la relation qui lie M, P et M'.

Exercice 5. On se place dans $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire usuel. Le produit scalaire de deux vecteurs u et v sera noté (u, v). On donne la matrice suivante :

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ \sqrt{5} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A.
1. Montrer que A est une matrice orthogonale.
2. Montrer que f est une isométrie de déterminant 1. Quelle est la matrice de f^{-1} ?
3. Prouver que 1 est valeur propre de f et calculer le sous-espace propre associé, noté F.
4. Prouver que si $u \in F^{\perp}$, alors $f(u) \in F^{\perp}$. (On utilisera le fait que f est une isométrie, ainsi que la relation $f(v) = v$ pour tout $v \in F$).
5. Prouver que $F^{\perp}$ est le plan vectoriel d'équation : $x + (2 + \sqrt{5})y + z = 0$.
6. Donner une base de $F^{\perp}$.
7. Calculer une base orthonormée de $F^{\perp}$. (On pourra appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base trouvée à la question 4.)
8. Montrer que la matrice de f dans n'importe quelle base obtenue en réunissant une base orthonormée de F et une base orthonormée de $F^{\perp}$ est de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$$

où a et b sont des réels vérifiant la relation : $a^2 + b^2 = 1$. (On utilisera notamment la question 4).
9. Notons (e_1, e_2, e_3) une base orthonormée de E obtenue en réunissant une base orthonormée de F et une base orthonormée de $F^{\perp}$. Soit M la matrice de f dans cette base. Montrer que $a = (f(e_2), e_2)$ et $b = (f(e_2), e_3)$.