Modèles pour la transition fluide/solide dans les écoulements gravitaires en couche mince

François Bouchut (LAMA)
Alexandre Ern (CERMICS)
Christelle Lusso
Université Paris Est - CERMICS

mai 2012

Plan

Motivations :

- Modélisations d'écoulements de débris, d'avalanches,
- Etude de la transition fluide/solide dans un fluide à deux états.

Cadre :

- Dynamique en couche mince avec partie immobile au fond et mobile en surface.

Fig.: avalanche

Fig.: écoulement de lave

Equations du modèle

- Fluide visco-plastique non newtonien incompressible :

$$\begin{cases} \mathrm{div}\,\vec{U} = 0 \\ \partial_t \vec{U} + (\vec{U}.\nabla)\vec{U} + \mathrm{div}\,P = -\vec{g}, \end{cases}$$

- Loi de type Bingham

$$P = p\mathrm{Id} - \left(\nu D\vec{U} + \kappa \frac{D\vec{U}}{|D\vec{U}|} \right),$$

avec $D\vec{U} = \frac{\nabla\vec{U} + \nabla\vec{U}^t}{2}$ et $\vec{U}$ la vitesse du fluide.

- Relation de Drucker-Prager $\kappa = \sqrt{2}\lambda p$.

- Conditions aux limites et condition initiale
- $P.\vec{N} = 0$ à la surface libre.

Géométrie

- Le domaine Ω_t dépend du temps (surface libre),
- interface solide/fluide entre les deux phases, caractérisées par $D\vec{U}$ nul ou $D\vec{U}$ non nul,
- fond fixe.

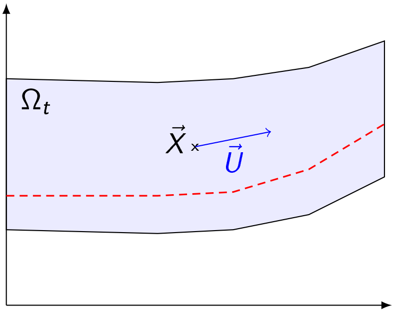


Fig. : Domaine dépendant du temps.

Modélisation unidimensionnelle

$\longrightarrow$ développement asymptotique en couche mince,
$\longrightarrow$ introduction de l'inconnue $b(t)$ qui représente la position de l'interface,
$\longrightarrow$ introduction d'un terme source empirique de friction et gravité :

$$\begin{cases} \partial_t U + S - \nu \partial_{ZZ} U = 0 \text{ pour } b(t) < Z < h, \\ \partial_Z U(t,h) = 0, \\ U(t, b(t)) = 0, \\ \partial_Z U(t, b(t)) = 0. \end{cases}$$

avec $\partial_Z U > 0$ et $\partial_Z S < 0$.

- U est prolongé par 0 sur $[0, b(t)]$,
- la condition aux limites redondante en $Z = b(t)$ donne l'évolution de $b(t)$.

Méthodes numériques

première méthode :

- changement de variables : $[b(t), h] \ni Z \longmapsto Y \in [0,1]$,
  $$\partial_t U - \frac{\dot{b}(1-Y)}{h-b}\partial_Y U + S - \frac{\nu}{(h-b)}\partial_{YY} U = 0,$$
- discrétisation par différences finies en espace,
- Euler implicite pour la diffusion, Euler explicite avec CFL pour le transport,
- à b^{n+} fixé, Dirichlet en $Y = 0$ et Neumann en $Y = 1$ donnent $U^{n+}(b^{n+})$,
- Neumann en $Y = 0$ sur $U^{n+}(b^{n+})$ permet de déterminer b^{n+}.

deuxième méthode :

- résolution d'un problème d'obstacle :
  $\min(\partial_t U + S - \nu\partial_{ZZ} U, U) = 0$ sur $[0, h]$.
- discrétisation par différences finies en espace,
- Euler explicite pour l'EDP.

Etude de l'écoulement sur un plan incliné d'angle θ

- $S = \alpha = g(\sin\theta + \lambda\cos\theta) > 0$,
- lorsque $\nu \to 0$ la solution analytique $(U(t,Z), b(t))$ est connue :
  - $U(t,Z) = [Z - b0 - \alpha t]_+$ pour $0 < Z < h$,
  - $b(t) = \alpha t + b0$.

Compétition viscosité/friction

VISCOSITE ν	FRICTION S
$\Downarrow$	$\Downarrow$
• applatit le profil de vitesse $\longrightarrow$ décroissance de b.	• fait décroitre la vitesse $\longrightarrow$ croissance de b.

En temps long, les effets de friction l'emportent sur les effets visqueux.

Résultats pour différentes valeurs de ν

- S constant > 0
- $U_0(Z) = [Z - b0]_+$ avec $b0 = 3,5$

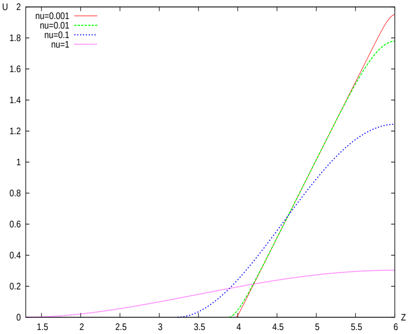


Fig.: profils de vitesse à $t = 5$.

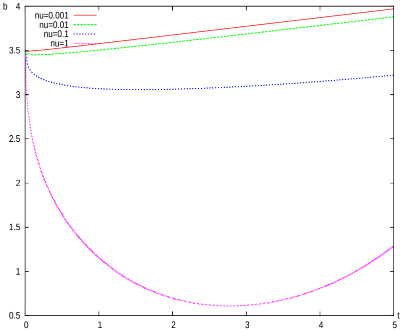
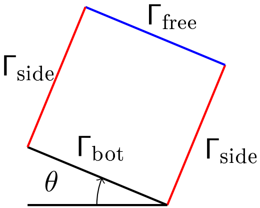


Fig.: évolution de $b(t)$.

Cas bidimensionnel

On veut résoudre le problème suivant

$$\begin{cases} \partial_t \vec{U} + (\vec{U}.\nabla)\vec{U} - \mathrm{div} P = f, \\ \mathrm{div}\, \vec{U} = 0, \\ \vec{U} = 0 \text{ sur } \Gamma_{\mathrm{bot}}, \\ \vec{U} \text{ est périodique sur } \Gamma_{\mathrm{side}}, \\ P.N = 0 \text{ sur } \Gamma_{\mathrm{free}}. \end{cases}$$



avec $P = p\mathrm{Id} - (\nu D\vec{U} + \kappa \frac{D\vec{U}}{|D\vec{U}|})$ et $\kappa = \sqrt{2}\lambda p$.

Condition d'écoulement : $\lambda > |\tan\theta|$.

Méthode ALE

Algorithme de marche en temps

- à l'instant t^n, on connait $\vec{U}^n$, $\vec{U}_f^n$ vitesse du domaine, et Ω^n,
- calcul de $(\vec{U}^{n+}\ , p^{n+}\ )$ en fonction de $\vec{U}^n$ et $\vec{U}_f^n$,
- calcul de la vitesse du domaine $\vec{U}_f^{n+}$,
- passer de Ω^{n+} à Ω^{n+} .

( ) Ce Bis, J-FGebea, Telive, *Mathematical Methods for the Magnetohydrodynamics of Liquid Metals*, NLeical LatheLatics and ncientic CoLptation, Oxfod Univesit y Pess, 006

( ) AEn, RJobad, Telive, *Numerical study of a thin liquid film flowing down an inclined wavy plane*, Physica D, 0

Formulation variationnelle par régularisation

- trouver $(\vec{U}_h^{n+}\ , p_h^{n+}\ )$ tels que

$$\int_{\Omega^{n+1}} \frac{\vec{U}_h^{n+1} - \vec{U}_h^n}{\Delta t} V_h + (\nabla \vec{U}_h^n(\vec{U}_h^n - \vec{U}_f^n)).V_h + \left(\nu + \frac{\kappa}{\sqrt{||D(\vec{U}_h^n)||^2 + \epsilon^2}} \right) D(\vec{U}_h^{n+1}) : D(V_h)$$

$$- \int_{\Omega^{n+1}} p_h^{n+}\ \mathrm{div}\, V_h - \int_{\Omega^{n+1}} q_h \mathrm{div}(\vec{U}_h^{n+}\ ) - \int_{\Omega^{n+1}} f_h V_h = 0$$

pour tout (V_h, q_h).

- Discrétisation par éléments finis de Taylor-Hood P2-P1.

Vitesse du domaine u_f^{n+}

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(D(\vec{U}_f^{n+})) = 0, \\ \vec{U}_f^{n+} .N = \vec{U}^{n+} .N \text{ sur } \Gamma_{\text{bot}}^{n+} \bigcup \Gamma_{\text{free}}^{n+}, \\ \vec{U}_f^{n+} .N = 0 \text{ sur } \Gamma_{\text{side}}^{n+}, \\ (D(u_f^{n+})N)_T = 0 \text{ sur } \partial\Omega^{n+} . \end{cases}$$

Remarque : Au niveau discret on introduit un multiplicateur r pour imposer les C.L. au sens faible.

(3) Ilonesc, *Onset and dynamic shallow flow of a viscoplastic fluid on a plane slope*, Jonal of non-newtonian flid *Lechanics*, 00

Résultats numériques

Comparaison des profils de vitesse 1d et 2d, avec S constant et $\nu = 0.001$, paramètre de régularisation $\epsilon = 10^{-}$,
$\Delta t = 10^{-3}$, résolution 1D $\Delta Y = 10^{-}$ et résolution 2D $\Delta Y = 10^{-}$.

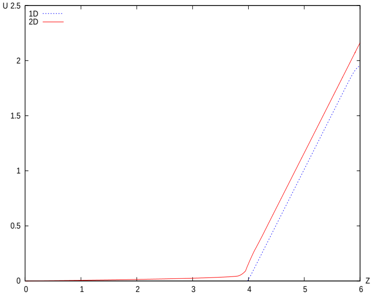


Fig.: profil de vitesse à $t = 5$.

Perspectives

- influence des paramètres opératoires (θ),
- influence des paramètres phénoménologiques (λ, ν),
- quitter le cadre périodique $\longrightarrow$ géométrie plus complexe.