

Contrôle n°3

Documents et calculatrices interdits. Barème approximatif : 1 point par question.

Exercice I :

- 1) Donner l'équation du plan \mathcal{P} passant par $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et orthogonal à $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
- 2) Calculer le volume du parallélépipède passant par $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.
- 3) Soit \mathcal{P} le plan passant par $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et dirigé par $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
 - a) Donner un système d'équations paramétriques de \mathcal{P} .
 - b) Donner un système d'équations cartésiennes de \mathcal{P} .

Exercice II :

- 1) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.
$$(x, y) \mapsto (x - 2y, 3x + y)$$
 - a) Montrer soigneusement que f est linéaire.
 - b) Ecrire la matrice de l'application f .
- 2) L'application $f' : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est-elle linéaire ? Justifier brièvement.
$$(x, y) \mapsto (x + 1, -3x + yx)$$
- 3) Soit $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.
$$(x, y, z) \mapsto (x + y + z, 2x - y, x - 3y + 3z)$$
 - a) Ecrire la matrice de g .
 - b) g est-elle une application inversible ? Si oui, calculer son inverse g^{-1} .

Exercice III :

- 1) Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.
 - a) Calculer AB .

b) La matrice B est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse B^{-1} .

2) Soit $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer C^2 .

3) Soit D la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $\det D$.

b) La matrice D est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse D^{-1} .

Exercice IV :

1) Soit S le système suivant :

$$\begin{cases} x - 7y = 0, \\ 2x + y = 15. \end{cases}$$

a) Donner la matrice de S .

b) Résoudre S .

2) Soit S' le système suivant :

$$\begin{cases} x - z = 3, \\ -y + 2z = 2, \\ 3x + 4y - 6z = 1. \end{cases}$$

a) Donner la matrice de S' .

b) Dire si S' admet une solution, si oui, résoudre S' .

3) Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3, \\ -6x + 3y - 3z = 1, \\ -x + 2y - z = 2. \end{cases}$$

Question td :

Comment met-on en facteur un coefficient dans un déterminant ? Donner un exemple simple sur une matrice carré de taille 2.