

Modèles effectifs pour les profils de vitesse dans les écoulements gravitaires

Christelle Lusso

Directeur: François Bouchut (LAMA)

Co-directeur: Alexandre Ern (CERMICS)

Université Paris Est

février 2012

Plan

- 1 Modèle
- 2 Cas stationnaire
 - Présentation des méthodes
 - Comparaison des méthodes numériques
- 3 Cas évolutif
 - Méthode ALE
 - Résultats numériques

1 Modèle

2 Cas stationnaire

- Présentation des méthodes
- Comparaison des méthodes numériques

3 Cas évolutif

- Méthode ALE
- Résultats numériques

Position du problème

On considère le problème suivant : trouver $(u, p) \in$ tels que,

$$\left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{div} \sigma + \nabla p = \rho f, \\ \operatorname{div} u = 0, \\ u = \bar{u} \text{ sur } \Gamma_c, \\ (\sigma - p \operatorname{Id}) N = g \text{ sur } \Gamma_f, \end{array} \right. \quad (1)$$

où $\Gamma = \Gamma_c \sqcup \Gamma_f$ où Γ_f est la surface libre.

Modèle

Loi de Drucker-Prager :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = \left(2\eta + \frac{\kappa}{\|D(u)\|} \right) D(u) \text{ si } \|D(u)\| \neq 0 \\ \|\sigma\| \leq \kappa \text{ sinon,} \end{array} \right.$$

avec κ fixé ou couplé avec la pression, $\kappa = \sqrt{2}\lambda[p]_+$.

Remarques :

- Problème :
 - ▶ l'erreur en σ et p stagnent malgré le raffinement de maillage,
 - ▶ erreur concentrée sur la partie basse du domaine, ici la partie “solide”.
- Origine :
 - ▶ dans la partie solide σ n'est pas directement déterminé mais vérifie seulement $||\sigma|| < \kappa$.
- Solution :
 - ▶ considérer l'erreur que dans la partie fluide, là où σ est bien déterminé,
 - ▶ utilisation d'une indicatrice de partie fluide χ_f pour calculer les erreurs.

Algorithme d'UZAWA

L'algorithme d'UZAWA est une méthode de recherche de point-selle qui remplace un problème avec contrainte par une suite de problèmes de minimisation sans contrainte.

Lagrangien augmenté :

On introduit un facteur de pénalisation $r > 0$ pour pénaliser la contrainte $\gamma = D(u)$ et on définit le lagrangien augmenté \mathcal{L}_r suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_r(u, \gamma; \sigma, p) = & \kappa \int_{\Omega} \|\gamma\| + \eta \int_{\Omega} \|\gamma\|^2 + \int_{\Omega} (D(u) - \gamma) : \sigma - \int_{\Omega} p \operatorname{div} u \\ & + r \int_{\Omega} \|D(u) - \gamma\|^2 - \int_{\Omega} \rho f u - \int_{\Gamma_b} (\sigma - p \operatorname{Id} + 2r(D(u) - \gamma)) N \cdot (u - \bar{u}). \end{aligned}$$

Par minimisation de la fonctionnelle \mathcal{L}_r on obtient la formulation variationnelle associée.

Formulation variationnelle à κ fixé (FV) :

on suppose γ et σ connus, trouver $(u, p) \in V_h^2 \times R_h$ tels que

$$\int_{\Omega} (\sigma + 2r(D(u) - \gamma)) : D(v) - \int_{\Omega} p \operatorname{div} v - \int_{\Omega} q \operatorname{div} u - \int_{\Gamma_I} g v - \int_{\Omega} \rho f v = 0,$$

pour tout $(v, q) \in V_h^2 \times R_h$.

Algorithme :

A κ fixé :

on suppose σ^n connu,

- calcul de (u^{n+1}, p^{n+1}) via (FV),
- update de γ^{n+1} par $\gamma^{n+1} = f(\sigma^n + 2rD(u^{n+1}))$,
avec $f(\sigma) = \left(1 - \frac{\kappa}{\|\sigma\|}\right)_+ \frac{\sigma}{2(r+\eta)}$,
- update de σ^{n+1} :
 $\sigma^{n+1} = \sigma^n + 2r(D(u^{n+1}) - \gamma^{n+1})$.

A $\kappa = \sqrt{2\lambda}[p]_+$:

on fixe $\kappa^n = \sqrt{2\lambda}[p^n]_+$ avec p^n donné, on applique l'algorithme précédent pour calculer (u^{n+1}, p^{n+1}) puis on update κ^{n+1} via p^{n+1} etc.

Méthode de régularisation

On régularise le terme multivalué $\frac{\kappa D(u)}{\|D(u)\|}$ en prenant $\epsilon > 0$ et en le réécrivant sous la forme $\frac{\kappa D(u)}{\sqrt{\|D(u)\|^2 + \epsilon^2}}$.

Ainsi à n fixé on résoud le problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\sigma(u^{n+1}, u^n)) + \nabla p^{n+1} = f, \\ \operatorname{div} u^{n+1} = 0, \\ u^{n+1} = \bar{u} \text{ sur } \Gamma_c, \\ (\sigma(u^{n+1}, u^n) - p^{n+1} \operatorname{Id})N = g \text{ sur } \Gamma_l, \end{cases}$$

$$\text{avec } \sigma(u^{n+1}, u^n) = \left(2\eta + \frac{\kappa}{\sqrt{\|D(u^n)\|^2 + \epsilon^2}} \right) D(u^{n+1}).$$

Formulation variationnelle à κ fixé (FV) :

on suppose γ et σ connus, trouver $(u^{n+1}, p^{n+1}) \in V_h^2 \times R_h$ tels que

$$\int_{\Omega} \left(2\eta + \frac{\kappa^n}{\sqrt{\|D(\mathbf{u}^n)\|^2 + \epsilon^2}} \right) D(u^{n+1}) : D(v) - \int_{\Omega} p^{n+1} \operatorname{div} v \\ - \int_{\Omega} q \operatorname{div}(u^{n+1}) - \int_{\Gamma_I} g v - \int_{\Omega} \rho f v = 0,$$

pour tout $(v, q) \in V_h^2 \times R_h$.

A $\kappa = \sqrt{2\lambda}[p]_+$:

Lorsque $\kappa = \sqrt{2\lambda}[p]_+$, de même on fixe $\kappa^n = \sqrt{2\lambda}[p^n]_+$ avec p^n donné, on calcule (u^{n+1}, p^{n+1}) puis on update κ^{n+1} via p^{n+1} etc.

1 Modèle

2 Cas stationnaire

- Présentation des méthodes
- Comparaison des méthodes numériques

3 Cas évolutif

- Méthode ALE
- Résultats numériques

UZAWA : solution analytique cubique

La solution analytique considérée est $u = \begin{pmatrix} xy^2 \\ -\frac{y^3}{3} \end{pmatrix}$ si $y \geq 0$ et $u \equiv 0$

sinon, d'où $D(u) = \begin{pmatrix} y^2 & xy \\ xy & -y^2 \end{pmatrix}$ si $y \geq 0$ et $D(u)$ est nul sinon.

D'où $\sigma = \left(2\eta + \frac{\kappa}{\sqrt{2}y\sqrt{x^2 + y^2}} \right) y \begin{pmatrix} y & x \\ x & -y \end{pmatrix}$ si $y \geq 0$ et $\frac{\kappa}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sinon.

Avec $p = \eta(x^2 - y^2)$ on obtient $f = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}\kappa xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{-\kappa(y^2 - x^2)}{\sqrt{2}(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix}$ si $y \geq 0$ et

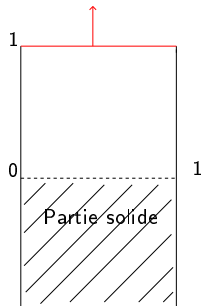
$f = \begin{pmatrix} 2\eta x \\ -2\eta y \end{pmatrix}$ sinon.

Cadre :

On se place dans un domaine rectangle, la transition se trouve en $\{z = 0\}$ et la partie solide correspond donc à la partie basse du domaine.

Ici les régularités $u \in (H^{\frac{3}{2}})^2$, $p \in C^2$ et $\sigma \in (H^{\frac{3}{2}})^{2,2}$ permettent d'espérer des taux optimaux suivants :

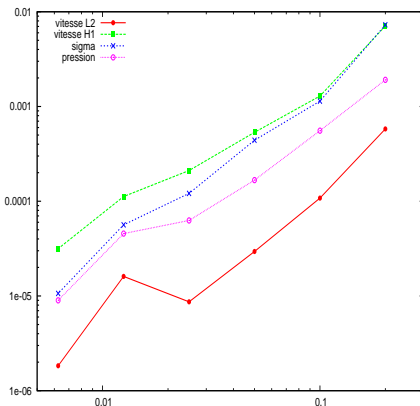
vitesse L2	vitesse H1	sigma	pression
$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	2



Convergence sur un maillage uniforme

Cas $\kappa = 10^{-3}$:

Résultats de convergence pour l'algorithme d'UZAWA avec $r = 10$.



Taux de convergence :

($h = 0.1, \dots, h = 0.00625$)

- vitesse L2 : 1.47
- vitesse H1 : 1.34
- sigma : 1.69
- pression : 1.49

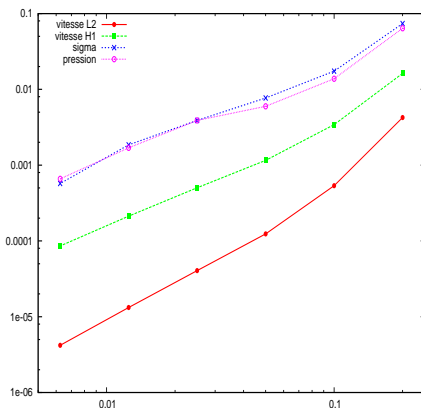
Taux de convergence :

($h = 0.2, \dots, h = 0.0125$)

- vitesse L2 : 1.3
- vitesse H1 : 1.5
- sigma : 1.75
- pression : 1.35

Cas $\kappa = 1$:

Résultats de convergence pour l'algorithme d'UZAWA avec $r = 2$:



Taux de convergence :

($h = 0.1, \dots, h = 0.00625$)

- vitesse L2 : 1.79
- vitesse H1 : 1.37
- sigma : 1.24
- pression : 1.11

Taux de convergence :

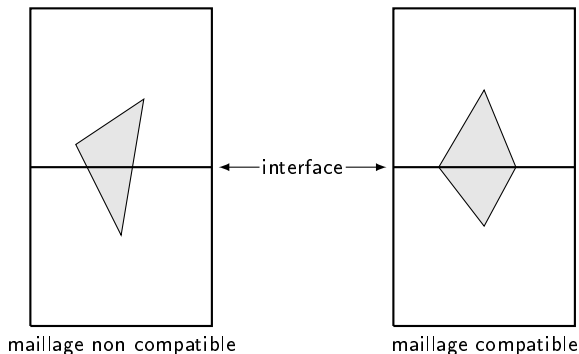
($h = 0.2, \dots, h = 0.0125$)

- vitesse L2 : 2.1
- vitesse H1 : 1.56
- sigma : 1.27
- pression : 1.29

Remarque : Lorsque κ augmente, le nombre d'itération d'UZAWA passe de 150 à une valeur en $O(10^3)$.

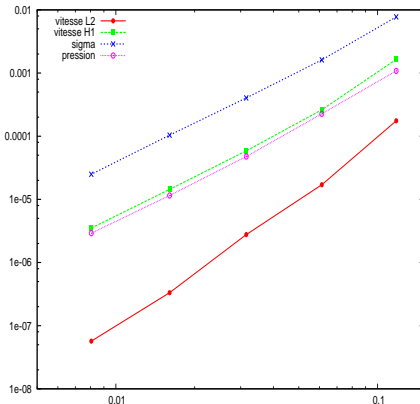
Convergence sur un maillage compatible avec l'interface

Dans cette partie on rajoute un bord à l'interface afin de rendre le maillage compatible avec celle-ci, ceci permet de gagner en précision puisque la transition fluide-solide est mieux captée.



Cas $\kappa = 10^{-3}$:

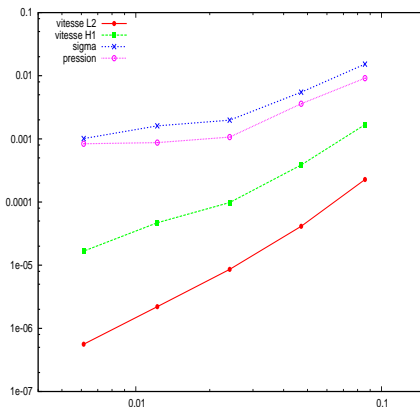
- on obtient ainsi les taux de convergence optimaux,
- en raffinant l'interface le nombre d'itération d'UZAWA diminue mais les résultats sont comparables.



Taux de convergence :

- vitesse L2 : 2.9
- vitesse H1 : 2.22
- sigma : 2.07
- pression : 2.13

Cas $\kappa = 1$:



Taux de convergence :

- vitesse L2 : 2.16
- vitesse H1 : 1.66
- sigma : 0.98
- pression : 0.86

Remarque : Lorsque κ augmente on a de plus en plus de mal à converger.

Régularisation : solution analytique affine

Dans le cas affine, on choisit $u = \begin{pmatrix} \alpha x + \beta y \\ -\beta x - \alpha y \end{pmatrix}$, on a donc

$$D(u) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} \text{ et } \sigma = \left(2\eta\alpha + \frac{\kappa}{\sqrt{2}} \text{sgn}\alpha \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Par la condition $(\sigma - p\text{Id})N = 0$ sur Γ_s on obtient, avec $N = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$p = -\alpha \left(2\eta + \frac{\kappa}{\sqrt{2\alpha^2 + \epsilon^2}} \right) \text{ sur } \Gamma_s \text{ et on choisit donc}$$

$$p = -\alpha \left(2\eta + \frac{\kappa}{\sqrt{2\alpha^2 + \epsilon^2}} \right) - \gamma(y - 1).$$

Enfin, l'équation constitutive nous donne $f = -\gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Résultats numériques

Convergence à $\epsilon = 10^{-3}$, $\eta = 1$ et $\kappa = 1$:

$\epsilon = 10^{-3}$	nb points	err vitesse L2	err vitesse H1	err pression	nbit
h=0.1	141	7.08e-16	9.36e-15	1.8e-14	3
h=0.05	517	1.59e-15	2.28e-14	3.72e-14	3
h=0.025	1978	2.81e-15	4.74e-14	6.11e-14	3
h=0.0125	7662	8.47e-15	1.09e-13	1.46e-13	3
h=0.00625	30534	1.59e-14	2.41e-13	2.67e-13	3

Avec une solution affine la convergence est optimale malgré la valeur de κ ce qui permet de valider la méthode et de passer au test cubique pour comparer les méthodes.

Cas κ fixé

Solution analytique :

On prend $u = \begin{pmatrix} xy^2 \\ -\frac{y^3}{3} \end{pmatrix}$ si $y \geq 0$ et $u = (0)$ sinon et $p = x(1-y)(2-y)$,

d'où $D(u) = \begin{pmatrix} y^2 & xy \\ xy & -y^2 \end{pmatrix}$ si $y \geq 0$ et $D(u)$ est nul sinon.

On en déduit que $\sigma = \left(2\eta + \frac{\kappa}{\sqrt{2y^2(x^2 + y^2)}} \right) \begin{pmatrix} y^2 & xy \\ xy & -y^2 \end{pmatrix}$ si $y \geq 0$ et $\sigma = (0)$ sinon.

Enfin, $f = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}\kappa xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} - 2\eta x + (1-y)(2-y) \\ \frac{\kappa(x^2 - y^2)}{\sqrt{2}(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + 2\eta y + x(2y - 3) \end{pmatrix}$ si $y \geq 0$ et

$f = \begin{pmatrix} (1-y)(2-y) \\ x(2y - 3) \end{pmatrix}$ sinon.

κ fixé, $\eta = 10^{-1}$ et $h = 0.025$:

● $\kappa = 10^{-1}$

ϵ	10^3	10^{-2}	10^{-5}	UZAWA (r=2)
nb it	2	39	127	209
$\ u_{h,\epsilon} - u\ _{L^2}$	3.26e-02	1.37e-03	2.14e-05	3.60e-05
$\ \chi_f(p_{h,\epsilon} - p)\ _{L^2}$	4.74e-02	3.94e-04	1.08e-04	1.09e-04

● $\kappa = 1$

ϵ	10^3	10^{-2}	10^{-5}	UZAWA (r=2)
nb it	2	85	180	167
$\ u_{h,\epsilon} - u\ _{L^2}$	3.25e-01	1.60e-03	1.85e-05	3.66e-05
$\ \chi_f(p_{h,\epsilon} - p)\ _{L^2}$	4.43e-01	1.28e-03	1.08e-04	1.42e-04

Cas $\kappa = \sqrt{2}\lambda[p]_+$

Solution analytique :

Lorsque $\kappa = \sqrt{2}\lambda[p]_+$ le terme source a des termes supplémentaires en λ :

$$f = \left(\begin{array}{l} -\frac{\lambda(y(1-y)(2-y) + x^2(2y-3))}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\sqrt{2}\kappa xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - 2\eta x + (1-y)(2-y) \\ \frac{\lambda x(y^2-2)}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\kappa(x^2-y^2)}{\sqrt{2}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + 2\eta y + x(2y-3) \end{array} \right)$$

si $y \geq 0$ et $f = \begin{pmatrix} (1-y)(2-y) \\ x(2y-3) \end{pmatrix}$ sinon.

$\kappa = \sqrt{2}\lambda[p]_+$, $\eta = 10^{-1}$ et $h = 0.025$:

• $\lambda = 10^{-1}$

ϵ	10^3	10^{-2}	10^{-5}	UZAWA (r=2)
nb it	3	40	67	274 (9 étapes)
$\ u_{h,\epsilon} - u\ _{L^2}$	5.16e-02	1.38e-03	3.60e-05	2.86e-05
$\ \chi_f(p_{h,\epsilon} - p)\ _{L^2}$	9.35e-02	4.05e-04	1.08e-04	1.13e-04

• $\lambda = 1$

ϵ	10^3	1	10^{-2}	UZAWA (r=2)
nb it	7	623	∞	675 (3 étapes)
$\ u_{h,\epsilon} - u\ _{L^2}$	5.09e-01	1.10e-01	7.00e-02	6.66e-02
$\ \chi_f(p_{h,\epsilon} - p)\ _{L^2}$	3.38e-01	3.94e-01	9.00e-01	7.97e-01

Comparaison

Régularisation :

- + l'approche par régularisation permet de gagner en nombre d'itérations,
- + on peut atteindre une précision aussi bonne, voire meilleure qu'UZAWA en prenant ϵ très petit,
- – lorsque λ vaut 1 l'algorithme ne converge pas.

Uzawa :

- + UZAWA permet d'obtenir une bonne précision,
- + l'algorithme converge lorsque $\lambda = 1$,
- – long en terme de temps de calcul.

1 Modèle

2 Cas stationnaire

- Présentation des méthodes
- Comparaison des méthodes numériques

3 Cas évolutif

- Méthode ALE
- Résultats numériques

Problème

On veut résoudre le problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho (\partial_t u + (u \cdot \nabla) u) - \operatorname{div} \sigma + \nabla p = \rho f, \\ \operatorname{div} u = 0, \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma_b, \\ u = \bar{u} \text{ sur } \Gamma_s, \\ (\sigma - p \operatorname{Id}) N = 0 \text{ sur } \Gamma_l. \end{array} \right. \quad (2)$$

On considère le domaine rectangle de hauteur $h = 1$, $\Omega = [0, 2] \times [0, 1]$ incliné, d'un angle $\theta = -\frac{\pi}{8}$.

On choisit $\lambda = |\tan \theta| + 0.05$, de sorte que $\lambda > |\tan \theta|$ et on fixe $\eta = 10^{-1}$. Avec ces paramètres la valeur de $g(\sin \theta + \lambda \cos \theta)$ est 0.45 donc la transition se fait dans la partie basse du domaine.

Solution analytique :

La solution analytique considérée est $u = \begin{pmatrix} [z - g(\sin \theta + \lambda \cos \theta)t]_+ \\ 0 \end{pmatrix}$,

$p = g \cos \theta (h - z)$, avec $g = 9.81 m.s^{-1}$ et est valable pour $\eta = 0$.

On note $\alpha = g(\sin \theta + \lambda \cos \theta)$, avec $\kappa = \sqrt{2}\lambda g \cos \theta (h - z)$ on obtient

$$\begin{cases} \sigma = \lambda g \cos \theta (h - z) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ si } z > \alpha t, \\ ||\sigma|| \leq \kappa \text{ si } z \leq \alpha t. \end{cases}$$

On a donc $f = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\lambda g \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -g \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g \sin \theta \\ -g \cos \theta \end{pmatrix}$ si $z > \alpha t$ et $f = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \cos \theta \end{pmatrix}$ sinon.

Méthode ALE

La méthode ALE est utilisée pour des problèmes d'évolution et permet de résoudre le problème (2) sur un domaine mobile de manière précise puisque c'est un couplage de l'approche lagrangienne et eulérienne. Elle est bien adaptée aux problèmes de frontières mobiles et de surfaces libres.

L'algorithme est le suivant :

- calcul de (u^{n+1}, p^{n+1}) en fonction de u^n et u_f^n la vitesse du domaine au temps t^n ,
- calcul de la vitesse du domaine u_f^{n+1} ,
- calcul de la position du domaine w^{n+1} ,
- mouvement du maillage Ω^n ,
- projection des valeurs sur le nouveau maillage Ω^{n+1} ;

Formulation variationnelle par régularisation (FV) _{κ} ⁿ⁺¹ :

- trouver $(u^{n+1}, p^{n+1}) \in V_h^2 \times R_h$ tels que

$$\int_{\Omega^{n+1}} \rho \left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} v + v \cdot \nabla u^n (u^n - u_f^n) \right) + \left(2\eta + \frac{\kappa}{\sqrt{\|D(u)\|^2 + \epsilon^2}} \right) D(u) : D(v) \\ - \int_{\Omega^{n+1}} p^{n+1} \operatorname{div} v - \int_{\Omega^{n+1}} q \operatorname{div}(u^{n+1}) - \int_{\Omega^{n+1}} \rho f v = 0$$

pour tout $(v, q) \in V_h^2 \times R_h$.

Ce qui correspond à notre problème d'évolution de départ.

Vitesse du domaine :

- trouver $(u_f^{n+1}, p) \in V_h^2 \times V_h$ tels que (u_f^{n+1} = vitesse du domaine)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^{n+1}} D(u_f^{n+1}) : D(v_f) + \int_{\Omega^{n+1}} \alpha p q + \int_{\Gamma_b^{n+1} \cup \Gamma_l^{n+1}} q(u_f^{n+1} - u^{n+1}) \cdot N \\ + \int_{\Gamma_s^{n+1}} q u_f^{n+1} \cdot N + \int_{\Gamma^{n+1}} p v_f \cdot N = 0, \end{aligned}$$

pour tout $(v_f, q) \in V_h^2 \times V_h$, avec $\alpha \ll 1$.

Ce qui correspond au problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(D(u_f^{n+1})) = 0, \\ u_f^{n+1} \cdot N = u^{n+1} \cdot N \text{ sur } \Gamma_b^{n+1} \cup \Gamma_l^{n+1}, \\ u_f^{n+1} \cdot N = 0 \text{ sur } \Gamma_s^{n+1}, \\ (D(u_f^{n+1})N)_T = 0 \text{ sur } \partial\Omega^{n+1}. \end{cases}$$

Position du domaine :

- trouver $w^{n+1} \in M_h^2$ tels que (w^{n+1} = position du domaine)

$$\int_{\Omega^{n+1}} D(w^{n+1}) : D(v_f) = 0,$$

pour tout $v_f \in V_h^2$, avec $M_h = \{v \in V_h \mid v|_{\Gamma^{n+1}} = \mathbb{P}(\cdot + \Delta t u_f^{n+1})\}$ où \mathbb{P} est la projection sur le bord du domaine et u_f^{n+1} est la vitesse du domaine trouvée précédemment.

Ce qui correspond à résoudre

$$\begin{cases} \Delta w^{n+1} = 0, \\ w|_{\Gamma^{n+1}}^{n+1} = \mathbb{P}(\cdot + \Delta t u_f^{n+1}). \end{cases}$$

1 Modèle

2 Cas stationnaire

- Présentation des méthodes
- Comparaison des méthodes numériques

3 Cas évolutif

- Méthode ALE
- Résultats numériques

Résultats numériques