

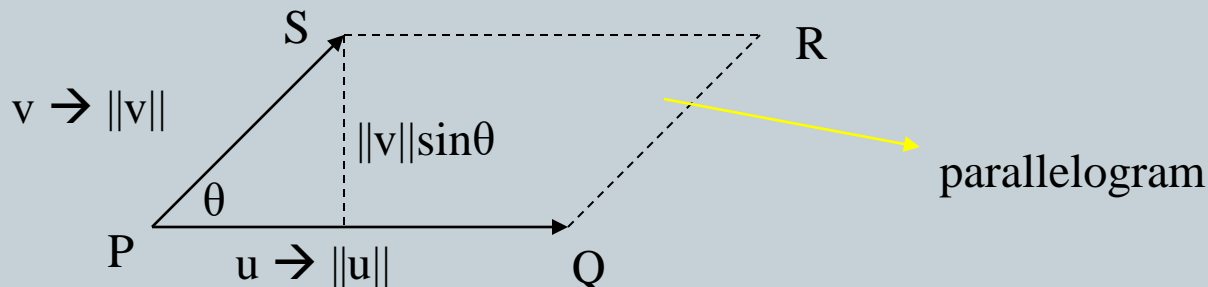
# Lanjutan Ruang Vektor



# Parallelogram



- Jika  $u$  dan  $v$  vektor dengan titik asal sama maka  $\|u \times v\|$  merupakan luas daerah parallelogram yang ditentukan oleh  $u$  dan  $v$ .



- Luas jajaran genjang PQRS  
 $= \text{alas} \times \text{tinggi} = \|u\| \|v\| \sin \theta = \|u \times v\|$
- Luas segitiga PQS  $= \frac{1}{2}$  luas jajaran genjang  $= \frac{1}{2} \|u \times v\|$



- Harga mutlak dari determinan  $\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}$  adalah

sama dengan luas parallelogram di  $R^2$  yang ditentukan oleh vektor  $u=(u_1, u_2)$  dan  $v=(v_1, v_2)$

- Harga mutlak dari determinan  $\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$

adalah sama dengan volume parallelogram di  $R^3$  yang ditentukan oleh vektor  $u=(u_1, u_2, u_3)$ ,  $v=(v_1, v_2, v_3)$ , dan  $w=(w_1, w_2, w_3)$

- Contoh soal 2:

Diberikan sebuah segitiga ABC dengan titik sudut A ( 2, -3, 1 ), B ( -1,4,-1 ) dan C (2,0,3 ). Hitung luas segitiga tersebut.

- Jawab :

Misal  $u$  dan  $v$  berturut-turut merupakan vektor posisi dari ruas garis AB dan AC.

$$\text{Maka } \bar{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ dan } \bar{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -3 & 7 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 20\bar{i} + 6\bar{j} - 9\bar{k}$$

$$\text{Luas segitiga ABC} = \frac{1}{2} \|\bar{u} \times \bar{v}\| = \frac{1}{2} \sqrt{517}$$

# Vektor Ortogonal

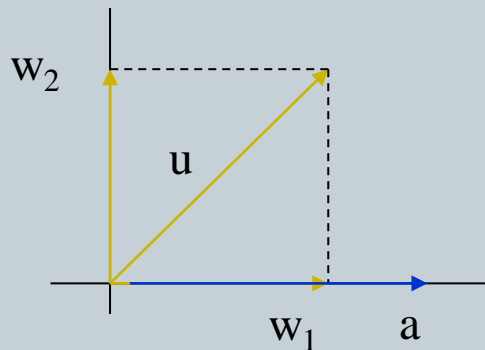


- Misal  $u, v$  vektor di  $R^2/R^3/R^n$ , maka  $u$  dikatakan tegak lurus  $v$  atau  $u$  disebut vektor ortogonal, jika  $u \cdot v = 0$

# Proyeksi Ortogonal



- Diberikan vektor  $a \neq 0$  dan vektor  $u \neq 0$



$$w_1 + w_2 = u$$

$$w_1 = u - w_2$$

- Vektor  $w_1$  disebut proyeksi ortogonal vektor  $u$  pada vektor  $a$  ( $w_1 = \text{Proj}_a u$ )
- Vektor  $w_2$  disebut komponen vektor  $u$  yang tegak lurus vektor  $a$  ( $w_2 = u - \text{Proj}_a u$ )



- Jika  $a$  vektor di  $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}^3$  dan  $a \neq 0$  maka

$$w_1 = \text{Proj}_a u = \frac{u \cdot a}{\|a\|^2} \cdot a$$

$$w_2 = u - \text{Proj}_a u = u - \frac{u \cdot a}{\|a\|^2} \cdot a$$

• Ex:

$$u=(2,-1,3) \text{ dan } a=(4,-1,2)$$



Tentukan  $\text{Proj}_a u$  dan  $\|\text{Proj}_a u\|$  !

Penyelesaian:

$$u \cdot a = (2)(4) + (-1)(-1) + (3)(2) = 15$$

$$\|a\|^2 = 16 + 1 + 4 = 21$$

$$\begin{aligned} w_1 &= \text{Proj}_a u = 15/21 \cdot (4, -1, 2) \\ &= \left( \frac{60}{21}, -\frac{15}{21}, \frac{30}{21} \right) = \left( \frac{20}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{10}{7} \right) \end{aligned}$$

$$\|w_1\| = \sqrt{\frac{400}{49} + \frac{25}{49} + \frac{100}{49}} = \sqrt{\frac{525}{49}} = \sqrt{\frac{75}{7}} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{5}{7}\sqrt{21}$$





# SCALAR TRIPLE PRODUCT

# Scalar Triple Product

Scalar triple product dari tiga vektor

$$a = [a_1, a_2, a_3], \quad b = [b_1, b_2, b_3], \quad c = [c_1, c_2, c_3]$$

ditulis  $(a \ b \ c)$  didefinisikan sebagai

$$(a \ b \ c) = a \bullet (b \times c) \quad \text{andaikan } b \times c = v = [v_1, v_2, v_3]$$

$$a \bullet (b \times c) = a \bullet v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

Ini mrpk ekspansi determinan orde 3 mnrtr brs pertama, shg

$$(a \ b \ c) = a \bullet (b \times c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

# Sifat Hasil Kali Triple Scalar



- >  $(a \ b \ c) = - (b \ a \ c) = (b \ c \ a) = - (c \ b \ a) = (c \ a \ b) = - (a \ c \ b) \Rightarrow$  Penukaran Tempat
- >  $a \cdot (b \times c) = (a \times b) \cdot c \Rightarrow$  Komutatif
- >  $\alpha(a \ b \ c) = (\alpha a \ b \ c) = (a \ \alpha b \ c) = (a \ b \ \alpha c) \Rightarrow$  Tidak distributif terhadap perkalian skalar.
- >  $a \cdot (b \times c) = |a| |b \times c| \cos \alpha. \Rightarrow$  isi dari paralelepipedium