AULA 12 – INTERPOLAÇÃO (PARTE 2)

Prof. Gustavo Resque
gustavoresqueufpa@gmail.com

LAB
VIS

FORMA DE NEWTON

- Na forma de Newton o polinômio $p_n(x)$ que interpola $f(x)$ em $x_0, x_1, \dots, x_n$, $(n+1)$ pontos distintos, é:

$$p_n(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + d_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

- Onde d são diferenças divididas de ordem k entre os pontos $\left(x_j, f\left(x_j\right)\right), \forall\ j = 0,1, \dots, k$.

- E que este polinômio $p_n(x)$ é construído por etapas

FORMA DE NEWTON

- Operador das Diferenças Divididas

$$
\begin{cases}
f[x_0] = f(x_0) & \text{(Ordem Zero)} \\[2ex]
f[x_0, x_1] = \dfrac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} & \text{(Ordem 1)} \\[2ex]
f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} & \text{(Ordem 2)} \\[2ex]
f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \dfrac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} & \text{(Ordem 3)} \\[2ex]
\vdots \qquad\qquad \vdots & \vdots \\[2ex]
f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n] = \dfrac{f[x_1, x_2, \ldots, x_n] - f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} & \text{(Ordem n)}
\end{cases}
$$

FORMA DE NEWTON

- Operador das Diferenças Divididas

  - Dizemos que $f[x_0, x_1, \dots, x_k]$ é a diferença dividida de ordem k sobre os $k+1$ pontos $x_0, x_1, \dots, x_k$.

  - Dados os valores conhecidos de f(x) podemos construir a seguinte tabela (próximo slide)

FORMA DE NEWTON

- Operador das Diferenças Divididas

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	...	Ordem n
x_0	$f[x_0]$					
		$f[x_0, x_1]$				
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$			
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$		
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$		.	
		$f[x_2, x_3]$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	.	
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4]$	.	.	$f[x_0, x_1, x_2, ..., x_n]$
		$f[x_3, x_4]$	.	.	.	
x_4	$f[x_4]$	.	.	$f[x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$		
.	.	.	$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$			
.	.					
.	.	$f[x_{n-1}, x_n]$				
x_n	$f[x_n]$					

FORMA DE NEWTON

- Operador das Diferenças Divididas – Exemplo 4

Seja f(x) tabelada abaixo

x	–1	0	1	2	3
f(x)	1	1	0	–1	–2

Sua tabela de diferenças divididas é:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	Ordem 4
–1	1				
		0			
0	1		$-\frac{1}{2}$		
		–1		$\frac{1}{6}$	
1	0		0		$-\frac{1}{24}$
		–1		0	
2	–1		0		
		–1			
3	–2				

FORMA DE NEWTON

- Operador das Diferenças Divididas – Exemplo 4

Onde

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{1 - 1}{1} = 0$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 1}{1 - 0} = -1$$

$$\vdots$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{-1 - 0}{1 + 1} = \frac{-1}{2}$$

FORMA DE NEWTON

- Operador das Diferenças Divididas – Exemplo 4

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1} = \frac{-1 + 1}{2 - 0} = 0$$

$$\vdots$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} = \frac{0 + 1/2}{2 + 1} = \frac{1}{6}$$

$$\vdots$$

FORMA DE NEWTON

- Operador das Diferenças Divididas
  - Esse operador tem a propriedade de simetria nos argumentos:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = f\left[x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_k}\right]$$

  - Onde $j_0, j_1, \dots, j_n$ é qualquer permutação de $0,1, \dots, k$

  - Por exemplo:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f[x_0] - f[x_1]}{x_0 - x_1} = f[x_1, x_0].$$

Para k = 2 teremos

$$f[x_0, x_1, x_2] = f[x_0, x_2, x_1] = f[x_1, x_0, x_2] = f[x_1, x_2, x_0] = f[x_2, x_0, x_1] = f[x_2, x_1, x_0].$$

FORMA DE NEWTON

- Seja
  - $f(x)$ contínua e com tantas derivadas contínuas quantas necessárias num intervalo $[a, b]$
  - $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, $(n + 1)$ pontos

- Podemos construir o polinômio $p_n(x)$ que interpola $f(x)$ em $x_0, x_1, \ldots, x_n$

  - Iniciamos a construção em $p_0(x)$ que interpola $f(x)$ em x_0
  - Então construiremos $p_1(x)$ que interpola $f(x)$ em x_0 e x_1
  - E assim sucessivamente até $p_n(x)$ em $x_0, \mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n}$

FORMA DE NEWTON

- Seja $p_0(x)$ o polinômio de grau 0 que interpola $f(x)$ em x_0. Então:

$$p_0(x) = f(x_0) = f[x_0]$$

- Temos que para todo $x \in [a, b], x \neq x_0$

$$f[x_0, x] = \frac{f[x] - f[x_0]}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x - x_0) f[x_0, x] = f(x) - f(x_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{p_0(x)} + \underbrace{(x - x_0)\ f[x_0, x]}_{E_0(x)}$$

$$\Rightarrow E_0(x) = f(x) - p_0(x) = (x - x_0) f[x_0, x].$$

FORMA DE NEWTON

- Agora, para construir $p_1(x)$ que interpola $f(x)$ em x_0 e x_1 temos que

$$f[x_0, x_1, x] = f[x_1, x_0, x] = \frac{f[x_0, x] - f[x_1, x_0]}{x - x_1} =$$

$$= \frac{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f[x_1, x_0]}{(x - x_1)} = \frac{f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f[x_1, x_0]}{(x - x_1)\ (x - x_0)}$$

$$\Rightarrow f[x_0, x_1, x] = \frac{f(x) - f(x_0) - (x - x_0)\ f[x_1, x_0]}{(x - x_0)\ (x - x_1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \underbrace{f(x_0) + (x - x_0)\ f[x_1, x_0]}_{p_1(x)} + \underbrace{(x - x_0)\ (x - x_1)\ f[x_0, x_1, x]}_{E_1(x)}.$$

FORMA DE NEWTON

- Verificação:

$p_1(x)$ interpola $f(x)$ em x_0 e em x_1?

$p_1(x_0) = f(x_0)$

$$p_1(x_1) = f(x_0) + (x_1 - x_0)\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f(x_1).$$

FORMA DE NEWTON

- Agora, para construir $p_2(x)$ que interpola $f(x)$ em x_0, x_1 e x_2 temos que

$$f[x_0, x_1, x_2, x] = f[x_2, x_1, x_0, x] = \frac{f[x_1, x_0, x] - f[x_2, x_1, x_0]}{x - x_2} =$$

$$= \frac{\dfrac{f[x_0, x] - f[x_1, x_0]}{x - x_1} - f[x_2, x_1, x_0]}{x - x_2} =$$

$$= \frac{\dfrac{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} - f[x_1, x_0]}{(x - x_1)} - f[x_2, x_1, x_0]}{(x - x_2)} =$$

FORMA DE NEWTON

- Agora, para construir $p_2(x)$ que interpola $f(x)$ em x_0, x_1 e x_2 temos que (continuação)

$$= \frac{f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f[x_1, x_0] - (x - x_0)(x - x_1)f[x_2, x_1, x_0]}{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] +$$
$$+ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f[x_0, x_1, x_2, x].$$

Então,

$$p_2(x) = \underbrace{f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1]}_{p_1(x)} + \underbrace{(x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2]}_{q_2(x)} \text{ e}$$

$$E_2(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) f[x_0, x_1, x_2, x].$$

FORMA DE NEWTON

- Observamos que, assim como para $p_1(x)$ e $p_2(x)$,

$$p_k(x) = p_{k-1}(x) + q_k(x)$$

- Onde $q_k(x)$ é um polinômio de grau k
- Aplicando sucessivamente o mesmo raciocínio até $x_0, x_1, \dots, x_n$ teremos a forma de Newton

$$\begin{aligned} p_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0,x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \dots \\ + \dots + (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})f[x_0, x_1, \dots, x_n] \end{aligned}$$

FORMA DE NEWTON

- Exemplo 5

Usando a forma de Newton, o polinômio $p_2(x)$, que interpola $f(x)$ nos pontos dados abaixo

x	–1	0	2
f(x)	4	1	–1

, é:

$$p_2(x) = f(x_0) + (x - x_0)\, f[x_0, x_1] + (x - x_0)\,(x - x_1)\, f[x_0, x_1, x_2].$$

FORMA DE NEWTON

- Exemplo 5

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2
−1	4		
		−3	
0	1		$\frac{2}{3}$
		−1	
2	−1		

$$p_2(x) = 4 + (x + 1)(-3) + (x + 1)(x - 0)\,\frac{2}{3}.$$

FORMA DE NEWTON

- Exemplo 5
  - Agrupando os termos semelhantes temos

$$p_2(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{3}x + 1$$

  - Que é a mesma expressão obtida pelos métodos anteriores

- É conveniente deixar o polinômio na forma de Newton, sem agrupar os termos semelhantes, pois, quando calcularmos o valor numérico evitaremos o cálculo de potências.

- O número de operações pode ser ainda reduzido se utilizarmos a forma de parênteses encaixados

FORMA DE NEWTON

- Forma de parênteses encaixados
  - Dado

$$p_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)\, f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)\, f[x_0, x_1, x_2] + \\ + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\, f[x_0, x_1, x_2, x_3] + \dots + \\ + (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})\, f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n]$$

  - Temos

$$p_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)\, \{f[x_0, x_1] + (x - x_1)\, \{f[x_0, x_1, x_2] + \\ + (x - x_2)\, \{f[x_0, x_1, x_2, x_3] + \dots + (x - x_{n-1})\, f[x_0, x_1, \dots, x_n]\dots\}\}\}.$$