AULA 11 – INTERPOLAÇÃO

Prof. Gustavo Resque
gustavoresqueufpa@gmail.com

INTRODUÇÃO

- A interpolação consiste em encontrar uma função $g(x)$ suficientemente próxima de uma outra função $f(x)$
  - Sendo que a função $g(x)$ pertence a uma classe de funções definidas a priori e satisfaz algumas propriedades
- Existem várias motivações para o uso da interpolação, citemos 2:
  - Quando se conhece somente alguns pontos tabelados da $f(x)$ e se deseja calcular outros pontos não tabelados
  - Quando é computacionalmente caro calcular usando a $f(x)$ ou difícil de resolver equações que derivam dela, como derivadas e integrais

INTRODUÇÃO

- Exemplo: A tabela a seguir relaciona calor específico e temperatura da água

temperatura (ºC)	20	25	30	35	40
calor específico	0.99907	0.99852	0.99826	0.99818	0.99828

temperatura (ºC)	45	50
calor específico	0.99849	0.99878

- Dado isso, suponhamos que queiramos calcular o calor específico da água a 32,5°C ou a temperatura da água para 0.99837 de calor específico

INTERPOLAÇÃO

- Consideremos $(n+1)$ pontos distintos $x_0, x_1, \dots, x_n$, chamados nós da interpolação e os valores de $f(x)$ para esses pontos $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$

- A forma de interpolação que será vista a seguir consiste em se obter uma determinada função $g(x)$ tal que:

$$\begin{cases} g(x_0) = f(x_0) \\ g(x_1) = f(x_1) \\ \vdots \\ g(x_n) = f(x_n) \end{cases}$$

INTERPOLAÇÃO

- Graficamente
  - Neste caso, consideramos que $g(x)$ pertence a classe das funções polinomiais

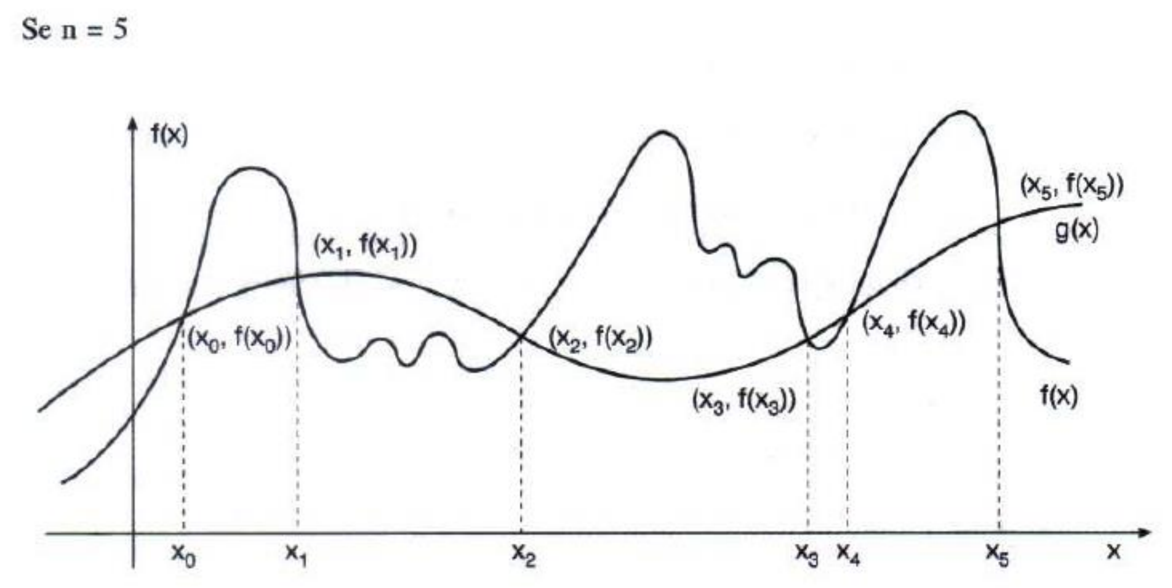

Figura 5.1

INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL

- Dados os pontos $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))$ queremos aproximar $f(x)$ por um polinômio de grau n, $p_n(x)$, tal que:

$$f(x_k) = p_n(x_k)\ \forall\ k = 0,1,2,\dots,n$$

- Representaremos $p_n(x)$ por:

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

- Portanto, obter $p_n(x)$ significar conhecer os coeficientes $a_0, a_1, \dots, a_n$
  - Lembrando que já conhecemos alguns pontos de $f(x)$

INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL

- Da condição $p_n(x_k) = f(x_k), \forall\ k = 0,1,2, \dots, n$ montamos o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n = f(x_1) \\ \quad \vdots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n = f(x_n) \end{cases}$$

- Com $n + 1$ equações e $n + 1$ variáveis: $a_0, a_1, \dots, a_n$

INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL

- A matriz A de coeficientes é:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$

- Essa matriz é conhecida como matriz de Vandermonde.
  - De acordo com suas propriedades já conhecidas, desde que $x_0, x_1, \dots, x_n$, sejam distintos, temos que $\det(a) \neq 0$
  - Portanto, o sistema linear sempre admite solução única.

INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL

- Estudaremos 3 formas de se obter $p_n(x)$:
  - Resolução do sistema linear visto
  - Método de Lagrange
  - Método de Newton

INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL

- Resolução do sistema linear

Exemplo 1

Vamos encontrar o polinômio de grau ≤ 2 que interpola os pontos da tabela:

x	-1	0	2
f(x)	4	1	-1

Temos que $p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$;

$$p_2(x_0) = f(x_0) \Leftrightarrow a_0 - a_1 + a_2 = 4$$
$$p_2(x_1) = f(x_1) \Leftrightarrow a_0 = 1$$
$$p_2(x_2) = f(x_2) \Leftrightarrow a_0 + 2a_1 + 4a_2 = -1.$$

- Resolvendo o sistema linear obtemos:
  - $a_0 = 1,$
  - $a_1 = -\frac{7}{3},$
  - $a_2 = \frac{2}{3},$

INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL

- No Exemplo 1 o polinômio fica assim: $p_2(x) = 1 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}x^2$

- Embora a resolução tenha sido simples nesse caso, isso pode não ocorrer sempre, uma vez que a matriz de Vandermonde pode gerar situações de imprecisão para certos valores:

  - Exemplo: muitos pontos e valores baixos de x

  - Ou seja, n grande e x pequeno gera a situação em que x^n pode ser tão próximo de 0 que degenere a solução dependendo da capacidade da mantissa.

FORMA DE LAGRANGE

- Sejam $x_0, x_1, \dots, x_n$ e $y_i = f(x_i), \forall\ i = 0,1, \dots, n$

- Seja $p_n(x)$ o polinômio de grau n que interpola f em $x_0, x_1, \dots, x_n$.
  - Podemos representar $p_n(x)$ da seguinte forma

$$p_n(x_i) = y_0 L_0(x_i) + y_1 L_1(x_i) + \cdots + y_n L_n(x_i) = y_i$$

  - A forma mais simples de satisfazer essa equação é:

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq i \\ 1 & \text{se } k = i \end{cases}$$ e, para isso, definimos $L_k(x)$ por

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}.$$

FORMA DE LAGRANGE

- Então a forma de Lagrange para o polinômio interpolador é:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x)$$

- Onde

$$L_k(x) = \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} (x - x_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} (x_k - x_j)}$$

FORMA DE LAGRANGE

Exemplo 3

Seja a tabela:

x	-1	0	2
f(x)	4	1	-1

Pela forma de Lagrange, temos que:

$p_2(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x)$, onde:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)\ (x-x_2)}{(x_0-x_1)\ (x_0-x_2)} = \frac{(x-0)\ (x-2)}{(-1-0)\ (-1-2)} = \frac{x^2 - 2x}{3}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)\ (x-x_2)}{(x_1-x_0)\ (x_1-x_2)} = \frac{(x+1)\ (x-2)}{(0+1)\ (0-2)} = \frac{x^2 - x - 2}{-2}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)\ (x-x_1)}{(x_2-x_0)\ (x_2-x_1)} = \frac{(x+1)\ (x-0)}{(2+1)\ (2-0)} = \frac{x^2 + x}{6}.$$

Assim, na forma de Lagrange,

$$p_2(x) = 4\left(\frac{x^2 - 2x}{3}\right) + 1\left(\frac{x^2 - x - 2}{-2}\right) + (-1)\left(\frac{x^2 + x}{6}\right).$$

Agrupando os termos semelhantes, obtemos que $p_2(x) = 1 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}x^2$, que é a mesma expressão obtida no Exemplo 1.