Topologie Algebrique et Théorie de la Persistence – MAT873

Christian Chávez
Université de Sherbrooke

Table des matières

Chapitre 1

Des choses de base

Lecture 2026-01-08

may be check Schenck Chapter 4 Homology I : Simplicial Complexes to Sensor Networks

and chap 3 of Edelsbrunner

1. Motivation

Soit K un espace topologique.

1.1. Les groupes d'homologie. On voudrait compter les trous d'un espace topologique quelconque. Par exemple,

— la ligne réel n'a pas de trous

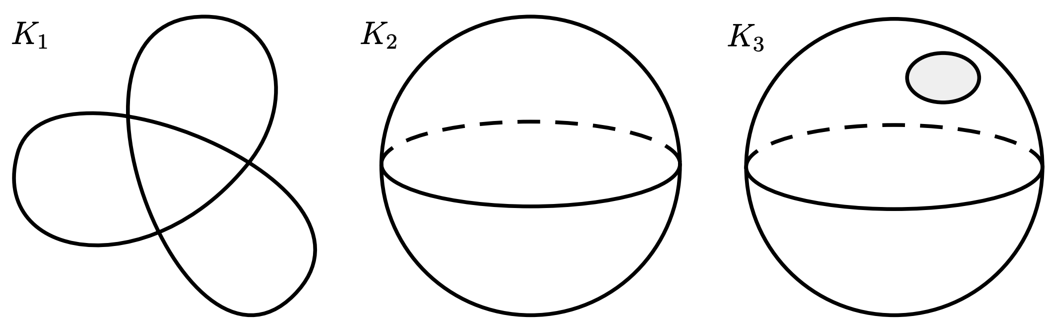
— si on prendre un segment de recte et join the bouts, on obtient un circle. il n'y a pas de trou dans le borde (otherwise it is not a circle). mais il enclose un trou.

—

— la sphère n'a pas de trous dans la surface (otgerwise is not an sphère), mais elle a un trou dedans, mais ce different de le trou que le circle enclose

— la sphère moins un disque a deux trous. pas vraiment.

— la figure du 8 a deux trous.i



K_1 est la ligne seulement, pas l'air qu'elle contient. Sino, on aurait peint l'interiéur.

Pour illustrer, on note par H_0 le nombre de composantes conexes, H_1 le nombre de trous de dimension 1, i.e., trous planars, H_2 le nombre de trous bidimensionals, etc.

Alors dans les figures ci-dessus, on a

$$\begin{array}{lll} H_0(K_1) = \mathbb{Z}, & H_1(K_1) = \mathbb{Z}^4, & H_2(K_1) = 0, \\ H_0(K_2) = \mathbb{Z}, & H_1(K_2) = \mathbb{Z}, & H_2(K_2) = \mathbb{Z}, \\ H_0(K_3) = \mathbb{Z}, & H_1(K_3) = 0, & H_2(K_3) = 0. \end{array}$$

We "encode" the number of conected components in the exponent. Notice that we always have $H_0 \geq 1$.

On va voir deux théorèmes importants :

THÉORÈME 1. Soient K et K' deux espaces topologiques. Si $K \cong K'$, alors $H_p(K) \cong H_p(K')$.

On remarque que le premier $\cong$ est un isomorphisme d'espaces topologiques et le deuxième $\cong$ est un isomorphisme de groupes.

THÉORÈME 2. Tout espace topologique est isomorphe à un complexe simplicial. est-ce que ceci est vrai ?

2. Complexes simpliciaux

BUT : Définir *complexe simplicial.*

DÉFINITION 1. Un n-simplex σ est

DÉFINITION 2. On dit que n points $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^d$ sont **linéairement independants** si

$$\dim \operatorname{span} \{u_1, \ldots, u_n\} = n$$

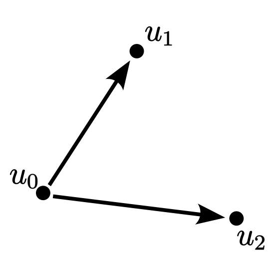
Il n'est pas necesaire d'ajouter la condition $n \leqslant d$ dans la définition.

* Affine Independence is interesting from R^2 onwards, not R^1. Nest pas ? is it worth mentioning sth like this ?

DÉFINITION 3. On dit que $n+1$ points $u_0, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^d$ sont **affinement independants** si les n points $u_0 - u_1, \ldots, u_0 - u_n$ sont linéairement independants

Le point u_0 n'est pas especial. On peut chosir un autre point de notre liste, disons u_j, et verifier que $u_j - u_1, \ldots, u_j - u_n$ est linéairement independant.

Pour illustrer l'idée d'être affinement indépendants, on considere trois points. Si on prend u_0 comme origen, alors on a deux vecteurs, et on checke si son colineaires ou pas. les points aff. ind. si il ne sont pas dans la même ligne. l'origin n'importe pas, il s'agit d'une question geometrique et pas de la position dans le plan.



EXEMPLE 1. (i) Tout ensemble linéairement independant est affinement independant, mais pas au contraire.

(ii) Tout ensemble avec un point est affinement independant. En particulier, l'esemble $\{0\}$, qui est linéairement dépendant, est affinement independant. Ceci suit du fait que $\varnothing$ est linéairement independant. Peut le lecteur montrer que tout ensemble avec deux points differents est affinement independant ?

(iii) Dans $\mathbb{R}^n$, l'ensemble $\{0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ est affinement independant. Ici $\mathbf{e}_i$ denote le i-ème vecteur de la base canonique. Au fait, l'ensemble $\{0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_i\}$ est affinement independant, pour chaque $i \geq 1$.

EXERCICE 2.1. Soit $\{u_0, \dots, u_n\}$ linéairement independant.

(a) Quel point peut-on l'ajouter so that on obtient un esemble affinement independant ?

(b) Montrer que, pour chaque j, l'ensemble $X = \{u_0 - u_j, \dots, u_n - u_j\}$ n'est jamais affinement independant. Cependant, $X \setminus \{0\}$ est toujours affinement independant.

(c) Soit $v_k = u_0 + \cdots + u_k$. Montrer que $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ est affinement independant. Pour quelles valeures de a est $\{av_0, v_1, v_2, \dots, v_k\}$ affinement independant ?

La combinaison convexe de $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^d$ (affinement independants ou pas) est give intuition

$$\operatorname{conv}\{u_0, \dots, u_n\} = \left\{ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i u_i \;\middle|\; \lambda_i \geq 0 \text{ et } \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1 \right\}$$

DÉFINITION 4. Un n-**simplex** est la combinaison convexe de d'un ensemble fini de points affinement independants. La dimension d'un n-simplex $\sigma = \operatorname{conv}\{u_0, \dots, u_n\}$ est $\dim \sigma = n$.

REMARQUE 1. deux simplex peuvent avoir la même dimension même si apartient a differents espaces. E.g. un triangle dans le plan, un triangle dans l'espace, dans R4 il a toujours dimension 3.

define standard simplexes ? there are many segments, triangles and tetahedra, mais il y quelconques que sont distinguished.

EXEMPLE 2. (i) Pour $n = 0$, on a $\sigma = \operatorname{conv}\{u_0\} = \{u_0\}$, un singleton.

(ii) segment

(iii) triangle

(iv) tetraèdre

Soit $\sigma = \operatorname{conv}\{u_0, \dots, u_n\}$ un n-simplex et $S \subset \{u_0, \dots, u_n\}$ une partie non vide. Alors $\tau = \operatorname{conv} S$ est un simplex de dimension $|S| - 1$. On dit que τ est une face de σ. On écrit $\tau \leq \sigma$.

REMARQUE 2. On dit que τ est **propre** si $\tau \neq \sigma$. Dans ce cas là on note $\tau < \sigma$.

EXEMPLE 3. Soient $u_0, \ldots, u_3$ affinement independants. Alors $\sigma = \mathrm{conv}\{u_0, \ldots, u_4\}$ est un tetraèdre et $\sigma = \mathrm{conv}\{u_0, \ldots, u_3\}$ est un triangle. put a picture of a tetraèdre with a face shaded of some color en fait, est une face propre.

Pour un simplexe $\sigma = \mathrm{conv}\{u_0, \ldots, u_n\}$, l'envelope de σ est

$$\mathrm{bd}\, \sigma = \bigcup_{\text{face propre } \tau \leq \sigma} \tau.$$

Ce signifie que l'envelope est la ligne exterieur, the boundary. L'interiéur de σ est $\sigma \setminus \mathrm{bd}\, \sigma$. Un point appartient à l'interieur si tous les λ_i sont positifs.

On arrive à notre but de cette section.

DÉFINITION 5. Un **complexe simplicial** K est un ensemble fini de simplexes tels que but what if they come from different ambient spaces ? we should mention this !

(i) si $\sigma \in K$ et $\tau \leq \sigma$, alors $\tau \in K$;

(ii) si $\sigma, \sigma' \in K$ et $\sigma \cap \sigma' \neq \varnothing$, alors $\sigma \cap \sigma' \leq \sigma$.

La **dimension** de K est

$$\dim K = \max_{\sigma \in K} (\dim \sigma)\,.$$

L'espace associé underlying space est

$$|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma.$$

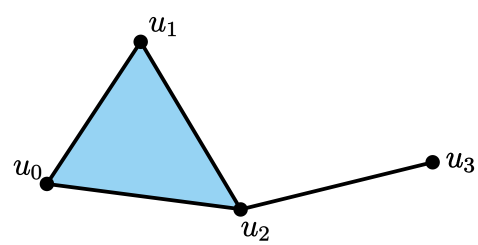
C'est un espace topologique avec la topologie inherited from the ambient Euclidean space in which the simplices live so what does this mean ?

i should put a whole page of examples and nonexamples. just drawings.

EXEMPLE 4. On considère le complexe simplicial

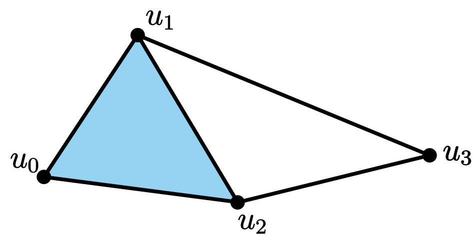
$$K = \{\mathrm{conv}\{u_0, u_1, u_2\}, \mathrm{conv}\{u_0, u_1\}, \mathrm{conv}\{u_0, u_2\}, \mathrm{conv}\{u_1, u_2\}, \mathrm{conv}\{u_2, u_3\}, u_0, u_1, u_2, u_3.\}$$

shouldn't be the singletons instead of the actual points in there ? Graphiquement :



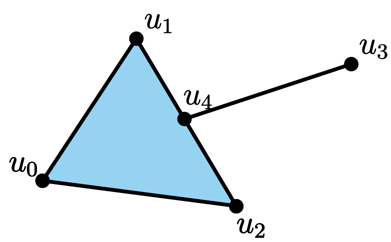
pintar los dibujos le quita formalidad ?

EXEMPLE 5. Soit K le complexe simplicial du dernier exemple. Si on ajoute le segment $\text{conv}\{u_1, u_3\}$, on obtient le complexe suivant



et on peut avoir des choses qui ne sont pas connectées.

EXEMPLE 6 (Non exemple). Le problème ce que l'intersection des segment $\text{conv}\{u_1, u_2\}$ et $\text{conv}\{u_3, u_4\}$ n'est pas un element du K. Mais on peut bien l'ajouter.



i like this quote from Edelsbrunner It is often easier to construct a complex abstractly and worry about how to put it into Euclidean space later, if at all.

DÉFINITION 6. use the power set of the power set ? Un **complexe simplicial abstrait** A est un ensemble fini des ensembles finis, sauf $\varnothing$, tels que si $\sigma \in A$ et $\tau \subset \sigma$ est nonvide, alors $\tau \in A$. this means A is closed below, sth like that La dimension de A est

$$\dim A = \max_{\sigma \in A} \{|\sigma| - 1\} .$$

explain the -1.

but then we have a new definition of simplex ? DEFINE IT

EXEMPLE 7.
(a) Les ensembles $A = \{\{a\}, \{b\}\}$ et $B = \{\{\{a\}\}, \{b\}\}$ sont des complexe simpliciaux. L'ensemble $\{a, \{b\}\}$ n'est pas un complexe simplicial.
(b) Cet exemple montre que les étiques ne sont pas importants :
$$A = \{\{\clubsuit, \bigstar\}, \{\blacklozenge, \spadesuit\}, \{\clubsuit\}, \{\bigstar\}, \{\blacklozenge\}, \{\spadesuit\}\}$$
est bien un complexe simplicial.
(c) $A = \{\{\varnothing\}\}$ est un complex. En fait, $\{\{x\}\}$ est un complex pour tout objet x. Est-ce que $\{\{\{x\}\}\}$ est un complex ?
(d) Un graphe est un example d'un complexe simplicial abstrait, en particulier un quiver, un arbre, hasse diagram, etc.

i got confused while trying to solve Benv ex 1.1.4.i. There, s is a simplex in the combinatorial sense. Furthermore, a simplicial complex is closed below by containments, ie it must contain the lower-dimensional elements of its simplices. however, simplices do not have that property. so $\{1, 2\}$ a perfect example of a simplex, but $\{\{1, 2\}\}$ is not a valid complex

Voici un exmple “pas trivial”

EXEMPLE 8. L’ensemble

$$A = \{\{0,1,2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0\}, \{1\}, \{2\},\\ \{2,3\}, \{3\}\}$$

est un complexe simplicial. On a écrit tous les sous ensembles nonvides de $\{0, 1, 2\}$ dans la premiere ligne, et tous les sous ensembles nonvides de $\{2, 3\}$ dans la deuxième, (avec pas répetition).

On remarque que l’écriture n’est pas si efficient, donc on utilizerá une notation plus prátique. Pour un ensemble fini de points $A = \{a_0, \ldots, a_n\}$, on note par $[a_0, \ldots, a_n]$ le ensemble de tous parties nonvides de A. Équivalentement, ?

$$[a_0, \ldots, a_n] = \mathcal{P}(\{a_0, \ldots, a_n\}) \setminus \{\varnothing\}.$$

Avec cette notation le complexe de l’exemple **??** devient

$$A = [0, 1, 2] \cup [2, 3]$$

où

$$[0,1,2] = \{\{0,1,2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}\},\\ [2,3] = \{\{2,3\}, \{2\}, \{3\}\}.$$

Or, on voudrait utiliser encore une notation plus efficace.

Benv notes : they omit the parethenses and commas altogether “Lorsqu’il n’y a pas de confusion possible, on omet les parentheses et les virgules pour les sim- plexes, par exemple le simplexe 1, 2, 3 est simplement note 123” are there any books that use this convention ?

.

i dont like this Convention from Benv : Lorsqu’on note un complexe simplicial, on se permet d’omettre de mentionner la presence de certains simplexes lorsque leur presence est assuree par celle d’un autre simplexe dont c’est la face. Par exemple, si on declare que C = 1234, 45, ca signifie que C = 1234 234, 134, 124, 123 12, 13, 14, 23, 24, 34, 45 1, 2, 3, 4, 5. i think it is better to stick to the parenthesis. does any author use this ? can this convention be improved ? maybe say that 123 denotes the powerset of $\{123\}$ without $\varnothing$

EXEMPLE 9. importa el orden ? para qué ? say $[0, 1, 2] = [2, 1, 0]$?

poner un ejemplo que illustre que las etiquetas no son importants

REMARQUE 3. Si K est un complexe simplicial geométrique, son complexe abstrait $A(K)$ est donné par les ensembles $\{u_0, \ldots, u_n\}$ tels que

$$\operatorname{conv}\{u_0, \ldots, u_n\} \in K.$$

THÉORÈME 3 (Realization geométrique). Soit A un complexe simplicial abstrait de dimension n. Alors il existe un complexe simplicial geométrique $K \subset \mathbb{R}^{2d+1}$ tel que $A(K) = A$.

i'd like an extension to paste an image from the clipboard directly in vscode, in images folder, and adds the latex image snipet

EXEMPLE 10. Le complexe

$$A = \{[0, 1], [0, 3], [0, 5], [4, 1], [2, 3], [4, 5], [2, 1], [4, 3], [2, 5]\}$$

n'est pas dans $\mathbb{R}^2$ mais dans $\mathbb{R}^3$. En effet, solution par le théorème de Kuratowsi. Il s'agit d'un graphe que n'est pas planar.

EXEMPLE 11. mais il y a aussi de graphes planars que ne se peuvent metre dans $\mathbb{R}^2$ nonplus.

$$A = \{[0, 1], [1, 2], [0, 2], [0, 3], [1, 3], [2, 3]\}$$

this one was the example at the first Lecture.

3. *Topologies, simplexes singuliers, et théorie des catégories

Lecture 2026-01-20 remplacement. this is like an extra Lecture.

DÉFINITION 7. Une categorie est

4. Groupe d'homologie

Lecture 2026-01-22 see my notes, check Elementary Applied topology, Ghrist, page 30

Tout au long de cette section, $\mathbb{F}$ désigne un corps. On travaille avec $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2$.

DÉFINITION 8. Une complexe de chaîne est une paire $(C_\bullet, \partial_\bullet)$, où $C_\bullet = (C_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est une famille de espaces vectoriels sur $\mathbb{F}$ et $\partial_\bullet = (\partial_i \colon C_i \to C_{i-1})_{i\in\mathbb{Z}}$ est une famille :/ de applications linéaires

$$\cdots \to C_i \xrightarrow{\partial_i} C_{i-1} \xrightarrow{\partial_{i-1}} C_{i-2} \to \cdots$$

tel que

$$\partial_{i-1} \circ \partial_i = 0$$

pour chaque $i \in \mathbb{Z}$. On dit que l'espace C_i est de degré i et que ∂_i est le differetiel confirm this terminology de degré i.

Comme d'habitude, on omit the endowing stuff, et on denote le complexe de chaîne simplement par $C_\bullet$, or even par C seulement.

REMARQUE 4.

— On se souvient toujours que le dubindex de ∂ est le index de son domaine.

— On remarque que la condition $\partial_{i-1} \circ \partial_i$ est équivalente à $\operatorname{Im} \partial_i \subseteq \operatorname{Ker} \partial_{i-1}$.

— On note $B_i(C_\bullet) = \operatorname{Im} \partial_i$ et $Z_i(C_\bullet) = \operatorname{Ker} \partial_i$ pour chaque $i \in \mathbb{Z}$.

— On oublie le subindex de ∂_i. Donc on écrit $\partial^2 = 0$.

quelle est la difference avec complexe differentiel ?

DÉFINITION 9. Le i-ème groupe d'homologie d'un complexe simplicial $(C_\bullet, \partial_\bullet)$ est

$$H_i(C_\bullet) = \operatorname{Ker} \partial_i / \operatorname{Im} \partial_{i+1}.$$

On remarque que H_i est un espace vectoriel, éntant que qoutient des espaces vetoriels.

Avec notre notation de antes, on a $H_i(C_\bullet) = Z_i/B_i$.

4.1. "but d'ajourdhui'. on a vu les définitions précedentes sans réference a ce on avait étudie avant. Maintenant, on fait la connection. Étant donné un complexe simplicial abstrait A, on voudrait construire un complexe de chaînes $C(A)$. même si on donne un complexe simplices geométrique.

Soit A un complexe simplicial abstrait. Pour chaque $i \in \mathbb{Z}$, on pose C_i l'espace vectoriel d ebase l'ensemble de i-simplexes dans A. (i.e. de dim i)

Alors

$$\begin{aligned}
C_0 &= \langle \text{points} \rangle \\
C_1 &= \langle \text{arêtes} \rangle \\
C_2 &= \langle \text{triangles} \rangle \\
&\vdots \\
C_i &= \langle\, i\text{–simplexes} \rangle
\end{aligned}$$

On remarque que $C_i = 0$, l'espace vectoriel nul, pour Tout $i \in \mathbb{Z}_{\leq 1}$. Alors on pose $C(A) = (C_i)_{i \in \mathbb{Z}}$.

On construit Maintenant les applications linéaires.

$$\partial_1 \colon C_1 \to C_0, \quad ab \mapsto a + b$$

définir ∂_i

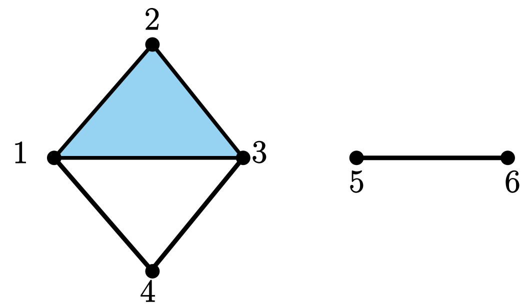
Si A est un complexe simplicial abstrait, on a le i-ème groupe d'homologie

$$H_i(A) = H_i(C(A)).$$

on note $\beta_i = \dim H_i(A)$. La dimension étant que espace vectoriel, laquel est égal a dim ker - dim img, par un théorème d'algèbre linéaire.

EXEMPLE 12. Soit

$$A = \{[5, 6], [1, 2, 3], [1, 4], [3, 4]\}$$



4.2. Complexe de Cech.

5. 2026-01-29

Définition 10. Une suite exacte corte d'espaces vectoriels est

on peut le voir comme un cas particulier d'un complexe de chaine ou $C_i = 0$ pour tou $i < 0, i > 2$.

convention : when we say the diagram commutes, we mean the solid lines. the dashed arros are about the claim of the thm

Lemme 1. Donné un diagramme commutatif de lignes exactes

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & Z \arrow[r] \arrow[d, dashed, "w"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[r, "g'"] & Z' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Il existe une fonction linéaire $w \colon Z \to Z'$ tel que le carré à droite commute, i.e. $w \circ g = g' \circ v$.

maybe the zeros to the left are not needed.

Démonstration. Soit $z \in Z$. $\square$

Définition 11. Une filtration d'un complexe simplicial K est une suite de complexes simpliciaux

$$K(0) \subseteq K(1) \subseteq \cdots \subseteq K(n) = K$$

exemple : the big grid

Chapitre 2

Carquois et représentations

DÉFINITION 12. Un carquois Q est une couple (Q_0, Q_1, s, t) où Q_0 est un ensemble fini dont les points son appelés sommets et Q_1 est un ensemble fini dont les points son appelés fléches. Et s, t deux fonctions $s\colon Q_1 \to Q_0$, appelés source and target.

We dont care about the names of the points, so we draw points.

EXEMPLE 13.

$$\begin{tikzcd} & \circ \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ \circ & & \circ \arrow[ll, shift right, "\gamma"'] \arrow[ll, shift left, "\delta"] \end{tikzcd}$$

other

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ 2 & & 3 \arrow[ll, shift right, "\gamma"'] \arrow[ll, shift left, "\delta"] \end{tikzcd}$$

EXEMPLE 14.

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow n$$

DÉFINITION 13. Une répresentation d'un carquois Q est la donnée des eapces vectoriels V_x pour chaque $x \in Q_0$ et des fonctions linéaires $V_\alpha\colon V_x \to V_y$ pour chaque $\alpha \in Q_1$.

Essentialement on rémplace les fléches par des applications linéaires.

i like the arrows of the yellow book of rep theory of assem, see eg p. 2 maybe i can use that book as refernce