Topologie Algebrique et Théorie de la Persistence – MAT873

Christian Chávez
Université de Sherbrooke

Table des matières

Chapitre 1

Des choses de base

Lecture 2026-01-08

1. Motivation

Soit K un espace topologique.

1.1. Les groupes d'homologie. On voudrait compter les trous d'un espace topologique quelconque. Par exemple,

— la ligne réel n'a pas de trous

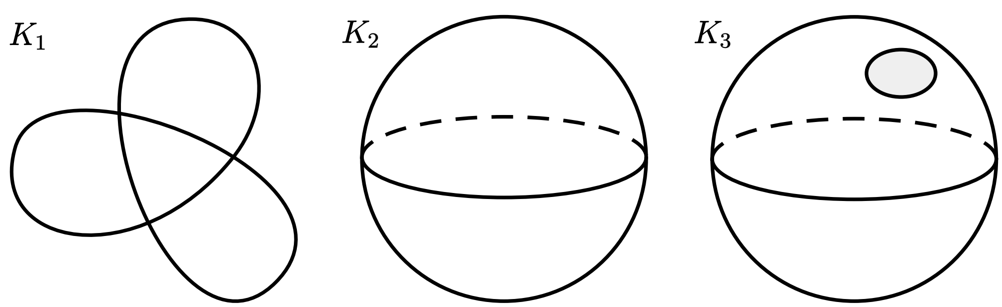
— si on prendre un segment de recte et join the bouts, on obtient un circle. il n'y a pas de trou dans le borde (otherwise it is not a circle). mais il enclose un trou.

—

— la sphère n'a pas de trous dans la surface (otgerwise is not an sphère), mais elle a un trou dedans, mais ce different de le trou que le circle enclose

— la sphère moins un disque a deux trous. pas vraiment.

— la figure du `8` a deux trous.i



K_1 est la ligne seulement, pas l'air qu'elle contient. Sino, on aurait peint l'interiéur.

Pour illustrer, on note par H_0 le nombre de composantes conexes, H_1 le nombre de trous de dimension 1, i.e., trous planars, H_2 le nombre de trous bidimensionals, etc.

Alors dans les figures ci-dessus, on a

$$\begin{aligned} H_0(K_1) &= \mathbb{Z}, \quad H_1(K_1) = \mathbb{Z}^4, \quad H_2(K_1) = 0 \\ H_0(K_2) &= \mathbb{Z}, \quad H_1(K_2) = \mathbb{Z}, \quad H_2(K_2) = \mathbb{Z} \\ H_0(K_3) &= \mathbb{Z}, \quad H_1(K_3) = 0, \quad H_2(K_3) = 0. \end{aligned}$$

We “encode” the number of conected components in the exponent. Notice that we always have $H_0 \geq 1$.

On va voir deux théorèmes importants :

Théorème 1. Si $K \cong K'$, alors $H_p(K) \cong H_p(K')$.

Théorème 2. Tout espace topologique est isomorphe à un complexe simplicial. est-ce que ceci est vrai ?

BUT : Définir *complexe simplicial.*

Définition 1. Un n-simplex σ est

Définition 2. On dit que n points $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^d$ sont **linéairement independants** si

$$\dim \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_n\} = n$$

Il n'est pas necesaire d'ajouter la condition $n \leqslant d$ dans la définition.

Définition 3. On dit que $n+1$ points $u_0, \dots, u_n \in \mathbb{R}^d$ sont **affinement independants** si $u_0 - u_1, \dots, u_0 - u_n$ sont linéairement independants

La combinaison convexe de $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^d$ they need not be aff.indep. affinement independants est give intuition

$$\operatorname{conv}\{u_0, \dots, u_n\} = \left\{ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i u_i \;\middle|\; \lambda_i \geq 0 \text{ et } \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1 \right\}$$

Définition 4. Un n-**simplex** est la combinaison convexe de d'un ensemble fini de points affinement independants.

Exemple 1. (i) Pour $n = 0$, on a $\sigma = \operatorname{conv}\{u_0\} = \{u_0\}$, un singleton.
(ii) segment
(iii) triangle
(iv) tetraèdre

Soit $\sigma = \operatorname{conv}\{u_0, \dots, u_n\}$ un n-simplex et $S \subset \{u_0, \dots, u_n\}$ une partie non vide. Alors $\tau = \operatorname{conv} S$ est un simplex de dimension $|S| - 1$. On dit que τ est une face de σ. On écrit $\tau \leq \sigma$.

Remarque 1. On dit que τ est **propre** si $\tau \neq \sigma$.

Exemple 2. Soient $u_0, \dots, u_3$ affinement independants. Alors $\sigma = \operatorname{conv}\{u_0, \dots, u_4\}$ est un tetraèdre et $\sigma = \operatorname{conv}\{u_0, \dots, u_3\}$ est un triangle. put a picture of a tetraèdre with a face shaded of some color en fait, est une face propre.

Pour un simplexe $\sigma = \operatorname{conv}\{u_0, \dots, u_n\}$, l'envelope de σ est

$$\operatorname{bd} \sigma = \bigcup_{\text{facepropre} \tau \leq \sigma} \tau.$$

On arrive à notre but de cette section.

DÉFINITION 5. Un **complexe simplicial** K est un ensemble fini de simplexes tels que

(i) si $\sigma \in K$ et $\tau \leq \sigma$, alors $\tau \in K$;

(ii) si $\sigma, \sigma' \in K$ et $\sigma \cap \sigma' \neq \varnothing$, alors $\sigma \cap \sigma' \leq \sigma$.

La **dimension** de K est

$$\dim K = \max_{\sigma \in K} (\dim \sigma) .$$

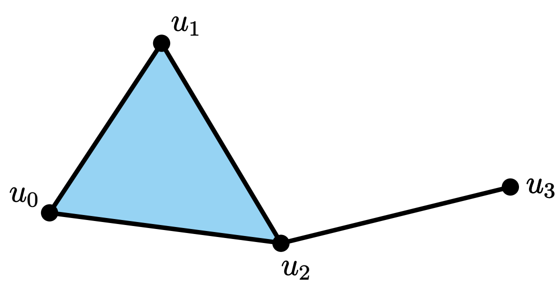
L'espace associé est

$$|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma.$$

EXEMPLE 3. On considère le complexe simplicial

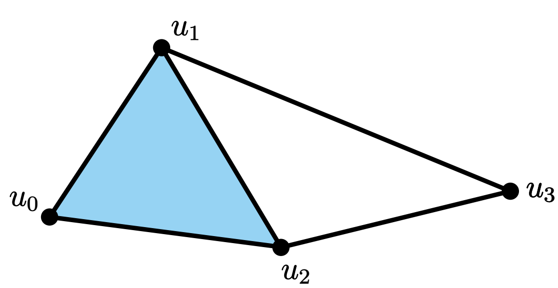
$K = \{\mathrm{conv}\{u_0, u_1, u_2\}, \mathrm{conv}\{u_0, u_1\}, \mathrm{conv}\{u_0, u_2\}, \mathrm{conv}\{u_1, u_2\}, \mathrm{conv}\{u_2, u_3\}, u_0, u_1, u_2, u_3.\}$

shouldn't be the singletons instead of the actual points in there ? Graphiquement :



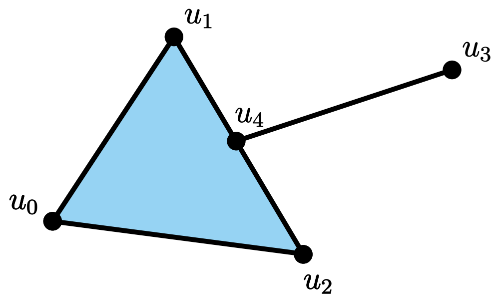
pintar los dibujos le quita formalidad ?

EXEMPLE 4. Soit K le complexe simplicial du dernier exemple. Si on ajoute le segment $\mathrm{conv}\{u_1, u_3\}$, on obtient le complexe suivant



et on peut avoir des choses qui ne sont pas connectées.

EXEMPLE 5 (Non exemple). Le problème ce que l'intersection des segment $\mathrm{conv}\{u_1, u_2\}$ et $\mathrm{conv}\{u_3, u_4\}$ n'est pas un element du K. Mais on peut bien l'ajouter.



Définition 6. Un **complexe simplicial abstrait** A est un ensemble fini des ensembles finis, sauf $\varnothing$, tels que si $\sigma \in A$ et $\tau \subset \sigma$, alors $\tau \in A$. this means A is closed below, sth like that La dimension de A est

$$\dim A = \max_{\sigma \in A} \{|\sigma| - 1\} .$$

Exemple 6. L'ensemble

$$A = \{\{0,1,2\},\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\},\{2,3\},\{0\},\{1\},\{2\},\{3\}\}$$

Pour un ensemble fini de points $A = \{a_0, \dots, a_n\}$, on note par $[a_0, \dots, a_n]$ le ensemble de tous parties nonvides de A. Équivalentement, ?

$$[a_0, \dots, a_n] = \mathscr{P}(\{a_0, \dots, a_n\}) \setminus \{\varnothing\} .$$

Exemple 7. On a

$$[0,1,2] = \{\{0,1,2\},\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\},\{0\},\{1\},\{2\},\{3\}\} .$$

Remarque 2. Si K est un complexe simplicial geométrique, son complexe abstrait $A(K)$ est donné par les ensembles $\{u_0, \dots, u_n\}$ tels que

$$\operatorname{conv}\{u_0, \dots, u_n\} \in K.$$

Théorème 3. Soit A un complexe simplicial abstrait de dimension n. Alors il existe un complexe simplicial geométrique $K \subset \mathbb{R}^{2d+1}$ tel que $A(K) = A$.

Chapitre 2

Carquois et représentations

Chapitre 3

Entrelacement et stabilité

Chapitre 4

Applications

Bibliographie

[1] Herbert EDELSBRUNNER et John L. HARER. *Computational Topology : An Introduction*. T. 69. Miscellaneous Books. Providence, RI : American Mathematical Society, 2010, p. 241. ISBN : 978-0-8218-4925-5. DOI : 10.1090/mbk/069.

[2] Steve Y. OUDOT. *Persistence Theory : From Quiver Representations to Data Analysis*. T. 209. Mathematical Surveys and Monographs. Providence, RI : American Mathematical Society, 2015, p. 218. ISBN : 978-1-4704-2545-6. DOI : 10.1090/surv/209.

[3] Hal SCHENCK. *Algebraic Foundations for Applied Topology and Data Analysis*. Mathematics of Data. Hardcover ISBN : 978-3-031-06663-4 ; eBook ISBN : 978-3-031-06664-1 ; Softcover ISBN : 978-3-031-06666-5. Cham : Springer, 2022. DOI : 10.1007/978-3-031-06664-1.