

# **Topologie Algébrique et Théorie de la Persistence – MAT873**

Christian Chávez  
Université de Sherbrooke



## **Table des matières**



## Chapitre 1

# Des choses de base

Lecture 2026-01-08

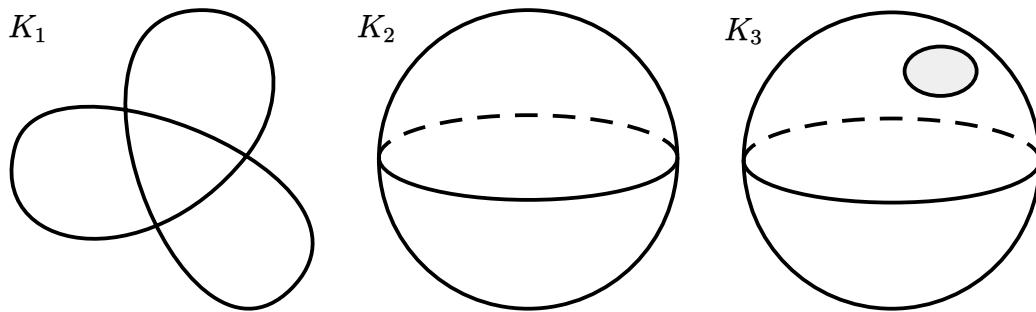
may be check Schenck Chapter 4 Homology I : Simplicial Complexes to Sensor Networks  
and chap 3 of Edelsbrunner

### 1. Motivation

Soit  $K$  un espace topologique.

**1.1. Les groupes d'homologie.** On voudrait compter les trous d'un espace topologique quelconque. Par exemple,

- la ligne réel n'a pas de trous
- si on prende un segment de recte et join the bouts, on obtient un circle. il n'y a pas de trou dans le borde (otherwise it is not a circle). mais il enclose un trou.
- 
- la sphère n'a pas de trous dans la surface (otgerwise is not an sphère), mais elle a un trou dedans, mais ce different de le trou que le circle enclose
- la sphère moins un disque a deux trous. pas vraiment.
- la figure du 8 a deux trous.i



$K_1$  est la ligne seulement, pas l'air qu'elle contient. Sino, on aurait peint l'interieur.

Pour illustrer, on note par  $H_0$  le nombre de composantes conexas,  $H_1$  le nombre de trous de dimension 1, i.e., trous planars,  $H_2$  le nombre de trous bidimensionals, etc.

Alors dans les figures ci-dessus, on a

$$H_0(K_1) = \mathbb{Z}, \quad H_1(K_1) = \mathbb{Z}^4, \quad H_2(K_1) = 0$$

$$H_0(K_2) = \mathbb{Z}, \quad H_1(K_2) = \mathbb{Z}, \quad H_2(K_2) = \mathbb{Z}$$

$$H_0(K_3) = \mathbb{Z}, \quad H_1(K_3) = 0, \quad H_2(K_3) = 0.$$

We “encode” the number of connected components in the exponent. Notice that we always have  $H_0 \geq 1$ .

On va voir deux théorèmes importants :

**THÉORÈME 1.** Soient  $K$  et  $K'$  deux espaces topologiques. Si  $K \cong K'$ , alors  $H_p(K) \cong H_p(K')$ .

On remarque que le premier  $\cong$  est un isomorphisme d’espaces topologiques et le deuxième  $\cong$  est un isomorphisme de groupes.

**THÉORÈME 2.** Tout espace topologique est isomorphe à un complexe simplicial.  
est-ce que ceci est vrai ?

BUT : Définir *complexe simplicial*.

**DÉFINITION 1.** Un  $n$ -simplex  $\sigma$  est

**DÉFINITION 2.** On dit que  $n$  points  $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^d$  sont **linéairement indépendants** si

$$\dim \text{span} \{u_1, \dots, u_n\} = n$$

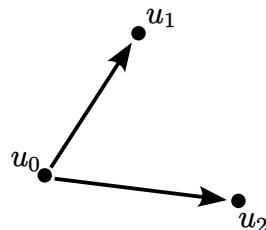
Il n’est pas nécessaire d’ajouter la condition  $n \leq d$  dans la définition.

Is a Singleton affinely independent? By definition, no. But it should!? \* Affine Independence is interesting from  $\mathbb{R}^2$  onwards, not  $\mathbb{R}^1$ . Nest pas?

**DÉFINITION 3.** On dit que  $n+1$  points  $u_0, \dots, u_n \in \mathbb{R}^d$  sont **affinement indépendants** si les  $n$  points  $u_0 - u_1, \dots, u_0 - u_n$  sont linéairement indépendants

Le point  $u_0$  n’est pas spécial. On peut choisir un autre point de notre liste, disons  $u_j$ , et vérifier que  $u_j - u_1, \dots, u_j - u_n$  est linéairement indépendant.

Pour illustrer l’idée d’être affinement indépendants, on considère trois points. Si on prend  $u_0$  comme origine, alors on a deux vecteurs, et on vérifie si son colinéaires ou pas. les points aff. ind. si il ne sont pas dans la même ligne. L’origine n’importe pas, il s’agit d’une question géométrique et pas de la position dans le plan.



**EXERCICE 1.1.** Soit  $\{u_0, \dots, u_n\}$  linéairement indépendant. Quel point peut-on ajouter so that on obtient un ensemble affinement indépendant ?

La combinaison convexe de  $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^d$  they need not be aff.indep. affinement independants est give intuition

$$\text{conv}\{u_0, \dots, u_n\} = \left\{ \sum_{i=0}^n \lambda_i u_i \mid \lambda_i \geq 0 \text{ et } \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1 \right\}$$

DÉFINITION 4. Un  **$n$ -simplex** est la combinaison convexe de d'un ensemble fini de points affinement independants. Si  $\sigma = \text{conv}\{u_0, \dots, u_n\}$  est un simplex, son dimension est  $\dim \sigma = n$ .

REMARQUE 1. deux simplex peuvent avoir la même dimension même si apartient a differents espaces. E.g. un triangle dans le plan, un triangle dans l'espace, dans R4 il a toujours dimension 3.

define standard simplexes ? there are many segments, triangles and tetrahedra, mais il y quelconques que sont distinguished.

- EXEMPLE 1.
- (i) Pour  $n = 0$ , on a  $\sigma = \text{conv}\{u_0\} = \{u_0\}$ , un singleton.
  - (ii) segment
  - (iii) triangle
  - (iv) tétraèdre

Soit  $\sigma = \text{conv}\{u_0, \dots, u_n\}$  un  $n$ -simplex et  $S \subset \{u_0, \dots, u_n\}$  une partie non vide. Alors  $\tau = \text{conv } S$  est un simplex de dimension  $|S| - 1$ . On dit que  $\tau$  est une face de  $\sigma$ . On écrit  $\tau \leq \sigma$ .

REMARQUE 2. On dit que  $\tau$  est **propre** si  $\tau \neq \sigma$ . Dans ce cas là on note  $\tau < \sigma$ .

EXEMPLE 2. Soient  $u_0, \dots, u_3$  affinement independants. Alors  $\sigma = \text{conv}\{u_0, \dots, u_4\}$  est un tétraèdre et  $\tau = \text{conv}\{u_0, \dots, u_3\}$  est un triangle. put a picture of a tetraèdre with a face shaded of some color en fait, est une face propre.

Pour un simplexe  $\sigma = \text{conv}\{u_0, \dots, u_n\}$ , l'enveloppe de  $\sigma$  est

$$\text{bd } \sigma = \bigcup_{\substack{\text{face propre } \tau \leq \sigma}} \tau.$$

Ce signifie que l'enveloppe est la ligne exterieur, the boundary. L'interieur de  $\sigma$  est  $\sigma \setminus \text{bd } \sigma$ . Un point appartient à l'interieur si tous les  $\lambda_i$  sont positifs.

On arrive à notre but de cette section.

DÉFINITION 5. Un **complexe simplicial**  $K$  est un ensemble fini de simplexes tels que but what if they come from different ambient spaces ? we should mention this !

- (i) si  $\sigma \in K$  et  $\tau \leq \sigma$ , alors  $\tau \in K$  ;
- (ii) si  $\sigma, \sigma' \in K$  et  $\sigma \cap \sigma' \neq \emptyset$ , alors  $\sigma \cap \sigma' \leq \sigma$ .

La **dimension** de  $K$  est

$$\dim K = \max_{\sigma \in K} (\dim \sigma).$$

L'espace associé **underlying space** est

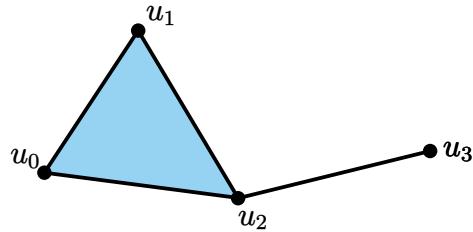
$$|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma.$$

C'est un espace topologique avec la topologie **inherited from the ambient Euclidean space in which the simplices live** so what does this mean?

i should put a whole page of examples and nonexamples. just drawings.

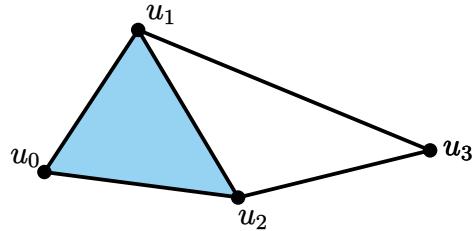
**EXEMPLE 3.** On considère le complexe simplicial

$K = \{\text{conv}\{u_0, u_1, u_2\}, \text{conv}\{u_0, u_1\}, \text{conv}\{u_0, u_2\}, \text{conv}\{u_1, u_2\}, \text{conv}\{u_2, u_3\}, u_0, u_1, u_2, u_3\}$ . shouldn't be the singletons instead of the actual points in there? Graphiquement :



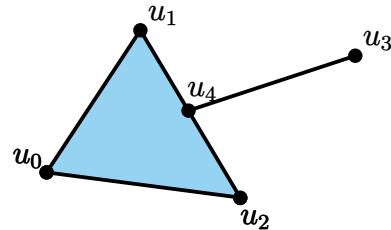
pintar los dibujos le quita formalidad ?

**EXEMPLE 4.** Soit  $K$  le complexe simplicial du dernier exemple. Si on ajoute le segment  $\text{conv}\{u_1, u_3\}$ , on obtient le complexe suivant



et on peut avoir des choses qui ne sont pas connectées.

**EXEMPLE 5 (Non exemple).** Le problème ce que l'intersection des segment  $\text{conv}\{u_1, u_2\}$  et  $\text{conv}\{u_3, u_4\}$  n'est pas un élément du  $K$ . Mais on peut bien l'ajouter.



i like this quote from Edelsbrunner It is often easier to construct a complex abstractly and worry about how to put it into Euclidean space later, if at all.

DÉFINITION 6. use the power set of the power set ? Un **complexe simplicial abstrait**  $A$  est un ensemble fini des ensembles finis, sauf  $\emptyset$ , tels que si  $\sigma \in A$  et  $\tau \subset \sigma$ , alors  $\tau \in A$ . this means  $A$  is closed below, sth like that La dimension de  $A$  est

$$\dim A = \max_{\sigma \in A} \{|\sigma| - 1\}.$$

explain the -1.

but then we have a new definition of simplex ? DEFINE IT

EXEMPLE 6. Un graphe est un exemple d'un complexe simplicial abstrait, en particulier un quiver, un arbre, hasse diagram, etc.

i got confused while trying to solve Benv ex 1.1.4.i. There, s is a simplex in the combinatorial sense. Furthermore, a simplicial complex is closed below by containments, ie it must contain the lower-dimensional elements of its simplices. however, simplices do not have that property. so  $\{1, 2\}$  a perfect example of a simplex, but  $\{\{1, 2\}\}$  is not a valid complex

EXEMPLE 7. L'ensemble

$$A = \{\{0, 1, 2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}\}$$

Pour un ensemble fini de points  $A = \{a_0, \dots, a_n\}$ , on note par  $[a_0, \dots, a_n]$  le ensemble de tous parties nonvides de  $A$ . Équivalentement, ?

$$[a_0, \dots, a_n] = \mathcal{P}(\{a_0, \dots, a_n\}) \setminus \{\emptyset\}.$$

Benv notes : they omit the parentheses and commas altogether “Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, on omet les parenthèses et les virgules pour les simplices, par exemple le simplexe 1, 2, 3 est simplement note 123” are there any books that use this convention ?

i dont like this Convention from Benv : Lorsqu'on note un complexe simplicial, on se permet d'omettre de mentionner la presence de certains simplexes lorsque leur presence est assuree par celle d'un autre simplexe dont c'est la face. Par exemple, si on declare que  $C = 1234, 45$ , ca signifie que  $C = 1234, 234, 134, 124, 123, 12, 13, 14, 23, 24, 34, 45, 1, 2, 3, 4, 5$ . i think it is better to stick to the parenthesis. does any author use this ? can this convention be improved ? maybe say that 123 denotes the powerset of  $\{123\}$  without  $\emptyset$

EXEMPLE 8. On a

$$[0, 1, 2] = \{\{0, 1, 2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}\}.$$

importa el orden ? para qué ? say  $[0, 1, 2] = [2, 1, 0]$  ?

poner un ejemplo que illustre que las etiquetas no son importants

REMARQUE 3. Si  $K$  est un complexe simplicial geométrique, son complexe abstrait  $A(K)$  est donné par les ensembles  $\{u_0, \dots, u_n\}$  tels que

$$\text{conv } \{u_0, \dots, u_n\} \in K.$$

THÉORÈME 3 (Realization geométrique). Soit  $A$  un complexe simplicial abstrait de dimension  $n$ . Alors il existe un complexe simplicial geométrique  $K \subset \mathbb{R}^{2d+1}$  tel que  $A(K) = A$ .

i'd like an extension to paste an image from the clipboard directly in vscode, in images folder, and adds the latex image snipet

EXEMPLE 9. Le complexe

$$A = \{[0, 1], [0, 3], [0, 5], [4, 1], [2, 3], [4, 5], [2, 1], [4, 3], [2, 5]\}$$

n'est pas dans  $\mathbb{R}^2$  mais dans  $\mathbb{R}^3$ . En effet, solution par le théorème de Kuratowski. Il s'agit d'un graphe que n'est pas planar.

EXEMPLE 10. mais il y a aussi de graphes planars que ne se peuvent metre dans  $\mathbb{R}^2$  nonplus.

$$A = \{[0, 1], [1, 2], [0, 2], [0, 3], [1, 3], [2, 3]\}$$

this one was the example at the first Lecture.

## 2. \*Topologies, simplexes singuliers, et théorie des catégories

Lecture 2026-01-20 remplacement. this is like an extra Lecture.

DÉFINITION 7. Une categorie est

## 3. Groupe d'homologie

Lecture 2026-01-22 see my notes, check Elementary Applied topology, Ghrist, page 30

Tout au long de cette section,  $\mathbb{F}$  désigne un corps. On travaille avec  $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2$ .

DÉFINITION 8. Une complexe de chaîne est une paire  $(C_\bullet, \partial_\bullet)$ , où  $C_\bullet = (C_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  est une famille de espaces vectoriels sur  $\mathbb{F}$  et  $\partial_\bullet = (\partial_i: C_i \rightarrow C_{i-1})_{i \in \mathbb{Z}}$  est une famille :/ de applications linéaires

$$\cdots \rightarrow C_i \xrightarrow{\partial_i} C_{i-1} \xrightarrow{\partial_{i-1}} C_{i-2} \rightarrow \cdots$$

tel que

$$\partial_{i-1} \circ \partial_i = 0$$

pour chaque  $i \in \mathbb{Z}$ . On dit que l'espace  $C_i$  est de degré  $i$  et que  $\partial_i$  est le differetiel confirm this terminology de degré  $i$ .

Comme d'habitude, on omit the endowing stuff, et on denote le complexe de chaîne simplement par  $C_\bullet$ , or even par  $C$  seulement.

REMARQUE 4.

- On se souvient toujours que le dubindex de  $\partial$  est le index de son domaine.
- On remarque que la condition  $\partial_{i-1} \circ \partial_i$  est équivalente à  $\text{Im } \partial_i \subseteq \text{Ker } \partial_{i-1}$ .
- On note  $B_i(C_\bullet) = \text{Im } \partial_i$  et  $Z_i(C_\bullet) = \text{Ker } \partial_i$  pour chaque  $i \in \mathbb{Z}$ .
- On oublie le subindex de  $\partial_i$ . Donc on écrit  $\partial^2 = 0$ .

quelle est la différence avec complexe différentiel ?

DÉFINITION 9. Le  $i$ -ème groupe d'homologie d'un complexe simplicial  $C_\bullet$  est

$$H_i(C_\bullet) = \text{Ker } \partial_i / \text{Im } \partial_{i+1}.$$

On remarque que  $H_i$  est un espace vectoriel, étant que quotient des espaces vectoriels.

Avec notre notation de antes, on a  $H_i(C_\bullet) = Z_i / B_i$ .

**3.1. “but d'aujourd'hui”.** on a vu les définitions précédentes sans référence à ce on avait étudié avant. Maintenant, on fait la connection. Étant donné un complexe simplicial abstrait  $A$ , on voudrait construire un complexe de chaînes  $C(A)$ . même si on donne un complexe simplices géométrique.

Soit  $A$  un complexe simplicial abstrait. Pour chaque  $i \in \mathbb{Z}$ , on pose  $C_i$  l'espace vectoriel d'ebase l'ensemble de  $i$ -simplexes dans  $A$ . (i.e. de  $\dim i$ )

Alors

$$\begin{aligned} C_0 &= \langle \text{points} \rangle \\ C_1 &= \langle \text{arêtes} \rangle \\ C_2 &= \langle \text{triangles} \rangle \\ &\vdots \\ C_i &= \langle i\text{-simplexes} \rangle \end{aligned}$$

On remarque que  $C_i = 0$ , l'espace vectoriel nul, pour Tout  $i \in \mathbb{Z}_{\leq 1}$ . Alors on pose  $C(A) = (C_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ .

On construit Maintenant les applications linéaires.

$$\partial_1: C_1 \rightarrow C_0, \quad ab \mapsto a + b$$

définir  $\partial_i$

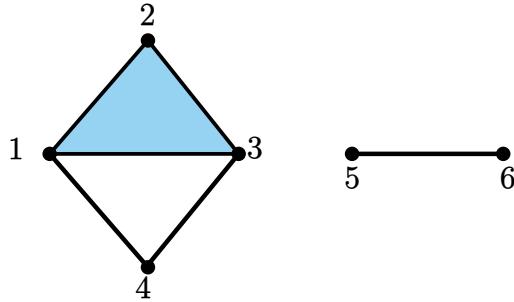
Si  $A$  est un complexe simplicial abstrait, on a le  $i$ -ème groupe d'homologie

$$H_i(A) = H_i(C(A)).$$

on note  $\beta_i = \dim H_i(A)$ . La dimension étant que espace vectoriel, laquel est égal à  $\dim \ker - \dim \text{img}$ , par un théorème d'algèbre linéaire.

EXEMPLE 11. Soit

$$A = \{[5, 6], [1, 2, 3], [1, 4], [3, 4]\}$$



### 3.2. Complexe de Cech.

4. 2026-01-29

DÉFINITION 10. Une suite exacte corte d'espaces vectoriels est  
on peut le voir comme un cas particulier d'un complexe de chaîne où  $C_i = 0$  pour  
tous  $i < 0, i > 2$ .

convention : when we say the diagram commutes, we mean the solid lines. the  
dashed arrows are about the claim of the thm

LEMME 1. Donné un diagramme commutatif de lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & \\ 0 & \longrightarrow & X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \longrightarrow 0 \end{array}$$

Il existe une fonction linéaire  $w: Z \rightarrow Z'$  tel que le carré à droite commute, i.e.  
 $w \circ g = g' \circ v$ .

maybe the zeros to the left are not needed.

DÉMONSTRATION. Soit  $z \in Z$ . □

DÉFINITION 11. Une filtration d'un complexe simplicial  $K$  est une suite de complexes simpliciaux

$$K(0) \subseteq K(1) \subseteq \cdots \subseteq K(n) = K$$

exemple : the big grid

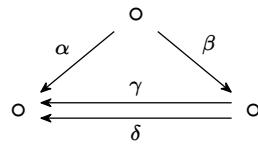
## Chapitre 2

### Carquois et représentations

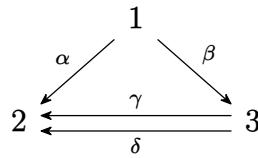
DÉFINITION 12. Un carquois  $Q$  est une couple  $(Q_0, Q_1, s, t)$  où  $Q_0$  est un ensemble fini dont les points sont appelés sommets et  $Q_1$  est un ensemble fini dont les points sont appelés flèches. Et  $s, t$  deux fonctions  $s: Q_1 \rightarrow Q_0$ , appelées source and target.

We don't care about the names of the points, so we draw points.

EXEMPLE 12.



other



EXEMPLE 13.

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow \dots \longrightarrow n$$

DÉFINITION 13. Une représentation d'un carquois  $Q$  est la donnée des espaces vectoriels  $V_x$  pour chaque  $x \in Q_0$  et des fonctions linéaires  $V_\alpha: V_x \rightarrow V_y$  pour chaque  $\alpha \in Q_1$ .

Essentialement on remplace les flèches par des applications linéaires.

i like the arrows of the yellow book of rep theory of assem, see eg p. 2 maybe i can use that book as reference