

1. Groupe d'homologie

Lecture 2026-01-22 see my notes, check Elementary Applied topology, Ghrist, page 30

Tout au long de cette section, \mathbb{F} désigne un corps. On travaille avec $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2$.

DÉFINITION 1. Une complexe de chaîne est une paire $(C_\bullet, \partial_\bullet)$, où $C_\bullet = (C_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est une famille de espaces vectoriels sur \mathbb{F} et $\partial_\bullet = (\partial_i : C_i \rightarrow C_{i-1})_{i \in \mathbb{Z}}$ est une famille de applications linéaires

$$\cdots \rightarrow C_i \xrightarrow{\partial_i} C_{i-1} \xrightarrow{\partial_{i-1}} C_{i-2} \rightarrow \cdots$$

tel que

$$\partial_{i-1} \circ \partial_i = 0$$

pour chaque $i \in \mathbb{Z}$. On dit que l'espace C_i est de degré i et que ∂_i est le différentiel confirm this terminology de degré i .

Comme d'habitude, on omit the endowing stuff, et on denote le complexe de chaîne simplement par C_\bullet , or even par C seulement.

REMARQUE 1.

- On se souvient toujours que le dubindex de ∂ est le index de son domaine.
- On remarque que la condition $\partial_{i-1} \circ \partial_i$ est équivalente à $\text{Im } \partial_i \subseteq \text{Ker } \partial_{i-1}$.
- On note $B_i(C_\bullet) = \text{Im } \partial_i$ et $Z_i(C_\bullet) = \text{Ker } \partial_i$ pour chaque $i \in \mathbb{Z}$.
- On oublie le subindex de ∂_i . Donc on écrit $\partial^2 = 0$.

quelle est la difference avec complexe differentiel ?

DÉFINITION 2. Le i -ème groupe d'homologie d'un complexe simplicial $(C_\bullet, \partial_\bullet)$ est

$$H_i(C_\bullet) = \text{Ker } \partial_i / \text{Im } \partial_{i+1}.$$

On remarque que H_i est un espace vectoriel, étant que qoutient des espaces vectoriels.

Avec notre notation de antes, on a $H_i(C_\bullet) = Z_i / B_i$.

1.1. “but d’aujourd’hui”. on a vu les définitions précédentes sans référence a ce on avait étudie avant. Maintenant, on fait la connection. Étant donné un complexe simplicial abstrait A , on voudrait construire un complexe de chaînes $C(A)$. même si on donne un complexe simplices geométrique.

Soit A un complexe simplicial abstrait. Pour chaque $i \in \mathbb{Z}$, on pose C_i l'espace vectoriel d ebase l'ensemble de i-simplexes dans A . (i.e. de dim i)

Alors

$$\begin{aligned} C_0 &= \langle \text{points} \rangle \\ C_1 &= \langle \text{arêtes} \rangle \\ C_2 &= \langle \text{triangles} \rangle \\ &\vdots \\ C_i &= \langle i\text{-simplexes} \rangle \end{aligned}$$

On remarque que $C_i = 0$, l'espace vectoriel nul, pour Tout $i \in \mathbb{Z}_{\leq 1}$. Alors on pose $C(A) = (C_i)_{i \in \mathbb{Z}}$.

On construit Maintenant les applications linéaires.

$$\partial_1: C_1 \rightarrow C_0, \quad ab \mapsto a + b$$

définir ∂_i

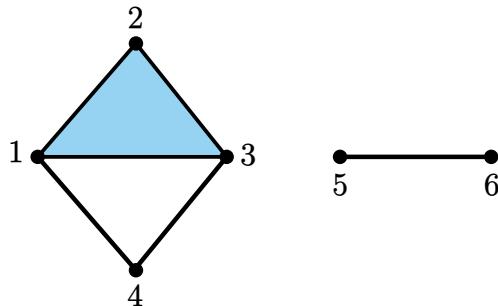
Si A est un complexe simplicial abstrait, on a le i -ème groupe d'homologie

$$H_i(A) = H_i(C(A)).$$

on note $\beta_i = \dim H_i(A)$. La dimension étant que espace vectoriel, laquel est égal à $\dim \ker - \dim \text{img}$, par un théorème d'algèbre linéaire.

EXEMPLE 1. Soit

$$A = \{[5, 6], [1, 2, 3], [1, 4], [3, 4]\}$$



On va (i) construire un complexe de chaîne et (ii) calculer le groupe de homologie à chaque point ?

type	tétraèdres	triangles	arêtes	sommets	nul
complexe	$\dots \longrightarrow C_3 \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$				
base	$\dots \longrightarrow 0 \xrightarrow{\partial_3} \langle 123 \rangle \xrightarrow{\partial_2} \langle 12, 13, 23, 34, 14, 56 \rangle \xrightarrow{\partial_1} \langle 1, 2, 3, 4, 5, 6 \rangle \xrightarrow{\partial_0} 0$				
$\dim(C_i)$	0	1	6	6	0

D'abord on trouve les applications ∂_i . Comme nos espaces vectoriels ont dimension finie, on **regard our linear maps as matrices**. On remarque que $\partial_3 = 0$ et ∂_0 car $\text{dom}(\partial_3) = 0$ et $\text{dom}(\partial_0) = 0$, respectivement. Pour trouver ∂_1 et ∂_2 , we look at what they do to the bases. Pour ∂_1 , on a

$$\begin{aligned}\partial_1(12) &= 1 + 2 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 6, \\ \partial_1(13) &= 1 + 3 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 6, \\ \partial_1(23) &= 2 + 3 = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 6, \\ \partial_1(34) &= 3 + 4 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 6, \\ \partial_1(14) &= 1 + 4 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 6, \\ \partial_1(56) &= 5 + 6 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 6.\end{aligned}$$

La matrice associée est donc

$$M_1 = \begin{bmatrix} & 12 & 13 & 23 & 34 & 14 & 56 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ceci est d'accord avec l'info du diagramme ci-dessus, ou se nos indica que ∂_1 est une application linéaire entre espaces de dimension 6. Pour ∂_2 , on a

$$\begin{aligned}\partial_2(123) &= 12 + 13 + 23 \\ &= 1 \cdot 12 + 1 \cdot 13 + 1 \cdot 23 + 0 \cdot 34 + 0 \cdot 14 + 0 \cdot 56\end{aligned}$$

et sa matrice associée est

$$M_2 = \begin{bmatrix} & 123 \\ 12 & 1 \\ 13 & 1 \\ 23 & 1 \\ 34 & 0 \\ 14 & 0 \\ 56 & 0 \end{bmatrix}$$

On a placé les nombre en gray seulement pour aide pedagogique. On vérifié que $\partial_{i-1} \circ \partial_i = 0$ pour chaque $i \in \mathbb{Z}$. Si $i \geq 3$ ou $i \leq 1$, alors $\partial_i = 0$, et donc $\partial_{i-1} \circ \partial_i = 0$.

Alors il reste seulement à vérifier pour $i = 2$. On a

$$\begin{aligned}
 M_1 M_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1+1+0 \\ 1+0+1 \\ 0+1+1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Il suit que $\partial_1 \circ \partial_2 = 0$. On a bien montré que c'est un complexe de chaîne.

On calcule maintenant les groupes d'homologie. Pour $i \geq 3$, le domaine de $\partial_i : 0 \rightarrow C_{i-1}$ est 0, son noyau est donc 0. Il suit que

$$H_i = \frac{\text{Ker } \partial_i}{\text{Im } \partial_{i+1}} = \frac{0}{\text{Im } \partial_{i+1}} = 0.$$

Ceci refleja el hecho de que no hay huecos de dimensiones 3 o mayor. Les groupes d'homologie qui nous interesen son :

$$H_2 = \frac{\text{Ker } \partial_2}{\text{Im } \partial_3}, \quad H_1 = \frac{\text{Ker } \partial_1}{\text{Im } \partial_2}, \quad H_0 = \frac{\text{Ker } \partial_0}{\text{Im } \partial_1}.$$

C'est très facile à voir que $\text{Im } \partial_3 = 0$ et que $\text{Ker } \partial_0 = C_0$. **should elaborate on this ?**
De plus, comme ∂_2 est injectif, $\text{Ker } \partial_2 = 0$. Alors

$$H_2 = \frac{0}{\text{Im } \partial_3} = 0.$$

Pour trouver $\text{Ker } \partial_1$, on trouve une base de l'espace colonne de M_1 , ce que est un task de algèbre linéaire.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{R_2+R_1 \\ R_6+R_5}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{R_3+R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{R_4+R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

1.2. Complexe de Cech.

2. 2026-01-29

DÉFINITION 3. Une suite exacte courte d'espaces vectoriels est

on peut le voir comme un cas particulier d'un complexe de chaîne où $C_i = 0$ pour tous $i < 0, i > 2$.

convention : when we say the diagram commutes, we mean the solid lines. the dashed arrows are about the claim of the thm

LEMME 1. Donné un diagramme commutatif de lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & \\ 0 & \longrightarrow & X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \longrightarrow 0 \end{array}$$

Il existe une fonction linéaire $w: Z \rightarrow Z'$ tel que le carré à droite commute, i.e. $w \circ g = g' \circ v$.

maybe the zeros to the left are not needed.

DÉMONSTRATION. Soit $z \in Z$. □

DÉFINITION 4. Une filtration d'un complexe simplicial K est une suite de complexes simpliciaux

$$K(0) \subseteq K(1) \subseteq \cdots \subseteq K(n) = K$$

exemple : the big grid