Topologie Algebrique et Théorie de la Persistence – MAT873

Christian Chávez
Université de Sherbrooke

Table des matières

Chapitre 1

Des choses de base

Lecture 2026-01-08

may be check Schenck Chapter 4 Homology I : Simplicial Complexes to Sensor Networks

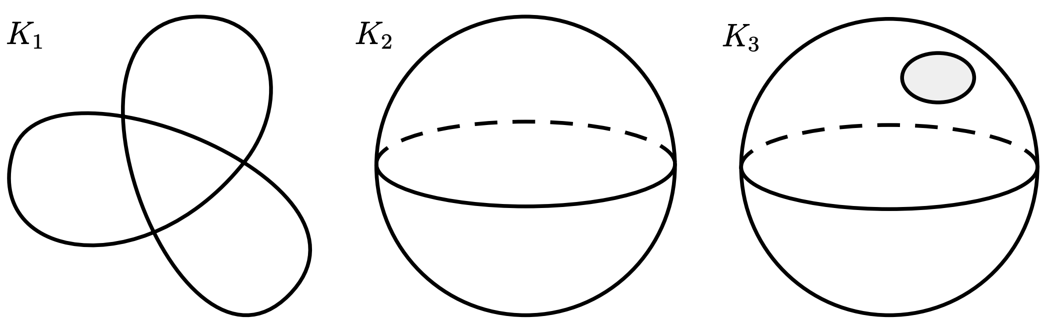
and chap 3 of Edelsbrunner

1. Motivation

Soit K un espace topologique.

1.1. Les groupes d'homologie. On voudrait compter les trous d'un espace topologique quelconque. Par exemple,

- la ligne réel n'a pas de trous
- si on prendre un segment de recte et join the bouts, on obtient un circle. il n'y a pas de trou dans le borde (otherwise it is not a circle). mais il enclose un trou.
-
- la sphère n'a pas de trous dans la surface (otgerwise is not an sphère), mais elle a un trou dedans, mais ce different de le trou que le circle enclose
- la sphère moins un disque a deux trous. pas vraiment.
- la figure du 8 a deux trous.i



K_1 est la ligne seulement, pas l'air qu'elle contient. Sino, on aurait peint l'interiéur.

Pour illustrer, on note par H_0 le nombre de composantes conexes, H_1 le nombre de trous de dimension 1, i.e., trous planars, H_2 le nombre de trous bidimensionals, etc.

Alors dans les figures ci-dessus, on a

$$\begin{aligned} &H_0(K_1) = \mathbb{Z}, \quad H_1(K_1) = \mathbb{Z}^4, \quad H_2(K_1) = 0 \\ &H_0(K_2) = \mathbb{Z}, \quad H_1(K_2) = \mathbb{Z}, \quad H_2(K_2) = \mathbb{Z} \\ &H_0(K_3) = \mathbb{Z}, \quad H_1(K_3) = 0, \quad H_2(K_3) = 0. \end{aligned}$$

We “encode” the number of conected components in the exponent. Notice that we always have $H_0 \geq 1$.

On va voir deux théorèmes importants :

THÉORÈME 1. Soient K et K' deux espaces topologiques. Si $K \cong K'$, alors $H_p(K) \cong H_p(K')$.

On remarque que le premier $\cong$ est un isomorphisme d'espaces topologiques et le deuxième $\cong$ est un isomorphisme de groupes.

THÉORÈME 2. Tout espace topologique est isomorphe à un complexe simplicial. est-ce que ceci est vrai ?

BUT : Définir *complexe simplicial.*

DÉFINITION 1. Un n-simplex σ est

DÉFINITION 2. On dit que n points $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^d$ sont **linéairement independants** si

$$\dim \operatorname{span} \{u_1, \dots, u_n\} = n$$

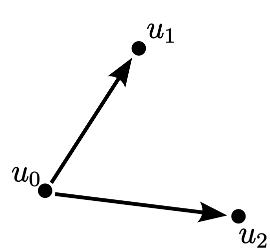
Il n'est pas necesaire d'ajouter la condition $n \leqslant d$ dans la définition.

Is a Singleton affinely independent ? By definition, no. But it should ! ? * Affine Independence is interesting from R^2 onwards, not R^1. Nest pas ?

DÉFINITION 3. On dit que $n+1$ points $u_0, \dots, u_n \in \mathbb{R}^d$ sont **affinement independants** si les n points $u_0 - u_1, \dots, u_0 - u_n$ sont linéairement independants

Le point u_0 n'est pas especial. On peut chosir un autre point de notre liste, disons u_j, er verifier que $u_j - u_1, \dots, u_j - u_n$ est linéairement independant.

Pour illustrer l'idée d'être affinement indépendants, on considere trois points. Si on prend u_0 comme origen, alors on a deux vecteurs, et on checke si son colineaires ou pas. les points aff. ind. si il ne sont pas dans la même ligne. l'origin n'importe pas, il s'agit d'une question geometrique et pas de la position dans le plan.



EXERCICE 1.1. Soit $\{u_0, \dots, u_n\}$ linéairement independant. Quel point peut-on ajouter so that on obtient un esemble affinement independant ?

La combinaison convexe de $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^d$ they need not be aff.indep. affinement independants est give intuition

$$\operatorname{conv}\{u_0, \dots, u_n\} = \left\{ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i u_i \;\middle|\; \lambda_i \geq 0 \text{ et } \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1 \right\}$$

Définition 4. Un n-**simplex** est la combinaison convexe de d'un ensemble fini de points affinement independants. Si $\sigma = \operatorname{conv}\{u_0, \dots, u_n\}$ est un simplex, son dimension est $\dim \sigma = n$.

Remarque 1. deux simplex peuvent avoir la même dimension même si apartient a differents espaces. E.g. un triangle dans le plan, un triangle dans l'espace, dans R4 il a toujours dimension 3.

define standard simplexes ? there are many segments, triangles and tetahedra, mais il y quelconques que sont distinguished.

Exemple 1.
(i) Pour $n = 0$, on a $\sigma = \operatorname{conv}\{u_0\} = \{u_0\}$, un singleton.
(ii) segment
(iii) triangle
(iv) tetraèdre

Soit $\sigma = \operatorname{conv}\{u_0, \dots, u_n\}$ un n-simplex et $S \subset \{u_0, \dots, u_n\}$ une partie non vide. Alors $\tau = \operatorname{conv} S$ est un simplex de dimension $|S| - 1$. On dit que τ est une face de σ. On écrit $\tau \leq \sigma$.

Remarque 2. On dit que τ est **propre** si $\tau \neq \sigma$. Dans ce cas là on note $\tau < \sigma$.

Exemple 2. Soient $u_0, \dots, u_3$ affinement independants. Alors $\sigma = \operatorname{conv}\{u_0, \dots, u_4\}$ est un tetraèdre et $\sigma = \operatorname{conv}\{u_0, \dots, u_3\}$ est un triangle. put a picture of a tetraèdre with a face shaded of some color en fait, est une face propre.

Pour un simplexe $\sigma = \operatorname{conv}\{u_0, \dots, u_n\}$, l'envelope de σ est

$$\operatorname{bd} \sigma = \bigcup_{\text{face propre } \tau \leq \sigma} \tau.$$

Ce signifie que l'envelope est la ligne exterieur, the boundary. L'interiéur de σ est $\sigma \setminus \operatorname{bd} \sigma$. Un point appartient à l'interieur si tous les λ_i sont positifs.

On arrive à notre but de cette section.

Définition 5. Un **complexe simplicial** K est un ensemble fini de simplexes tels que but what if they come from different ambient spaces ? we should mention this !

(i) si $\sigma \in K$ et $\tau \leq \sigma$, alors $\tau \in K$;
(ii) si $\sigma, \sigma' \in K$ et $\sigma \cap \sigma' \neq \varnothing$, alors $\sigma \cap \sigma' \leq \sigma$.

La **dimension** de K est

$$\dim K = \max_{\sigma \in K} (\dim \sigma) .$$

L'espace associé underlying space est

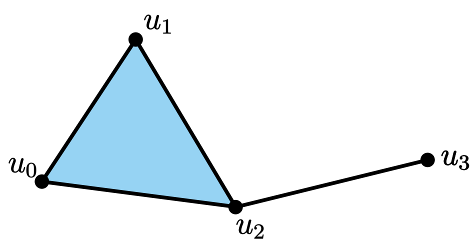
$$|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma.$$

C'est un espace topologique avec la topologie inherited from the ambient Euclidean space in which the simplices live so what does this mean ?

EXEMPLE 3. On considère le complexe simplicial

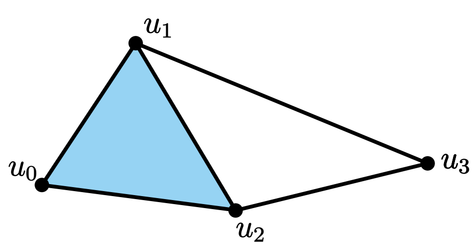
$K = \{\mathrm{conv}\{u_0, u_1, u_2\}, \mathrm{conv}\{u_0, u_1\}, \mathrm{conv}\{u_0, u_2\}, \mathrm{conv}\{u_1, u_2\}, \mathrm{conv}\{u_2, u_3\}, u_0, u_1, u_2, u_3.\}$

shouldn't be the singletons instead of the actual points in there ? Graphiquement :



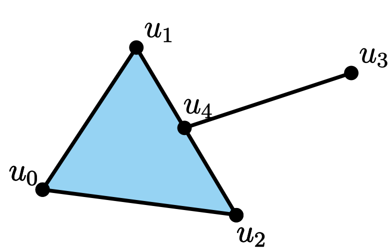
pintar los dibujos le quita formalidad ?

EXEMPLE 4. Soit K le complexe simplicial du dernier exemple. Si on ajoute le segment $\mathrm{conv}\{u_1, u_3\}$, on obtient le complexe suivant



et on peut avoir des choses qui ne sont pas connectées.

EXEMPLE 5 (Non exemple). Le problème ce que l'intersection des segment $\mathrm{conv}\{u_1, u_2\}$ et $\mathrm{conv}\{u_3, u_4\}$ n'est pas un element du K. Mais on peut bien l'ajouter.



i like this quote from Edelsbrunner It is often easier to construct a complex abstractly and worry about how to put it into Euclidean space later, if at all.

DÉFINITION 6. Un **complexe simplicial abstrait** A est un ensemble fini des ensembles finis, sauf $\varnothing$, tels que si $\sigma \in A$ et $\tau \subset \sigma$, alors $\tau \in A$. this means A is closed below, sth like that La dimension de A est

$$\dim A = \max_{\sigma \in A} \{|\sigma| - 1\} .$$

EXEMPLE 6. L'ensemble

$$A = \{\{0,1,2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}\}$$

Pour un ensemble fini de points $A = \{a_0, \ldots, a_n\}$, on note par $[a_0, \ldots, a_n]$ le ensemble de tous parties nonvides de A. Équivalentement, ?

$$[a_0, \ldots, a_n] = \mathscr{P}(\{a_0, \ldots, a_n\}) \setminus \{\varnothing\} .$$

EXEMPLE 7. On a

$$[0,1,2] = \{\{0,1,2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}\} .$$

REMARQUE 3. Si K est un complexe simplicial geométrique, son complexe abstrait $A(K)$ est donné par les ensembles $\{u_0, \ldots, u_n\}$ tels que

$$\operatorname{conv}\{u_0, \ldots, u_n\} \in K.$$

THÉORÈME 3 (Realization geométrique). Soit A un complexe simplicial abstrait de dimension n. Alors il existe un complexe simplicial geométrique $K \subset \mathbb{R}^{2d+1}$ tel que $A(K) = A$.

i'd like an extension to paste an image from the clipboard directly in vscode, in images folder, and adds the latex image snipet

Chapitre 2

Carquois et représentations

Chapitre 3

Entrelacement et stabilité

Chapitre 4

Applications

Bibliographie

[1] Herbert Edelsbrunner et John L. Harer. *Computational Topology : An Introduction*. T. 69. Miscellaneous Books. Providence, RI : American Mathematical Society, 2010, p. 241. isbn : 978-0-8218-4925-5. doi : 10.1090/mbk/069.

[2] Steve Y. Oudot. *Persistence Theory : From Quiver Representations to Data Analysis*. T. 209. Mathematical Surveys and Monographs. Providence, RI : American Mathematical Society, 2015, p. 218. isbn : 978-1-4704-2545-6. doi : 10.1090/surv/209.

[3] Hal Schenck. *Algebraic Foundations for Applied Topology and Data Analysis*. Mathematics of Data. Hardcover ISBN : 978-3-031-06663-4 ; eBook ISBN : 978-3-031-06664-1 ; Softcover ISBN : 978-3-031-06666-5. Cham : Springer, 2022. doi : 10.1007/978-3-031-06664-1.