CLUB DE MATEMÁTICAS YACHAY TECH

Topología
Curso Vacacional – Enero 2025
Instructor: Christian Chávez

Tarea 01

7 de enero de 2025

1. Espacios topológicos

Problema 1. Sea X un conjunto infinito y $p \in X$. Muestra que

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1 &= \{A \subseteq X \mid A = \varnothing \text{ o } X \setminus A \text{ es finito}\} \quad \text{y} \\ \mathcal{T}_2 &= \{A \subseteq X \mid A = \varnothing \text{ o } p \in A\} \end{aligned}$$

son topologías sobre X.

Problema 2.

(I) Sea $X = \{a, b, c, d\}$ dotado de la topología

$$\mathcal{T} = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}.$$

Encuentra una base y una subbase para $\mathcal{T}$.

(II) ¿Por qué una topología es una base para ella misma?

(III) Muestra que $\mathcal{B} = \{(a, b) \subseteq \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ es una base en $\mathbb{R}$ y que además $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \mathcal{T}_{\text{usual}}$. (Ayuda: usa el hecho de que todo real es el límite de una secuencia de racionales.)

2. Espacios métricos

Problema 3. Sea d una métrica en un conjunto X.

(I) Muestra que la función $D : X \times X \to [0, +\infty)$ definida por

$$(x, y) \mapsto \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

es una métrica en X.

(II) Muestra que d y D son equivalentes.

(III) Muestra que

$$\rho : X \times X \to [0, +\infty) \ : \ (x, y) \mapsto \text{mín}\{1, d(x, y)\}$$

es una métrica en X.

(IV) Supón que $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ es una función monótona creciente tal que $f(0) = 0$ y

$$f(x + y) \leq f(x) + f(y)$$

para todo $x, y \geq 0$. Muestra que $f \circ d$ es una métrica en X.

3. Posición de un punto respecto a un conjunto