CLUB DE MATEMÁTICAS YACHAY TECH

Topología
Curso Vacacional – Enero 2025
Instructor: Christian Chávez

Tarea 01 – Parte 2

27 de enero de 2025
Fecha de entrega:

3. Posición de un punto respecto a un conjunto

Problema 1. Sea A un subconjunto de un espacio topológico X. Verifica que $A^\circ \subset A$ y $A \subset \overline{A}$. Muestra que $(A^\circ)^\circ = A^\circ$ y $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Problema 2. Sean A y B un subconjuntos de un espacio topológico. Demuestra que

(I) si $A \subset B$, entonces $A^\circ \subset B^\circ$,

(II) si $A \subset B$, entonces $\operatorname{Ext} B \subset \operatorname{Ext} A$,

(III) si $A \subset B$, entonces $\overline{A} \subset \overline{B}$,

(IV) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ y $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Problema 3. Sea A un subconjunto de un espacio topológico. Demuestra que

(I) A es abierto si y solo si $A = A^\circ$,

(II) A es cerrado si y solo si $A = \overline{A}$,

(III) A es cerrado si y solo si $\partial A \subset A$,

(IV) A es cerrado si y solo si $A' \subset A$.

Problema 4. Sean A y B un subconjuntos de un espacio topológico.

(I) Demuestra que $\partial A = \partial(X \setminus A)$.

(II) Demuestra que $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$.

(III) Encuentra contraejemplos para $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$ y $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

(IV) Prueba que si A es un subespacio de X y $B \subset A$, entonces $\operatorname{Cl}_A B = (\operatorname{Cl}_X B) \cap A$. Aquí, Cl_A denota la clausura respecto a A, tomado como espacio topológico.