CLUB DE MATEMÁTICAS YACHAY TECH

Topología

Curso Vacacional – Enero 2025

Instructor: Christian Chávez

Tarea 02

27 de enero de 2025

Fecha de entrega: 26 de enero de 2025

1. Continuidad

Problema 1. Demuestra que

(i) La composición de funciones continuas es continua.

(ii) Si $\mathcal{T}$ y $\mathcal{U}$ son dos topologías sobre un conjunto X, entonces

$$1_X : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{U})$$

es continua si y solamente si $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$.

Problema 2 (Equivalencias de la definición de continuidad)**.** Demuestra que una función $f : X \to Y$ es continua si y solo si

(i) para todo $A \subset Y$ ocurre que $\operatorname{Cl} f^{-1}(A) \subset f^{-1}(\operatorname{Cl} A)$

(ii) dada $\mathcal{B}$ una base para la topología de Y, el conjunto $f^{-1}(B)$ es abierto en X para todo $B \in \mathcal{B}$.

Problema 3. Considera el mapa

$$f : [0,2] \to [0,2] \quad : \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1), \\ 3 - x & \text{si } x \in [1,2]. \end{cases}$$

Demuestra que f no es continua.

2. Homeomorfismos

Problema 4. Sea $f : X \to Y$ una biyección continua. Son equivalentes:

(i) f es un homeomorfismo.

(ii) f es abierta.

(III) f es cerrada.

Problema 5. Sea $f : X \to Y$ un homeomorfismo. Entonces, para todo $A \subset X$,

(I) $f(\mathrm{Cl}\, A) = \mathrm{Cl}(f(A))$

(II) $f(\mathrm{Int}\, A) = \mathrm{Int}(f(A))$

(III) $f(\mathrm{Fr}\, A) = \mathrm{Fr}(f(A))$

(IV) A es un entorno de un punto $x \in X$ si y solo si $f(A)$ es un entorno del punto $f(x)$

3. Convergencia y continuidad en espacios métricos

Sean (X, d) y (Y, ρ) espacios métricos.

Problema 6. Sea $f : X \to Y$. Demuestra que son equivalentes:

(I) f es continua sobre X (con la definición de espacios métricos)

(II) Para cualquier abierto $V \subset Y$, el conjunto $f^{-1}(V)$ es abierto en X

Definición. Una función $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ es **lipschitz** si existe una constante $L > 0$ tal que

$$\rho(f(x), f(y)) \leq L\, d(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

Problema 7. Demuestra que si una función es Lipschitz, entonces es continua.