CLUB DE MATEMÁTICAS YACHAY TECH

Topología
Curso Vacacional – Enero 2025
Instructor: Christian Chávez

Tarea 01 – Parte 1

8 de enero de 2025
Fecha de entrega: 19 de enero de 2025

1. Espacios topológicos

Problema 1. Sea X un conjunto infinito y $p \in X$. Muestra que

$$\mathcal{T}_1 = \{A \subseteq X \mid A = \varnothing \text{ o } X \setminus A \text{ es finito}\} \quad \text{y}$$
$$\mathcal{T}_2 = \{A \subseteq X \mid A = \varnothing \text{ o } p \in A\}$$

son topologías sobre X.

Problema 2.

(I) Sea $X = \{a, b, c, d\}$ dotado de la topología

$$\mathcal{T} = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}.$$

Encuentra una base y una subbase para $\mathcal{T}$.

(II) ¿Por qué una topología es una base para ella misma?

(III) Muestra que $\mathcal{B} = \{(a, b) \subseteq \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ es una base en $\mathbb{R}$ y que además $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \mathcal{T}_{\text{usual}}$. (Ayuda: usa el hecho de que todo real es el límite de una secuencia de racionales.)

2. Espacios métricos

Problema 3. (I) Muestra que la suma/el máximo de métricas es una métrica. En otras palabras, si d y ρ son métricas sobre un conjunto M, entonces $d + \rho$ definida por $(d + \rho)(x, y) = d(x, y) + \rho(x, y)$ es una métrica sobre M. Similarmente, $\xi(x, y) = \text{máx}\,\{d(x, y), \rho(x, y)\}$ es una métrica sobre M.

(II) Muestra que las siguientes funciones son métricas en $\mathbb{R}^n$.

(a) $d(x, y) = \text{máx}\{|x_i - y_i| : 1 \leq i \leq n\}$.

(b) $\rho(x, y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|$.

Problema 4. Sea d una métrica en un conjunto X.

(I) Muestra que la función $D : X \times X \to [0, +\infty)$ definida por

$$(x, y) \mapsto \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

es una métrica en X.

(II) Muestra que d y D son equivalentes.

(III) Muestra que

$$\rho : X \times X \to [0, +\infty) \ : \ (x, y) \mapsto \min\{1, d(x, y)\}$$

es una métrica en X.

(IV) Supón que $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ es una función monótona creciente tal que $f(0) = 0$ y

$$f(x + y) \leq f(x) + f(y)$$

para todo $x, y \geq 0$. Muestra que $f \circ d$ es una métrica en X.