CLUB DE MATEMÁTICAS YACHAY TECH

Topología

Curso Vacacional – Enero 2025

Instructor: Christian Chávez

Examen final

28 de enero de 2025

Fecha de entrega: 31 de enero de 2025

Todos los problemas tienen el mismo valor. Se deben resolver exactamente 10 problemas y se debe seleccionar al menos un problema de cada sección.

1. Espacios Topológicos

Problema 1. Sea X un conjunto. Sea $\mathcal{T}$ un subconjunto del conjunto potencia de X. Muestra que $\mathcal{T}$ es una topología sobre X si, y solamente si,

(i) $\varnothing, X \in \mathcal{T}$,

(ii) la intersección de cualquier familia arbitraria de conjuntos cerrados de X (respecto a $\mathcal{T}$) es un subconjunto cerrado de X (respecto a $\mathcal{T}$), y

(iii) la unión de cualquier familia finita de subconjuntos cerrados de X (respecto a $\mathcal{T}$) es un subconjunto cerrado de X (respecto a $\mathcal{T}$).

Problema 2. Considera

$$\Upsilon = \left\{ A \subset \mathbb{Z}^+ \;\middle|\; \forall m \in \mathbb{Z}^+, \forall n \in A : m|n \implies m \in A \right\}$$

Muestra que $\Omega = \{O \subset \mathbb{Z}^+ \mid \mathbb{Z}^+ \setminus O \in \Upsilon\}$ es una topología sobre los enteros positivos. (La relación $|$ se define así: $a \mid b$ ssi $ak = n$ para algún $k \in \mathbb{Z}^+$.)

Problema 3. Considera la colección

$$\mathcal{B} = \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

(i) Prueba que $\mathcal{B}$ es una base para alguna topología en $\mathbb{R}$. ¿Por que esa topología es única? Esta topología se llama la topología del límite inferior, y el espacio topológico asociado se llama la línea de Sorgenfrey.

(ii) Muestra que la topología del límite inferior es más fina que la topología usual de $\mathbb{R}$.

(iii) Muestra que en esta topología, todo abierto también es cerrado.

2.

Problema 4. Sea $X = \mathcal{C}([0,1])$, el conjunto de todas las funciones continuas $[0,1] \to \mathbb{R}$. Muestra que la siguiente reglas de asignación definen métricas sobre X:

$$(f,g) \mapsto \int_0^1 |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x \quad \text{y} \quad (f,g) \mapsto \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|.$$

Problema 5. Un espacio normado es un par $(V, \|\cdot\|)$ donde V es un espacio vectorial y $\|\cdot\|$ es una norma sobre V. Muestra que un espacio normado se puede dotar de una topología de una manera canónica.

Problema 6. Sea d una métrica en un conjunto X. Muestra que

(I) la función $\xi : X \times X \to [0, +\infty)$ definida por

$$(x,y) \mapsto \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$$

es una métrica en X

(II) ξ es **topológicamente equivalente** a d.

3. Posición de un Punto Respecto a un Conjunto

Problema 7. Sea X un espacio topológico y $A \subset X$.

(I) Define la clausura de A en X. ¿Por qué $\overline{A}$ es cerrado?

(II) Define el interior de A en X. ¿Por qué A° es abierto?

Problema 8. Sea A un subconjunto de un espacio topológico. Demuestra que

(I) A es abierto si y solo si $A = A^\circ$

(II) A es cerrado si y solo si $A = \overline{A}$

(III) $\overline{A} = A \cup A'$

(IV) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$

Problema 9. Sea (M,d) un espacio métrico, $A \subset X$ y $p \in M$. La distancia de p a A se define como

$$d(p,A) = \text{ínf}\,\{d(p,a) \mid a \in A\}\,.$$

Supón que A es cerrado. Muestra que $d(p,A) = 0$ si, y solo si, $p \in A$.

4. Continuidad & Homeomorfismos

Problema 10. Sean X y Y espacios topológicos, y sea $\mathcal{B}$ una base para la topología de Y. Considera una función $f\colon X \to Y$. Demuestra que f es continua si y solo si $f^{-1}(B)$ es abierto en X para todo $B \in \mathcal{B}$.

Problema 11. Sea $X = \{a, b, c, d\}$ dotado de la topología

$$\mathcal{T} = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}.$$

Define una función continua $X \xrightarrow{\varphi} X$.

Problema 12. Sea X un conjunto y $(Y, \mathcal{T}_Y)$ un espacio topológico. Toma una función $f\colon X \to Y$. Demuestra que

$$\mathcal{T}_X = \left\{ f^{-1}(O) \mid O \in \mathcal{T}_Y \right\}$$

es una topología sobre X. Si X se dota de esta topología, ¿por qué f es continua?

5. Propiedades Topológicas

Problema 13. Sea X un espacio topológico.

(i) Define densidad respecto al espacio y respecto a un super conjunto (B es super conjunto de A si B contiene a A, i.e. $B \supset A$).

(ii) Sea $D \subset X$. Muestra que $\overline{D} = X$ si, y solamente si, D interseca a todo abierto no vacío de X.

Problema 14. Sea $f\colon X \to Y$ un homeomorfismo. Recuerda que una propiedad topológica es aquella que se puede enunciar en términos de conjuntos abiertos. Una invariante topológica es una propiedad que se preserva bajo homeomorfismos. Demuestra que

(i) X es Hausdorff si y solamente si Y lo es

(ii) X es conexo si y solamente si Y lo es

(iii) X es conexo por caminos si y solamente si Y lo es

(iv) X es compacto si y solamente si Y lo es

Problema 15.

(i) Define el segundo axioma de numerabilidad ANII.

(ii) Define segundo axioma de separación $\mathbf{T}_2$

(iii) Prueba que un espacio métrico es Hausdorff

(iv) Prueba que si un espacio métrico es segundo contable, entonces es separable. (Recuerda: un espacio topológico es separable si contiene un subconjunto que es denso en todas partes y que es contable.)

6. Construcciones Topológicas

Problema 16. Sea $(X_\lambda, \mathcal{T}_\Lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una familia finita de espacios topológicos.

(i) Define la topología producto sobre $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$.

(ii) Define las proyecciones canónicas y muestra que son continuas respecto a la topología producto. ¿Qué significa que la topología producto sea la más gruesa (= débil) para la cual las proyecciones canónicas son continuas?

Problema 17. Sea $X \times Y$ dotado de la topología producto.

(i) Describe los entornos de un punto $p \in X \times Y$.

(ii) Demuestra que si X y Y son Hausdorff, $X \times Y$ también

Problema 18.

(i) Define qué es una relación de equivalencia.

(ii) Muestra que una relación de equivalencia induce una partición de manera canónica y vice versa.

(iii) El conjunto cociente de un conjunto X por una relación de equivalencia $\sim$ (sobre X) se denota $X/\sim$. Da la definición precisa de $X/\sim$.

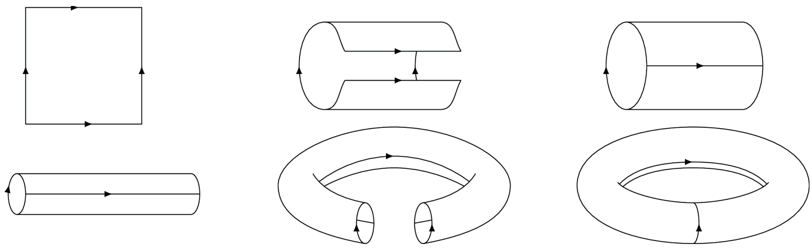
(iv) Define la proyección canónica $\pi\colon X \to X/\sim$

Problema 19. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $\sim$ una relación de equivalencia sobre X. Demuestra que la colección

$$\mathcal{Q} = \left\{ A \subset X/\sim \;\middle|\; \pi^{-1}(A) \in \mathcal{T} \right\}$$

es una topología en $X/\sim$.

Problema 20. El toro topológico se define como el espacio producto $S^1 \times S^1$.



Sabemos que

$$S^1 \times S^1 \cong I^2/[(0,t) \sim (1,t),\ (t,0) \sim (t,1)].$$

Describe explícitamente $\sim$ y la partición que ella genera. Aquí I denota el intervalo unitario $[0,1]$.