

Tarea 02

17 de enero de 2025

Fecha de entrega: 26 de enero de 2025

1. Continuidad

Problema 1. Demuestra que

- (I) La composición de funciones continuas es continua.
- (II) Si \mathcal{T} y \mathcal{U} son dos topologías sobre un conjunto X , entonces

$$1_X: (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{U})$$

es continua si y solamente si $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$.

Problema 2 (Equivalencias de la definición de continuidad). Demuestra que una función $f: X \rightarrow Y$ es continua si y solo si

- (I) para todo $A \subset Y$ ocurre que $\text{Cl } f^{-1}(A) \subset f^{-1}(\text{Cl } A)$
- (II) dada \mathcal{B} una base para la topología de Y , el conjunto $f^{-1}(B)$ es abierto en X para todo $B \in \mathcal{B}$.

Problema 3. Considera el mapa

$$f: [0, 2] \rightarrow [0, 2] \quad : \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1), \\ 3 - x & \text{si } x \in [1, 2]. \end{cases}$$

Demuestra que f no es continua.

2. Homeomorfismos

Problema 4. Sea $f: X \rightarrow Y$ una biyección continua. Son equivalentes:

- (I) f es un homeomorfismo.
- (II) f es abierta.

(III) f es cerrada.

Problema 5. Sea $f : X \rightarrow Y$ un homeomorfismo. Entonces, para todo $A \subset X$,

(I) $f(\text{Cl } A) = \text{Cl}(f(A))$

(II) $f(\text{Int } A) = \text{Int}(f(A))$

(III) $f(\text{Fr } A) = \text{Fr}(f(A))$

(IV) A es un entorno de un punto $x \in X$ si y solo si $f(A)$ es un entorno del punto $f(x)$

3. Convergencia y continuidad en espacios métricos

Sean (X, d) y (Y, ρ) espacios métricos.

Problema 6. Sea $f : X \rightarrow Y$. Demuestra que son equivalentes.

(I) f es continua sobre X (con la definición de espacios métricos)

(II) Para cualquier abierto $V \subset Y$, $f^{-1}(V)$ es abierto en X

Definición. Una función $f : (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$ es **lipschitz** si existe una constante $L > 0$ tal que

$$\rho(f(x), f(y)) \leq L d(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

Problema 7. Demuestra que si una función es Lipschitz, entonces es continua.