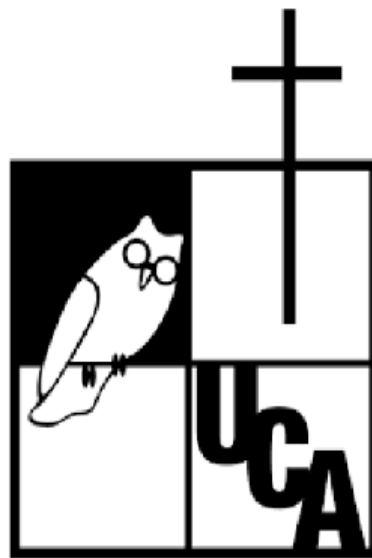


# UNIVERSIDAD CENTROAMERICANA JOSÉ SIMEÓN CAÑAS

Viernes 28 de Junio del 2024



**Modelo en 4D para el Método de los Elementos Finitos**

**Docente:** Ing. Jorge Alfredo López Sorto

## **Integrantes**

RICARDO ALEXANDER LOPEZ HERNANDEZ 00107521

RICARDO JOSÉ SIBRIAN RIVERA 00173821

BILLY RENÉ VALENCIA MARROQUÍN 00124621

CHRISTIAN JOEL LÓPEZ ORTEGA 00179320

## Planteamiento del Modelo en 4D

Primero, definimos el operador gradiente en 4D:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial w} \end{pmatrix}$$

La ecuación diferencial en 4D se plantea como:

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(k \frac{\partial T}{\partial w}\right)\right) = Q$$

En forma matricial, esto se expresa como:

$$-(\nabla \cdot [k \nabla T]) = Q$$

Donde  $\nabla$  en 4D es:

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial w} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la formulación completa en 4D es:

$$-\left(\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial w} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \frac{\partial T}{\partial x} \\ k \frac{\partial T}{\partial y} \\ k \frac{\partial T}{\partial z} \\ k \frac{\partial T}{\partial w} \end{pmatrix}\right) = Q$$

## Localizacion

**Funciones de Forma:**

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \epsilon - \eta - \phi - \theta \\ N_2 &= \epsilon \\ N_3 &= \eta \\ N_4 &= \phi \\ N_5 &= \theta \end{aligned}$$

Dada la forma y naturaleza de un elemento localizado como un pentacoro resulta difícil visualizar su geometría en el plano isoparamétrico, sin embargo podemos partir de las funciones de forma que tenemos y establecer las coordenadas de sus vértices como los siguientes: (0,0,0,0), (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1).

**Condición de Partición de la Unidad:**

$$N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 = 1 - \epsilon - \eta - \phi - \theta + \epsilon + \eta + \phi + \theta = 1$$

**Condición de Mantenimiento de la Frontera:**

$$\begin{aligned} N_1(0,0,0,0) * T_1 + N_2(0,0,0,0) * T_2 + N_3(0,0,0,0) * T_3 + N_4(0,0,0,0) * T_4 + N_5(0,0,0,0) * T_5 &= T_1 \\ N_1(1,0,0,0) * T_1 + N_2(1,0,0,0) * T_2 + N_3(1,0,0,0) * T_3 + N_4(1,0,0,0) * T_4 + N_5(1,0,0,0) * T_5 &= T_2 \\ N_1(0,1,0,0) * T_1 + N_2(0,1,0,0) * T_2 + N_3(0,1,0,0) * T_3 + N_4(0,1,0,0) * T_4 + N_5(0,1,0,0) * T_5 &= T_3 \\ N_1(0,0,1,0) * T_1 + N_2(0,0,1,0) * T_2 + N_3(0,0,1,0) * T_3 + N_4(0,0,1,0) * T_4 + N_5(0,0,1,0) * T_5 &= T_4 \\ N_1(0,0,0,1) * T_1 + N_2(0,0,0,1) * T_2 + N_3(0,0,0,1) * T_3 + N_4(0,0,0,1) * T_4 + N_5(0,0,0,1) * T_5 &= T_5 \end{aligned}$$

## Interpolación del modelo

Usando las siguientes funciones de forma:

$$\begin{cases} N_1 = 1 - \epsilon - \eta - \phi - \theta \\ N_2 = \epsilon \\ N_3 = \eta \\ N_4 = \phi \\ N_5 = \theta \end{cases}$$

$$-\nabla \cdot (k \nabla T) = Q$$

$$T \approx N_1 T_1 + N_2 T_2 + N_3 T_3 + N_4 T_4 + N_5 T_5$$

$$= \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & N_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{T}$$

$$T \approx \mathbf{N} \mathbf{T}$$

## Aproximación del modelo

$$-\nabla \cdot (k \nabla T) = Q$$

$$-\nabla \cdot (k \nabla (NT)) \approx Q$$

## Definición del Residual

$$\mathcal{R} = Q + \nabla \cdot (k \nabla (NT))$$

## Método de los residuos ponderados

$$\mathcal{R} = Q + \nabla \cdot (k \nabla (NT))$$

$$\int_H \mathbf{W} \mathcal{R} dH = 0$$

$$\int_H \mathbf{W} (Q + \nabla \cdot (k \nabla (NT))) dH = 0$$

## Método de Galerkin

$$\mathbf{W} = \mathbf{N}^T$$

$$\int_H \mathbf{N}^T (Q + \nabla \cdot (k \nabla (NT))) dH = 0$$

## Planteamiento de la integral

$$\begin{aligned} \int_H \mathbf{N}^T Q \, dH + \int_H \mathbf{N}^T \nabla \cdot (k \nabla (NT)) \, dH &= 0 \\ \int_H \mathbf{N}^T Q \, dH + \left( \int_H \mathbf{N}^T \nabla \cdot (k \nabla \mathbf{N}) \, dH \right) \mathbf{T} &= 0 \\ - \left( \int_H \mathbf{N}^T \nabla \cdot (k \nabla \mathbf{N}) \, dH \right) \mathbf{T} &= \int_H \mathbf{N}^T Q \, dH \end{aligned}$$

## Lado derecho de la integral

$$\begin{aligned} Q \int_H \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \end{bmatrix} dH \\ Q \int_H \begin{bmatrix} 1 - \epsilon - \eta - \phi - \theta \\ \epsilon \\ \eta \\ \phi \\ \theta \end{bmatrix} dx dy dz dw \end{aligned}$$

Usando el Jacobiano de transformación:

$$dx dy dz dw = J d\epsilon d\eta d\phi d\theta$$

Entonces:

$$\begin{aligned} Q \int_H \begin{bmatrix} 1 - \epsilon - \eta - \phi - \theta \\ \epsilon \\ \eta \\ \phi \\ \theta \end{bmatrix} J d\epsilon d\eta d\phi d\theta \\ QJ \int_0^1 \int_0^{1-\theta} \int_0^{1-\phi-\theta} \int_0^{1-\eta-\phi-\theta} \begin{bmatrix} 1 - \epsilon - \eta - \phi - \theta \\ \epsilon \\ \eta \\ \phi \\ \theta \end{bmatrix} d\epsilon d\eta d\phi d\theta \end{aligned}$$

## Integral con respecto a $\epsilon$

$$QJ \int_0^1 \int_0^{1-\theta} \int_0^{1-\phi-\theta} \int_0^{1-\eta-\phi-\theta} \epsilon \, d\epsilon d\eta d\phi d\theta$$

Paso 1: Integral más interna

La integral más interna es:

$$\int_0^{1-\eta-\phi-\theta} \epsilon \, d\epsilon$$

Resolvemos esta integral:

$$\int \epsilon d\epsilon = \frac{\epsilon^2}{2}$$

Evalúamos de 0 a  $1 - \eta - \phi - \theta$ :

$$\left. \frac{\epsilon^2}{2} \right|_0^{1-\eta-\phi-\theta} = \frac{(1-\eta-\phi-\theta)^2}{2}$$

Por lo tanto, el resultado de la integral más interna es:

$$\frac{(1-\eta-\phi-\theta)^2}{2}$$

Paso 2: Segunda integral

Ahora consideramos la segunda integral, utilizando el resultado anterior:

$$\int_0^{1-\phi-\theta} \frac{(1-\eta-\phi-\theta)^2}{2} d\eta$$

Expandimos el integrando:

$$\frac{1}{2} \int_0^{1-\phi-\theta} (1-\eta-\phi-\theta)^2 d\eta$$

La integral de  $(1-\eta-\phi-\theta)^2$  respecto a  $\eta$  es:

$$\int (1-\eta-\phi-\theta)^2 d\eta$$

Expandimos el cuadrado:

$$(1-\eta-\phi-\theta)^2 = (1-\phi-\theta-\eta)^2 = (1-\phi-\theta)^2 - 2(1-\phi-\theta)\eta + \eta^2$$

Ahora integramos término a término:

$$\int_0^{1-\phi-\theta} [(1-\phi-\theta)^2 - 2(1-\phi-\theta)\eta + \eta^2] d\eta$$

Esto se puede dividir en tres integrales:

$$(1-\phi-\theta)^2 \int_0^{1-\phi-\theta} 1 d\eta - 2(1-\phi-\theta) \int_0^{1-\phi-\theta} \eta d\eta + \int_0^{1-\phi-\theta} \eta^2 d\eta$$

Evalúamos cada una de estas integrales:

$$\int_0^{1-\phi-\theta} 1 d\eta = (1-\phi-\theta)$$

$$\int_0^{1-\phi-\theta} \eta \, d\eta = \frac{\eta^2}{2} \Big|_0^{1-\phi-\theta} = \frac{(1-\phi-\theta)^2}{2}$$

$$\int_0^{1-\phi-\theta} \eta^2 \, d\eta = \frac{\eta^3}{3} \Big|_0^{1-\phi-\theta} = \frac{(1-\phi-\theta)^3}{3}$$

Sustituimos estos resultados en la integral original:

$$\frac{1}{2} \left[ (1-\phi-\theta)^2(1-\phi-\theta) - 2(1-\phi-\theta) \frac{(1-\phi-\theta)^2}{2} + \frac{(1-\phi-\theta)^3}{3} \right]$$

Simplificamos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[ (1-\phi-\theta)^3 - (1-\phi-\theta)^3 + \frac{(1-\phi-\theta)^3}{3} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{(1-\phi-\theta)^3}{3} \right] = \frac{(1-\phi-\theta)^3}{6} \end{aligned}$$

Paso 3: Tercera integral

La siguiente integral es:

$$\int_0^{1-\theta} \frac{(1-\phi-\theta)^3}{6} \, d\phi$$

Resolvemos esta integral:

$$\int_0^{1-\theta} (1-\phi-\theta)^3 \, d\phi$$

Sea  $u = 1 - \phi - \theta$ , entonces  $du = -d\phi$ . Los límites de integración cambian de  $\phi = 0$  a  $\phi = 1 - \theta$ , a  $u = 1 - \theta$  a  $u = 0$ .

La integral se convierte en:

$$- \int_{1-\theta}^0 u^3 \, du = \int_0^{1-\theta} u^3 \, du$$

Integramos:

$$\int u^3 \, du = \frac{u^4}{4}$$

Evaluamos de 0 a  $1 - \theta$ :

$$\frac{u^4}{4} \Big|_0^{1-\theta} = \frac{(1-\theta)^4}{4}$$

No olvidemos el factor  $\frac{1}{6}$ :

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{(1-\theta)^4}{4} = \frac{(1-\theta)^4}{24}$$

Paso 4: Integral más externa

Finalmente, consideramos la integral más externa:

$$\int_0^1 \frac{(1-\theta)^4}{24} d\theta$$

Resolvemos esta integral:

$$\frac{1}{24} \int_0^1 (1-\theta)^4 d\theta$$

Sea  $u = 1 - \theta$ , entonces  $du = -d\theta$ . Los límites de integración cambian de  $\theta = 0$  a  $\theta = 1$ , a  $u = 1$  a  $u = 0$ .

La integral se convierte en:

$$-\frac{1}{24} \int_1^0 u^4 du = \frac{1}{24} \int_0^1 u^4 du$$

Integramos:

$$\int u^4 du = \frac{u^5}{5}$$

Evalúamos de 0 a 1:

$$\left. \frac{u^5}{5} \right|_0^1 = \frac{1}{5}$$

No olvidemos el factor  $\frac{1}{24}$ :

$$\frac{1}{24} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{120}$$

Por lo tanto, el resultado de la integral cuádruple es:

$$QJ \cdot \frac{1}{120}$$

## Integral con respecto a $\eta$

$$QJ \int_0^1 \int_0^{1-\theta} \int_0^{1-\phi-\theta} \int_0^{1-\eta-\phi-\theta} \eta d\epsilon d\eta d\phi d\theta$$

Paso 1: Integral más interna

La integral más interna es:

$$\int_0^{1-\eta-\phi-\theta} \eta d\epsilon$$

Como  $\eta$  es constante respecto a  $\epsilon$ , podemos sacarla fuera de la integral:

$$\eta \int_0^{1-\eta-\phi-\theta} 1 d\epsilon$$

La integral de 1 respecto a  $\epsilon$  es simplemente  $\epsilon$ , por lo que:

$$\eta \epsilon|_0^{1-\eta-\phi-\theta} = \eta(1 - \eta - \phi - \theta)$$

Por lo tanto, el resultado de la integral más interna es:

$$\eta(1 - \eta - \phi - \theta)$$

Paso 2: Segunda integral

Ahora consideramos la segunda integral, utilizando el resultado anterior:

$$\int_0^{1-\phi-\theta} \eta(1 - \eta - \phi - \theta) d\eta$$

Expandimos el integrando:

$$\int_0^{1-\phi-\theta} (\eta - \eta^2 - \eta\phi - \eta\theta) d\eta$$

Podemos dividir esto en cuatro integrales separadas:

$$\int_0^{1-\phi-\theta} \eta d\eta - \int_0^{1-\phi-\theta} \eta^2 d\eta - \phi \int_0^{1-\phi-\theta} \eta d\eta - \theta \int_0^{1-\phi-\theta} \eta d\eta$$

Evaluamos cada una de estas integrales:

$$\begin{aligned} \int_0^{1-\phi-\theta} \eta d\eta &= \frac{\eta^2}{2} \Big|_0^{1-\phi-\theta} = \frac{(1-\phi-\theta)^2}{2} \\ \int_0^{1-\phi-\theta} \eta^2 d\eta &= \frac{\eta^3}{3} \Big|_0^{1-\phi-\theta} = \frac{(1-\phi-\theta)^3}{3} \\ \phi \int_0^{1-\phi-\theta} \eta d\eta &= \phi \frac{\eta^2}{2} \Big|_0^{1-\phi-\theta} = \phi \cdot \frac{(1-\phi-\theta)^2}{2} \\ \theta \int_0^{1-\phi-\theta} \eta d\eta &= \theta \frac{\eta^2}{2} \Big|_0^{1-\phi-\theta} = \theta \cdot \frac{(1-\phi-\theta)^2}{2} \end{aligned}$$

Sustituimos estos resultados en la integral original:

$$\frac{(1-\phi-\theta)^2}{2} - \frac{(1-\phi-\theta)^3}{3} - \phi \cdot \frac{(1-\phi-\theta)^2}{2} - \theta \cdot \frac{(1-\phi-\theta)^2}{2}$$



Simplificamos:

$$\begin{aligned} & \frac{(1-\phi-\theta)^2}{2} - \frac{(1-\phi-\theta)^3}{3} - \frac{\phi(1-\phi-\theta)^2}{2} - \frac{\theta(1-\phi-\theta)^2}{2} \\ &= \frac{(1-\phi-\theta)^2}{2} (1-\phi-\theta) - \frac{(1-\phi-\theta)^3}{3} \end{aligned}$$

Paso 3: Tercera integral

La siguiente integral es:

$$\int_0^{1-\theta} \left[ \frac{(1-\phi-\theta)^2}{2} (1-\phi-\theta) - \frac{(1-\phi-\theta)^3}{3} \right] d\phi$$

Podemos dividir esto en dos integrales separadas:

$$\int_0^{1-\theta} \frac{(1-\phi-\theta)^2}{2} (1-\phi-\theta) d\phi - \int_0^{1-\theta} \frac{(1-\phi-\theta)^3}{3} d\phi$$

Resolvemos cada una de estas integrales por separado.

Para la primera integral, sea  $u = 1 - \phi - \theta$ , entonces  $du = -d\phi$ . Los límites de integración cambian de  $\phi = 0$  a  $\phi = 1 - \theta$ , a  $u = 1 - \theta$  a  $u = 0$ .

La integral se convierte en:

$$- \int_{1-\theta}^0 \frac{u^2}{2} u du = \int_0^{1-\theta} \frac{u^3}{2} du$$

Integramos:

$$\frac{1}{2} \int u^3 du = \frac{1}{2} \frac{u^4}{4} \Big|_0^{1-\theta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-\theta)^4}{4} = \frac{(1-\theta)^4}{8}$$

Para la segunda integral, utilizamos el mismo cambio de variable:

$$- \int_{1-\theta}^0 \frac{u^3}{3} du = \int_0^{1-\theta} \frac{u^3}{3} du$$

Integramos:

$$\frac{1}{3} \int u^3 du = \frac{1}{3} \frac{u^4}{4} \Big|_0^{1-\theta} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(1-\theta)^4}{4} = \frac{(1-\theta)^4}{12}$$

Sumamos las dos integrales:

$$\frac{(1-\theta)^4}{8} - \frac{(1-\theta)^4}{12}$$

Combinamos los términos:

$$\frac{3(1-\theta)^4}{24} - \frac{2(1-\theta)^4}{24} = \frac{(1-\theta)^4}{24}$$

Paso 4: Integral más externa

Finalmente, consideramos la integral más externa:

$$\int_0^1 \frac{(1-\theta)^4}{24} d\theta$$

Resolvemos esta integral:

$$\frac{1}{24} \int_0^1 (1-\theta)^4 d\theta$$

Sea  $u = 1 - \theta$ , entonces  $du = -d\theta$ . Los límites de integración cambian de  $\theta = 0$  a  $\theta = 1$ , a  $u = 1$  a  $u = 0$ .

La integral se convierte en:

$$-\frac{1}{24} \int_1^0 u^4 du = \frac{1}{24} \int_0^1 u^4 du$$

Integramos:

$$\int u^4 du = \frac{u^5}{5}$$

Evalúamos de 0 a 1:

$$\left. \frac{u^5}{5} \right|_0^1 = \frac{1}{5}$$

No olvidemos el factor  $\frac{1}{24}$ :

$$\frac{1}{24} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{120}$$

Por lo tanto, el resultado de la integral cuádruple es:

$$QJ \cdot \frac{1}{120}$$

## Integral con respecto a $\phi$

$$QJ \int_0^1 \int_0^{1-\theta} \int_0^{1-\phi-\theta} \int_0^{1-\eta-\phi-\theta} \phi d\epsilon d\eta d\phi d\theta$$

Paso 1: Integral más interna

La integral más interna es:

$$\int_0^{1-\eta-\phi-\theta} \phi d\epsilon$$

Dado que  $\phi$  es una constante respecto a  $\epsilon$ , podemos sacarla fuera de la integral:

$$\phi \int_0^{1-\eta-\phi-\theta} d\epsilon$$

Resolvemos esta integral:

$$\phi \epsilon \Big|_0^{1-\eta-\phi-\theta} = \phi(1-\eta-\phi-\theta)$$

Paso 2: Segunda integral

Ahora consideramos la segunda integral, utilizando el resultado anterior:

$$\int_0^{1-\phi-\theta} \phi(1-\eta-\phi-\theta) d\eta$$

Distribuimos  $\phi$ :

$$\phi \int_0^{1-\phi-\theta} (1-\eta-\phi-\theta) d\eta$$

La integral de  $(1-\eta-\phi-\theta)$  respecto a  $\eta$  es:

$$\int (1-\eta-\phi-\theta) d\eta = (1-\phi-\theta)\eta - \frac{\eta^2}{2}$$

Evaluamos esta integral desde  $\eta = 0$  hasta  $\eta = 1-\phi-\theta$ :

$$\left[ (1-\phi-\theta)\eta - \frac{\eta^2}{2} \right]_0^{1-\phi-\theta} = (1-\phi-\theta)(1-\phi-\theta) - \frac{(1-\phi-\theta)^2}{2}$$

Simplificamos:

$$(1-\phi-\theta)^2 - \frac{(1-\phi-\theta)^2}{2} = \frac{(1-\phi-\theta)^2}{2}$$

Paso 3: Tercera integral

La siguiente integral es:

$$\int_0^{1-\theta} \phi \cdot \frac{(1-\phi-\theta)^2}{2} d\phi$$

Simplificamos:

$$\frac{1}{2} \int_0^{1-\theta} \phi(1-\phi-\theta)^2 d\phi$$

Para resolver esta integral, sea  $u = 1 - \phi - \theta$ , entonces  $du = -d\phi$  y los límites de integración cambian de  $\phi = 0$  a  $\phi = 1 - \theta$ , a  $u = 1 - \theta$  a  $u = 0$ .

La integral se convierte en:

$$-\frac{1}{2} \int_{1-\theta}^0 (1-u-\theta)u^2 du = \frac{1}{2} \int_0^{1-\theta} (1-u-\theta)u^2 du$$

Distribuimos  $u^2$ :

$$\frac{1}{2} \int_0^{1-\theta} (u^2 - u^3 - \theta u^2) du$$

Integramos término a término:

$$\frac{1}{2} \left[ \int_0^{1-\theta} u^2 du - \int_0^{1-\theta} u^3 du - \theta \int_0^{1-\theta} u^2 du \right]$$

Resolvemos cada integral:

$$\int_0^{1-\theta} u^2 du = \frac{u^3}{3} \Big|_0^{1-\theta} = \frac{(1-\theta)^3}{3}$$

$$\int_0^{1-\theta} u^3 du = \frac{u^4}{4} \Big|_0^{1-\theta} = \frac{(1-\theta)^4}{4}$$

$$\theta \int_0^{1-\theta} u^2 du = \theta \cdot \frac{(1-\theta)^3}{3}$$

Sustituimos estos resultados en la integral original:

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{(1-\theta)^3}{3} - \frac{(1-\theta)^4}{4} - \theta \cdot \frac{(1-\theta)^3}{3} \right]$$

Simplificamos:

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{(1-\theta)^3}{3} \left( 1 - \theta - \frac{1-\theta}{4} \right) \right]$$

Paso 4: Integral más externa

Finalmente, consideramos la integral más externa:

$$\int_0^1 \frac{(1-\theta)^4}{24} d\theta$$

Resolvemos esta integral:

$$\frac{1}{24} \int_0^1 (1-\theta)^4 d\theta$$

Sea  $u = 1 - \theta$ , entonces  $du = -d\theta$  y los límites de integración cambian de  $\theta = 0$  a  $\theta = 1$ , a  $u = 1$  a  $u = 0$ .

La integral se convierte en:

$$-\frac{1}{24} \int_1^0 u^4 du = \frac{1}{24} \int_0^1 u^4 du$$

Integramos:

$$\int u^4 du = \frac{u^5}{5}$$

Evaluamos de 0 a 1:

$$\left. \frac{u^5}{5} \right|_0^1 = \frac{1}{5}$$

No olvidemos el factor  $\frac{1}{24}$ :

$$\frac{1}{24} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{120}$$

Por lo tanto, el resultado de la integral cuádruple es:

$$QJ \cdot \frac{1}{120}$$

## Integral con respecto a $\theta$

$$QJ \int_0^1 \int_0^{1-\theta} \int_0^{1-\phi-\theta} \int_0^{1-\eta-\phi-\theta} \theta d\epsilon d\eta d\phi d\theta$$

Paso 1: Integral más interna:

La integral más interna es:

$$\int_0^{1-\eta-\phi-\theta} \theta d\epsilon$$

Dado que  $\theta$  es una constante respecto a  $\epsilon$ , podemos sacarla fuera de la integral:

$$\theta \int_0^{1-\eta-\phi-\theta} d\epsilon$$

Resolvemos esta integral:

$$\theta \epsilon|_0^{1-\eta-\phi-\theta} = \theta(1-\eta-\phi-\theta)$$

Paso 2: Segunda integral:

Ahora consideramos la segunda integral, utilizando el resultado anterior:

$$\int_0^{1-\phi-\theta} \theta(1-\eta-\phi-\theta) d\eta$$

Distribuimos  $\theta$ :

$$\theta \int_0^{1-\phi-\theta} (1-\eta-\phi-\theta) d\eta$$

La integral de  $(1-\eta-\phi-\theta)$  respecto a  $\eta$  es:

$$\int (1-\eta-\phi-\theta) d\eta = (1-\phi-\theta)\eta - \frac{\eta^2}{2}$$

Evaluamos esta integral desde  $\eta = 0$  hasta  $\eta = 1-\phi-\theta$ :

$$\left[ (1-\phi-\theta)\eta - \frac{\eta^2}{2} \right]_0^{1-\phi-\theta} = (1-\phi-\theta)(1-\phi-\theta) - \frac{(1-\phi-\theta)^2}{2}$$

Simplificamos:

$$(1-\phi-\theta)^2 - \frac{(1-\phi-\theta)^2}{2} = \frac{(1-\phi-\theta)^2}{2}$$

Entonces, la segunda integral es:

$$\theta \cdot \frac{(1-\phi-\theta)^2}{2}$$

Paso 3: Tercera integral:

La siguiente integral es:

$$\int_0^{1-\theta} \theta \cdot \frac{(1-\phi-\theta)^2}{2} d\phi$$

Simplificamos:

$$\frac{\theta}{2} \int_0^{1-\theta} (1-\phi-\theta)^2 d\phi$$

Para resolver esta integral, sea  $u = 1 - \phi - \theta$ , entonces  $du = -d\phi$  y los límites de integración cambian de  $\phi = 0$  a  $\phi = 1 - \theta$ , a  $u = 1 - \theta$  a  $u = 0$ .

La integral se convierte en:

$$-\frac{\theta}{2} \int_{1-\theta}^0 u^2 du = \frac{\theta}{2} \int_0^{1-\theta} u^2 du$$

Integramos:

$$\int u^2 du = \frac{u^3}{3}$$

Evaluamos de  $u = 0$  a  $u = 1 - \theta$ :

$$\frac{u^3}{3} \Big|_0^{1-\theta} = \frac{(1-\theta)^3}{3}$$

Entonces, la tercera integral es:

$$\frac{\theta}{2} \cdot \frac{(1-\theta)^3}{3} = \frac{\theta(1-\theta)^3}{6}$$

Paso 4: Integral más externa:

Finalmente, consideramos la integral más externa:

$$\int_0^1 \frac{\theta(1-\theta)^3}{6} d\theta$$

Simplificamos:

$$\frac{1}{6} \int_0^1 \theta(1-\theta)^3 d\theta$$

Para resolver esta integral, utilizamos el cambio de variable  $u = 1 - \theta$ , entonces  $du = -d\theta$  y los límites de integración cambian de  $\theta = 0$  a  $\theta = 1$ , a  $u = 1$  a  $u = 0$ .

La integral se convierte en:

$$-\frac{1}{6} \int_1^0 (1-u)u^3 du = \frac{1}{6} \int_0^1 (1-u)u^3 du$$

Distribuimos  $u^3$ :

$$\frac{1}{6} \int_0^1 (u^3 - u^4) du$$

Integramos término a término:

$$\frac{1}{6} \left[ \int_0^1 u^3 du - \int_0^1 u^4 du \right]$$

Resolvemos cada integral:

$$\int_0^1 u^3 du = \frac{u^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$\int_0^1 u^4 du = \frac{u^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{1}{5}$$

Sustituimos estos resultados en la integral original:

$$\frac{1}{6} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{6} \left( \frac{5}{20} - \frac{4}{20} \right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{120}$$

Por lo tanto, el resultado de la integral cuádruple es:

$$QJ \cdot \frac{1}{120}$$

## Integral con respecto a $1 - \epsilon - \eta - \phi - \theta$

$$QJ \int_0^1 \int_0^{1-\theta} \int_0^{1-\phi-\theta} \int_0^{1-\eta-\phi-\theta} (1 - \epsilon - \eta - \phi - \theta) d\epsilon d\eta d\phi d\theta$$

Dado que la integral por sí sola es muy compleja, tomemos los resultados conocidos de integrar el resto de funciones de forma  $\epsilon, \eta, \phi, \theta$  y solo integremos el "1" que falta para reducir la cantidad de operaciones

$$\int_0^1 \int_0^{1-\theta} \int_0^{1-\phi-\theta} \int_0^{1-\eta-\phi-\theta} 1 d\epsilon d\eta d\phi d\theta$$

Paso 1: Integral más interna

La integral más interna es:

$$\int_0^{1-\eta-\phi-\theta} 1 d\epsilon$$

Resolvemos esta integral:

$$\epsilon \Big|_0^{1-\eta-\phi-\theta} = 1 - \eta - \phi - \theta$$

Paso 2: Segunda integral

Ahora consideramos la segunda integral, utilizando el resultado anterior:

$$\int_0^{1-\phi-\theta} (1 - \eta - \phi - \theta) d\eta$$



La integral de  $(1 - \eta - \phi - \theta)$  respecto a  $\eta$  es:

$$\int (1 - \eta - \phi - \theta) d\eta = (1 - \phi - \theta)\eta - \frac{\eta^2}{2}$$

Evaluamos esta integral desde  $\eta = 0$  hasta  $\eta = 1 - \phi - \theta$ :

$$\left[ (1 - \phi - \theta)\eta - \frac{\eta^2}{2} \right]_0^{1-\phi-\theta} = (1 - \phi - \theta)(1 - \phi - \theta) - \frac{(1 - \phi - \theta)^2}{2}$$

Simplificamos:

$$(1 - \phi - \theta)^2 - \frac{(1 - \phi - \theta)^2}{2} = \frac{(1 - \phi - \theta)^2}{2}$$

Paso 3: Tercera integral:

La siguiente integral es:

$$\int_0^{1-\theta} \frac{(1 - \phi - \theta)^2}{2} d\phi$$

Simplificamos:

$$\frac{1}{2} \int_0^{1-\theta} (1 - \phi - \theta)^2 d\phi$$

Para resolver esta integral, sea  $u = 1 - \phi - \theta$ , entonces  $du = -d\phi$  y los límites de integración cambian de  $\phi = 0$  a  $\phi = 1 - \theta$ , a  $u = 1 - \theta$  a  $u = 0$ .

La integral se convierte en:

$$-\frac{1}{2} \int_{1-\theta}^0 u^2 du = \frac{1}{2} \int_0^{1-\theta} u^2 du$$

Integramos:

$$\int u^2 du = \frac{u^3}{3}$$

Evaluamos de  $u = 0$  a  $u = 1 - \theta$ :

$$\frac{u^3}{3} \Big|_0^{1-\theta} = \frac{(1 - \theta)^3}{3}$$

Entonces, la tercera integral es:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{(1 - \theta)^3}{3} = \frac{(1 - \theta)^3}{6}$$

Paso 4: Integral más externa:

Finalmente, consideramos la integral más externa:

$$\int_0^1 \frac{(1-\theta)^3}{6} d\theta$$

Simplificamos:

$$\frac{1}{6} \int_0^1 (1-\theta)^3 d\theta$$

Para resolver esta integral, utilizamos el cambio de variable  $u = 1 - \theta$ , entonces  $du = -d\theta$  y los límites de integración cambian de  $\theta = 0$  a  $\theta = 1$ , a  $u = 1$  a  $u = 0$ .

La integral se convierte en:

$$-\frac{1}{6} \int_1^0 u^3 du = \frac{1}{6} \int_0^1 u^3 du$$

Integramos:

$$\int u^3 du = \frac{u^4}{4}$$

Evalúamos de  $u = 0$  a  $u = 1$ :

$$\left. \frac{u^4}{4} \right|_0^1 = \frac{1}{4}$$

No olvidemos el factor  $\frac{1}{6}$ :

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$$

El resultado de la integral para "1" es:

$$\frac{1}{24}$$

Ahora bien ya que conocemos el resultado de esta integral operemos con el resultado del resto de integrales de las funciones de forma que separamos al inicio de este bloque:

$$\frac{1}{24} - \frac{1}{120} - \frac{1}{120} - \frac{1}{120} - \frac{1}{120} = \frac{1}{120}$$

Por lo tanto, el resultado completo de la integral es:

$$QJ \int_0^1 \int_0^{1-\theta} \int_0^{1-\phi-\theta} \int_0^{1-\eta-\phi-\theta} (1-\epsilon-\eta-\phi-\theta) d\epsilon d\eta d\phi d\theta = QJ \frac{1}{120}$$

Una vez obtenidas todas las integrales de cada funcion de forma, podemos visualizar la matriz 'b' de esta forma:

$$QJ \begin{bmatrix} \int_0^1 \int_0^{1-\theta} \int_0^{1-\phi-\theta} \int_0^{1-\eta-\phi-\theta} (1-\epsilon-\eta-\phi-\theta) d\epsilon d\eta d\phi d\theta \\ \int_0^1 \int_0^{1-\theta} \int_0^{1-\phi-\theta} \int_0^{1-\eta-\phi-\theta} \epsilon d\epsilon d\eta d\phi d\theta \\ \int_0^1 \int_0^{1-\theta} \int_0^{1-\phi-\theta} \int_0^{1-\eta-\phi-\theta} \eta d\epsilon d\eta d\phi d\theta \\ \int_0^1 \int_0^{1-\theta} \int_0^{1-\phi-\theta} \int_0^{1-\eta-\phi-\theta} \phi d\epsilon d\eta d\phi d\theta \\ \int_0^1 \int_0^{1-\theta} \int_0^{1-\phi-\theta} \int_0^{1-\eta-\phi-\theta} \theta d\epsilon d\eta d\phi d\theta \end{bmatrix} = QJ \begin{bmatrix} \frac{1}{120} \\ \frac{1}{120} \\ \frac{1}{120} \\ \frac{1}{120} \\ \frac{1}{120} \end{bmatrix} = \frac{QJ}{120} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

## Lado izquierdo de la integral

$$- \int_H N^T \nabla \cdot (k \nabla N) dH$$

Usamos integración por partes para facilitar su plantemiento y evitar la nulificación de la ecuación a raíz de la derivada de orden superior:

$$\int_H U dV = [UV]|_H - \int_H dU V$$

$$U = N^T$$

$$dU = \nabla N^T$$

$$dV = \nabla \cdot (k \nabla N)$$

$$V = k \nabla N$$

Sustituyendo en la fórmula:

$$- \left( [N^T k \nabla N]|_H - \int_H \nabla N^T k \nabla N dH \right)$$

Del lado izquierdo nos queda lo que será la condición de Neumann:

$$-[N^T k \nabla N]|_H$$

Resolviendo la integral:

$$\int_H \nabla N^T k \nabla N dH$$

Desglosemos  $\nabla \mathbf{N}$

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{N} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial w} \end{bmatrix} [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \quad N_5] \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial w} \end{bmatrix} [1 - \epsilon - \eta - \phi - \theta \quad \epsilon \quad \eta \quad \phi \quad \theta] \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \phi} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial w} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial w} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \phi} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \end{bmatrix} \\
& \nabla \mathbf{N} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \phi} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \epsilon - \eta - \phi - \theta & \epsilon & \eta & \phi & \theta \end{bmatrix} \\
& = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \epsilon} (1 - \epsilon - \eta - \phi - \theta) & \frac{\partial \epsilon}{\partial \epsilon} & \frac{\partial \eta}{\partial \epsilon} & \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon} & \frac{\partial \theta}{\partial \epsilon} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} (1 - \epsilon - \eta - \phi - \theta) & \frac{\partial \epsilon}{\partial \eta} & \frac{\partial \eta}{\partial \eta} & \frac{\partial \phi}{\partial \eta} & \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \phi} (1 - \epsilon - \eta - \phi - \theta) & \frac{\partial \epsilon}{\partial \phi} & \frac{\partial \eta}{\partial \phi} & \frac{\partial \phi}{\partial \phi} & \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} (1 - \epsilon - \eta - \phi - \theta) & \frac{\partial \epsilon}{\partial \theta} & \frac{\partial \eta}{\partial \theta} & \frac{\partial \phi}{\partial \theta} & \frac{\partial \theta}{\partial \theta} \end{bmatrix} \\
& = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{B}
\end{aligned}$$

En este punto, necesitamos encontrar la inversa de  $\mathbf{J}$ , pero dado que su cálculo es muy complejo para desglosarlo paso a paso, solo haremos un breve análisis dimensional de su definición:

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{J})} \mathbf{A}$$

Como se observa, obtenemos una matriz  $\mathbf{A}$  denotada como la matriz adjunta de  $\mathbf{J}$  y esta se puede expresar en términos de los cofactores de  $\mathbf{J}$ :

$$\begin{aligned}
\mathbf{J} &= \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 & x_5 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 & y_5 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 & z_5 - z_1 \\ w_2 - w_1 & w_3 - w_1 & w_4 - w_1 & w_5 - w_1 \end{bmatrix} \\
\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Donde cada elemento  $A_{ij}$  es el cofactor de  $\mathbf{J}$ . El cofactor  $A_{ij}$  se obtiene eliminando la  $i$ -ésima fila y la  $j$ -ésima columna de  $\mathbf{J}$ , y luego calculando el determinante del menor resultante, multiplicado por  $(-1)^{i+j}$ .

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (y_3 - y_1)(z_4 - z_1)(w_5 - w_1) - (y_4 - y_1)(z_3 - z_1)(w_5 - w_1) + (y_4 - y_1)(z_5 - z_1)(w_3 - w_1) - (y_3 - y_1)(z_5 - z_1)(w_4 - w_1) & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots \end{bmatrix}$$

Debido a la complejidad y longitud del cálculo, no se escribirán todos los cofactores aquí, pero el procedimiento es el mismo: calcular el determinante de cada menor  $3 \times 3$  y aplicar el signo correspondiente.

Finalmente, la inversa de  $\mathbf{J}$  se expresa como:

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{J} \mathbf{A}$$

Finalmente aplicamos la misma lógica para la transpuesta de  $\nabla N$ , y obtenemos estos resultados listos para sustituir en su definición en la integral:

$$\begin{aligned}
\nabla N &= \frac{1}{J} AB \\
\nabla N^T &= \frac{1}{J} B^T A^T
\end{aligned}$$

Sustituimos en la integral que teníamos:

$$\begin{aligned} &= \int_H \frac{1}{J} B^T A^T k \frac{1}{J} AB \, dH \\ &= \frac{k}{J^2} B^T A^T AB \int_H dH \\ &= \frac{kH}{J^2} B^T A^T AB = \mathbf{K} \end{aligned}$$

**Modelo final de la forma  $\mathbf{KT} = \mathbf{b}$**

$$\left( -[N^T k \nabla N] \big|_H + \frac{kH}{J^2} B^T A^T AB \right) \mathbf{T} = \frac{QJ}{120} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left( \frac{kH}{J^2} B^T A^T AB \right) \mathbf{T} = \frac{QJ}{120} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + [N^T k \nabla N^T] \big|_H$$

$$\left( \frac{kH}{J^2} B^T A^T AB \right) \mathbf{T} = \frac{QJ}{120} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{KT} = \mathbf{b}}$$