

Analysis I

Dipl.-Ing. (FH) Christian Weilharter

© 2025, Christian Weilharter, Traunstein

ISBN: (Print) 978-3-912302-00-4

ISBN: (E-Book) 978-3-912302-01-1

Auflage: 1. Auflage 2025

Satz: L^AT_EX

Verlag: Christian Weilharter

Druck: Amazon KDP (Print-on-Demand)

E-Book-Ausgabe: Apple Books

Amazon Kindle Direct Publishing

Kontakt: info@mathandphysics.de

Web: www.mathandphysics.de

Alle Rechte vorbehalten. Kein Teil dieses Buches darf ohne schriftliche Genehmigung des Autors in irgendeiner Form reproduziert, gespeichert oder übertragen werden, weder elektronisch, mechanisch, durch Fotokopien, Aufnahmen noch auf andere Weise.

Printed in Germany

Vorwort

Die Entstehung dieses Buches war von einer tiefen Faszination für das Licht und seinen fundamentalen Vermittler – das

Dipl.-Ing. (FH) Christian Weilharter

[Traunstein, 2025]

Inhaltsverzeichnis

I Mengen & Abbildungen	7
1.1 Einführung in den Kurs – Analysis	7
1.2 Mengen	7
1.3 Intervalle	8
1.4 Durchschnitt, Vereinigung und Differenzmenge	9
1.5 Aufgaben zu Mengen	10
II Der Weg zum Lichtquant	13
2.1 title	13
2.2 Die klassische Lichttheorie und ihre Grenzen	13
III Eigenschaften des Photons	15
3.1 Photonen als Energiequanten	15
IV Experimentelle Bestätigung des Photons	17
4.1 Der Photoeffekt	17
V Das Photon in der Quantenelektrodynamik (QED)	19
5.1 Vom Photon zur Quantenelektrodynamik	19
VI Anwendungen des Photons	21
6.1 Einleitung	21
VII Photonen und die Zukunft der Physik	23
7.1 Einleitung	23
VIII Das Photon im Standardmodell der Teilchenphysik	25
8.1 Das Standardmodell: Überblick	25
A Mathematische Hintergründe und Herleitungen	27

A.1	Energie- und Impulsrelation des Photons	27
B	Boxenverzeichnis	31
	B.1 Einführung	31
C	KI in der Wissenschaft – Werkzeug statt Wahrheit . .	33
Literatur	37	
Stichwortverzeichnis	38	

Inhaltsverzeichnis

Kapitel I

Mengen & Abbildungen

1.1 Einführung in den Kurs – Analysis

Hello In diesem Kurs werden die Grundlagen der Analysis I behandelt, also die Untersuchung von Funktionen einer Variablen. Im Mittelpunkt stehen die Begriffe Grenzwerte, Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Reihen (insbesondere Potenz- und Taylorreihen), Fourieranalyse, vollständige Induktion sowie Integration.

Aufbau des Kurses: Der Kurs ist in 15 Kapitel gegliedert.

1.2 Mengen

Georg Cantor beschrieb 1895 eine Menge wie folgt:

Eine Menge ist eine wohldefinierte Zusammenfassung verschiedener Objekte zu einem Ganzen.

Beispiele

- $S := \{\text{Berlin, Hamburg, Köln, Hannover}\}$
- $\mathbb{R} := \{x \mid x \text{ ist eine reelle Zahl}\}$ (umgangssprachlich: „alle Kommazahlen“)
- $\sqrt{2} \in \mathbb{R}, \quad \{\sqrt{2}\} \subset \mathbb{R}$
- $\emptyset := \{\} \subset \mathbb{R}$
- $\infty \notin \mathbb{R}$
- $\{1, 2, 7, \text{Berlin}\} \not\subset \mathbb{R}$

Wichtige Zahlenmengen

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

\mathbb{R} := Menge der reellen Zahlen

$$\mathbb{C} := \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

Achtung: Oft werden die natürlichen Zahlen auch so definiert:

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\},$$

$$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Eigenschaft

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Mathematische Schreibweisen

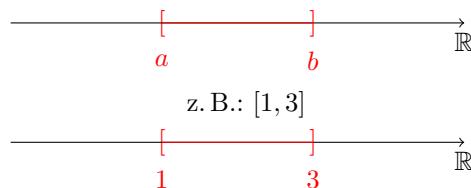
- \in ist Element von
- \notin ist kein Element von
- \emptyset leere Menge
- $|$ „so dass“ (z. B. in Mengen-Schreibweisen)

1.3 Intervalle

Seien $a, b \in \mathbb{R}$.

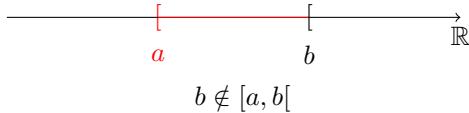
Abgeschlossenes Intervall

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}.$$



Rechts halboffenes Intervall

$$[a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}.$$



Analog: links halboffenes Intervall $]a, b]$.

Offenes Intervall

$$]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$$



Spezielle Teilintervalle

Geometrisch entspricht dies einer Teilgeraden der reellen Zahlen:

$$]-\infty, a[:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}.$$

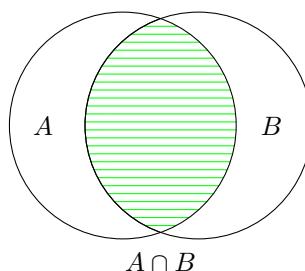


Alternative Notation:

$$]a, b[= (a, b), \quad [a, b[= [a, b), \quad]a, b] = (a, b].$$

1.4 Durchschnitt, Vereinigung und Differenzmenge

Durchschnitt

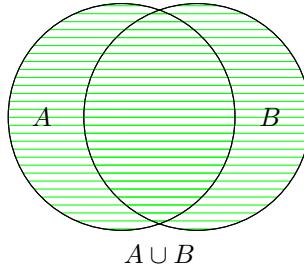


Kapitel I Mengen & Abbildungen

Beispiel: Bilde $[1, 2] \cap [2, 3]$.

$$[1, 2] \cap [2, 3] = \{2\}.$$

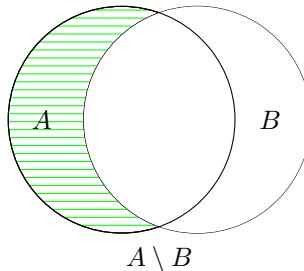
Vereinigung



Beispiel:

$$[1, 2] \cup [2, 3] = [1, 3].$$

Differenzmenge



Beispiel:

$$[1, 3] \setminus [\frac{3}{2}, \frac{5}{2}] = [1, \frac{3}{2}] \cup [\frac{5}{2}, 3].$$

1.5 Aufgaben zu Mengen

Aufgabe 1

Bestimme die Menge

$$\mathbb{M} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ ist durch 3 teilbar}\} \cap \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ ist durch 4 teilbar}\}.$$

Zahlen, die durch 3 teilbar sind, lassen sich schreiben als $\{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, und Zahlen, die durch 4 teilbar sind, als $\{4k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Damit muss x durch $\text{lcm}(3, 4) = 12$ teilbar sein:

$$\mathbb{M} = \{12k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Aufgabe 2

Bestimme die Menge

$$\mathbb{M} = \bigcup_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \{x \in \mathbb{Q} \mid m \cdot x \in \mathbb{Z}\}.$$

Für festes m gilt:

$$\{x \in \mathbb{Q} \mid mx \in \mathbb{Z}\} = \left\{ \frac{k}{m} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Durch die Vereinigung über alle $m \geq 1$ entstehen genau alle rationalen Zahlen. Also:

$$\mathbb{M} = \mathbb{Q}.$$

Aufgabe 3

Bestimme die Menge

$$\mathbb{M} = \bigcap_{m \in \mathbb{R}} \{x \in \mathbb{R} \mid (x - m)(x - 2)(x - 3) = 0\}.$$

Für festes m ist die Lösungsmenge $\{m, 2, 3\}$. In der Schnittmenge über alle $m \in \mathbb{R}$ bleiben nur die Elemente übrig, die *für jedes* m dabei sind:

$$\mathbb{M} = \{2, 3\}.$$

Kapitel II

Der Weg zum Lichtquant

2.1 title

s

2.2 Die klassische Lichttheorie und ihre Grenzen

Die klassische Physik entwickelte im Laufe der Jahrhunderte zwei grundlegende Modelle zur Beschreibung des Lichts: das

Kapitel II Der Weg zum Lichtquant

Kapitel III

Eigenschaften des Photons

3.1 Photonen als Energiequanten

Die Vorstellung, dass Energie nicht kontinuierlich, sondern in diskreten Portionen – sogenannten Quanten – existiert, war zu

Kapitel III Eigenschaften des Photons

Kapitel IV

Experimentelle Bestätigung des Photons

4.1 Der Photoeffekt

4.1.1 Einleitung und klassische Erwartung

Der sogenannte Photoeffekt – die Emission von Elektronen aus einer Metalloberfläche durch Bestrahlung mit Licht – war

Kapitel IV Experimentelle Bestätigung des Photons

Kapitel V

Das Photon in der Quantenelektrodynamik (QED)

5.1 Vom Photon zur Quantenelektrodynamik

qqqq

Kapitel V Das Photon in der Quantenelektrodynamik (QED)

Kapitel VI

Anwendungen des Photons

6.1 Einleitung

Photonen sind nicht nur fundamentale Träger quantenphysikalischer

Kapitel VI Anwendungen des Photons

Kapitel VII

Photonen und die Zukunft der Physik

d

7.1 Einleitung

we

Kapitel VIII

Das Photon im Standardmodell der Teilchenphysik

8.1 Das Standardmodell: Überblick

Das **Standardmodell der Teilchenphysik** ist eine erfolgreiche Theorie, die

8.1.1 Das Standardmodell: Überblick

a

Kapitel VIII Das Photon im Standardmodell der Teilchenphysik

Anhang A

Mathematische Hintergründe und Herleitungen

In diesem Anhang werden die im Haupttext angesprochenen physikalischen Konzepte formal und mathematisch vertieft. Ziel ist es, die didaktische Lesbarkeit der Kapitel nicht zu beeinträchtigen und zugleich interessierten Lesern die vollständigen Herleitungen zugänglich zu machen.

Die Abschnitte sind thematisch nach den zentralen Eigenschaften des Photons gegliedert, darunter Energie-Impuls-Relation, Massehypothese, Helizität und Polarisation. Auf diese Weise bildet der Anhang eine Brücke zwischen den intuitiven Erklärungen im Haupttext und der mathematischen Strenge der Quantenfeldtheorie.

A.1 Energie- und Impulsrelation des Photons

In diesem Abschnitt wird formal hergeleitet, warum ein Photon die Energie

Kapitel A Mathematische Hintergründe und Herleitungen

A.1 Energie- und Impulsrelation des Photons

Kapitel A Mathematische Hintergründe und Herleitungen

Anhang B

Boxenverzeichnis

B.1 Einführung

qqqq

Kapitel B Boxenverzeichnis

Anhang C

KI in der Wissenschaft – Werkzeug statt Wahrheit

Motivation

Dieses Buch entstand aus dem Wunsch, komplexe physikalische Zusammenhänge – insbesondere das Photon und seine Rolle in der modernen Physik – verständlich und fundiert darzustellen. Dabei wurde ein neues Werkzeug eingesetzt, das heute immer mehr Einzug in wissenschaftliches Arbeiten hält: **künstliche Intelligenz**, konkret das Sprachmodell **ChatGPT** von OpenAI.

Doch wie lässt sich KI sinnvoll in der Wissenschaft nutzen, ohne dass dabei Verständnis, Präzision oder Verantwortung verloren gehen? Und wie kann man das offenlegen, ohne die eigene wissenschaftliche Arbeit zu relativieren? Dieser Anhang gibt einen transparenten Einblick in den Entstehungsprozess dieses Buches und plädiert für einen verantwortungsvollen Umgang mit KI als Werkzeug – nicht als Wahrheit.

Was eine KI kann – und was nicht

KI-gestützte Sprachmodelle wie ChatGPT sind leistungsfähige Hilfsmittel beim Schreiben und Strukturieren. Sie können:

- beim Formulieren erster Entwürfe helfen,
- komplexe Sachverhalte sprachlich glätten,

- Denkanstöße liefern oder Gliederungen vorschlagen,
- stilistische Alternativen aufzeigen.

Was sie jedoch **nicht** können:

- **Verstehen** im wissenschaftlichen Sinn,
- **prüfen**, ob eine Formel korrekt hergeleitet ist,
- **physikalische Konzepte durchdringen**,
- **Quellen kritisch einordnen oder bewerten**.

Daher gilt: Eine KI kann *unterstützen*, aber sie **kann und darf den wissenschaftlichen Erkenntnisprozess nicht ersetzen**. Wer mit KI arbeitet, muss dennoch selbst denken – und das Ergebnis stets kritisch prüfen.

Wie dieses Buch entstanden ist

Die Inhalte dieses Buches – von der Struktur über die physikalischen Erklärungen bis zu den mathematischen Herleitungen – wurden vom Autor konzipiert, recherchiert und verantwortet. ChatGPT kam in folgenden Bereichen unterstützend zum Einsatz:

- beim **Formulieren einzelner Passagen**, z. B. bei Einleitungen, Zusammenfassungen oder didaktischen Abschnitten,
- zur **Stilüberprüfung** technischer Abschnitte,
- zur **Gliederungsentwicklung** in frühen Arbeitsphasen,
- zur Reflexion über **Verständlichkeit** und Leserführung.

Entscheidend ist: **Alle inhaltlichen Aussagen, Formeln und Interpretationen wurden vom Autor geprüft, hinterfragt, überarbeitet oder verworfen**. Keine KI war an der inhaltlichen Entwicklung der physikalischen Argumentation beteiligt.

Ethische Fragen und wissenschaftliche Verantwortung

Die Nutzung von KI in der Wissenschaft wirft berechtigte Fragen auf:

- Wie viel darf automatisiert entstehen, ohne dass Autorschaft verwässert?
- Wie geht man mit potenziellen Fehlern um?
- Wie transparent muss die Nutzung offengelegt werden?

Die Antwort liegt in einem Grundprinzip wissenschaftlicher Arbeit: **Verantwortung**. Wer KI einsetzt, bleibt verantwortlich für das Ergebnis – unabhängig davon, ob einzelne Formulierungen von einem Modell vorgeschlagen wurden.

In diesem Sinne ist KI keine Autorin, sondern ein Werkzeug. Sie kann Prozesse beschleunigen, aber nicht ersetzen, was Wissenschaft im Kern ausmacht: **kritisches Denken, sorgfältiges Prüfen, methodisches Arbeiten**.

Empfehlungen für den Einsatz in der Forschung

Für Wissenschaftler:innen, Lehrende und Studierende ergibt sich daraus ein konstruktiver Weg:

- Nutze KI **bewusst und gezielt** – für sprachliche Unterstützung, nicht für Argumentation oder Beweisführung.
- **Prüfe jede Aussage selbst** – gerade bei komplexen Sachverhalten.
- **Deklariere die Nutzung offen**, wenn es relevant ist – z. B. in Vorworten, Anhängen oder Einreichungserklärungen.
- Nutze KI nicht zur **Täuschung** oder zum Feigenblatt, sondern als Hilfe zur besseren Darstellung deiner eigenen Gedanken.

Fazit: KI als Werkzeug – aber der Mensch bleibt denkend verantwortlich

Künstliche Intelligenz ist weder Ersatz noch Gegner menschlicher Erkenntnis. Sie ist ein **Werkzeug**, das bei der wissenschaftlichen Kommunikation helfen kann – **wenn es bewusst, reflektiert und verantwortungsvoll eingesetzt wird**.

Dieses Buch versteht sich auch in dieser Hinsicht als Beitrag zu einem neuen, aufgeklärten Umgang mit Technologie in der Wissenschaft. Nicht, weil die Technik alles kann – sondern weil wir gelernt haben, sie sinnvoll zu nutzen.

Hinweis zur Open-Access-Version

Dieses Buch ist Teil der Open-Science-Initiative „Christian & Co-Pilot – Math & Physics“.

Die vollständige, farbige PDF-Version ist frei zugänglich unter:

- <https://mathandphysics.de>
- <https://zenodo.org/communities/christian-copilot>

Die gedruckte Ausgabe wurde für komfortables Lesen, langfristige Archivierung und den Aufbau einer Open-Access-Bibliothek in Printform erstellt. Mit dem Kauf dieses Buches unterstützen Sie die freie wissenschaftliche Publikation und den Gedanken einer offenen, überprüfbaren Wissenschaft.

Literatur

- [1] Albert Einstein. „Über die Entwicklung unserer Anschauungen über das Wesen und die Konstitution der Strahlung“. In: *Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft*. Bd. 11. 1909, S. 482–500.

Literatur