BOSSU CORRELATION SWAPS

VALORISATION ET GESTION DES RISQUES DES PRODUITS DERIVES
MASTER 2 ISIFAR
2019-2020

Christian RAMIRES ALIAGA

I. INTRODUCTION

Dans ce rapport, nous allons traiter l'article Bossu Correlation Swaps écrit par Sebastian Bossu en 2005, qui propose un « toy model » pour pricer les produits dérivés sur la variance réalisée d'un actif, afin de déterminer principalement le prix des swaps de corrélation sur les composantes d'un indice boursier.

Avant de rentrer dans le vif du sujet, nous allons évoquer dans ce qui suit le chemin qui a conduit à cette étude. En 1990, de nouveaux instruments financiers, connus sous le nom de swaps de variance, sont apparus sur le marché des actions en faisant de la volatilité au carré un actif négociable. Puis, lorsque la variance est devenue une classe d'actifs, diverses formes de dérivés de volatilité ont émergé, par exemple : les swaps de volatilité, les contrats à terme et les options sur l'indice de volatilité CBOE (VIX), etc. Dans ce sens, les dernières recherches ont traité sur la modélisation de la volatilité et de la variance, et plus particulièrement, sur la tarification et la couverture de ces produits dérivés de volatilité. Nous pouvons ainsi les classer en deux types : les dérivés sur la volatilité réalisée et les dérivés sur la volatilité implicite. Le premier groupe, qui sera importante pour la suite, peut être considéré comme des dérivés sur un swap de variance de même échéance. Dans les années 2000, les swaps de corrélation sont apparus comme un moyen de couvrir l'exposition au risque des dérivés exotiques qui nécessitent d'une matrice de corrélation implicite dont les coefficients sont inobservables, ce qui rendait complexe la tarification des swaps de corrélation.

La partie principale de notre rapport se divise en 2 parties. Dans la section II, nous aborderons le *toy model* pour la variance négociable en expliquant les principes du modèle en question, ainsi qu'en déterminant une expression explicite pour le prix d'un swap de variance. Ensuite, nous nous en servirons pour calculer le prix d'arbitrage des dérivés de volatilité, notamment dans le cas d'un contrat à terme sur la volatilité réalisée et d'une option call sur la variance réalisée. Nous vous montrerons également des graphiques que nous avons codé en Python. En ce qui concerne la section III, nous discuterons sur la tarification et couverture des créances de quasi-corrélation. Pour ce faire, nous définirons mathématiquement le produit dérivé swap de corrélation, ainsi que plusieurs types de corrélation.

II. LE TOY MODEL POUR LA VARIANCE NEGOCIABLE

L'objectif de ce modèle c'est de pricer des produits dérivés sur la base de la volatilité réalisée. Il s'éloigne des modèles traditionnels de volatilité stochastique en déduisant directement le juste prix d'un swap de variance de même échéance que le dérivé. Cette approche simple nous permet de trouver des formules fermées basées sur un nombre réduit de paramètres intuitifs. Dans ce contexte, l'actif négociable sous-jacent est le swap de variance lui-même qui, à tout moment, est un mélange linéaire entre la variance réalisée passée et la variance implicite future.

1) Le modèle

Dans cette section, nous nous concentrons sur un marché comportant deux actifs négociables (la variance et le cash). Le *toy model* pour l'actif de variance est une simple modification du modèle Black-Scholes pour les prix des actifs. Pour développer cette méthode, nous faisons les hypothèses traditionnelles de taux d'intérêt constant r, d'absence d'arbitrage, de liquidité infinie, de vente à découvert illimitée, d'absence de coûts de transaction et de flux continu d'informations. Nous supposons en outre que seul le swap de variance est négociable, mais pas l'actif lui-même. Nous travaillons également sur un espace de probabilité (Ω, F, P) avec un filtrage brownien (F_t) et une mesure risque-neutre Q de prix équivalente vis-à-vis du risque. Soit $v_t(0, T)$ ou v_t le prix au temps t de la branche flottante d'un swap de variance pour la période [0, T] où T désigne l'échéance ou la date de règlement du swap. Désormais, nous utilisons les termes *variance* et *swap de variance* de manière interchangeable.

Nous avons la dynamique de v_t par l'équation de diffusion suivante sous Q :

$$dv_t = rv_t dt + 2\omega \frac{T-t}{T} v_t dW_t$$

où r et ω sont les paramètres du modèle correspondant au taux d'intérêt à court terme et à la volatilité de la volatilité, et (W_t) est un mouvement brownien standard sous Q.

Comparaison avec les modèles à volatilité stochastique

Nous faisons maintenant la comparaison avec les modèles standard de volatilité stochastique de la variance instantanée des actifs X_t dont sa dynamique est :

$$dX_t = \lambda(\theta - X_t)dt + \xi X_t^a dW_t$$

où λ, θ, ξ, a sont des paramètres constants. Dans ce cadre, le prix au temps t d'un swap de variance sur la période [0,T] est donné par :

$$v_t = e^{-r(T-t)} \frac{1}{T}\left[\int_0^t X_s ds + \theta(T-t) + \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda(T-t)}\right)(X_t - \theta)\right]$$

Et, sa dynamique est :

$$dv_t = rv_t dt + e^{-r(T-t)} \frac{1}{\lambda T}\left(1 - e^{-\lambda(T-t)}\right)\xi X_t^a dW_t$$

Pour a = 1,

$$dv_t = rv_t dt + \xi\left(v_t - \frac{1}{T} e^{-r(T-t)}\left[\int_0^t X_s ds + \theta(T-t) - \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda(T-t)}\right)\theta\right]\right) dW_t$$

Nous constatons que le facteur de volatilité entre parenthèses converge vers zéro à l'approche de la maturité et, contrairement au *toy model*, la spécification de la volatilité du swap de variance dans un modèle de volatilité stochastique est une puissance de la variance instantanée et non le prix du swap de variance. Pour les échéances courtes, les deux modèles sont comparables.

Distribution Terminale

En utilisant le théorème d'Ito-Doeblin, nous pouvons écrire l'équation de diffusion pour $\ln(v)$:

$$\mathrm{dln}(v_t) = \left[r - 2\omega^2\left(\frac{T-t}{T}\right)^2\right]dt + 2\omega\frac{T-t}{T}dW_t$$

Ainsi, pour tous les temps $0 < t < t' < T$, nous avons :

$$v_{t'} = v_t exp\left[r(t'-t) - \frac{2}{3}\omega^2 T\left(\left(\frac{T-t}{T}\right)^3 - \left(\frac{T-t'}{T}\right)^3\right) + 2\frac{\omega}{T}\int_t^{t'}(T-s)dW_s\right]$$

En particulier, la variance terminale v_T a l'expression suivante :

$$v_T = v_t exp\left[r(T-t) - \frac{2}{3}\omega^2 T\left(\frac{T-t}{T}\right)^3 + 2\frac{\omega}{T}\int_t^T(T-s)dW_s\right] \qquad (1)$$

2) Application : prix d'arbitrage des dérivés de volatilité

A l'aide du *toy model* pour la variance, nous déduisons le prix d'arbitrage d'une créance éventuelle européenne sur la volatilité réalisée v_T à l'échéance. Nous indiquons $f(v_T)$ le payoff et $f_t = f(t, v_t)$ le processus de prix de cette créance éventuelle. Selon le théorème fondamental de l'évaluation des actifs, le prix de la créance éventuelle est égal à l'espérance conditionnelle actualisée de son payoff :

$$f_t = e^{-r(T-t)}E[f(v_T)|F_t]$$

Nous allons maintenant déduire des formules fermées pour deux créances éventuelles présentant un intérêt particulier :

a) Un contrat à terme sur la volatilité réalisée, dont le payoff est $f(v_T) = \sqrt{v_T}$;

b) Une option call sur la variance réalisée de strike K, dont le payoff est : $f(v_T) = Max(0, v_T - K)$

a) Contrat à terme sur la volatilité réalisée

En prenant la racine carrée de (1), nous pouvons écrire pour tous 0 < t < T :

$$f(v_T) = \sqrt{v_t e^{r(T-t)}}\exp\left(-\frac{1}{3}\omega^2 T\left(\frac{T-t}{T}\right)^3 + \frac{\omega}{T}\int_t^T(T-s)dW_s\right)$$

En prenant les espérances conditionnelles et en les actualisant, on obtient les rendements :

$$f_t = \sqrt{v_t e^{-r(T-t)}} \exp\left(-\frac{1}{3}\omega^2 T\left(\frac{T-t}{T}\right)^3\right) E\left[\exp\left(\frac{\omega}{T}\int_t^T (T-s)dW_s\right)|F_t\right] \quad (2)$$

On obtient donc une formule fermée pour le prix du contrat à terme sur la volatilité :

$$f_t = \sqrt{v_t e^{-r(T-t)}} exp\left(-\frac{1}{6}\omega^2 T\left(\frac{T-t}{T}\right)^3\right)$$

De plus, l'ajustement de la convexité c entre les justes strikes des variances récemment émises et les swaps de volatilité peut être exprimé en fonction de la volatilité de la volatilité ω :

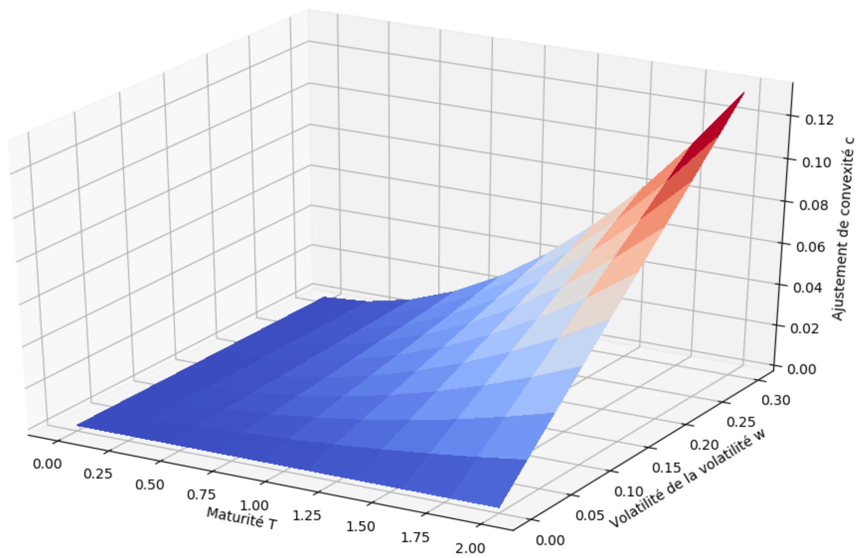
$$c = \sqrt{v_0 e^{rT}} - f_0 e^{rT} = \sqrt{v_0 e^{rT}}\left[1 - exp\left(-\frac{1}{6}\omega^2 T\right)\right]$$

Ce qui donne la règle de base :

$$c \approx \frac{1}{6}\sqrt{v_0 e^{rT}}\omega^2 T$$

Le figure ci-dessous montre que l'ajustement de la convexité se comporte en fonction de la volatilité de la volatilité et de l'échéance, et en particulier, plus la maturité est longue, plus l'effet de convexité est important.

Figure 1 : Ajustement de convexité entre la variance et la volatilité des swaps



Un autre point d'intérêt est la stratégie de couverture dynamique pour reproduire les swaps de volatilité à l'aide de swaps de variance. Selon notre approche, la quantité δ_t de variance à conserver à un moment t donné serait :

$$\delta_t = \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{1}{2\sqrt{v_t e^{r(T-t)}}} exp\left(-\frac{1}{6}\omega^2 T\left(\frac{T-t}{T}\right)^3\right)$$

Pour t = 0, ce delta est égal à :

$$\delta_0 = \frac{1}{2\sqrt{v_0 e^{rT}}} exp\left(-\frac{1}{6}\omega^2 T\right)$$

b) Option call sur la variance réalisée

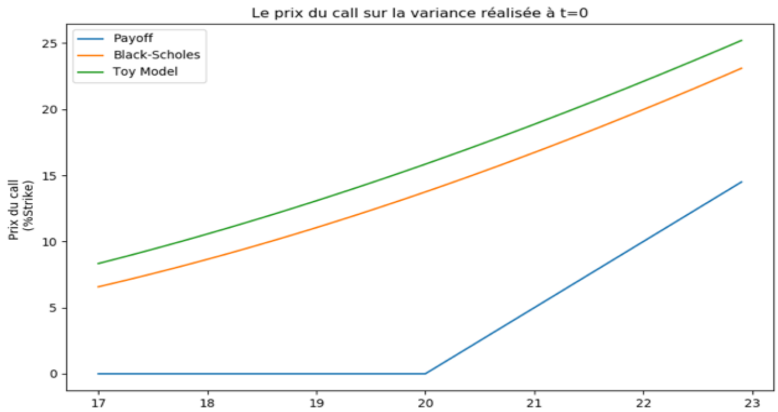
Comme v_T a une distribution log-normale, la formule fermée pour un call sur la variance réalisée au strike K est identique à la formule de Black-Scholes pour un call sur une action payante à dividende zéro avec un paramètre de volatilité constant $\sigma = \frac{2}{\sqrt{3}}\omega\frac{T-t}{T}$. D'où, les rendements :

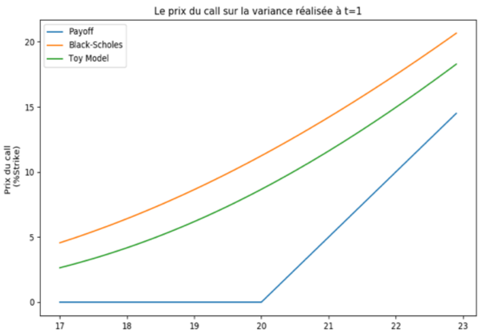
$$f_t = v_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

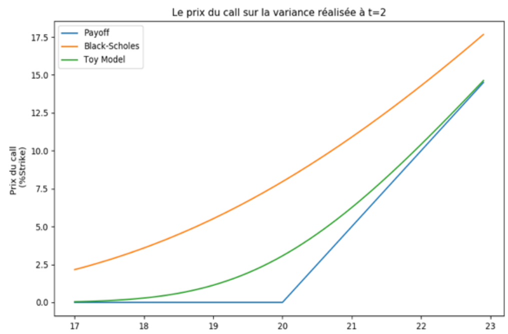
où N est la distribution normale standard cumulative et :

$$d_1 = \frac{ln\sqrt{\frac{v_t e^{r(T-t)}}{K}} + \frac{1}{3}\omega^2 T\left(\frac{T-t}{T}\right)^3}{\frac{1}{\sqrt{3}}\omega\sqrt{T}\left(\frac{T-t}{T}\right)^{3/2}}, \qquad d_2 = d_1 - \frac{2}{\sqrt{3}}\omega\sqrt{T}\left(\frac{T-t}{T}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Les figures ci-dessous montrent la comparaison entre le prix d'arbitrage d'un call selon le *toy model* et celui d'un call selon Black-Scholes pour T=3 ans, K=20 et t = 0, 1, 2 ans. Nous avons supposé une volatilité de 20 % et un taux d'intérêt de 0 %. Les prix des options sont exprimés en pourcentage du strike. Ainsi, nous pouvons voir que le call sur la variance vaut plus que Black-Scholes à t = 0, et moins à t = 1 et t = 2, ce qui indique une plus grande décroissance par rapport au temps. Pour générer ces graphiques nous avons créé un script avec Python.







III. TARIFICATION ET COUVERTURE DES CREANCES DE QUASI-CORRELATION

1) Swaps de corrélation

Un swap de corrélation est un instrument dérivé sur un panier de n actions dont le payoff est :

$$c_T = \frac{\sum_{1\leq i\leq j\leq n} w_i w_j p_{i,j}}{\sum_{1\leq i\leq j\leq n} w_i w_j} - K$$

où w est un vecteur de poids arbitraires non négatifs s'additionnant à 1, ρ une matrice définie positive des coefficients de corrélation par paires, et K le strike.

Corrélation implicite de l'indice

Dans le cas des indices boursières, une mesure de corrélation moyenne implicite peut être écartée des volatilités implicites :

$$\overline{p}_{Implicite} = \frac{\sigma_{Indice}^2 - \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_i^2}{2\sum_{1\leq i<j\leq n}(w_i\sigma_i)(w_j\sigma_j)}$$

où n est le nombre d'actions dans l'indice, σ_{Indice} est la volatilité implicite de l'indice, σ est le vecteur des volatilités implicites et w est le vecteur des poids de l'indice.

Nous avons également que la volatilité dans un portefeuille est :

$$\sigma_{Portefeuille}^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} w_i w_j\, \sigma_i \sigma_j p_{i,j}$$

Remarque : dans un portefeuille, les pondérations sont fixes, alors que dans un indice, elles varient en fonction du cours des actions. En outre, la formule ci-dessus n'est exacte que pour les rendements standard $\left(\frac{\Delta P}{P}\right)$, et non pour les rendements logarithmiques. Dans des conditions de marché normales et sur des périodes d'observation raisonnables, ces différences peuvent être ignorées.

Corrélation implicite et corrélation juste

Intuitivement, on pourrait s'attendre à ce que la juste valeur d'un swap de corrélation sur un indice boursier soit liée à la corrélation implicite de l'indice. Cependant, en l'absence d'une stratégie de réplication, le concept de juste valeur est assez imprécis. La situation est compliquée par l'existence de surfaces de volatilité implicite qui se traduisent en surfaces de corrélation implicite : il n'existe pas une seule mesure de corrélation implicite.

Par la suite, nous établissons l'existence formelle d'une stratégie de quasi-réplication pour les swaps de corrélation d'indices d'actions qui repose sur un échange dynamique de la variance de l'indice et de ses composantes, et nous montrons que la juste valeur d'un swap de corrélation est à peu près égale à une mesure particulière de la corrélation implicite, après actualisation. Cette stratégie de réplication dynamique est plus facilement exposée à l'aide des règles empiriques que nous présentons ci-dessous.

Proxy de corrélation

Pour un nombre suffisant d'actions et sous certaines conditions, on a la règle empirique :

$$\overline{\rho} \approx \left(\frac{\sigma_{Indice}}{\sum_{i=1}^{n} w_i \sigma_i}\right)^2$$

où $\overline{\rho}$ désigne une corrélation moyenne réalisée ou implicite, σ un vecteur de volatilités réalisées ou implicites, et w un vecteur de poids des composantes de l'indice.

De plus, nous constatons que cette mesure de substitution est conceptuellement proche du ratio de la variance de l'indice par rapport à la variance moyenne de ses composantes :

$$\left(\frac{\sigma_{Indice}}{\sum_{i=1}^{n} w_i \sigma_i}\right)^2 \approx \frac{\sigma_{Indice}^2}{\sum_{i=1}^{n} w_i \sigma_i^2}$$

Nous appelons la quantité de gauche le proxy de corrélation basé sur la volatilité et celle de droite le proxy basé sur la variance. En pratique, ces deux mesures de substitution diffèrent généralement de quelques points de corrélation pour les principaux indices boursiers, tant pour les données implicites que pour les données historiques.

L'importance de l'introduction du proxy basé sur la variance repose sur le fait que la corrélation de l'indice moyen devient le rapport de deux types de variances négociables : la variance de l'indice et la variance des composantes moyennes. En fait, ces variances sont fréquemment échangées l'une contre l'autre dans le cadre des opérations dites de dispersion de la variance, dans le but de tirer parti de l'écart entre la corrélation implicite et la corrélation réalisée.

2) Créance de Quasi-corrélation

Nous appelons une créance de quasi-corrélation un dérivé de variance dont le payoff est :

$$c_T = \frac{a_T}{b_T}$$

où a_T désigne la variance réalisée de l'indice et b_T la variance réalisée des composantes moyennes. Elles sont définies par :

$$a_T = \frac{1}{T}[lnS]_T$$

$$b_T = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{n} w_i\left[lnS^i\right]_T$$

avec S désignant le processus de prix de l'indice, (S_1, ..., S_n) le vecteur des processus de prix des composantes, et [.] la variation quadratique.

Prix de l'arbitrage

Nous étendons maintenant le *toy model* pour trouver le prix d'arbitrage d'une créance de quasi-corrélation. Nous considérons un marché composé de deux actifs de variance négociables a et b et de liquidités, et nous faisons les mêmes hypothèses économiques que dans la section 1. De plus, nous avons les dynamiques suivantes sous Q :

$$\begin{aligned} da_t &= ra_t dt + 2\omega_a \frac{T-t}{T} a_t dW_t \\ db_t &= rb_t dt + 2\omega_b \frac{T-t}{T} b_t \left(\chi dW_t + \sqrt{1-\chi^2} dZ_t\right) \end{aligned}$$

où r est le taux d'intérêt à court terme, ω est la volatilité de volatilité, χ est le paramètre de corrélation instantanée entre a et b, et W_t, Z_t sont deux mouvements browniennes indépendantes.

En indiquant c_t le processus de prix pour la créance de quasi-corrélation, et en appliquant le théorème d'Ito-Doeblin :

$$dln\frac{a_t}{b_t} = 2(\omega_b^2 - \omega_a^2)\left(\frac{T-t}{T}\right)^2 dt + 2(\omega_a - \omega_b\chi)\frac{T-t}{T} dW_t - 2\omega_b\sqrt{1-\chi^2}\frac{T-t}{T} dZ_t$$

En développant, nous obtenons :

$$c_t = \frac{a_t}{b_t} = \exp\left[-r(T-t) + \frac{4}{3}(\omega_b^2 - \omega_a\omega_b\chi)T\left(\frac{T-t}{T}\right)^3\right]$$

$$c_0 = \frac{a_0}{b_0}\exp\left[-rT + \frac{4}{3}(\omega_b^2 - \omega_a\omega_b\chi)T\right]$$

Remarque : si les paramètres de volatilité de la volatilité sont du même ordre et que la corrélation des variances est élevée, nous avons $c_0 \approx \frac{a_0}{b_0}e^{-rT}$, qui n'est rien d'autre que le proxy de corrélation implicite basé sur la variance actualisée.

Stratégie de couverture dynamique

Nous allons maintenant examiner plus en détail la stratégie de couverture des créances de quasi-corrélation. Les coefficients de couverture ou deltas pour les deux actifs de variance sont donnés par :

$$\delta_t^a = \frac{c_t}{a_t}$$

$$\delta_t^b = -\frac{c_t}{b_t}$$

En pratique, cela signifie que si nous sommes à court d'une créance, nous devons détenir une position longue dans la variance de l'indice contre une position courte dans la variance des composantes moyennes. Ce type d'échange est connu sous le nom de dispersion de la variance. Nous devons souligner que les poids entre les deux jambes ne sont pas égaux car le ratio des deltas est égal à la juste valeur de la créance :

$$\left|\frac{\delta_t^b}{\delta_t^a}\right| = \frac{a_t}{b_t} = c_t$$

En particulier, à t = 0, ce ratio est égal au proxy de corrélation implicite basé sur la variance, et la couverture delta initiale est connue comme un échange de dispersion de la variance pondéré par la corrélation.
En outre, le coût de la mise en place de la couverture delta est nul à tout moment :

$$\delta_t^a + \delta_t^b = \frac{c_t}{a_t} a_t - \frac{c_t}{b_t} b_t = 0$$

Ainsi, la stratégie de couverture est entièrement autofinancée.

IV. CONCLUSION

Dans ce rapport, nous avons traité un modèle simple pour déterminer principalement la tarification des swaps de corrélation sur les composantes d'un indice boursier. Nous avons constaté que ces swaps ont un payoff presque égal à celui d'une créance de quasi-corrélation moins le strike. Ce qui implique que la stratégie de couverture de cette dernière est une stratégie de quasi-corrélation pour la première car il réplique le module de payoff de l'erreur du proxy de corrélation. C'est-à-dire que les swaps de corrélation sur un indice boursier devraient se négocier à un prix d'exercice proche du proxy de corrélation implicite sur la variance.

Pour aller plus loin, nous pourrions envisager une modélisation d'un swap de variance à terme fixe en s'appuyant sur la dynamique de la surface de volatilité implicite. Contrairement à ce que nous avons abordé dans ce rapport concernant les produits dérivés sur la volatilité réalisée tels que les swaps de volatilité, nous pourrions analyser d'autres types des dérivés à l'aide de la volatilité implicite, par exemple : les swaps de variance à départ anticipé, les options de cliquet ou les options sur le VIX.