Estimation des Paramètres du Modèle ARFIMA via le Gradient Conjugué

March 11, 2025

1 Introduction

Le modèle ARFIMA (p, d, q) est une extension du modèle ARIMA, intégrant un paramètre de mémoire longue d permettant une différenciation fractionnaire. L'objectif est d'estimer les paramètres du modèle en minimisant la log-vraisemblance négative via la méthode du gradient conjugué.

2 Définition du Modèle ARFIMA

Le modèle ARFIMA(p, d, q) est défini par l'équation suivante :

$$\phi(L)(1-L)^d y_t = \theta(L)\epsilon_t, \tag{1}$$

où :

- $\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - ... - \phi_p L^p$ représente la partie auto-régressive (AR),
- $\theta(L) = 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + ... + \theta_q L^q$ est la partie moyenne mobile (MA),
- $(1-L)^d$ est l'opérateur de différenciation fractionnaire,
- $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ représente un bruit blanc gaussien.

Les paramètres à estimer sont donc :

- $\phi = (\phi_1, \phi_2, ..., \phi_p)$: coefficients AR,
- $\theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_q)$: coefficients MA,
- d : paramètre de différenciation fractionnaire,
- σ^2 : variance du bruit blanc.

3 Méthode du Gradient Conjugué

L'objectif est de minimiser la log-vraisemblance négative (Negative Log-Likelihood, NLL) définie par :

$$\mathcal{L}(\theta) = -\sum_{t=1}^{T} \log f(y_t|\theta), \tag{2}$$

où $f(y_t|\theta)$ est la densité conditionnelle du processus ARFIMA.

La méthode du gradient conjugué suit ces étapes :

1. Initialiser les paramètres $\theta_0 = (\phi, \theta, d, \sigma^2)$.
2. Calculer le gradient $\nabla \mathcal{L}(\theta)$.
3. Choisir une direction conjuguée p_k.
4. Mettre à jour les paramètres :
$$\theta_{k+1} = \theta_k + \alpha_k p_k, \tag{3}$$
où α_k est un pas optimal obtenu par recherche linéaire.
5. Répéter jusqu'à convergence.

4 Transformation Fractionnaire

L'opérateur de différenciation fractionnaire est défini par :

$$(1 - L)^d y_t = \sum_{j=0}^{\infty} w_j y_{t-j}, \tag{4}$$

où les coefficients w_j sont donnés par :

$$w_j = \frac{\Gamma(j - d)}{\Gamma(-d)\Gamma(j + 1)}. \tag{5}$$

5 Estimation des Erreurs

L'équation du modèle devient :

$$\tilde{y}_t = \sum_{i=1}^{p} \phi_i \tilde{y}_{t-i} + \sum_{j=1}^{q} \theta_j \epsilon_{t-j} + \epsilon_t. \tag{6}$$

On estime les erreurs ϵ_t en résolvant cette équation récursive.

6 Calcul de la Log-Vraisemblance

Sous l'hypothèse $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, la densité conditionnelle est :

$$f(y_t|\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\epsilon_t^2}{2\sigma^2}\right). \tag{7}$$

Ainsi, la log-vraisemblance est donnée par :

$$\mathcal{L}(\theta) = -0.5 \sum_t \left(\log(2\pi\sigma^2) + \frac{\epsilon_t^2}{\sigma^2}\right). \tag{8}$$

7 Optimisation par Gradient Conjugué

L'optimisation est réalisée via 'scipy.optimize.minimize' avec 'method='CG'' :

```
from scipy.optimize import minimize

# Initialisation des paramètres
theta_init = [0.3, -0.2, 0.3, 0.5, 0.1]  # [phi1, phi2, d, theta1, sigma2]
```

```
# Optimisation par Gradient Conjugué
result = minimize(log_likelihood, theta_init, args=(y,), method='CG')

# Résultats
print("Paramètres optimaux:", result.x)
print("Succès de l'optimisation:", result.success)
```

8 Conclusion

Nous avons détaillé l'estimation des paramètres du modèle ARFIMA à l'aide du gradient conjugué. La transformation fractionnaire et la maximisation de la log-vraisemblance permettent une estimation efficace des paramètres du modèle.