



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Digráficas de intervalos ajustadas

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
TÍTULO OTORGADO

PRESENTA:
CRHISTIAN ALFREDO SOLÍS CALDERÓN

DIRECTOR DE TESIS:
CÉSAR HERNÁNDEZ CRUZ



2022

1. Datos del alumno

Apellido paterno	Solís
Apellido materno	Calderón
Nombre(s)	Christian Alfredo
Teléfono	7475453955
Universidad	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad o escuela	Facultad de Ciencias
Carrera	Matemáticas
Número de cuenta	314161213

2. Datos del tutor

Grado	Dr.
Nombre(s)	César
Apellido paterno	Hernández
Apellido materno	Cruz

3. Datos del sinodal 1

Grado	Dra.
Nombre(s)	Nombres
Apellido paterno	Paterno
Apellido materno	Materno

4. Datos del sinodal 2

Grado	M. en C.
Nombre(s)	Nombres
Apellido paterno	Paterno
Apellido materno	Materno

5. Datos del sinodal 3

Grado	Mat.
Nombre(s)	Nombres
Apellido paterno	Paterno
Apellido materno	Materno

6. Datos del sinodal 4

Grado	Lic. en Ciencias de la Computación
Nombre(s)	Nombres
Apellido paterno	Paterno
Apellido materno	Materno

7. Datos del trabajo escrito

Título	Título
Número de páginas	XX p.
Año	2021

Agradecimientos

Agradezco a mi director de tesis por haber hecho esta plantilla.

Contents

Agradecimientos	v
1 Introducción	3
1.1 Conceptos básicos	4
1.2 Subgráficas	7
1.3 Isomorfismos de gráficas	9
1.4 Caminos y conexidad.	10
1.5 Familias especiales de gráficas	13
1.5.1 Gráficas completas	13
1.5.2 Gráficas multipartitas	14
1.5.3 Árboles	16
1.5.4 Gráficas cordales	17
2 Gráficas de intervalos	23
2.1 Definiciones y ejemplos	24
2.2 Propiedades básicas	26
2.3 Orientaciones transitivas	31
2.4 Tripletas asteroidales	34
2.5 Ambientes y etiquetas	38
2.6 Dibujos y colores	40
2.7 Algoritmos	42
2.8 Índice alfabético	43
3 Digráficas de intervalos ajustadas	45
3.1 Digráficas de intervalos	45
3.2 Digráficas de intervalos ajustadas	48
3.3 Digráficas de intervalos ajustadas.	59
Bibliografía	67

Prefacio

Las gráficas de intervalos tienen un gran abanico de aplicaciones en el mundo real, pues son capaces de modelar problemas los cuales dependen de una variable en común. Hay muchos ejemplos de esto, tal vez el mas sencillo sea el de acomodar cátedras en un auditorio, en un horario de servicio dado. De forma que se puedan llevar a cabo el mayor número de cátedras y que no haya empalmes entre estas. Aquí las tareas a realizarse son las de dar las cátedras y estas dependen del tiempo que tomará cada una de estas, esto se puede modelar asignando a cada catedra un vértice y si sucede que los horarios de dos clases se empalman, diremos que sus vértices correspondientes son *adyacentes*. Otro ejemplo un poco menos evidente es el de la modelación de luces de un semáforo, en donde ahora se hace uso de un carril para la circulación vehicular sin incidentes. Es decir hay que programar eficientemente el semáforo de tal forma que no haya flujo vehicular incompatible, evitando así accidentes. Otro problema modelable es el de uso de memoria en una computadora, para guardar (reusar) nombres de variables, aquí nuevamente a cada variable le corresponde un vértice y estos serán adyacentes si los nombres se ocupan al mismo tiempo.

Además de resultar tan útiles en el mundo de las matemáticas aplicadas, estas tienen propiedades interesantes, es decir son una familia de gráficas muy ricas en cuanto a estructura se refiere, por ejemplo gracias a sus caracterizaciones se cuenta con un algoritmo de reconocimiento de tiempo lineal, es decir dada una gráfica se puede comprobar si esta es o no gráfica de intervalos.

Naturalmente, nos gustaría contar con un concepto que extienda el concepto de gráficas de intervalos a gráficas dirigidas. En realidad ya se cuenta con una definición para gráficas dirigidas, la cual posee una relación de incidencia similar a la dada para las gráficas de intervalos, las digráficas de intervalos, estas, a diferencia del caso no dirigido, no cuentan de momento con un algoritmo de reconocimiento lineal. Si se cuenta con un algoritmo de tiempo polinomial, sin embargo para gráficas incluso no tan grandes, los tiempos de reconocimiento son significativamente altos. Estas admiten una caracterización en términos de su matriz de incidencia pero nuevamente

a diferencia del caso no dirigido, no contamos con una caracterización de estructura.

En este punto, viendo todas las carencias de las digráficas de intervalos respecto al caso no dirigido, es donde se recoge la definición que introducen Tomás Feder, et al. Ellos dan una generalización de las gráficas de intervalos, las digráficas de intervalos ajustadas, con esta nueva definición, obtendremos una caracterización de estructura, en termino de una estructura noble que llamaremos *el par invertible*. Con esta nueva caracterización daremos un algoritmo de reconocimiento de tiempo polinomial bajo, de complejidad $O(n^3)$. Otra cosa inmediata que se obtiene es el hecho que tenemos nuevamente la propiedad reflexiva(así como las gráficas de intervalos), de la cual carecen las digráficas de intervalos.

Así, centraremos nuestros esfuerzos en esta tesis en hacer un breve estudio sobre este tipo de digráficas.

Chapter 1

Introducción

La teoría de gráficas es un campo de las matemáticas ampliamente estudiado debido a la fascinante capacidad que tienen las gráficas para resolver problemas del mundo real. Las gráficas son objetos matemáticos utilizados frecuentemente como herramienta para representar y modelar diversas situaciones. Se dice que la teoría de las gráficas se originó en el siglo XVIII, específicamente al modelar el famoso problema de los puentes de Königsberg. Para contextualizar, la ciudad de Königsberg (hoy Kaliningrado) estaba atravesada por el río Pregel, el cual formaba una isla. Además, el río se bifurcaba, generando así cuatro regiones distintas, como se muestra en la imagen. Estas regiones de tierra estaban unidas por siete puentes, y el problema consistía en trazar una trayectoria que pasara una sola vez por cada uno de los siete puentes, empezando y terminando en la misma región de tierra. En 1735, el destacado matemático suizo Leonhard Euler resolvió este problema al modelarlo mediante una representación gráfica. Euler asignó un punto a cada región de tierra y utilizó líneas para representar los siete puentes, creando así una gráfica. Al estudiar la estructura de esta gráfica, Euler observó que había por los cuatro puntos había un número impar de puentes. Utilizando un razonamiento que ahora se conoce como el teorema de Euler, demostró que no era posible trazar una trayectoria que cruzara cada puente una sola vez y que terminara en el punto inicial.

Esta solución de Euler al problema de los puentes de Königsberg sentó las bases de la teoría de gráficas. Su enfoque para resolver el problema mediante una representación gráfica y su demostración del teorema de Euler allanaron el camino para el desarrollo de conceptos y resultados fundamentales en la teoría de gráficas. Desde entonces, la teoría de gráficas ha encontrado aplicaciones en una amplia gama de disciplinas, incluyendo la ciencia de la computación, la logística, la biología, la física y la sociología. Por ejemplo, en el ámbito de la logística, las gráficas se utilizan para determinar

la ruta más eficiente para el transporte de mercancías o para la planificación de redes de distribución. Además, en la sociología, las gráficas son una herramienta valiosa para analizar y comprender las interacciones sociales, identificar líderes de opinión y comprender los patrones de difusión de información. En el campo de la informática, la teoría de gráficas es fundamental en el diseño y análisis de algoritmos. Los algoritmos de búsqueda, recorrido y optimización en gráficas son ampliamente utilizados en la resolución de problemas computacionales, como la planificación de rutas, el enrutamiento de redes y el análisis de datos en redes complejas.

En resumen, modelar un problema del mundo real mediante una gráfica nos proporciona una nueva perspectiva sobre el mismo. Podemos analizar la estructura generada por la gráfica y descubrir información y patrones que no eran evidentes inicialmente. Al reinterpretar esta información en el contexto del problema real, podemos tomar decisiones informadas sobre cómo seguir atacando nuestro problema. Además, al interpretar los resultados de vuelta al mundo real, es posible realizar ajustes, mejoras o modificaciones en función de la comprensión obtenida a través de la modelización de la gráfica. Estos cambios pueden llevar a soluciones más eficientes, eficaces o innovadoras, y ayudar a resolver problemas de manera más efectiva.

1.1 Conceptos básicos

En esta sección, nos enfocaremos en presentar las definiciones necesarias para abordar el tema central de la tesis. Si bien esta sección puede resultar densa debido a la cantidad de definiciones, nos esforzaremos por brindar numerosos ejemplos de gráficas que faciliten la comprensión de estos nuevos conceptos.

En primer lugar, es crucial establecer un sólido fundamento conceptual para adentrarnos en el estudio de las gráficas. Por lo tanto, se presentarán las definiciones clave, empezando por la definición de gráfica así como las definiciones de vértices, aristas, tamaño y orden de una gráfica, y otros elementos esenciales para su comprensión.

Comencemos con el concepto más fundamental, el de **gráfica**. Una **gráfica no dirigida** G , es un par ordenado $(V(G), E(G))$ el cual consiste de un par de conjuntos, $V(G)$ un conjunto finito cuyos elementos llamamos **vértices** y $E(G)$ un conjunto cuyos elementos llamamos **aristas**, los cuales son parejas no ordenadas de vértices, así $E(G) \subseteq \{\{x, y\} : x, y \in V(G)\}$. Si G es una gráfica y $(V(G), E(G))$ son sus conjuntos de vértices y aristas, respectivamente, entonces diremos que, el **orden** de G es $|V(G)|$ y que $|E(G)|$ es el **tamaño** de G .

También tenemos la definición de **gráfica dirigida**, donde el único cambio es que el conjunto de aristas son ahora pares ordenados, es decir la definición es la siguiente. Una gráfica dirigida $G = (V(G), F(G))$ es una pareja ordenada que consta

de un conjunto arbitrario de vértices $V(G)$ y de un conjunto de **flechas** $F(G) \subseteq \{(x, y) | x, y \in V(G)\}$. Análogamente al caso de las gráficas, es posible definir orden y tamaño para una gráfica dirigida. Se suele nombrar a las gráficas dirigidas por digráficas y esta será la forma como nos referiremos a las gráficas dirigidas por el resto de la tesis. Por el momento, dejaremos de lado esta definición y la retomaremos en capítulos posteriores.

Veamos a continuación los siguientes ejemplos. Comencemos con $V(G) = \{1, 2, 3\}$ $E(G) = \{\{1, 2\}\}$. Claramente, $G = (V(G), E(G))$ es un ejemplo de una gráfica de orden tres y de tamaño uno. Notemos que, para expresar una gráfica un poco más grande, por ejemplo, de orden seis y tamaño doce, escribir a los conjuntos de vértices y aristas se vuelve una labor tediosa. Por lo anterior, es deseable contar con alguna forma más eficiente de representar a G

La teoría de gráficas tiene una gran ventaja respecto a otras ramas de las matemáticas, en principio, según nuestra definición de gráfica, todo es discreto, y como segunda cosa, la mayoría de nuestros objetos pueden ser representados de forma gráfica. Por ello, haremos lo siguiente. A cada elemento de $V(G)$ lo representamos por medio de un pequeño círculo, además, cada uno tendrá una pequeña etiqueta que nos indicará de alguna forma conveniente de qué elemento de $V(G)$ se trata. Las aristas son representadas por medio de líneas, que empiezan y terminan en los círculos correspondientes a su par de vértices. Las aristas, a diferencia de los vértices, no suelen ir etiquetadas, sin embargo uno podría etiquetar a una arista con uv o vu si esta arista une precisamente a los vértices u y v . Esta será la forma como se hará referencia a las aristas a lo largo de este texto. Notemos que toda arista forzosamente se corresponde con dos vértices (no necesariamente distintos), así toda arista, debe ser dibujada con sus extremos, inicial y final, anclados en los vértices (los círculos).

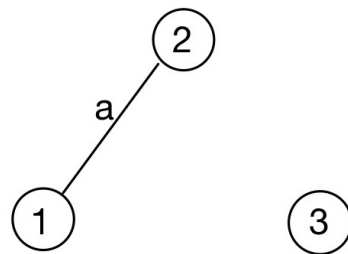


Figure 1.1: Representación de una gráfica, de tamaño uno y orden dos.

Como se vio en el ejemplo anterior, puede haber algún vértice que no esté “conectado” a otro vértice, como el vértice 3. Decimos que dos vértices que están

conectados (que pertenecen a la misma arista), como el 1 y 2, son **adyacentes**. En otro caso diremos que son **independientes** o no adyacentes. Por ejemplo los vértices 1 y 3 son independientes, y también los vértices 2 y 3 lo son. En general, decimos que un conjunto $S \subseteq V(G)$ es un **independiente** si y solo si, para cualesquiera vértices x, y , si x es distinto de y , entonces $xy \notin E(G)$.

Notemos que si $E(G)$ es el conjunto vacío, entonces, tendremos que la gráfica que obtenemos es aquella donde todos los vértices no son adyacentes entre sí.

Notemos que nuestra definición de gráfica nos permite que un arista tenga como extremos vértices iguales, aquellas aristas las llamaremos **lazos**, y gráficamente las representaremos por medio de una línea curva que termina y empieza en el mismo vértice tal como se muestra en la la Figura 1.2, aquí los vértices 1 y 2 ambos tienen lazos.

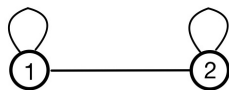


Figure 1.2: Gráfica de orden dos y tamaño tres, la cual tiene dos lazos.

Una gráfica en la cual todos los vértices tienen lazos, la llamaremos **reflexiva**. Así la gráfica de la Figura 1.2 es una gráfica reflexiva. Por el momento trabajaremos exclusivamente con gráficas no reflexivas, a menos de que se indique lo contrario.

Veamos otro ejemplo, en la Figura 1.2 vimos que había un vértice, el cual no era adyacente a ningún otro vértice. Supongamos ahora que $V(G)$ es un conjunto cualquiera con cinco elementos, y que $E(G)$ coincide con el conjunto $\{\{x, y\} | x, y \in V(G)\}$. Decimos que una gráfica G es una **gráfica completa** si y solo si, para cada par de vértices, se tiene que estos son adyacentes. Repasando nuestras definiciones, en una gráfica completa no hay ningún par de vértices independientes, mas aún ningún subconjunto de $V(G)$ es independiente. La gráfica resultante la podemos representar como se muestra en la la Figura 1.4.

De forma dual a que un conjunto S sea independiente, tenemos la siguiente definición, decimos que un conjunto $S \subseteq V(G)$ es un **clan**, si y si solo si para todo $x, y, x \neq y, xy \in E(G)$.

En la la Figura 1.4 se tiene que todo subconjunto de $V(G)$ es un clan.

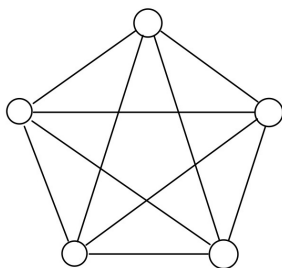


Figure 1.3: Gráfica que tiene todas las aristas posibles, excepto lazos.

Tenemos un par mas de definiciones. Decimos que dos vértices u y v son **incidentes** en la arista e , si e es precisamente la arista $\{u, v\}$. Así en la la Figura 1.2 los vértices u y v son incidentes en a . Otra definición mas que tenemos es la siguiente, decimos que dos aristas son **aristaadyacentes** si estas son de la forma $\{u, v\}$ y $\{v, w\}$, es decir comparten un vértice en común. Por ejemplo las aristas a y b son adyacentes.

Terminaremos nuestra sección con las siguientes definiciones y ejemplos. Dado $v \in V(G)$ definimos la **vecindad** de v , denotada por $N(v)$ como aquel subconjunto de $V(G)$ que consta de todos los vértices adyacentes a v . Y al cardinal de $N(v)$ le llamamos el **grado** del vértice v . Por otro lado definimos la **vecindad cerrada** de v como la vecindad de v unión v , y la denotamos con $N[v]$. Repasemos estos conjuntos, en la Figura 1.1 la vecindad del vértice 1, $N(1) = \{2\}$ así el vértice 1 tiene grado 1. Por otro lado el vértice 3, tiene grado cero ya que su vecindad es vacía.

En la Figura 1.3 notemos que todos los vértices tienen grado 4. La gráficas que cumplen que todos sus vértices tienen el mismo grado son llamadas **gráficas regulares**, si además el grado de sus vértices es k las llamamos k -regulares. Así el ejemplo de la Figura 1.3 es una gráfica 4-regular.

1.2 Subgráficas

A similitud de muchas estructuras en matemáticas, las gráficas también tienen su respectiva subestructura, así es que introducimos una subgráfica. H es **subgráfica** de una gráfica G si sus vértices y aristas pertenecen también a $V(G)$, es decir $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$. Decimos que un vértice v es adyacente a una subgráfica H si y solo si existe un vértice $u \in H$ tal que $uv \in E(G)$.

Otro concepto que surge de forma natural es el de la estructura generada por un subconjunto S . Por lo tanto definimos la **subgráfica inducida** por $S \subseteq V(G)$, cuyo

conjunto de vértices es exactamente S y las aristas serán todas las aristas $\{u, v\}$ de G tales que $u, v \in S$. A esta gráfica inducida la denotaremos con $V[S]$, es natural que esta es una subgráfica de G .

Veamos el siguiente ejemplo. En la Figura 1.4, tenemos una gráfica y un par de subconjuntos, el subconjunto de vértices coloreados de color verde y el conjunto de vértices coloreados de naranja. La gráfica inducida por los vértices verdes es la gráfica que se muestra en el recuadro de en medio, mientras que la inducida por el conjunto de vértices naranja es la de la derecha.

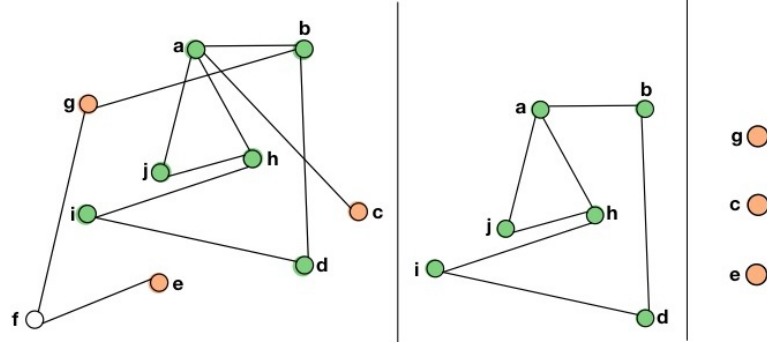
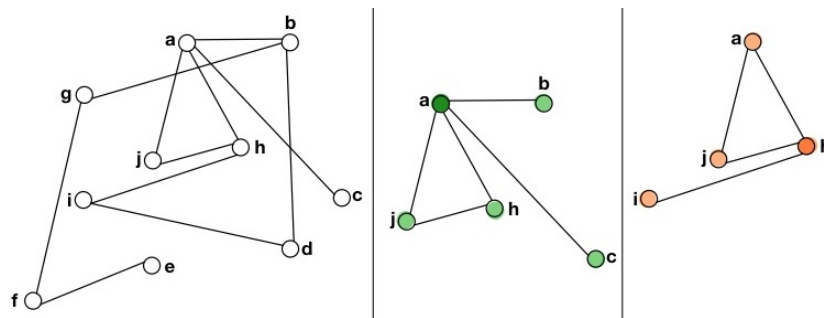


Figure 1.4: Gráfica G y subgráficas inducidas $V[\{a, b, d, i, j, h\}]$, $V[\{c, e, g\}]$.

Denotamos por $S(v)$ a la gráfica generada v y todos sus vecinos. Es decir $S(v) = V[N[v]]$.

Veamos el siguiente ejemplo para aterrizar el concepto. En la Figura 1.5 al centro mostramos el conjunto $S(a)$ y a la derecha se muestra el conjunto $S(h)$. Es importante notar que a diferencia de la vecindad cerrada de a , los conjuntos $S(a)$ cuentan con estructura de gráfica, mientras que las vecindades solo son conjuntos de vértices. Aquellos vértices que cumplen que $S(a)$ es una gráfica completa, son llamados **vértices simpliciales**.

Figure 1.5: Gráfica G y las vecindades cerradas $S(a)$ y $S(h)$

Otros ejemplos de subgráficas son los que se obtienen al quitar vértices o aristas de una subgráfica. Sea G una gráfica y $w \in V(G)$ definimos la gráfica $G - \{w\} = (V(G) - \{w\}, E')$ donde $uv \in E'$ si y solo si $uv \in E(G)$, $w \notin uv$. Dado $S \subseteq V(G)$ se puede definir inductivamente $G - S$. Definimos también $G - \{e\} = (V(G), E')$ con $e \in E(G)$, donde $E' = E(G) - \{e\}$. Nuevamente, dado $S \subseteq E(G)$ se puede definir inductivamente $G - S$.

1.3 Isomorfismos de gráficas

En esta breve sección abordamos un tema sumamente importante, estudiaremos los isomorfismos de gráficas.

Veamos el siguiente ejemplo a fin de motivar el estudio de las gráficas isomorfas.

Tomemos $V(G_1) = \{1, 2, 3\}$, $E(G_1) = \{\{1, 2\}\}$, $V(G_2) = \{2, 3, 4\}$, $E(G_2) = \{\{2, 3\}\}$ y general $V(G_i) = \{i, i + 1, i + 2\}$, $E(G_i) = \{i, i + 1\}$. Esta es una familia infinita numerable de gráficas y todas ellas pueden ser representadas con la la Figura 1.1. Dado lo anterior nos gustaría decir que en esencia la familia anterior mencionada consta de una sola gráfica. En este punto es donde surge la definición de gráficas isomorfas, es decir si dos gráficas pueden ser representadas por el mismo dibujo, diremos que son isomorfas.

Formalmente, decimos que dos gráficas G y H son **isomorfas** si y solo si existe una función biyectiva $\phi: V(G) \rightarrow V(H)$ la cual preserva adyacencias, es decir $uv \in E(G)$ si y solo si $\phi(u)\phi(v) \in E(H)$. Una función que cumple todo lo anterior es llamado **isomorfismo** de gráficas.

Así, todas las gráficas completas de orden k son isomorfas entre sí. Veamos un pequeño ejemplo de lo anterior, supongamos que $(V(G), E(G))$, $(V(H), E(H))$ son ambas gráficas completas de orden k , $k \in \mathbb{N}$, y para exhibir un isomorfismo

entre estas gráficas solo basta exhibir una biyección entre $V(G)$ y $V(H)$, el cual sabemos que siempre existe pues los conjuntos son equipotentes. Supongamos que $\phi : V(G) \rightarrow V(H)$ es una biyección, quisieramos ver que $uv \in E(G)$ si y solo si $\phi(u)\phi(v) \in E(H)$, pero esto es una consecuencia inmediata del hecho de que ambas gráficas son completas. Así concluimos que todas las gráficas completas de orden k , son isomorfas entre sí. Finalmente podemos decir que salvo isomorfismos existe una única gráfica completa de orden n , luego a la gráfica de orden n la denotaremos por K_n .

Veamos un último ejemplo para concluir la presente sección. En la la Figura 1.7 tenemos un par de representaciones de gráficas, y nosotros afirmamos que dichas gráficas son isomorfas, para esto exhibimos el morfismo ϕ tal que $\phi(a) = \bar{a}, \phi(b) = \bar{c}, \phi(c) = \bar{e}, \phi(d) = \bar{b}, \phi(e) = \bar{d}$.

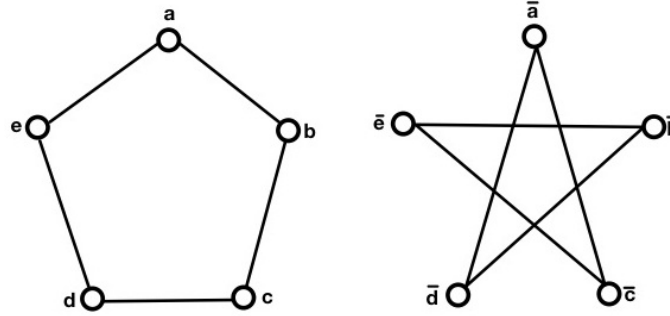


Figure 1.6: Gráficas isomorfas con representaciones distintas.

Así este es un ejemplo de un par de representaciones de una misma gráfica, salvo isomorfismos.

1.4 Caminos y conexidad.

Dada una gráfica G y un par de vértices u, v es bastante natural preguntarse cómo puede llegar uno del vértice u al vértice v , siguiendo una sucesión de vértices adyacentes. Aunque una pregunta más elemental es si es posible llegar del vértice u al vértice v siguiendo vértices adyacentes. O más aún, si siempre es posible llegar de cualquier vértice a cualquier otro siguiendo vértices adyacentes.

Dada una gráfica G , entendemos por un **camino** a una sucesión de vértices (u_1, u_2, \dots, u_n) donde cada par de vértices consecutivos son adyacentes, es decir $u_{i-1}u_i \in E(G)$.

$E(G)$, para cada $i \in \{2, \dots, n\}$. Un camino que empieza en el vértice u y termina en el vértice v , lo llamamos uv -camino.

Un camino que no repite vértices es una **trayectoria**, y un camino que no repite aristas, es un **paseo**. De forma análoga una trayectoria o paseo que empieza en u y termina en v , es una uv -trayectoria o un uv -paseo. La longitud de un camino C o es el número de aristas que tiene C y lo denotamos con $long(C)$, se define de la misma forma la longitud de una trayectoria y un paseo.

Por un ciclo entenderemos a un camino cuyos vértices inicial y final coinciden.

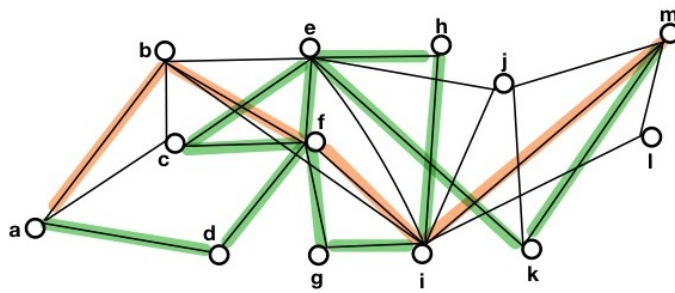


Figure 1.7: En verde un am -camino y en naranja una am -trayectoria

En la Figura 1.8 coloreamos de color verde el am -camino $(a, d, f, e, c, f, g, i, h, e, k, m)$ y tenemos de color naranja la am -trayectoria (a, b, f, i, m) .

Otro concepto importante es el de camino cerrado y ciclo. Un **cerrado** es un camino que cumple que su vértice inicial es igual a su vértice final. Por otro lado un camino cerrado que no repite vértices (intermedios) es un **ciclo**. Se define la longitud de un camino cerrado y de un ciclo como el número de aristas que tienen estos. Al ciclo de longitud n , lo denotamos con C_n .

Adicionalmente tenemos la definición de **distancia** que esta ligada a la definición de trayectoria. Así dada una gráfica $G = (V(G), E(G))$ se define la distancia entre dos vértices u y v como $d(u, v) = \min\{L(C) : C \text{ es } uv\text{-trayectoria}\}$. En caso de no existir alguna uv -trayectoria decimos que $d(u, v) = \infty$.

En la parte superior de la Figura 1.9 se muestra una gráfica G y un ciclo (a, b, c, g, a) de longitud cuatro, y en la parte inferior de la Figura 1.9 se muestra un camino cerrado (c, b, f, c, g, a, b, a) de longitud siete.

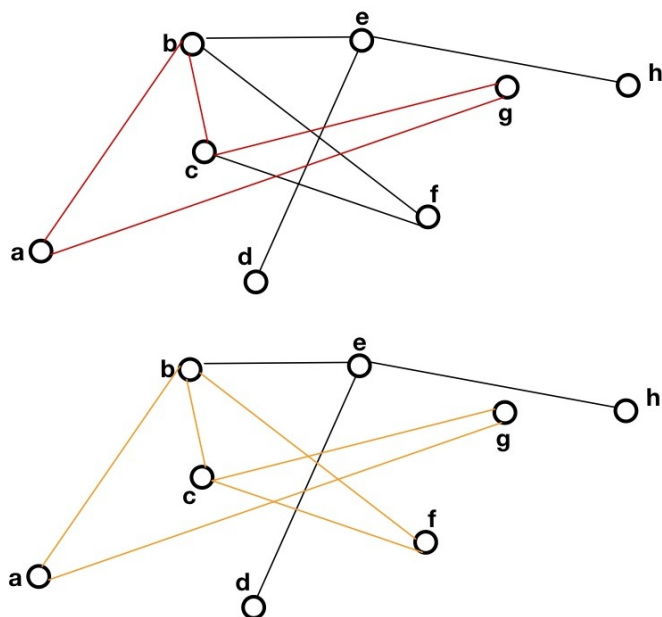


Figure 1.8: Un cuatro ciclo y un siete camino cerrado.

Pasemos ahora al otro concepto importante de la presente sección, el de conexidad. Decimos que dos vértices u y v están **conectados** si y solo si existe una uv -trayectoria. Si una gráfica G cumple que existe una uv -trayectoria para todo par de vértices u y v de G , decimos que es **conexa**. Decimos que una gráfica es **inconexa** si no es conexa. Si H es una subgráfica de G , decimos que es una **componente conexa** de G si no hay otra subgráfica conexa de G que contenga a H .

Observemos la Figura 1.10, aquí podemos ver que los vértices d, e y el arista de juegan un papel importante en la conexidad de la gráfica G , pues al remover estos vértices y esta arista, se tiene que la gráfica queda partida en dos, es decir hay vértices de $G - \{d\}$, $G - \{e\}$ y $G - \{de\}$ que ya nos pueden ser conectados. Por ejemplo en ninguna de las tres gráficas anterior mencionadas existe una af -trayectoria, así las gráficas dejan de ser conexas. Decimos que un vértice v es un **vértice de corte** siempre que $G - \{v\}$ es una gráfica desconexa. Y en general decimos que $S \subseteq V(G)$ es un **conjunto de corte** si $G - \{S\}$ es una gráfica desconexa. Otro concepto bastante relacionado al de conjunto de corte es el de conjunto separador. Dada G y $u, v \in V(G)$, decimos que S es un **conjunto uv -separador** si y solo si al considerar la gráfica $V - S$ los vértices u y v quedan en componentes conexas distintas. Además si no existe un subconjunto propio de S que sea uv -separador,

decimos que S es un conjunto uv -separador mínimo. En la Figura 1.10 el conjunto $\{a, c, d\}$ es un bf -separador, sin embargo no es mínimo, pues por ejemplo el unitario $\{d\} \subseteq \{a, c, d\}$ y $\{d\}$ es también un bf -separador.

Definimos también un **punto** como un arista uv tal que $G - \{uv\}$ es una gráfica disconexa. Así en la Figura 1.10 los vértices e, d son vértices de corte y el arista ed es un punto. En la gráfica $G - \{d\}$ nos quedan justamente dos componentes conexas, a saber, $C_1 = V[\{a, b, c\}]$ y $C_2 = V[\{g, e, f\}]$, notemos que en efecto son componentes conexas pues no existen mas subgráficas H de G que contengan propiamente a C_1 y C_2 .

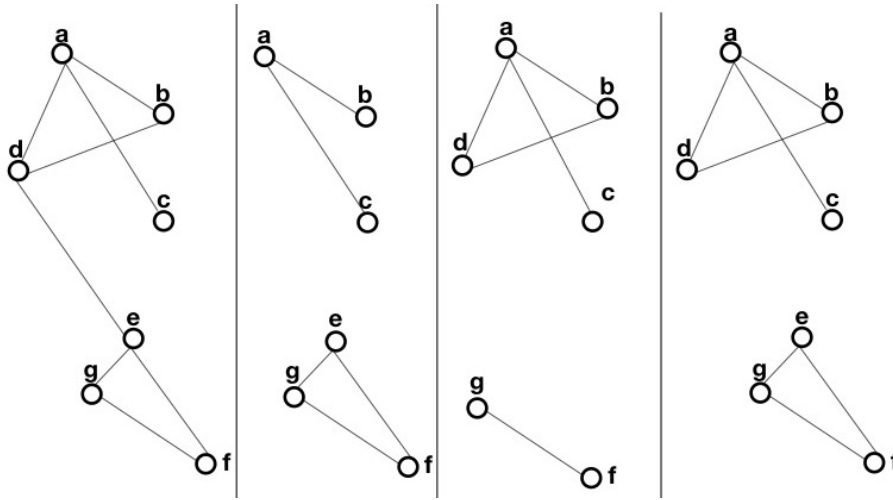


Figure 1.9: Vértices de corte y puente.

1.5 Familias especiales de gráficas

Es usual querer agrupar a objetos matemáticos en función de sus características, así en este capítulo exhibimos familias de gráficas, las cuales comparten propiedades en común, por ejemplo podemos agrupar a gráficas en función de sus incidencias, sus propiedades de conexidad, sus grados, etc.

1.5.1 Gráficas completas

Empecemos con una familia de gráficas que ya se introdujo en la Sección 1.1, las gráficas completas de orden n , ya vimos que salvo isomorfismos las gráficas completas

de orden n son únicas y las denotamos con K_n , sus propiedades; cualesquiera dos vértices son adyacentes, es conexa, es cíclica, y cordal.

1.5.2 Gráficas multipartitas

Sea $G = (V(G), E(G))$ una gráfica. Decimos que (X, Y) es una bipartición de G si y solo si $X, Y \subseteq V(G)$ y $\{X, Y\}$ es una partición de $V(G)$ tal que para toda arista $ab \in E(G)$, se cumple que a está en X y b en Y . Aquellas gráficas que admiten una bipartición llaman gráficas bipartitas.

Veamos la siguiente gráfica de la la Figura 1.5. Aquí es muy fácil decir cual par de conjuntos de vértices formaran la bipartición de G . Recordemos que, además de ser una partición, una bipartición debe satisfacer que toda arista $e \in E(G)$ esta tiene un extremo en X y el otro en Y . Así, podemos proponer que X consista solamente de los vértices de la parte superior y que Y conste de los vértices que quedan en la parte inferior. Notemos que así las cosas, sea cual sea la arista que tomemos, esta tiene un extremo arriba y el otro queda abajo. Por lo tanto es una gráfica bipartita.

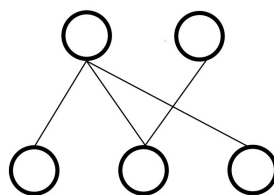
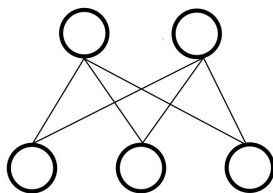


Figure 1.10: Gráfica bipartita, con $X = \{ \text{vértices de arriba} \}$ y $Y = \{ \text{vértices de abajo} \}$

La siguiente gráfica que expondremos es bastante interesante, pues será una gráfica bipartita la cual además cumple que todo vértice de X es adyacente a todo vértice de Y . Esta condición no se cumple en la Figura 1.5, por ejemplo los dos vértices de la derecha, de arriba y abajo, no son adyacentes. Aquellas gráficas que cumplen esta propiedad, son llamadas gráficas bipartitas completas. Mas aún si $|X| = m, |Y| = n$ a le llamamos gráfica bipartita completa, y la denotamos por $K_{m,n}$.

Figure 1.11: Gráfica bipartita $K_{2,3}$.

En la Figura 1.7 tenemos otro ejemplo de gráfica bipartita. En este ejemplo, toda bipartición será cualquier partición (X, Y) de $V(G)$, en donde alguno de los dos conjuntos tiene cardinal 1. (Al ser (X, Y) , partición de $V(G)$, el conjunto cuya cardinalidad no sea 1, será el resto de la gráfica.)

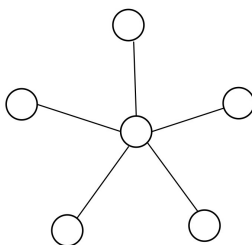


Figure 1.12: Gráfica bipartita

Se pueden definir adicionalmente a las gráficas multipartitas, que es una generalización bastante sencilla de las gráficas bipartitas. Decimos que una gráfica G es una gráfica k -partita si y solo si $V(G)$ puede ser particionado en k conjuntos independientes, $\{W_i\}_{i=1}^n$. De forma que un arista $\{u, v\}$ es tal que $u \in W_i, v \in W_j$ con $i, j \in \{1, \dots, k\}, i \neq j$

Veamos que la Figura 1.7 no solo es 2-partita, si no que es k -partita, con $2 \leq k \leq 6$. La partición será de la siguiente forma. Sea $\{W_i\} \ 1 \leq i \leq k-1$ una $(k-1)$ -partición de $V - v_0$, donde v_0 es el vértice central. Y tomamos $W_k = \{v_0\}$. Así, se tiene una k -partición.

Otro hecho interesante respecto a las gráficas k -partitas es que pueden colorearse los vértices con k colores distintos de forma que no hay dos vértices del mismo color que sean adyacentes. Veamos esto en la Figura 1.15.

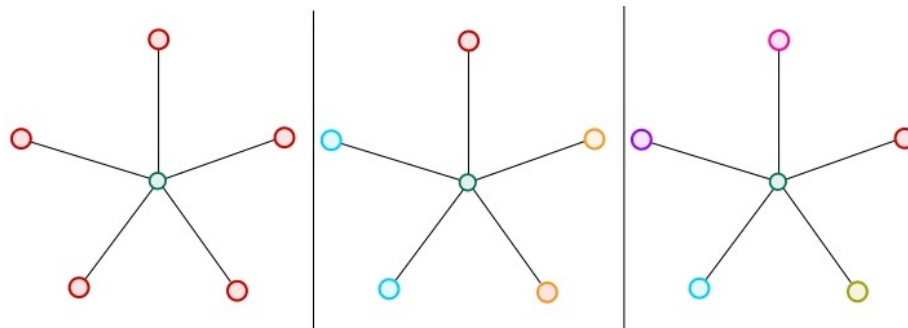


Figure 1.13: Distintas coloraciones de una gráfica.

Las coloraciones de gráficas son ampliamente estudiadas, sin embargo las dejaremos de lado por un momento.

1.5.3 Árboles

Decimos que una gráfica G es un árbol si G es acíclica y conexa. Esta definición depende de dos condiciones, si uno prescinde de la condición de conexidad, se obtiene la definición de bosque, es decir un bosque es una gráfica acíclica. Luego las componentes conexas de un bosque son justamente árboles.

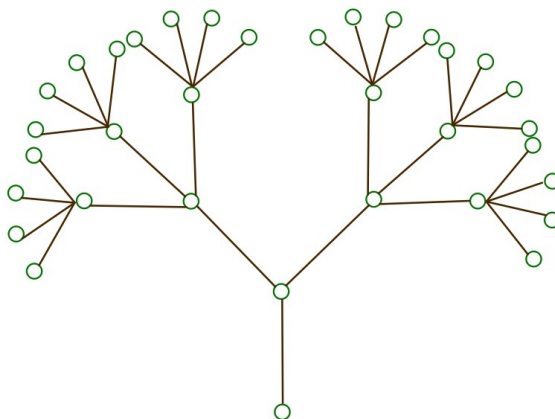


Figure 1.14: Árbol.

Es relativamente fácil encontrar ejemplos de árboles, y mas aún teniendo varios de éstos, es más fácil aún dar ejemplos de bosques. Recordemos que los bosques solo son aquellos que sus componentes conexas son árboles.

Los árboles tienen una gran cantidad de caracterizaciones, el siguiente teorema ilustra varias de estas.

Teorema 1.5.1. *Sea G una gráfica las siguientes proposiciones son equivalentes;*

- i) G es un árbol.*
- ii) G es conexa y tiene $n - 1$ aristas.*
- iii) G es conexa y toda arista de G es un puente.*
- iv) Dados u, v un par de vértices independientes de G , existe exactamente un ciclo en $G \cup \{uv\}$.*

Tenemos también el concepto de árbol generador. Así dada una gráfica G decimos que T es un árbol generador si T es una subgráfica de G la cual es un árbol y T genera a G . Una consecuencia inmediata de que una gráfica G cuente con un árbol generador, se traduce a que G es una gráfica conexa. También se sabe que toda gráfica conexa posee un árbol generador.

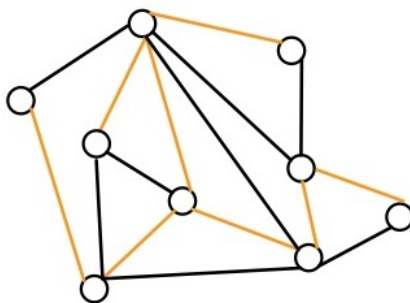


Figure 1.15: Árbol generador en naranja.

1.5.4 Gráficas cordales

Las gráficas cordales juegan un papel de gran importancia respecto a la gráficas de intervalos en capítulo 2 veremos que ser gráfica cordal es una necesidad para las gráficas que son de intervalos.

Dada una gráfica G , decimos que es **cordal** si todo ciclo de longitud mayor o igual a cuatro tiene una cuerda, es decir, un arista de G que no pertenece al ciclo pero que si une a dos vértices del ciclo. En la Figura 1.9 el único 4-ciclo no tiene cuerdas, luego G es no cordal.

Las gráficas cordales tienen varias propiedades las cuales ayudan a caracterizarlas. Una de las primeras características que tiene las gráficas cordales es la siguiente.

Teorema 1.5.2. *Toda gráfica cordal $G = (V, E)$ tiene un vértice simplicial. Mas aún si G no es una gráfica completa entonces esta tiene un par de vértices simpliciales no adyacentes.*

Proof. Si G es una gráfica completa entonces cualquier vértice es simplicial. Por lo tanto probemos vía inducción sobre el orden de G que; si G tiene un par de vértices a, b no adyacentes y es cordal, entonces G tiene un par de vértices simpliciales no adyacentes. Supongamos entonces que para toda gráfica de orden menor que G se tienen dos vértices simpliciales. Sea S un ab -separador mínimo y denotemos con A, B a las componentes conexas de $G - S$ que contienen a a y b respectivamente. Tenemos que $G[C \cup S]$ tiene dos vértices simpliciales para $C \in \{A, B\}$ o bien $G[C \cup S]$ es una gráfica completa, en el primer caso alguno de los dos vértices simpliciales debe pertenecer a C pues S es completa como consecuencia del teorema anterior. En el segundo caso, todo vértice de S es simplicial en $G[C \cup S]$. Dado que $V[C] \subseteq G[C \cup S]$ se tiene que todo vértice simplicial de $G[C \cup S]$ que esté en C es simplicial en G , así se tiene que hay dos vértices simpliciales. ■

Teorema 1.5.3. *Cada gráfica finita cordal contiene un vértice simplicial.*

Proof. Prueba por inducción sobre el orden de G .

Claramente si el orden de G es uno, hay un punto simplicial, a saber el único vértice de G .

Supongamos entonces que toda gráfica finita acíclica de orden menor a n , $n \in \mathbb{N}$, satisface tener un vértice simplicial.

Veamos ahora que una gráfica G finita acíclica de orden n tiene un punto simplicial. Sea $b \in V(G)$ un vértice arbitrario, y a continuación consideremos $G_1 = G - \{b\}$, por hipótesis inductiva sabemos que existe un $a \in G_1$ que es un vértice simplicial, llamemos $S_1(a) = [S(a)]_{G_1}$. En este punto notemos los siguientes tres casos;

i) Si a, b no son adyacentes, entonces tenemos que a es también simplicial en G . Y tenemos el resultado que buscábamos.

ii) Si existe algún $c \in S_1(a)$ no tiene vecinos en $G - S_1(a)$, entonces $S(c) = S_1(a)$, que sabemos que es una gráfica completa, y por consecuencia c es vértice simplicial de G .

iii) Como último caso trivial se tiene que si b es adyacente a todos los puntos de $S_1(a)$ entonces $S(a) = S_1(a) \cup \{b\}$ y entonces a es simplicial.

Por todo lo anterior nos centraremos a considerar el caso en el que;

I) $ab \in E(G)$

II) $\forall c \in S_1(a), c \neq a, (N(c) \not\subseteq S_1(a))$

III) $\exists c_0 \in S_1(a), c_0 \neq a, (c_0b \notin E(G))$

Consideremos $G - S_1(a)$, esta gráfica no es conexa necesariamente, por lo cual, llamamos C_1 a la componente conexa de $G - \{S_1(a)\}$ que contiene a b . Llamamos C_2 a $G - \{C_1 \cup S_1(a)\}$.

A continuación probaremos que si $c \in S_1(a)$ y c es vecino a la componente C_1 , entonces $cb \in E(G)$. Así las cosas sea $c \in S_1(a)$, tal que c es vecino de la subgráfica C_1 , y tomemos $d_1 \in C_1$ un vértice adyacente a c . Notemos que si $c = a$ o $d_1 = b$ entonces es inmediato que $cb \in E(G)$. Por lo que supondremos que $c \neq a$ y $d_1 \neq b$. Como primer punto, tenemos que dado que C_1 es una componente conexa, y $d_1, b \in C_1$ entonces existe una trayectoria d_1, \dots, d_k, b en C_1 con $b \neq d_i$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. Por otro lado dado que a, b son adyacentes, se tiene que $b, a, c, d_1, \dots, d_k, b$ es un ciclo. Además se tiene que $a \neq d_i$ y $ad_i \notin E(G)$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. ■

La primer caracterización que exhibimos, nos habla sobre dar un orden de los vértices de G .

Sea G una gráfica y sea $\sigma = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ una ordenación de los vértices de G . Decimos que σ es un **esquema perfecto de eliminación de vértices** si y solo si el vértice v_i es un vértice simplicial de la gráfica inducida $V[v_i, \dots, v_n]$.

Un ejemplo de una gráfica con un esquema perfecto de eliminación de vértices lo mostramos en la Figura 1.16, el esquema $\sigma = [1, 2, \dots, 10]$ es un esquema perfecto de eliminación de vértices. Veamos que; el vértice 1 es un vértice simplicial en G , el vértice 2 es un vértice simplicial en $G[2, \dots, 10]$, análogamente el 3 es un vértice simplicial en $G[3, \dots, 10]$ y así consecutivamente.

Notemos que una gráfica puede tener mas de un esquema perfecto de eliminación de vértices. En el ejemplo anterior citado $\phi = [1, 3, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]$ es otro esquema perfecto de eliminación de vértices. En realidad siempre podemos empezar un esquema perfecto de eliminación de vértices a partir de un vértice simplicial (en la gráfica inducida por los vértices restantes).

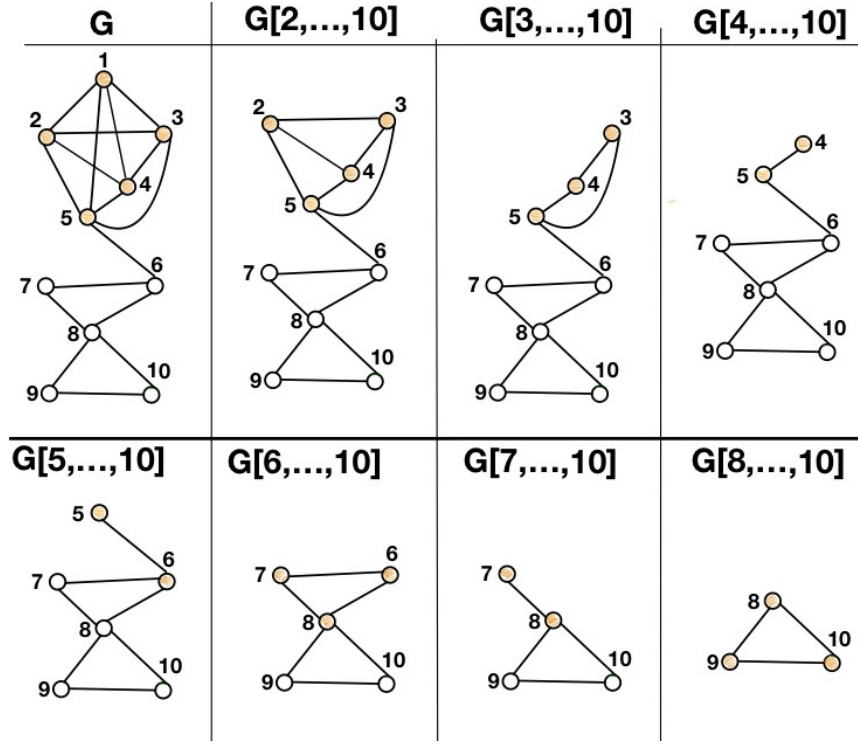


Figure 1.16: Esquema perfecto de eliminación de vértices. En naranja se muestran los $S(i)$.

Así tenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.5.4. *Sea G una gráfica. Las siguientes proposiciones son equivalentes.*

- (i) G es una gráfica cordal.
- (ii) G tiene un esquema perfecto de eliminación de vértices.
- (iii) Cada vértice mínimo separador de vértices induce una subgráfica completa de G .

Proof. (iii) \Rightarrow (i) Sea $[a, x, b, y_1, \dots, y_n, a]$ un ciclo simple de G . Cualquier ab -separador debe contener a los vértices x, y_i para alguna $i \in \{1, \dots, n\}$, luego al pertenecer a un ab -separador y al tener por hipótesis que los separadores inducen subgráficas completas, se tiene que $xy_i \in E(G)$, luego $[a, x, b, y_1, \dots, y_n, a]$ tiene una cuerda.

(i) \Rightarrow (iii) Supongamos que S es un ab -separador mínimo y denotemos con A, B a las componentes conexas de $G - S$ que contienen a a y b respectivamente. Dado

que S es minimal debe suceder todo elemento $x \in S$ es vecino de A y de B . Por lo tanto para cada par de vértices $x, y \in S$ existen los caminos $[x, a_1, \dots, a_r, y]$ y $[y, b_1, \dots, b_t, x]$ de tal forma que $a_i \in A, b_i \in B$ y además son elegidos de forma que las longitudes de estos es mínima. Luego al concatenar los caminos anteriores, obtenemos el ciclo $[x, a_1, \dots, a_r, y, b_1, \dots, b_t, x]$ el cual es un ciclo de longitud al menos 4, luego por hipótesis tenemos que debe haber una cuerda. De aquí notamos que $a_i b_j \notin E$ pues A y B están en componentes distintas. También $a_i a_j, b_i b_j \notin E$ para i, j no consecutivos, dada la minimalidad de las trayectorias. Por lo tanto la única cuerda posible es xy . ■

Para concluir la prueba ?? probaremos un teorema auxiliar. Una vez teniendo este teorema, regresamos a la prueba del ??.

Proof. (i) \Rightarrow (ii) Probemos esto por inducción. Supongamos que toda gráfica cordal de grado menor al de G tiene un esquema perfecto de eliminación de vértices. Probemos que G en efecto tiene un esquema perfecto de eliminación de vértices. Usando ??, tenemos que G tiene un vértice simplicial x . Al considerar $G - \{x\}$ tenemos una gráfica cordal luego por inducción $G - \{x\}$ cuenta con un esquema perfecto de eliminación de vértices σ . Para obtener un esquema perfecto de eliminación de vértices de G , basta adjuntar a σ el vértice x como prefijo. (ii) \Rightarrow (i) ■

Tenemos la propiedad probada por Dirac, la cual establece que toda gráfica cordal tiene al menos un vértice simplicial. En cuanto a las caracterizaciones de las gráficas cordales, tenemos que toda gráfica cordal tiene un esquema perfecto de eliminación de vértices, dicho esquema lo definimos mas adelante. Otra caracterización mas es el hecho de que todo conjunto minimo separador de vértices induce una gráfica completa y

Chapter 2

Gráficas de intervalos

Las gráficas de intervalos tienen una amplia gama de aplicaciones en el mundo real, y han resultado ser una herramienta matemática muy importante para modelar problemas como lo son la planificación de horarios. En la planificación de horarios, lo que uno busca es eficientar la distribución de recursos para la realización de ciertos trabajos en un tiempo dado. Las gráficas de intervalos resultan ser una familia muy importante pues cuentan con propiedades estructurales muy ricas. Para empezar, tienen varias caracterizaciones, algunas en términos de estructuras prohibidas. En segundo lugar, las gráficas de intervalos cuentan con un algoritmo de reconocimiento de tiempo lineal. Además, el estudio de las gráficas de intervalos es importante pues es una familia que está fuertemente relacionada con otras clases de gráficas como lo son las gráficas de comparabilidad, las gráficas cordales y las gráficas de permutación. La representación por intervalos de una gráfica es una herramienta bastante útil al momento de visualizar una gráfica, pues esta se presenta de una forma natural y bastante intuitiva. La representación de una gráfica como una familia de intervalos en la recta real permite una forma alterna de visualizar la interacción entre vértices. Veremos más adelante cómo la localización de los clanes maximales se vuelve una tarea sencilla ayudándonos de la representación por intervalos.

Con todo lo anterior en mente, tenemos diversas razones para hacer el estudio de las gráficas de intervalos. En las siguientes secciones veremos varios ejemplos de gráficas de intervalos, una vez contando con ejemplos nos fijaremos en las propiedades comunes y a partir de estos, daremos caracterizaciones.

2.1 Definiciones y ejemplos

En ésta sección comenzamos el estudio de las gráficas de intervalos. Veremos algunos ejemplos y propiedades de estas.

Comencemos, entendemos a una gráfica de intervalos como una gráfica G la cual admite una representación por intervalos. Es decir a cada vértice v de V , lo representamos por medio de un intervalo I_v . Luego una representación de G es una familia de intervalos $\{I_v\}_{v \in V(H)}$ tal que $uv \in E(H)$ si y solo si $I_u \cap I_v \neq \emptyset$.

Veamos una propiedad que cumplen todas la gráficas de intervalos, es claro que $\forall I \subseteq \mathbb{R}, I \neq \emptyset, I \cap I \neq \emptyset$. Esto nos indica que toda gráfica de intervalos satisface ser transitiva, es decir, todo vértice tiene un lazo. Veamos un par de ejemplos de gráficas de intervalos.

Comenzamos con una gráfica bastante simple. La gráfica de la Figura 2.1 consta de cuatro vértices y carece de aristas, salvo los propias lazos que ya vimos que tienen. Ahora para verificar que es gráfica de intervalos demos una representación por intervalos. Sean $J_i = (i-1, i)$ con $i = 1, 2, 3, 4$ como $J_i \cap J_j = \emptyset$ si $i \neq j$ entonces, no hay aristas entre dos vértices que sean distintos.

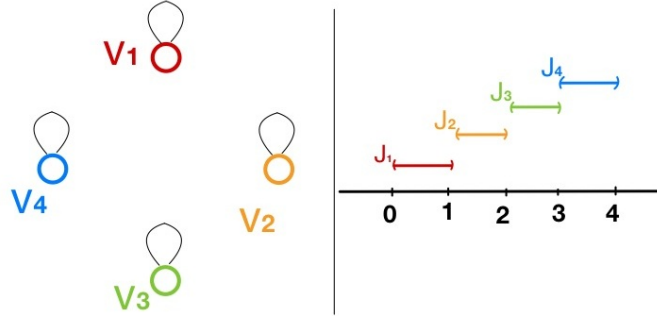


Figure 2.1: A la izquierda, gráfica de intervalos de cuatro vértices sin aristas (salvo lazos), a la derecha, una representación por intervalos.

Ahora veamos si la gráfica que se muestra en la Figura 2.1 sigue siendo gráfica de intervalos si a esta se le añade un arista. Para poder verificar esto, es necesario encontrar una nueva representación por intervalos. Dada la nueva incidencia, solo bastaría modificar la representación de los intervalos que representan a v_1 y a v_2 es decir solo necesitamos que $J_1 \cap J_2 \neq \emptyset$. Así podemos simplemente extender el extremo derecho de J_1 digamos un $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño de tal forma que $1 + \varepsilon \leq 2$, esto para evitar que $J_1 \cap J_3 \neq \emptyset$ pues nos generaría una adyacencia de v_1 con v_3 . Y respecto al resto de los intervalos j_2, j_3, j_4 los conservamos iguales.

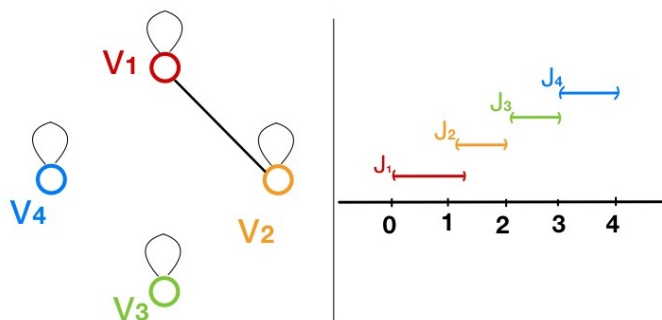


Figure 2.2: A la izquierda, gráfica de intervalos de cuatro vértices con un aristas (y lazos), a la derecha, una representación por intervalos.

Seguimos usando de base la gráfica de la Figura 2.1, y ahora ponemos dos adyacencias mas. Notemos que tenemos ahora un 3-camino. Y nos volvemos a preguntar si esta nueva gráfica sigue siendo gráfica de intervalos. Y para esto usamos una idea bastante similar a la del ejemplo pasado. Tomamos un $0 < \varepsilon \leq 1$, y nuestros intervalos quedan como $J_i = (i - 1, i + \varepsilon)$ para $i = 1, 2, 3$. En este punto lo único que hay que verificar es que las adyacencias queden como se desea en la gráfica. Notemos que $J_i \cup J_j$ si y solo si i y j son sucesivos. Por todo lo anterior tenemos que esta gráfica si es de intervalos, mas aún, usando un argumento inductivo, tenemos que cualquier k -camino es gráfica de intervalos.

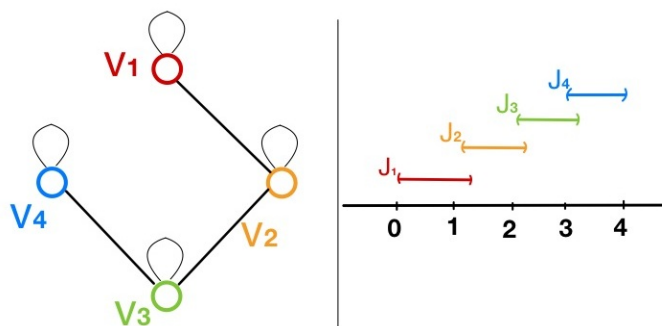


Figure 2.3: A la izquierda, un 4-camino, a la derecha, una representación por intervalos.

En este punto surge naturalmente la pregunta ¿Qué pasa al añadir una adyacencia mas, es decir el 4 ciclo? ¿Es también gráfica de intervalos? Bien, intentemos modificar la representación que dimos en la Figura 2.3. ¿Qué podemos hacer? Lo único que le

falta a la representación es que J_1 intersekte a J_4 . Así tenemos una primer opción, podríamos intentar extender el extremo derecho de J_1 de tal forma que este rebase al tres (En la recta real). Pero una tendremos una consecuencia inmediata, la cual es que v_1 es adyacente a todos los vértices, el problema es que nos da la adyacencia de v_1 con v_3 nosotros no la buscamos, entonces descartamos esta opción.

Sin duda uno podría seguir intentando hacer modificaciones a la representación, pero desafortunadamente nunca podremos dar con alguna que nos dé la correcta representación del 4-ciclo, ya que en efecto el 4-ciclo no es gráfica de intervalos. Exploraremos algunas propiedades básicas de las gráficas de intervalos en la siguiente sección.

2.2 Propiedades básicas

Como es de suponerse, la última afirmación de la sección anterior, que resulta ser tan contundente, debe ir respaldada por una prueba formal. A continuación daremos una definición y un teorema, los cuales nos ayudarán a concluir que en efecto el 4-ciclo no es de intervalos.

Decimos que una gráfica cordal es aquella en la cual todos los ciclos de cuatro mas vértices tiene una cuerda. Esto es un arista la cual no es parte del ciclo, pero que conecta a dos vértices dentro del ciclo.

Teorema 2.2.1. *Toda gráfica de intervalos es cordal.*

Proof. Sea G una gráfica de intervalos. Y $\{J_v\}_{v \in V(G)}$ una representación de intervalos de G . Supongamos además que G es no cordal, así, existe un ciclo $[v_0, v_1, v_2, \dots, v_{l-1}, v_0]$ con $l \geq 4$, el cual no tiene aristas entre dos vértices no consecutivos.

Notemos que J_{v_i} y $J_{v_{i-1}}$ no pueden ser disjuntos, pues sus respectivos vértices son adyacentes al pertenecer y ser consecutivos en el ciclo. Por lo anterior $\forall 1 \leq i \leq n(\exists p_i \in J_{v_{i-1}} \cap J_{v_i})$.

Dado que por hipótesis G es no cordal, J_{i-1} y J_{i+1} no se traslapan, y aunado a la tricotomía, obtenemos que p_i está o bien a la derecha o bien a la izquierda de p_{i+1} . Luego, la sucesión de números $\{p_i\}_{i=1}^{l-1}$ es creciente o decreciente, y justo en este punto surge la contradicción, pues debería suceder que J_{l-1} y J_0 se intersequen, por ser la parte final del ciclo. ■

Corolario 2.2.2. *Todo k -ciclo, con $k \geq 4$ no es gráfica de intervalos.*

En particular al completar el ciclo de la Figura 1.3 se tiene que ya no es gráfica de intervalos.

Así hasta el momento hemos visto que toda gráfica de intervalos debe ser cordal. En este punto, como dirían varios exprofesores, todo buen matemático debería ahora preguntarse si toda gráfica cordal tiene una representación por intervalos. Es decir veamos si el ser cordal es una condición suficiente para ser gráficas de intervalos. Desafortunadamente, aunque al mismo tiempo afortunadamente, para los fines literarios de esta tesis, la respuesta es no. Veamos el siguiente ejemplo. A partir de este punto en los dibujos omitiremos dibujar los lazos, los cuales ya sabemos que existen en toda gráfica de intervalos.

Afirmamos que la gráfica de la Figura 2.4 no es gráfica de intervalos. Supongamos que $\{J_v\}_{v \in V(G)}$ es una representación de intervalos de G . Así las cosas, tenemos que I_d debe intersectar a I_a , I_b e I_c . Por otro lado al ser a, b, c no adyacentes I_a , I_b e I_c deben ser disjuntos, de todo lo anterior se tiene que uno de estos tres intervalos debe quedar propiamente contenido en I_d . Supongamos sin pérdida de generalidad que I_a fue el que quedó totalmente contenido en I_d . Ya como ultima nota, I_d debe ser disjunto de I_x (x y d no son adyacentes), pero al estar I_a contenido propiamente en I_d , no habrá forma de que I_x sea disjunto con I_d . Por lo que no es posible que la gráfica sea de intervalos.

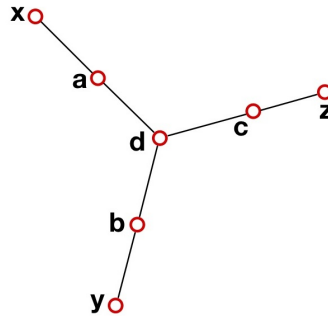


Figure 2.4: Gráfica cordal la cual no es gráfica de intervalos.

Siguiendo con el proceso del estudio de las gráficas de intervalos, ahora nos gustaría encontrar una propiedad adicional de las gráficas de intervalos y nuevamente preguntarnos si esta propiedad es suficiente para que la gráfica sea de intervalos y en caso de no serlo, preguntarnos entonces si esta nueva propiedad en junto a la propiedad de ser cordal nos den la suficiencia para ser de intervalos. De acuerdo a lo anterior, se presentan tres actores. El primero de ellos se presenta de forma natural al hacer un par de observaciones basadas en la representación por intervalos de una gráfica de intervalos. Más en específico en observar el comportamiento de las componentes conexas de la gráfica. Este actor veremos que resulta ser suficiente

para caracterizar a las gráficas de intervalos. Respecto a los otros dos actores, uno consiste en tener una estructura prohibida, las tripleteas asteroidales y el segundo se refiere a una propiedad del complemento de la gráfica, el complemento debe admitir una orientación transitiva. Cada uno de ellos se complementan con la propiedad de ser cordal para así poder caracterizar a las gráficas de intervalos. Por el momento veremos un par de ejemplos de gráficas de intervalos un poco mas elaborados y veamos como surge de forma intuitiva la primer caracterización. Y posponemos para secciones posteriores el estudio de los otros dos actores.

Una nota importante a hacer respecto a las gráficas de intervalos es pueden ser conexas o desconexas. En las Figuras 2.1 a 2.2 se exponen gráficas de intervalos desconexas mientras que en la Figura 2.3 se muestra una gráfica de intervalos que es conexa.

Como comentamos al principio del capítulo la representación por intervalos de las gráficas ayuda a visualizar la relación de incidencia entre los vértices. Por ejemplo, si tenemos una gráfica que es de intervalos y sucede que al unir todos los intervalos de la representación de la gráfica esto nos da nuevamente un intervalo, se puede concluir que la gráfica es conexa. Esta afirmación se observa en la representación que dimos en la Figura 2.3, la unión de los cuatro intervalos resulta en el intervalo $(0, 4)$.

Otra propiedad importante respecto a visualizar una gráfica mediante su representación por intervalos es que los clanes maximales son fácilmente localizables. Mas aún dado el orden que tenemos en la recta real, los clanes podrán ser ordenados linealmente.

Por ejemplo si uno quiere localizar los clanes maximales que contienen al vértice v nos fijamos en el intervalo I_v y entonces los clanes maximales que tienen a v serán los conjuntos $C = \{w \in V(G) | I_v \cap (\bigcap I_w) \neq \emptyset\}$. Y tales que $\nexists u \in V(G)$ tal que $I_u \cap C \neq \emptyset$. Todo este algoritmo se simplifica de la siguiente forma, tomemos el intervalo I_v , a continuación tracemos una linea vertical de tal forma que esta interseque al máximo número posible de intervalos, entonces el clan maximal estará conformado por aquellos vértices correspondientes a los intervalos I_w tales que fueron intersecados.

En la Figura 2.5 se muestra una gráfica de intervalos $G = \{0, 1, \dots, 11\}$, y su representación por intervalos se muestra en la parte inferior de la gráfica. Denotamos sus intervalos con la misma etiqueta correspondiente al vértice (omitiremos los puntos iniciales y finales de los intervalos pues carece de importancia en el presente ejemplo). Comencemos a ver sus clanes maximales.

1.- Si nos fijamos en el intervalo (de etiqueta) 1 vemos que podemos trazar una linea vertical que interseque al intervalo 2 (linea roja delgada), sin embargo esta no cumple ser la linea que interseca al mayor número de intervalos, por ejemplo la linea roja mas gruesa no solo interseca a los intervalos 1 y 2 si no que también interseca al

intervalo 3. Así el primer clan maximal que hemos detectado es C_1 y está conformado por los vértices 1, 2, 3.

2.- A continuación nos fijamos en el intervalo 2, y notamos que al trazar una línea vertical la cual intersekte a otros intervalos las únicas posibilidades son que la línea intersekte a los intervalos 1,2 o 2,3 o 1,2,3. Pero en cualquiera de los tres casos, estos son clanes contenidos ya en C_1 .

3.- Ahora pasamos al siguiente intervalo, notamos que en el intervalo 3, podemos trazar la línea vertical azul, la cual intersekte a los intervalos 3, 4 y 5. Dando pie a un nuevo clan maximal C_2 .

Siguiendo este pequeño algoritmo de verificación de intersección máxima, trazamos las líneas verticales; azul, naranja, morado, rosa y verde. Coloreamos adicionalmente los vértices de acuerdo a los clanes a los cuales pertenecen. Así los vértices pintados de un solo color son aquellos vértices que pertenecen a un único clan maximal. Los vértices bicolor pertenecen a dos clanes maximales, mientras que los tricolor pertenecen a tres clanes maximales. Con todo lo anterior los clanes maximales de G son C_1, C_2, \dots, C_6 estos están coloreados del color correspondiente a la línea vertical.

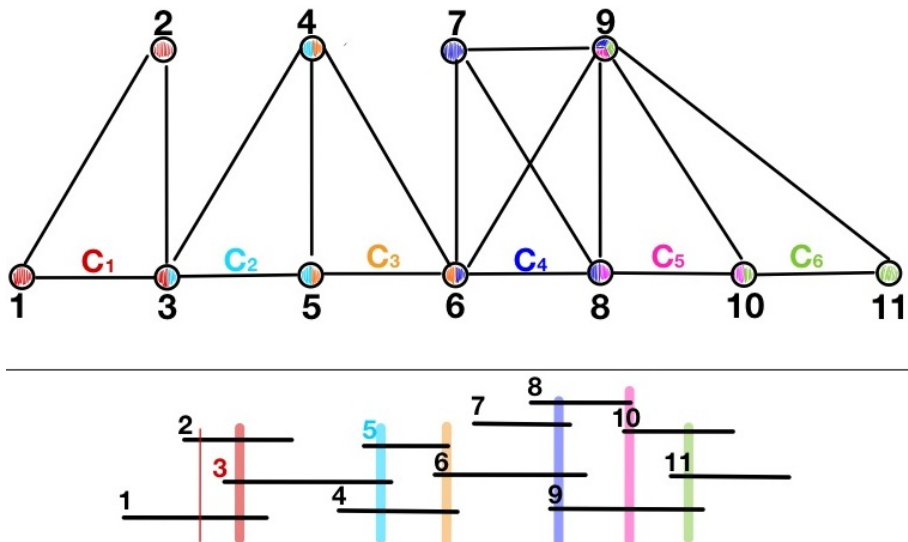


Figure 2.5: Localización de clanes maximales dada la representación por intervalos de una gráfica.

La Figura 2.6 es un ejemplo mas en cual mostramos la ventaja de contar con la representación por intervalos de una gráfica. El proceso de colocar líneas verticales sirve para identificar rápidamente los clanes maximales $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8$.

En la Sección 1.2 se introdujo el concepto de vértice simplicial. Notemos que también al contar con la representación por intervalos de una gráfica, nos facilita la tarea de reconocerlos, pues los vértices simpliciales serán aquellos vértices para los cuales sus intervalos correspondientes solo son intersectados por una línea vertical correspondiente a clanes maximales. En la Figura 2.6, al fijarnos en la representación por intervalos, vemos que los intervalos 1,2,3,4 solo son intersectados por una línea correspondiente a un clan maximal, mientras que el intervalo 5, es intersectado por dos, la naranja y la azul. Así en el ejemplo en cuestión tenemos que los vértices simpliciales son los monocromáticos, es decir 1, 2, 3, 4, 9, 14, 15, 16 todos ellos son vértices simpliciales.

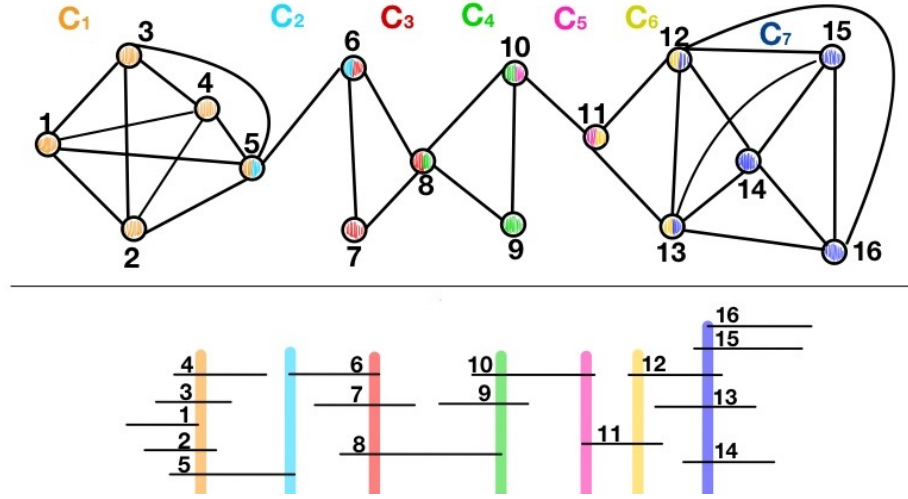


Figure 2.6: Localización de clanes maximales dada la representación por intervalos de una gráfica.

Una vez que uno cuenta con un la representación por intervalos de una gráfica, la representación sugiere un ordenamiento muy natural de los clanes maximales, de izquierda a derecha. Por ejemplo en la Figura 2.6 podemos ordenar los clanes maximales como $(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7)$. Alternamente si proponemos la representación por intervalos que resulta de reflejar, por una línea vertical a la izquierda del intervalo 16, la representación dada en la Figura 2.6. Ahora se obtiene el ordenamiento $(C_7, C_6, C_5, C_4, C_3, C_2, C_1)$. Ciertamente uno puede dar cualquier ordenamiento de los clanes maximales de la gráfica, sin embargo los que surgen de forma natural dada la representación por intervalos, tienen una peculiaridad. Los clanes que tienen a un vértice v aparecen consecutivamente en el orden dado. Veamos esto. Supongamos

que G es una gráfica de intervalos y que $\{C_i\}_{i=1}^n$ es el ordenamiento de sus clanes maximales dado por la representación de intervalos, supongamos adicionalmente que $v \in C_k$ y $v \in C_l$ y $k < j < l$ entonces $v \in C_j$. Esto se puede observar en las Figuras 2.5 a 2.6.

En efecto, la propiedad de poder ordenar los clanes maximales de tal forma que para todo vértice $v \in V$ los clanes maximales que contienen a v aparecen consecutivamente en el orden, es una condición necesaria y suficiente para ser una gráfica de intervalos. A este tipo de ordenamiento de los clanes le llamaremos **enumeración consecutiva de clanes**.

Teorema 2.2.3. *Sea G una gráfica. G es gráfica de intervalos si y solo si G tiene una enumeración consecutiva de sus clanes maximales.*

La prueba de esta primer caracterización la posponemos hasta el final del capítulo junto a la prueba de las otras dos caracterizaciones que daremos.

2.3 Orientaciones transitivas

Como vimos en el capítulo anterior, que una gráfica sea cordal no es una condición suficiente para que una gráfica sea de intervalos. En esta sección introducimos una propiedad adicional, la cual nos da la suficiencia.

Dada una gráfica G , una **orientación transitiva** consiste en, nosotros poder asignar una orientación a las aristas de la gráfica formando así una gráfica dirigida $(V(G), F)$ de tal forma que $ab \in F$ y $bc \in F$ implica que $ac \in F \forall a, b, c \in V(G)$

Veamos el siguiente ejemplo bastante sencillo.

Tenemos un 3-ciclo. Y nos preguntamos si este tiene la propiedad de orientación transitiva. Para esto debemos asignar dirección F a sus aristas, de tal forma que $ab \in F$ y $bc \in F$ implica que $ac \in F$. Por ejemplo, damos la orientación F_1 tal que; al arista diagonal de la izquierda le damos sentido de arriba hacia abajo, al arista horizontal le damos sentido de izquierda a derecha, y finalmente al arista diagonal restante (de la derecha) debe ir de arriba hacia abajo.

Como un segundo ejemplo damos la orientación F_2 tal que; al arista diagonal de la izquierda le damos sentido de abajo hacia arriba, al arista horizontal le damos sentido de derecha a izquierda, y al arista diagonal de la derecha abajo hacia arriba.

Es fácil comprobar que este par de orientaciones son en efecto un par de orientaciones transitivas de la gráfica G .

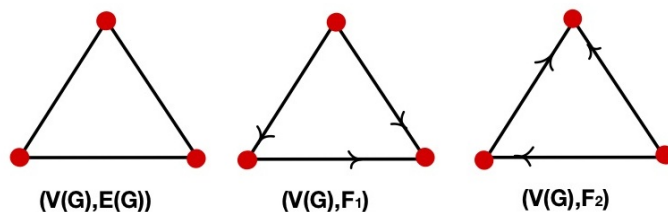


Figure 2.7: Gráfica G y un par de orientaciones transitivas F_1 y F_2 .

Aquellas gráficas no dirigidas que pueden ser transitivamente orientables, les llamaremos **gráficas de comparabilidad**.

A continuación dejamos un par mas de gráficas de comparabilidad y sus respectivas orientaciones H y E .

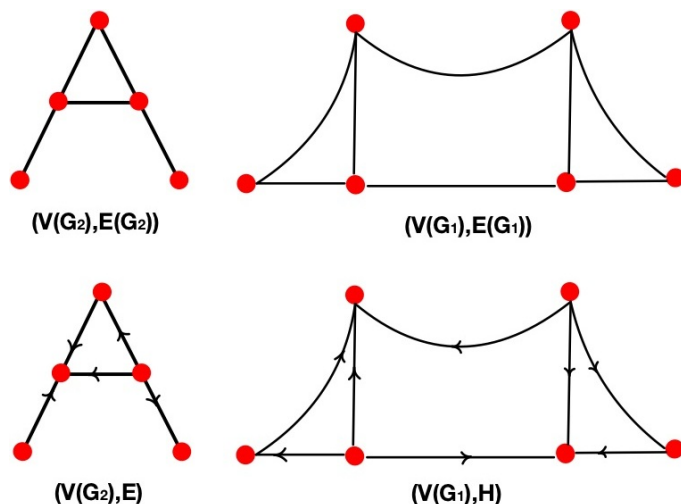


Figure 2.8: Gráficas G_1 y G_2 y las orientaciones transitivas H y E de G_1 y G_2 respectivamente.

Para terminar de nutrir el concepto de gráfica de comparabilidad, veamos un ejemplo de una gráfica la cual no es transitivamente orientable.

En el siguiente ejemplo tenemos el 5-ciclo, y afirmamos que no es posible dar una orientación de las aristas de tal forma que esta resulte una orientación transitiva.

Veamos la la Figura 2.9. Tratemos de dar una orientación transitiva, empecemos tomando un vértice cualquiera, por ejemplo tomamos el vértice A y tomamos una de sus aristas y le asignamos un sentido a esta, por ejemplo como se ve en la gráfica

de en medio, asignamos una flecha que va de A a B . Continuemos con B podemos ahora asignarle a su arista restante la dirección hacia C . Sin embargo, con esta orientación tendríamos que debería haber una flecha de A a C (Ya que queremos que la orientación sea transitiva), lo cual no puede ser. Esto nos dice que el arista de BC debe ser orientada de C a B , como la ilustración de la derecha indica.

En general debemos de evitar que haya 2-caminos cuyas flechas tengan la misma orientación (Gráfica del centro). Así siguiendo la asignación de orientaciones, el arista CD , debe ir de C hasta D , continuando, el arista DE debe ir de E a D y siguiendo de esta forma, el arista EA debería ir de ... ¿ E a A ? ¿ A hacia E ? ¡Ambos casos nos llevan a flechas con las que no contamos! Aquí se observa la imposibilidad de encontrar una orientación transitiva para C_5

Y es fácil observar, que este fenómeno puede ser fácilmente extendible hacia los ciclos de longitud k impar, $k \geq 5$

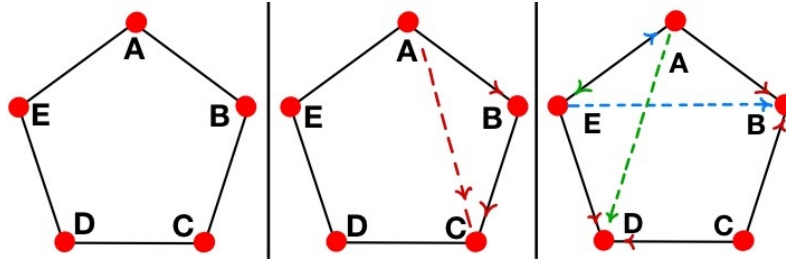


Figure 2.9: C_5 no es gráfica de comparabilidad.

Una vez ya asimilado el concepto, regresamos a nuestra tarea, queríamos ver si esta es una propiedad que nos ayude a caracterizar a las gráficas de intervalos. La respuesta, como es de esperarse, es que si nos ayudará a caracterizar a las gráficas de intervalos. Algo interesante que veremos y probaremos a continuación es que el complemento de una gráfica de intervalos es gráfica de comparación.

Teorema 2.3.1. *El complemento de una gráfica de intervalos es una gráfica de comparación.*

Proof. Sea $G = (V, E)$ una gráfica de intervalos y sea $\{I_v\}_{v \in V(G)}$ una representación de intervalos de G . Y ahora consideremos $\bar{G} = (V, \bar{E})$ aquí buscamos encontrar un orientación F de las aristas de \bar{E} la cual sea transitiva.

La definimos de la siguiente forma.

$xy \in F \iff I_x < I_y \ (\forall xy \in \bar{E})$ Donde entendemos que I_x esta a la izquierda de I_y si, $\forall a \in I_x, \forall b \in I_y (a < b)$

Finalmente esta orientación resulta ser transitiva como mera consecuencia de la transitividad de \mathbb{R} . $(I_x < I_y) \wedge (I_y < I_z) \Rightarrow (I_x < I_z)$ ■

Ya hemos advertido que nuestra caracterización de las gráficas de intervalos, necesita de la propiedad cordal y que el complemento sea una gráfica de comparación. Sin embargo, es necesario comprobar antes si no es suficiente el hecho de que una gráfica satisfaga que su complemento es de comparabilidad, para garantizar que la gráfica es de intervalos. Un ejemplo muy sencillo para exhibir la insuficiencia es el 4-ciclo sin cuerdas. Es decir tomamos a $G = C_4$, luego \bar{G} consta de solo dos aristas y se cumple que es orientable transitivamente casi por vacuidad.

Por lo tanto, se hace visible la necesidad de una segunda propiedad. En el siguiente teorema damos la caracterización completa.

Teorema 2.3.2. *G es gráfica de intervalos si y solo si G es cordal y su complemento es gráfica de comparabilidad.*

2.4 Tripletas asteroidales

Por ultimo introducimos una estructura la cual es imposible tener en una gráfica la cual es de intervalos, y este hecho complementa la propiedad cordal para caracterizar a las gráficas de intervalos.

Dada una gráfica G . Decimos que tres vértices distintos a_1, a_2, a_3 forman una **tripleta asteroidal** si y solo si cualesquiera de ellos dos son conectados por un camino el cual evita al tercer vértice y todos sus vecinos. Una gráfica la cual tenga una tripleta asteroidal es llamada **asteroidal**. En la Figura 2.10 exhibimos una gráfica la cual tiene una tripleta asteroidal. Más en específico, los vértices 1, 5, 10 conforman una tripleta asteroidal, ya que por ejemplo podemos tomar $(1, 2, 4, 7, 5)$ la cual es una 1,5-trayectoria y esta evita a la vecindad cerrada del vértice 10, también se tiene que $(1, 2, 4, 8, 10)$ es una 1,10-trayectoria que evita a $V[10]$, la vecindad cerrada del vértice 10 y finalmente se tiene la trayectoria $(5, 7, 4, 8, 10)$ la cual es una 5,10-trayectoria que evita a $V[1]$.

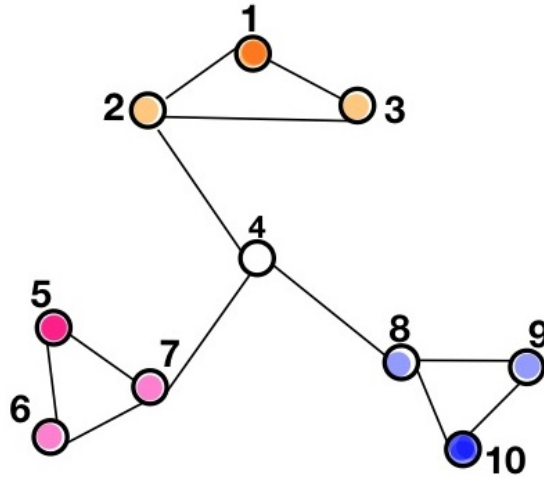


Figure 2.10: Gráfica asteroidal

A continuación mostramos que es incompatible el hecho de que una gráfica tenga una enumeración consecutiva de sus clanes maximales y la presencia de tripletas asteroidales. Sea G una gráfica de intervalos y $x, y, z \in V(G)$ una terna arbitraria de vértices de G . Supongamos adicionalmente que $\{C_i\}_{i=1}^n$ es una enumeración consecutiva de los clanes maximales de G . Supongamos sin pérdida de generalidad que $x \in C_i, y \in C_j, z \in C_h$ e $i \leq j \leq h$. Luego cualquier xz -camino debe pasar por C_j , esto es no puede evitar a y o algún vecino de y . Por ende no puede haber tripletas asteroidales en una gráfica que tenga una enumeración consecutiva de clanes maximales. Luego, asumiendo verdadero el Teorema 2.2.3, se deduce que es imposible la presencia de tripletas asteroidales en una gráfica de intervalos. Este hecho se ve reflejado en el teorema de Lekkerkerker y Boland, que enunciamos a continuación.

Teorema 2.4.1. *Una gráfica finita G es de intervalos si y solo si es cordal y no tiene tripletas asteroidales.*

Con todo lo anterior, podemos dar paso al siguiente teorema que caracteriza a las gráficas de intervalos.

Teorema 2.4.2. *Sea G una gráfica. Las siguientes proposiciones son equivalentes.*

- i) G es gráfica de intervalos.
- ii) G es cordal y su complemento es gráfica de comparabilidad.
- iii) G tiene una enumeración consecutiva de sus clanes maximales.
- iv) G es cordal y no tiene tripletas asteroidales.

Proof. i) \rightarrow ii) En el Teorema 2.2.1 y el Teorema 2.3.1 probamos que el hecho de ser gráfica de intervalos implica que la gráfica debe ser cordal y su complemento es necesariamente de comparabilidad, por lo que esta primer implicación queda cubierta.

ii) \rightarrow iii) Supongamos que (G, E) es una gráfica cordal y que (\bar{G}, \bar{E}) es gráfica de comparación, con F un ordenamiento transitivo de \bar{E} . A continuación damos un ordenamiento, el cual afirmamos que ordenamiento lineal de Σ el conjunto de todos los clanes maximales de G . Dados A_1, A_2 clanes maximales, definimos la relación $<$ como $A_1 < A_2$ si y solo si hay una flecha de la orientación transitiva F , desde A_1 hasta A_2 , es decir que existan vértices $a_1 \in A_1$ y $a_2 \in A_2$ tales que $(a_1, a_2) \in F$. Ahora deberemos comprobar que dicha relación está bien definida, por lo que hay que garantizar dos cosas. En principio que dados dos clanes maximales, en efecto exista una flecha de F que los conecte. Como segundo punto habrá que verificar que en caso de existir un par de flechas en F , que unan a A_1 y A_2 estas tengan la misma orientación. Para probar lo primero, tomemos A_1, A_2 un par de clanes maximales de G ahora supongamos que no existe ninguna flecha en F que este conformada por un vértice en A_1 y otro en A_2 . Esto nos llevaría por definición de complemento que para todo par de vértices $a_1 \in A_1$ y $a_2 \in A_2$, $a_1 a_2 \in E$ o $a_2 a_1 \in E$, lo que nos lleva a que $A_1 \cup A_2$ es una clan de G , lo que contradice la maximalidad tanto de A_1 como de A_2 . Ahora veamos vía contradicción que el segundo punto es satisfecho. Supongamos que tenemos un par de flechas que están conformadas por elementos de A_1 y A_2 pero que tienen sentidos contrarios, es decir tomamos $(a, b) \in F$ y $(d, c) \in F$ con $a, c \in A_1$ y $b, d \in A_2$, notemos que si $a = c$ o $b = d$ por transitividad se llega a una contradicción, en el primer caso $a = c$ se tiene que $(a, b), (d, a) \in F$ luego $(a, a) \in F$ pero al ser G reflexiva esto no puede ser. El segundo caso es totalmente análogo. Ahora veamos que al asumir que los cuatro vértices son distintos entre sí, sigue arrojándonos una contradicción. En este caso, tenemos que $ac, bd \in E$ al pertenecer a los mismos clanes maximales, adicionalmente tenemos que ad y bc no pueden ser ambas aristas de E pues de serlo tendríamos el 4-ciclo (a, d, b, c, a) y al ser G cordal se llegaría a $ab \in E$ o $cd \in E$ lo que no es posible al pertenecer ambos a \bar{E} . Luego podemos asumir sin pérdida de generalidad que $ad \in \bar{E}$. Si se tiene que $(a, d) \in F$ usando la transitividad y que $(d, c) \in F$ se llega a que $(a, c) \in F$ y en particular $ac \in \bar{E}$ lo que es imposible ya que a y c pertenecen al mismo clan. De forma análoga, si $(d, a) \in F$ usando transitividad, se tiene que $(d, b) \in F$ y nuevamente se llega a una contradicción al pertenecer ambos al mismo clan. Por todo lo anterior, dados dos clanes maximales, y dos flechas incidentes en estos, las flechas tienen la misma orientación. Finalmente verifiquemos que en efecto es un ordenamiento lineal de Σ . Ya hemos visto que cualesquiera dos clanes maximales, estos siempre tienen una flecha que los une, así cualesquiera dos clanes siempre son

comparables. Ahora veamos que se tiene la transitividad, supongamos que C_1, C_2, C_3 son tres clanes maximales de G tales que $C_1 < C_2$ y $C_2 < C_3$, por como esta definida la relación, existen $w \in C_1, x, y \in C_2, z \in C_3$ de tal forma que $wx, yz \in F$ luego si $xz \in \bar{E}$ o $wy \in \bar{E}$ usando el hecho que las flechas tienen la misma orientación, y la hipótesis de que la orientación es transitiva, se llega a que $wz \in F$ y así $C_1 < C_3$. Así podemos suponer que $wy, xz \in E$, esto aunado al hecho de que $x, y \in C_2$ y C_2 es clan, se tiene que $wz \notin E$ ya que en caso contrario se tendría que hay un 4 ciclo sin cuerdas (w, y, x, z, w) , lo que por hipótesis no es posible al suponer G cordal. Así $wz \in \bar{E}$ y mas aún $wz \in F$ ya que si $zw \in F$ al ser F orientable transitivamente $zx \in F$ lo que no es posible pues $yz \in F$ y se tendrían un par de flechas incidentes de C_2, C_3 en sentidos opuestos. Por lo que, la relación es transitiva. Finalmente supongamos que Σ ha sido ordenado y que $C_{i=1}^m$ es el ordenamiento de los clanes con $C_i < C_{j+1} < j$ veamos que si $C_i < C_j < C_k$ y $x \in C_i, x \in C_k$ entonces $x \in C_j$. Veamos vía contradicción que esto sucede. Supongamos entonces que $x \notin C_j$. Tomemos a continuación $y \in C_j$ tal que $xy \notin E$ esto nos lleva a que $xy \in \text{bar}E$ y aunado a $C_i < C_j$ se tiene que $xy \in F$ por otro lado $C_j < C_k$ nos lleva a que $yx \in F$ lo que nos es posible. Por lo tanto acabamos de exhibir una enumeración consecutiva de los clanes maximales de G .

iii) \rightarrow i) Supongamos que hay una enumeración consecutiva de los clanes maximales de G , ahora para cada vértice x definimos $I(x)$ como el conjunto de todos los clanes maximales que tienen a x . Los conjuntos $I(x)$ así definidos son intervalos en el conjunto linealmente ordenado $(\Sigma, <)$. Ahora hay que probar que $xy \in E \Leftrightarrow I(x) \cap I(y) \neq \emptyset$. Si $xy \in E$ entonces debe existir un clan maximal C tal que $x, y \in C$ luego $C \in I(x)$ y $C \in I(y)$. Así $I(x) \cap I(y) \neq \emptyset$, ahora si $I(x) \cap I(y) \neq \emptyset$ entonces existe $C \in I(x) \cap I(y)$ y así $x, y \in C$. Luego al pertenecer al mismo clan, se tiene que $xy \in E$. Por lo que G es de intervalos.

i) \rightarrow iv) Ya sabemos que ser cordal es una necesidad para toda gráfica de intervalos. Ahora usando que las primeras tres proposiciones son equivalentes, en particular la primera y la tercera. Se llega a que una gráfica de intervalos no puede tener tripletas asteroidales, como se demostró un párrafo antes del Teorema 2.4.1.

iii) \rightarrow iv) Para concluir la cadena de equivalencias, probaremos lo siguiente vía inducción sobre el número de clanes maximales. Si G es una gráfica cordal, entonces G tiene una tripleta asteroidal ó G tiene una enumeración consecutiva de sus clanes maximales. Si G tiene un único clan maximal entonces trivialmente se tiene una enumeración consecutiva de sus clanes maximales. Ahora supongamos que toda gráfica cordal con k o menos clanes maximales o bien tiene una tripleta asteroidal o tiene una enumeración consecutiva de sus clanes maximales. Ahora supongamos que G es una gráfica cordal con $k + 1$ clanes maximales $\{C_i\}_{i=1}^{k+1}$. Denotemos con

H a la gráfica que se obtiene al unir los clanes C_1, \dots, C_k , es decir $H = G[\bigcup_{i=1}^k C_i]$. Denotamos con C al clan C_{k+1} y por S_i a lo que se obtiene de $C_i \cap (\bigcup_{j=1}^{i-1} C_j)$, en específico, denotaremos por S a S_{k+1} . Por hipótesis inductiva, H tiene una tripleta asteroidal o bien una enumeración consecutiva de sus clanes maximales. En el caso en el que H tiene una tripleta asteroidal, se concluye que dicha tripleta asteroidal también lo es de G . Ahora bien, si H no contiene tripletas asteroidales, podemos asumir sin pérdida de generalidad que la enumeración consecutiva de los clanes maximales de H es precisamente C_1, \dots, C_k (en otro caso basta hacer un reacomodo de los índices). Así las cosas, buscamos cómo acomodar al clan C dentro de la enumeración consecutiva de los clanes maximales de H , de forma que ahora nos quede una enumeración consecutiva de clanes maximales de G . Empecemos descartando dos casos sencillos, el primero de ellos, si $S \subseteq C_1$ o $S \subseteq C_k$ entonces al situar a C antes de C_1 o situarlo después de C_k obtenemos una enumeración consecutiva de los clanes maximales de G . Por lo que solo basta atacar el caso en el que S se queda contenida en algún clan maximal intermedio, es decir $S \subseteq C_j$ tal que $1 < j < k$. ■

2.5 Ambientes y etiquetas

Todos los ambientes que se desee referir por número más adelante deben de tener una etiqueta. Consideremos por ejemplo el siguiente lema.

Lema 2.5.1. *Primer lema de ejemplo.*

Seguido de un segundo lema.

Lema 2.5.2. *Segundo lema de ejemplo.*

Que se utilizan para demostrar el Teorema 2.5.3.

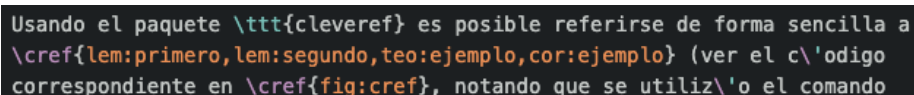
Teorema 2.5.3. *Primer teorema de ejemplo.*

Proof. Se sigue de los Lemas 2.5.1 y 2.5.2. ■

Y finalmente obtener el siguiente corolario.

Corolario 2.5.4. *Corolario de ejemplo.*

Usando el paquete `cleveref` es posible referirse de forma sencilla a los Lemas 2.5.1 y 2.5.2, el Teorema 2.5.3 y el Corolario 2.5.4 (ver el código correspondiente en la Figura 2.11, notando que se utilizó el comando `\cref`). Este paquete agrega de forma automática el nombre del ambiente, e.g., “el Teorema”, al número cuando se hace una referencia. Esto resulta bastante útil cuando, por ejemplo, se decide que un resultado que inicialmente se enunció como un teorema, realmente debería de ser un lema; no es necesario buscar todos los lugares donde la referencia correspondiente ocurre y cambiar los nombres, pues `cleveref` se encarga de hacer los cambios.



```
Usando el paquete \ttt{cleveref} es posible referirse de forma sencilla a
\cref{lem:primero,lem:segundo,teo:ejemplo,cor:ejemplo} (ver el código
correspondiente en \cref{fig:cref}), notando que se utilizó el comando
```

Figure 2.11: Ejemplo de uso de `\cref`.

Sin embargo, la gramática del español hace necesario introducir variantes en algunos casos especiales, como cuando hacemos referencia “al Teorema 2.5.3” (nótese que se utilizó “al Teorema” en lugar de “el Teorema”), o queremos decir que un resultado es una consecuencia “del Corolario 2.5.4”. En este caso, necesitamos agregar el nombre del ambiente a mano, y usar el comando habitual `\ref`. El autor del presente documento prefiere utilizar siempre mayúsculas cuando se usa el nombre de un ambiente referido por número, e.g., “el Teorema 2.5.3” en lugar de “el teorema 2.5.3”, por lo que esta configuración se ve reflejada en el archivo `tesis.tex`, cuando se utiliza el comando `\crefname` para definir los nombres de ambiente que debe de usar `cleveref`.

Una alternativa para evitar algunos de los problemas descritos en el párrafo anterior es definir el nombre del ambiente sin utilizar el artículo, e.g., “Teorema” en lugar de “el Teorema”. Aunque esto permite un poco más de flexibilidad, cuando es necesario cambiar un ambiente con nombre masculino a uno con nombre femenino, o viceversa (por ejemplo proposición por lema), es necesario realizar todos los cambios de los artículos a mano. Adicionalmente, (y el motivo principal por el que se decidió no usar esta variante) el uso del paquete como el mostrado en el ejemplo de la Figura 2.11 dejaría de funcionar, pues los artículos serían omitidos, generando una construcción gramatical incorrecta.

Si no se desea usar el paquete `cleveref`, siempre puede omitirse y utilizar únicamente el comando `\ref` que está incluido por omisión en `LATEX`.

Además de los ambientes, también es posible etiquetar capítulos o secciones, y referirnos a la página donde aparece una etiqueta dada. Por ejemplo, podemos referirnos a la Sección 2.6 en la página 40, o al Capítulo ?? . La referencia a las

páginas es útil en la versión impresa del documento, aunque en la versión digital parezca un poco inútil gracias a que cada referencia es una liga al objeto en cuestión.

2.6 Dibujos y colores

Los dibujos pueden agregarse de al menos dos formas obvias. La primera es hacerlos dentro de \LaTeX con algún paquete como `tikz`. La segunda es generarlos con algún recurso externo, e incluirlo con el comando `\includegraphics`. También puede usarse una combinación de ambos, generando un PDF con la imagen en un archivo externo de \LaTeX , y agregándolo con `\includegraphics`; una ventaja de esta tercera posibilidad es que el compilador realiza menos trabajo para generar el documento.

En la Figura 2.12 podemos ver un ejemplo de un dibujo hecho con `tikz`. Una ventaja de hacer los dibujos dentro de \LaTeX es que resulta fácil agregar fórmulas o etiquetas con la misma tipografía que el resto del documento.

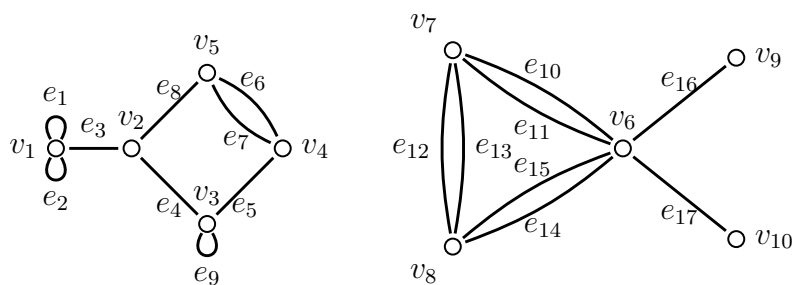


Figure 2.12: El diagrama de una gráfica con lazos y aristas múltiples.

Es fácil agregar colores a los dibujos. Hay que tener presente que `tikz` construye el dibujo por capas, y el código se ejecuta de forma secuencial, por lo que la última parte del código es la última capa que se dibujará, y puede cubrir a otras, generando un resultado distinto al deseado. Es posible definir colores nuevos mediante el comando `\definecolor`, en el caso de este documento, todos los colores nuevos se definen en el archivo `tesis.tex`. Las diferentes opciones para el comando `\definecolor` se encuentran explicadas [aquí](#).

Para agregar colores en el texto, o en las celdas de una tabla, u otros lugares, se puede utilizar el paquete `xcolor`. Una forma sencilla de usar color en el texto es con la construcción

```
{\color{nombre-del-color}texto con color}}
```


lo que permite generar texto de color.

Incluso es posible usar un color a lo largo de distintos párrafos.

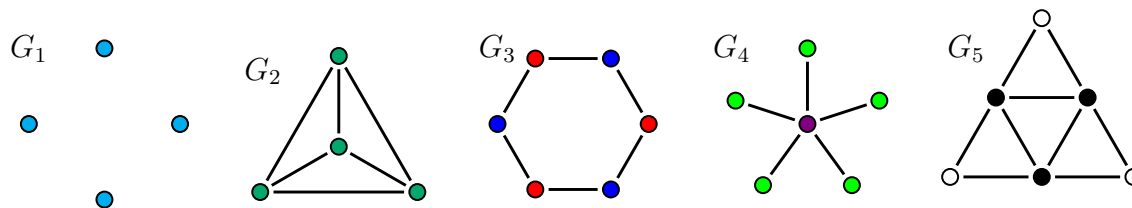


Figure 2.13: Ejemplos de gráficas vacía, completa, bipartita, bipartita completa y escindible.

Continuando con los dibujos, resulta bastante útil usar ciclos `for` dentro de `tikz` para realizar dibujos que tienen simetrías. Un ejemplo de esto ocurre en la Figura 2.13. En la Figura 2.14, se observa el código del ciclo azul y rojo que aparece en la Figura 2.13.

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%                                Bipartite Graph                                %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
\begin{scope}[xshift=6.2cm,yshift=0cm]
\foreach \i in {0,2,4}
  \node (\i) [vertex,fill=red] at ({(360/6)*\i}:1){};
\foreach \i in {1,3,5}
  \node (\i) [vertex,fill=blue] at ({(360/6)*\i}:1){};

\foreach \i in {0,...,5}
  \draw [edge] let \n1={int(mod(\i+1,6))} in (\i) to (\n1);

\node (L) at (-1,1){$G_3$};
\end{scope}

```

Figure 2.14: Ejemplo de un ciclo `for` dentro de `tikz`.

Aunque en este caso los ejemplos se concentran en dibujar gráficas, las posibilidades de `tikz` son gigantescas. Se recomienda al usuario revisar el [manual de PGF y TikZ](#).

2.7 Algoritmos

Para los algoritmos utilizamos el paquete `algorithm2e`. En este caso simplemente se presentará un ejemplo de uso con un subconjunto limitado de las distintas opciones que se pueden utilizar. Se recomienda revisar la documentación del paquete para conocer todas las posibilidades.

Algoritmo 1: Breadth First Search

Input: Una gráfica conexa G con un vértice distinguido r .

Output: Funciones de parentesco p , nivel ℓ y tiempo de exploración t .

```

1  $Q \leftarrow []$ ;  $i \leftarrow 0$ ;
2  $i \leftarrow i + 1$ ;
3 colorear a  $r$  de negro;
4 añadir  $r$  al final de  $Q$ ;
5  $t(r) \leftarrow i$ ,  $p(r) \leftarrow \emptyset$ ,  $\ell(r) \leftarrow 0$ ;
6 while  $Q \neq []$  do
7   elegir a la cabeza  $x$  de  $Q$ ;
8   if  $x$  tiene un vecino  $y$  sin colorear then
9      $i \leftarrow i + 1$ ;
10    colorear a  $y$  de negro;
11    añadir  $y$  al final de  $Q$ ;
12     $t(y) \leftarrow i$ ,  $p(y) \leftarrow x$ ,  $\ell(y) \leftarrow \ell(x) + 1$ ;
13  end
14  else
15    eliminar  $x$  de  $Q$ ;
16  end
17 end
18 return  $(p, \ell, t)$ 

```

El Algoritmo 1 muestra algunas opciones sencillas del paquete. Quizá la observación más importante para considerar respecto a `algorithm2e` es que, por diseño, el paquete no divide los algoritmos para aparecer en más de una página. Por lo tanto, un algoritmo largo usualmente se recorrerá a la siguiente página (y posiblemente ocupará una página completa).

2.8 Índice alfabético

Es posible agregar palabras al índice alfabético usando el comando `\index`. Un uso típico es el siguiente; supongamos que se desea agregar la palabra “gráfica” al índice, entonces es necesario escribir la palabra, seguida de la misma palabra dentro del comando.

```
gr\’afica\index{gr\’afica}
```

Cuando se introduce un concepto nuevo, es deseable resaltarlo de alguna forma en el texto. En los artículos usualmente se utilizan *cursivas* y en los libros (o una tesis), generalmente se prefieren las **negritas**. Por este motivo, se agregó al preámbulo un comando para poner, al mismo tiempo, una palabra en negritas y agregarla al índice; el comando es `\indice`. Por ejemplo, dicho comando está siendo utilizado en la palabra **concepto**, mismo que se puede verificar aparece en el índice analítico al final del documento. También es común encontrar una versión especializada de un concepto, e.g., la definición de gráfica bipartita depende de la de gráfica. En este sentido, es deseable que “gráfica bipartita” aparezca como una entrada que depende de “gráfica”. Para lograr esto se utiliza el mismo comando `\index`, con la siguiente sintaxis.

```
\index{concepto!subconcepto}
```

De manera análoga al caso del comando `\indice`, se creó un comando `\indiceSub`, que toma dos argumentos. El primero es la entrada principal que aparecerá en el índice (e.g., gráfica), y la segunda es la versión especializada que depende de la primera (e.g., bipartita). Para brindar libertad en la forma de redactar las definiciones, `\indiceSub` sólo imprime en el documento el segundo argumento. Por ejemplo, en **subconcepto** se utilizó `\indiceSub` con los argumentos **concepto** y **subconcepto** (puede verificarse el funcionamiento en el índice).

Dependiendo del editor que se esté utilizando para trabajar con L^AT_EX, es posible que el índice no se actualice automáticamente. De ser el caso, basta con ejecutar el siguiente comando en el directorio del proyecto donde se encuentre el archivo **tesis.idx** (éste último se genera automáticamente al compilar **tesis.tex**).

```
makeindex tesis.idx
```

El comando anterior generará el archivo **tesis.ind**, mismo que contiene la información necesaria para incluir el índice en el PDF final.

Los conceptos aparecen en orden alfabético en el índice, sin embargo, el uso de caracteres especiales (como letras acentuadas) afecta el orden habitual. Para corregir

problemas derivados del uso de caracteres especiales, se refiere al lector al siguiente [artículo sobre indexación](#).

Chapter 3

Digráficas de intervalos ajustadas

3.1 Digráficas de intervalos

En el año 1989 se publicó un artículo de M. Sen, S. Das, A.B. Roy y D.B. West en el *Journal of Graph Theory*. En este se introduce una nueva definición que generaliza a las gráficas de intervalos. Dicha generalización iba enfocada a tener caracterizaciones análogas a las de las gráficas de intervalos, una de ellas, la propiedad de los unos consecutivos para columnas de la matriz asociada a la gráfica de clanes maximales. Desafortunadamente esta definición, no cuenta con una alguna caracterización en términos de estructuras prohibidas, como sí las tienen las gráficas de intervalos, en términos de las triplas asteroidales y k -ciclos sin cuerdas, $k \geq 4$. Así, al solo contar con una caracterización sencilla, a saber, a través de la propiedad de los unos consecutivos, el único algoritmo de reconocimiento para esta clase no es eficiente.

En el artículo arriba mencionado, se define una digráfica de intervalos como una digráfica G la cual admite una representación de pares de intervalos, es decir, para cada vértice $v \in V(G)$, existen I_v, J_v un par de intervalos, y $uv \in E(G)$ si y solo si I_u intersecta a J_v .

En el ánimo de explorar las propiedades de las digráficas de intervalos surge una pregunta muy natural. ¿Puede una digráfica, cuya gráfica subyacente no sea una gráfica de intervalos, ser una digráfica de intervalos? La respuesta puede responderse inmediatamente mediante este primer ejemplo. Comencemos con una digráfica muy sencilla, la cual se muestra en la Figura 3.1 y consta únicamente de dos vértices, v_1, v_2 , y que carece de flechas, así como de lazos. Una representación por pares de intervalos se muestra en la parte inferior, y es fácil comprobar que las incidencias se respetan, pues los cuatro intervalos son ajenos dos a dos. Pero en particular I_1 no intersecta a J_1 ni a J_2 e I_2 tampoco intersecta a J_1 o a J_2 . Para responder la

pregunta, hacemos la siguiente nota, en la definición de las gráficas de intervalos es implícito que las gráficas cuenten con lazos, mas aún que sean reflexivas. Como primer contraste, en el caso dirigido se pierde esto, como se mostró en el presente ejemplo. Así que el hecho de que la gráfica suyacente no sea gráfica de intervalos no nos arroja mayor información.

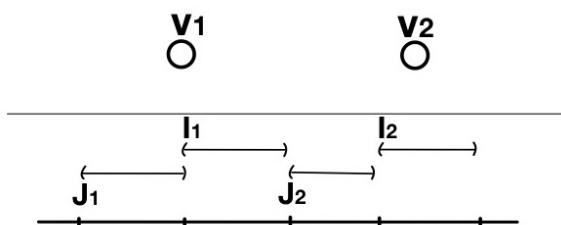


Figure 3.1: Digráfica sin flechas ni lazos.

Ahora vemos que al añadir una flecha que sale de v_1 a v_2 nosotros seguimos teniendo que esta digráfica tiene una representación por pares de intervalos. Para dar la representación, podemos usar como base la que se dio en la imagen anterior y solo modificar los intervalos I_1, J_2 ; debemos buscar que $I_1 \cap J_2 \neq \emptyset$, es decir, que tengan intersección no vacía, ya que queremos rescatar el hecho de tener la flecha (v_1, v_2) . Para lograr esto, basta extender un poco hacia la derecha el extremo derecho del intervalo I_1 .

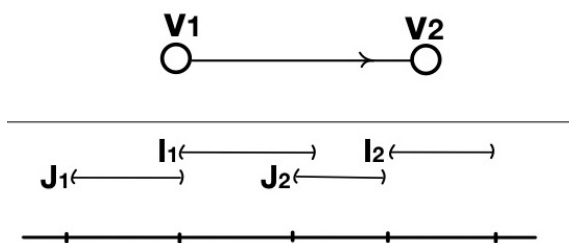


Figure 3.2: Digráfica con una sola flecha.

A continuación en la Figura 3.3 se muestra que al añadir la flecha en el otro sentido se sigue teniendo una representación de pares de intervalos y por tanto se tiene que nuevamente es digráfica de intervalos. Para verificar esto, comenzamos haciendo una pequeña modificación a la representación de pares de la figura anterior. En primer

lugar situamos el intervalo I_2 a la izquierda de todos los intervalos y extendemos el extremo derecho del intervalo de tal forma que este intersecte al intervalo J_1 .

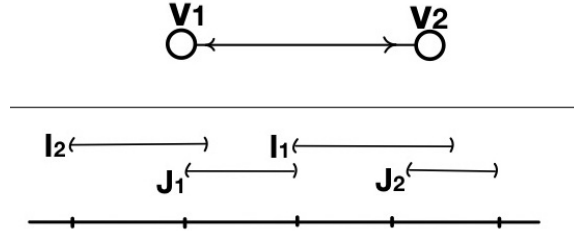


Figure 3.3: Digráfica con dos flechas.

Finalmente exhibimos que al añadir todas las posibles flechas y lazos en el ejemplo dado en la Figura 3.1 seguimos teniendo una digráfica de intervalos. Tomamos la representación del ejemplo anterior y para añadir el lazo en v_1 tenemos que I_1 debe intersectar a J_1 y análogamente tenemos que hacer que I_2 intersecte a J_2 para así tener el lazo en v_2 . Nótese que I_1 e I_2 pueden o no intersectarse pues esto no afecta a las flechas, aquí los ponemos disjuntos.

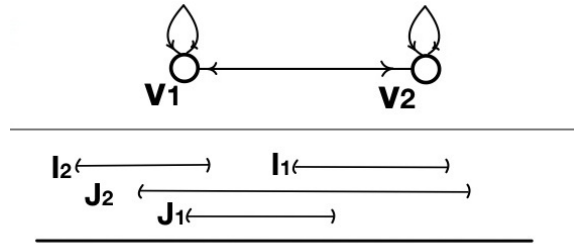


Figure 3.4: Digráfica de dos vértices y todas las flechas y lazos posibles.

Como se vio desde nuestro primer ejemplo, una digráfica de intervalos puede tener como subgráfica subyacente una gráfica la cual no sea de intervalos, como el siguiente ejemplo, el cual tiene como gráfica subyacente un 4-ciclo el cual se vio que no es gráfica de intervalos.

Ante la ausencia de una caracterización en términos de estructuras prohibidas sencillas de las digráficas de intervalos, Tomás Feder, Pavol Hell, Jing Huang y Arash Rafiey, publicaron un artículo en 2011 donde introducen una pequeña modificación a las digráficas de intervalos, dando pie a la definición de digráfica de intervalos ajustada.

3.2 Digráficas de intervalos ajustadas

Una digráfica de intervalos ajustada G es una digráfica de intervalos G la cual tiene una representación por pares de intervalos I_v, J_v para cada $v \in V(G)$ de tal forma que I_v y J_v tienen el mismo extremo izquierdo.

Con este pequeño ajuste, uno vuelve a recuperar la parte de la reflexividad, ya que I_v, J_v tienen el mismo extremo izquierdo, entonces son no ajenos, luego se debe tener que $(v, v) \in E(G)$. Al mismo tiempo con esta modificación saldrá a relucir una estructura prohibida para esta nueva clase de digráficas.

Ahora exploremos unos ejemplos, claramente las Figuras 3.1 a 3.3 no pueden ser digráficas de intervalos ajustadas, ya que son no reflexivas. Entonces veamos si al ponerles todos los lazos estas cumplen ser digráficas de intervalos ajustadas.

En el primer caso al añadir los lazos, se tiene la representación de pares de intervalos, cuyos pares de intervalos correspondientes a v tienen el mismo extremo izquierdo. Por tanto, este constituye nuestro primer ejemplo de digráfica de intervalos ajustada.

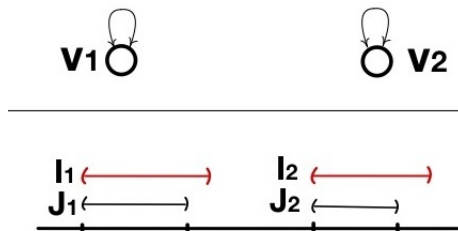


Figure 3.5: Digráfica de intervalos ajustada. Dos vértices y sin flechas salvo lazos.

En el segundo ejemplo, se puede encontrar nuevamente una representación por pares de intervalos que satisfaga el ajuste planteado por Tomás Feder et al.

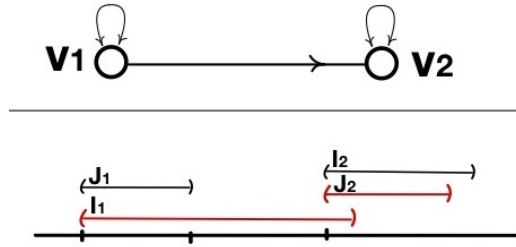


Figure 3.6: Digráfica de intervalos ajustada. Dos vértices, una flecha.

Finalmente, si agregamos la flecha (v_2, v_1) entonces damos la siguiente representación ajustada por pares de intervalos.

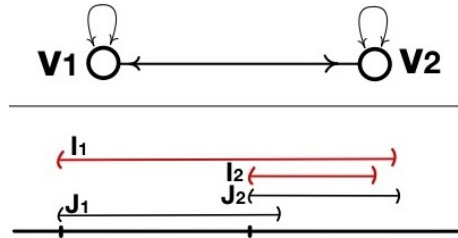


Figure 3.7: Digráfica de intervalos ajustada con dos vértices y dos flechas.

A continuación introducimos definiciones muy sencillas. Dado un camino $P = x_0, \dots, x_n$ en una digráfica G y $u, v \in V(G)$ tales que constituyan una flecha, es decir $(u, v) \in E(G)$ o $(v, u) \in E(G)$ decimos que (u, v) es una flecha derecha si $(u, v) \in E(G)$ y decimos que es una flecha al revés si $(v, u) \in E(G)$. En la Figura 3.6 podemos decir entonces que (v_1, v_2) es una flecha derecha porque precisamente $(v_1, v_2) \in E(G)$. De forma similar, (v_2, v_1) es una flecha al revés. Sin embargo, uno ve la Figura 3.7 y se pregunta qué pasa respecto a (v_1, v_2) , a estas flechas las cuales sean tanto derechas como al revés, las llamaremos flechas dobles. Aquellas flechas que no son dobles, como la que se muestra en la Figura 3.6, se pueden llamar flechas únicamente derechas o únicamente al revés, según sea el caso. Naturalmente los lazos al ser flechas derechas y al revés, son flechas dobles. Si $(u, v) \in E(G)$ diremos que u domina a v o que v es dominado por u , sin importar si (u, v) es una flecha doble o única. Esto llevado nuevamente a la Figura 3.6, podemos decir entonces que v_1 domina a v_2 . Estas definiciones nos permiten introducir el concepto de caminos congruentes. Dos caminos $P = x_0, \dots, x_n$ y $Q = y_0, \dots, y_n$ en G se dice que son congruentes si tienen

el mismo patrón de flechas derechas y al revés, esto es P, Q son caminos congruentes si y solo si (x_i, x_{i+1}) es flecha derecha si y solo si (y_i, y_{i+1}) es flecha derecha, para toda $0 \leq i \leq n-1$.

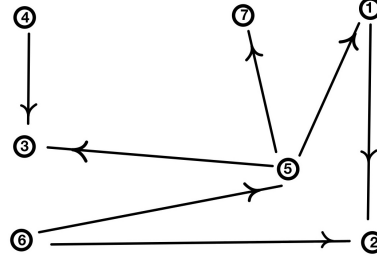


Figure 3.8: Caminos $P = (1, 2, 6, 5, 7)$ y $Q = (4, 3, 5, 1, 2)$ congruentes.

En la Figura 3.8 se puede observar un par de camino congruentes $P = (1, 2, 6, 5, 7)$ y $Q = (4, 3, 5, 1, 2)$. Ahora introducimos una siguiente definición, dados un par de caminos congruentes P y Q , decimos que P evita a Q si y solo si no hay flechas (x_i, y_{i+1}) en la misma orientación que las flechas (x_i, x_{i+1}) . En el ejemplo anterior podemos afirmar que P evita a Q , sin embargo, Q no evita a P , ya que la flecha $(5, 1)$ es derecha y la flecha $(5, 5)$ al ser una flecha doble en particular es derecha y luego, Q no evita a P .

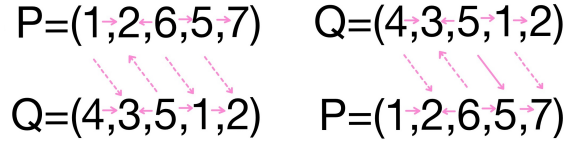


Figure 3.9: En este esquema las líneas punteadas son flechas que no pertenecen a $E(G)$, así a la izquierda se observa que P evita a Q , a la derecha al se verifica que Q no evita a P .

Con todo lo anterior podemos dar paso a la definición de **par invertible**, estructura la cual nos permitirá caracterizar a las digráficas de intervalos ajustadas. Un par invertible en una digráfica G es un par de vértices $u, v \in V(G)$ tales que cumplen, en primer lugar, que existen caminos congruentes P de u a v y Q de v a u de tal forma que P evita a Q , y en segundo lugar, que existen caminos congruentes P' de v a u y Q' de u a v , de tal forma que P' evita a Q' .

A continuación damos un par de ejemplos de digráficas que tienen pares invertibles. Para nuestro primer ejemplo damos el 4-ciclo $(1, 2, 3, 4, 1)$. Afirmamos que en esta digráfica los vértices 1 y 3 constituyen nuestro par invertible. Para esto damos los caminos congruentes $P = (1, 2, 3), Q = (3, 4, 1)$, notemos que así definidos los caminos son congruentes, tal y como se ilustra en el esquema de la derecha del 4-ciclo de la Figura 3.10 y además P evita a Q (las flechas en gris no pertenecen a $E(G)$). Recordando nuestra definición, necesitamos ahora otro par de caminos congruentes P' y Q' , estos los definimos de la siguiente manera $P' = (3, 2, 1), Q' = (1, 4, 3)$ nuevamente usando el esquema de la Figura 3.10, se comprueba que dichos caminos son congruentes y que además P' evita a Q' .

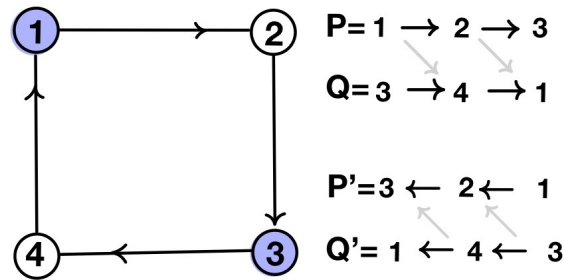


Figure 3.10: Los vértices azules constituyen un par invertible. A la derecha los caminos congruentes P, Q, P', Q' .

Un hecho interesante del ejemplo anterior es que es posible definir a P' y a Q' como los caminos inversos de P y Q respectivamente, donde entendemos que dado un camino (x_0, x_1, \dots, x_n) el camino inverso es $(x_n, x_{n-1}, \dots, x_0)$. Aunque esto no se puede hacer en general, en este caso, la validez de lo anterior se debe a que tanto P evita a Q como Q evita a P .

A continuación hacemos simétricas las flechas de la gráfica anterior para tener un ejemplo donde es imposible definir a P', Q' como los caminos inversos de P, Q respectivamente. Veamos la Figura 3.12. Nuevamente tenemos que los vértices 1 y 3 son un par invertible. Algo importante a destacar es que los pares de caminos del ejemplo pasado, si bien siguen siendo congruentes, dejan de evitarse. Por ejemplo para que P evite a Q necesitamos que $(1, 4), (2, 1) \notin E(G)$, algo que no sucede en el presente ejemplo. Por lo anterior es necesario dar otro par de caminos P y Q . Definimos $P = (1, 2, 2, 3, 3)$ y $Q = (3, 3, 4, 4, 1)$. Así definidos los caminos, son congruentes y además P evita a Q . Si uno tratara de definir los caminos P' y Q' como los caminos inversos de P y Q respectivamente, uno caería en cuenta que así definidos el camino P' no evita a Q' . Por lo que debemos encontrar otra forma

alterna para definir a P' y a Q' . Así, damos $P' = (3, 4, 4, 1, 1)$ y $Q' = (1, 1, 2, 2, 3)$ y definidos de esta forma, P', Q' son caminos congruentes y son tales que P' evita a Q' .

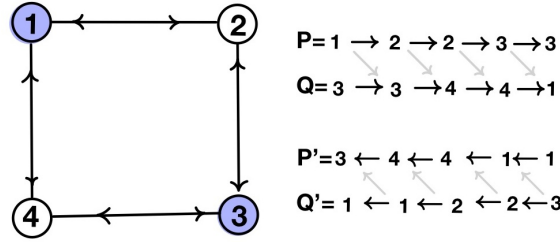


Figure 3.11: Los vértices azules constituyen un par invertible.

En los ejemplos pasados se puede verificar mediante argumentos simétricos que los vértices 2, 4 son también pares invertibles.

A continuación definiremos una digráfica auxiliar, en la cual se rescata bastante información respecto a todos los pares invertible de una gráfica G , en caso de que existan. Dada una digráfica G , definimos la digráfica de pares asociada a G , denotada por G^+ la cual está definida como $V(G^+) = \{(u, v) \in G \times G : u \neq v\}$ y diremos que $((u, v), (u', v')) \in F(G^+)$ si y solo si sucede una de las siguientes dos cosas; $(u, u'), (v, v') \in E(G)$ y $(u, v') \notin E(G)$ o si sucede que $(u', u), (v', v) \in E(G)$ y $(v', u) \notin E(G)$. Usemos como ejemplo la Figura 3.10 para dar la digráfica de pares asociada.

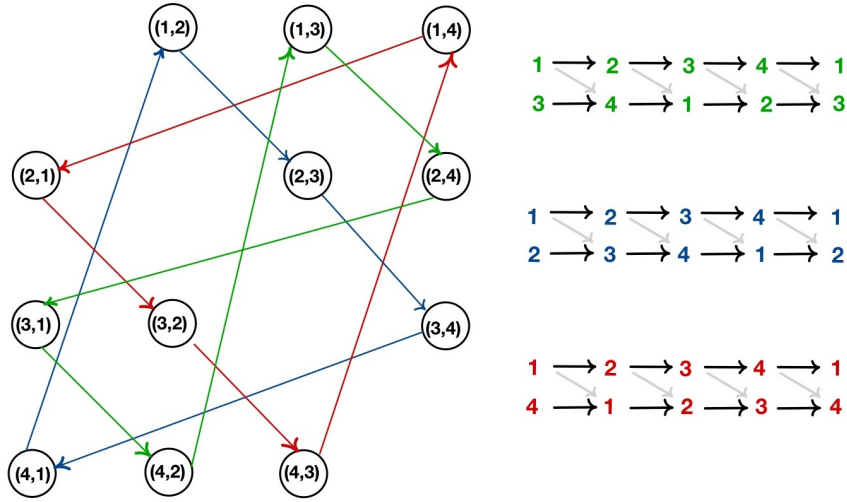


Figure 3.12: Los colores distintos corresponden a las componentes fuertes de G^+ .

Apoyándonos del esquema de la derecha, podemos verificar que en efecto las flechas que están dibujadas, son flechas según la definición de las flechas de la digráfica de pares. Coloreamos de colores distintos las tres componentes fuertes distintas. Como hicimos notar, la pareja de vértices 2,4 también constituye un par invertible, algo interesante es el hecho que los vértices (1,3) y (2,4) pertenecen a la misma componente fuerte (verde). El siguiente teorema nos dice más sobre esta interesante observación y también arroja más información sobre el resto de vértices y las componentes conexas.

Teorema 3.2.1. *Supongamos que u y v forman un par invertible de la digráfica G . Entonces (u, v) y (v, u) pertenecen a la misma componente fuertemente conexas C de la digráfica de pares G^+ . Más aún, cualquier otra pareja (x, y) que pertenezca a C , cumple que su par revertido (y, x) es también elemento de C . Como consecuencia, si $(x, y) \in C$ entonces x, y es un par invertible. Por otro lado si H no tiene pares invertibles, entonces por cada componente fuerte C de G^+ , existe una componente fuerte $C' \neq C$ tal que $(x, y) \in C$ si y solo si $(y, x) \in C'$*

Antes de continuar con la prueba veremos otra cosa interesante que sucede en la digráfica de pares G^+ . Si tenemos que en G^+ hay un camino \mathbf{P} de (u, v) a (v, u) digamos $\mathbf{P} = ((u, v), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n), (v, u))$ entonces en automático tendremos un par de caminos P, Q congruentes, $P = (u, x_1, \dots, x_n, v)$ de u a v y $Q = (v, y_1, \dots, y_n, u)$ de v a u y que además P evita a Q . De donde P y Q se obtienen al considerar solo las primeras entradas del camino \mathbf{P} y al considerar solamente las segundas entradas

del camino \mathbf{P} , respectivamente. Análogamente, si también existe un camino en G^+ de (v, u) a (u, v) , tendremos que existen otro par de caminos P', Q' congruentes, P' de v a u y Q' de u a v tales que P' evita a Q' . Donde P', Q' se construirán de forma similar a como se construyeron P y Q . Así, en el caso en el que hay un camino \mathbf{P} de (u, v) a (v, u) en G^+ y otro camino \mathbf{Q} de (v, u) a (u, v) en G^+ , podremos afirmar que u, v constituyen un par invertible de G .

Proof. Probemos como primer punto que si u, v son un par invertible, entonces (u, v) y (v, u) pertenecen a la misma componente fuertemente conexa. Ahora veamos que si $(x, y) \in C$ entonces $(y, x) \in C$. Para esto haremos una primera nota, $((u, v), (u', v')) \in E(G^+)$ implica que $((v', u'), (v, u)) \in E(G^+)$, esto se puede corroborar observando la Figura 3.14. Ahora sí, continuemos con la prueba, como $(x, y) \in C$ entonces la reversa de un camino cerrado que contiene a $(u, v), (x, y)$ (usando la observación) es un camino cerrado que contiene a $(v, u), (y, x)$. Luego, por concatenación de estos caminos cerrados, obtenemos otro camino cerrado que contiene a $(u, v), (v, u)$ y así podemos concluir que $(x, y), (y, x)$ pertenecen a la misma componente fuerte C . Esto se puede observar en la Figura 3.13. Finalmente si no existe un par invertible, para cada (x, y) sabemos que (y, x) no pertenece a la misma componente de (x, y) pues en ese caso x, y en efecto constituye un par invertible. Luego para cada $(x, y) \in C$ existe una componente C' tal que $(y, x) \in C'$. ■

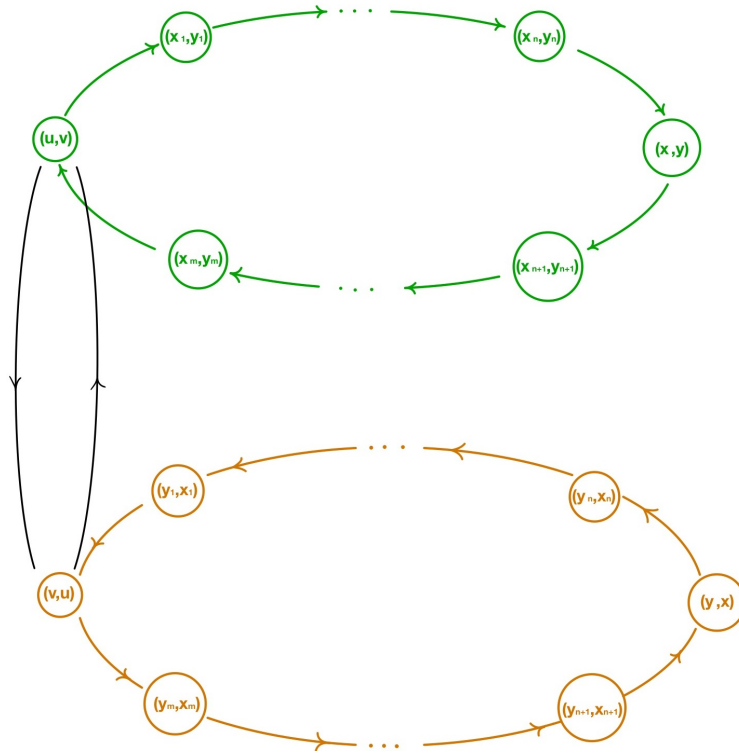


Figure 3.13: En verde el camino cerrado que contiene a $(u, v), (x, y)$. En naranja el camino revertido del camino verde. Al seguir el sentido de las flechas se obtiene un camino que contiene a $(uv), (v, u)$

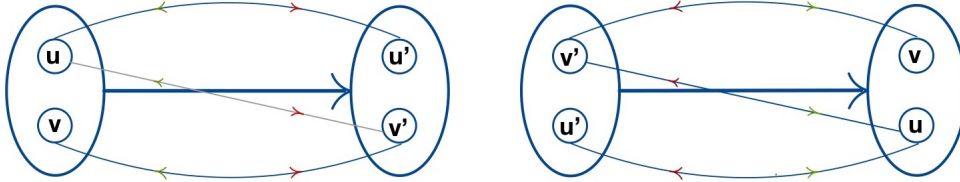


Figure 3.14: Si $(uv, u'v') \in E(G^+)$ entonces $(v'u', vu) \in E(G^+)$. Representamos en color verde y rojo las flechas de los dos casos distintos que se obtiene cuando $(uv, u'v') \in E(G^+)$. En color gris representamos una flecha que no pertenece a $E(G)$.

En el siguiente teorema, exhibimos un nuevo concepto, el de ordenamiento mínimo. Más adelante veremos que este concepto está íntimamente relacionado con las digráficas

de intervalos ajustadas, mas aún mostramos un pequeño algoritmo para dada una digráfica de intervalos ajustada construir un ordenamiento mínimo o dado un ordenamiento mínimo de una digráfica de intervalos ajustada, construir una representación por pares de intervalos de la digráfica.

Teorema 3.2.2. *Sea G una digráfica reflexiva, entonces un orden lineal $<$ es un ordenamiento mínimo si y solo si, para cualesquiera tres vértices $i < j < k$ tenemos que:*

$$ik \in E(G) \text{ implica } ij \in E(G)$$

$$ki \in E(G) \text{ implica } ji \in E(G)$$

Proof. Supongamos que $<$ es un ordenamiento mínimo, entonces $ab, jj \in E(G)$. Luego $\min(a, j) \min(b, j) \in E(G)$, donde $a, b \in \{i, k\}$ con $a \neq b$. Ahora dados $xy, x'y' \in E(G)$ veamos que $\min(x, x') \min(y, y') \in E(G)$. Todos los posibles casos son los siguientes:

$$\begin{array}{ll} (i) x < x' \text{ y } y < y' & (iii) x < x' \text{ y } y' < y \\ (ii) x' < x \text{ y } y' < y & (iv) x' < x \text{ y } y < y' \end{array}$$

De los dos primeros dos casos se concluye fácilmente que $\min(x, x') \min(y, y') \in E(G)$ pues:

$$x < x' \text{ y } y < y' \Rightarrow \min(x, x') \min(y, y') = xy \text{ y } xy \in E(G) \text{ por hipótesis.}$$

$$x' < x \text{ y } y' < y \Rightarrow \min(x, x') \min(y, y') = x'y' \text{ y } x'y' \in E(G) \text{ por hipótesis.}$$

Los casos (iii) y (iv) hay que tratarlos de otra forma, probaremos solo (iii) pues (iv) es totalmente análogo. Tenemos que $x < x'$ y $y' < y \Rightarrow \min(x, x') \min(y, y') = xy'$. En este punto se nos presentan los siguientes casos; $x = y$ luego dado que H es reflexiva, el lazo $xy \in E(G)$, el segundo caso $x < y'$. Como $y' < y$ obtenemos la cadena de desigualdades $x < y' < y$ y como $xy \in E(G)$ entonces $xy' \in E(G)$, como tercer y último caso, tenemos que $y' < x$. Entonces $x < x'$ así $y' < x < x'$ y $x'y' \in E(G)$ luego $xy' \in E(G)$. En cualquiera de los dos casos anteriores se tiene que $\min(x, x') \min(y, y') \in E(G)$. Por lo que podemos concluir que en efecto $<$ es un ordenamiento mínimo. ■

A partir del teorema anterior podemos obtener el siguiente corolario.

Corolario 3.2.3. *Sea G una digráfica reflexiva. Un ordenamiento lineal de los vértices de G es un ordenamiento mínimo si y solo si para cada vértice v , los vértices que siguen a v en el orden, consisten de: (i) Primero aparecen (en el orden) los vértices que son adyacentes a v por flechas simétricas. (ii) En segundo lugar aparecen*

los vértices que son adyacentes a v por aristas asimétricas, además son todas derechas o todas izquierdas, (iii) Finalmente tenemos vértices que no tienen flechas desde o hacia v

Proof. Esto es fácil de verificar, supongamos que $u < v < w$ y supongamos que $uw, wu \in E(G)$ veremos que si esto pasa por fuerza v debe tener también flechas dobles hacia u , es decir, no puede tener flechas asimétricas ni puede no tener flechas desde o hacia u . Por la primera consecuencia de el Teorema 3.2.2 se tiene que $uv \in E(G)$, y por la segunda consecuencia, tenemos que $vu \in E(G)$. Así v debe tener flechas simétricas hacia u . Verifiquemos rápidamente que si $u < v < w$ y hay una flecha asimétrica de u a w , entonces debe haber una flecha asimétrica con la misma dirección de u a v . Nuevamente el resultado es bastante inmediato del Teorema 3.2.2, ya que si $uw \in E(G)$ entonces $uv \in E(G)$ o análogamente si $wu \in E(G)$ entonces $vu \in E(G)$. ■

Teorema 3.2.4. *Una digráfica reflexiva es una digráfica de intervalos ajustada si y solo si admite un ordenamiento mínimo.*

Proof. Comencemos probando que si G es una digráfica de intervalos ajustada entonces admite un ordenamiento mínimo de sus vértices. Para esto definimos $u < v$ si y solo si el extremo izquierdo de I_u es menor que el extremo izquierdo de I_v . Esto corresponde a un ordenamiento mínimo de los vértices de G . Ahora, dado un ordenamiento mínimo de una digráfica reflexiva G , podemos ordenar los puntos iniciales de I_v y de J_v en el mismo orden en los cuales aparecen los vértices $v \in V(G)$ respecto al ordenamiento mínimo y definimos los intervalos I_v y J_v como: el intervalo I_v termina en el punto correspondiente al último vértice w tal que vw es una flecha derecha y el intervalo J_v termina en el punto correspondiente al último vértice tal que vw es un vértice es una flecha al revés. ■

En la Figura 3.15, observamos una digráfica reflexiva G la cual admite un ordenamiento mínimo, definido precisamente por el orden natural de su etiqueta, es decir $1 < 2 < \dots < 7$. Es fácil verificar mediante el Corolario 3.2.3 que este es en efecto un ordenamiento mínimo. Por ejemplo para el vértice 1 tenemos que en el orden primero aparecen los vértices 1, 2 que tienen flechas dobles, luego aparecen los vértices 4, 5 que tienen flechas derechas y finalmente tenemos los vértices 6, 7 que no forman flechas con el vértice 1. Este análisis se puede extender hacia el resto de los vértices. Ahora veamos cómo se realiza la construcción de los conjuntos de intervalos $\{I_v\}_{v \in V(G)}, \{J_v\}_{v \in V(G)}$. El algoritmo descrito en la prueba del Teorema 3.2.4 Nos dice que I_1, J_1 empiezan en 1 e I_1 termina en el último vértice v tal que hay una flecha derecha, en este caso

5 es el último vértice tal que $(1, 5)$ es flecha derecha, así $I_1 = [1, 5]$, tal como se indica a la derecha de la Figura 3.15. Ahora J_1 termina en el último vértice v tal que $(1, v)$ es flecha al revés. En este caso es el vértice 3. Un caso curioso es el del vértice 5, veamos, I_5, J_5 ambos deben empezar con 5 ahora I_5 debe terminar en el último vértice v tal que $(5, v)$ es flecha derecha, debemos recordar que al estar en una digráfica reflexiva los lazos son flechas simétricas es decir, son derechas y al revés. Así el extremo derecho de I_5 es nuevamente 5. Finalmente el extremo derecho de J_5 también corresponde a 5.

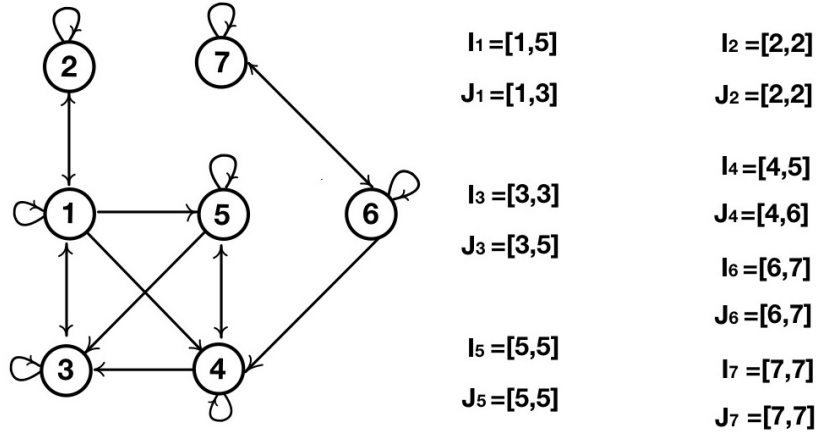


Figure 3.15: Dada una digráfica reflexiva G que admite un ordenamiento mínimo construimos la representación por pares de intervalos de G .

Teorema 3.2.5. *Si G tiene un par invertible, entonces G no tiene un ordenamiento mínimo.*

Proof. Sea u, v un par invertible en G . Por el Teorema 3.2.1 sabemos que $(u, v), (v, u)$ pertenecen a la misma componente conexa de la digráfica de pares G^+ . Ahora, supongamos que $(x, y)(x', y')$ es una flecha de la digráfica de pares G^+ . Supongamos que $<$ es un ordenamiento mínimo de G y supongamos que $u < v$. Entonces también se tiene que $u' < v'$. Hagamos la prueba de este hecho. Como $(u, v)(u', v') \in E(G)$ entonces tenemos una de las siguientes dos situaciones, (i) $uu', vv' \in E(G)$ o $uv' \notin E(G)$ o (ii) $u'u, v'v \in E(G)$ o $v'u \notin E(G)$. En el primer caso, veamos vía contradicción que $u' < v'$. Supongamos que $v' < u'$. Como $(u, v)(u', v') \in E(G)$ entonces $\min\{u, u'\} \min\{v, v'\} \in E(G)$, ya que por hipótesis tenemos un ordenamiento mínimo. Por otro lado, en el caso (i) también tenemos la hipótesis $uv' \notin E(G)$, luego $\min\{u, u'\} \min\{v, v'\} \neq uv'$. Por lo que $\min\{u, u'\} = u'$ o

$\min\{v, v'\} = v$. En el caso $\min\{u, u'\} = u'$, se tiene la siguiente cadena $v' < u' < u < v$ de donde $v' < u < v$ y dado que $vv' \in E(G)$, entonces por el Teorema 3.2.2 se tiene que $uv' \in E(G)$ lo cual es una contradicción. Ahora en el caso en el que $\min\{v, v'\} = v$ se tiene la cadena $u < v < v' < u'$ de donde $u < v' < u'$ y dado que $uu' \in E(G)$ usando nuevamente el Teorema 3.2.2 $uv' \in E(G)$ lo cual es nuevamente una contradicción. Ahora en el caso (ii) como $u'u, v'v \in E(G)$ entonces $\min\{u', v'\} \min\{u, v\} \in E(G)$, ya que tenemos un ordenamiento mínimo. En este caso también tenemos que $v'u \notin E(G)$ así $\min\{u', v'\} \min\{u, v\} \neq v'u$. Así las cosas $\min\{u', v'\} = u'$ o $\min\{u, v\} = v$. En el caso en que $\min\{u', v'\} = u'$ se llega a $u' < v'$ que es precisamente lo que buscamos, mientras que el segundo caso $\min\{u, v\} = v$ no es posible, ya que en este caso $v < u$ pero por hipótesis $u < v$. Entonces $u = v$ lo cual no es posible. De todo lo anterior se concluye que $u' < v'$. Retomando la prueba, consideremos P el camino cerrado dirigido que contiene a $(u, v), (v, u)$, siguiéndolo y haciendo uso de la nota anterior se llega a una contradicción del tipo $u < v$ y $v < u$. Por lo que no es posible tener un ordenamiento mínimo en G si hay presencia de un par invertible. ■

3.3 Digráficas de intervalos ajustadas.

En esta sección enunciamos y probamos el teorema central de la tesis.

Teorema 3.3.1. *Una digráfica reflexiva G es una digráfica de intervalos ajustada si y solo si no tiene pares invertibles.*

El teorema anterior lo probaremos vía las siguientes equivalencias.

Teorema 3.3.2. *Sea G una digráfica reflexiva, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes.*

1. G es una digráfica de intervalos ajustada.
2. G admite un ordenamiento mínimo.
3. G no tiene pares invertibles.
4. Los vértices de G^+ admiten una partición en dos conjuntos D, D' tales que:
 - (a) $(x, y) \in D$ si y solo si $(y, x) \in D$
 - (b) $(x, y) \in D$ y (x, y) domina a (x', y') en G^+ implica que $(x', y') \in D$
 - (c) $(x, y), (y, z) \in D$ implica que $(x, z) \in D$

Proof. La equivalencia entre las primeras dos proposiciones se probó en el Teorema 3.2.4. Por otro lado, mediante un uso de contrapositiva sobre el Teorema 3.2.5 se obtiene que la segunda proposición implica la tercera. Para probar que la cuarta proposición implica la segunda, solo basta definir el ordenamiento $<$ como $u < v$ si y solo si $(x, y) \in D$. Finalmente procedamos a probar que la tercera proposición implica la cuarta. Haremos la prueba de forma constructiva, es decir mediante un algoritmo veremos que asumiendo que G es débilmente conexa (si no lo fuera, se puede aplicar el proceso a cada componente débilmente conexa) y suponiendo también que G no tiene pares invertibles, construiremos una partición $\{D, D'\}$ de $V(G^+)$, que cumple (a), (b) y (c). Haciendo uso de el Teorema 3.2.1 se tiene que para cada componente fuertemente conexa C de G^+ existe su componente fuerte revertida C' , es decir aquella tal que $(x, y) \in C$ si y solo si $(y, x) \in C'$. A las componentes de esta forma les llamaremos componentes fuertemente conexas acopladas o simplemente componentes acopladas. La partición de $V(G^+)$ en D, D' corresponderá a separar cada par de componentes acopladas C y C' de G^+ . Los vértices correspondientes a una componente C los pondremos en D y los vértices revertidos los colocaremos en la componente D' . Al realizar el proceso, deberemos tener cuidado en no crear cadenas circulares, es decir una sucesión de pares $(x_0, x_1)(x_1, x_2), \dots, (x_n, x_0) \in D$, ya que buscamos que se satisfaga (c) y la existencia de una cadena así implicaría $(x_0, x_0) \in D$, es decir $(x_0, x_0) \in G^+$ pero por construcción en G^+ no hay vértices de este estilo (diagonal). Al comenzar el algoritmo los conjuntos D y D' son vacíos. Decimos que una componente fuerte C de G^+ es madura si no existen flechas desde C a otra componente fuerte en $G^+ - D$. Entonces el paso general de nuestro algoritmo consistirá precisamente en colocar una componente fuerte madura C en D y colocar a la componente fuerte acoplada C' en D' (C' no será necesariamente madura, pero sí se puede garantizar que no hay flechas desde $G^+ - D$ a C' , ver la Figura 3.14). Mostraremos que en cada paso del algoritmo, es posible añadir al menos una componente fuerte madura a D sin crear cadenas circulares en D . Los conjuntos D, D' tendrán las siguientes propiedades, las cuales serán ciertas de forma inicial. No existen cadenas circulares en D , cada componente fuerte de G^+ pertenece enteramente a D, D' o $V(G) - \{D, D'\}$, los pares en D' son precisamente los pares revertidos de los pares en D ; no hay flechas de G^+ desde vértices en D a vértices fuera de D y no hay flechas en G^+ desde vértices fuera de D' a un vértice en D' . Al final del algoritmo, cada par (x, y) con $x \neq y$ pertenecerá a D o a D' y así el conjunto final D no tendrá cadenas circulares, por lo que se cumplirá 4. Probemos que todas las propiedades anteriores se mantienen invariantes durante la ejecución del algoritmo. Supongamos por contradicción que el D actual no tiene cadenas circulares, pero que al añadir C , se crea una cadena en $C \cup D$, digamos $((x_0, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_n, x_0))$.

Además, supongamos que es la primera vez que se obtiene la cadena durante la ejecución del algoritmo. Adicionalmente, supóngase que no hay cadenas circulares mas cortas. Dado que por hipótesis no hay pares invertibles y que nunca se coloca un par y su par revertido en D , se tiene que $n \geq 2$. Con todo lo anterior, al menos un par de la cadena debe pertenecer a C asumamos sin pérdida de generalidad que $(x_n, x_0) \in C$ (otros pares pueden estar también en C). Bajo todas las condiciones anteriores, tenemos los siguientes dos casos.

Caso 1. Supongamos que en G hay al menos una flecha entre un par de vértices del conjunto $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, digamos (x_a, x_b) . Veamos que esto implica que $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ es un clan de G . Para probar esto veamos las siguientes observaciones.

1. Si x_j domina a x_i , entonces x_{j-1} domina a x_i en G .
2. Si x_j domina a x_i , entonces x_j domina a x_{i-1} en G .

Para probar la primera observación, notamos que, si x_j domina a x_i pero x_{j-1} no domina a x_i en G , entonces (x_{j-1}, x_j) domina a (x_{j-1}, x_i) en G^+ . Dado que (x_{j-1}, x_j) pertenece a $C \cup D$, la pareja (x_{j-1}, x_i) debe pertenecer a $C \cup D$, ya que si (x_{j-1}, x_j) pertenece a C y C es una componente fuertemente conexa, se sigue que $(x_{j-1}, x_i) \in C$. Ahora, si (x_{j-1}, x_j) pertenece a D , como por hipótesis se tiene que para toda flecha sale de un vértice en D tiene cabeza en D , tenemos que $(x_{j-1}, x_i) \in D$. En cualquier caso afirmamos que existe una cadena circular más pequeña en $C \cup D$. Veamos que siempre se cumple una de las siguientes posibilidades: Si $i < j$, la cadena circular tendrá una representación de la siguiente forma:

$$((x_0, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{i-1}, x_i), (x_i, x_{i+1}), \dots, (x_{j-2}, x_{j-1}), (x_{j-1}, x_j), \dots, (x_n, x_0))$$

Como $(x_{j-1}, x_i) \in C \cup D$, podemos “sustituirlo” en la cadena por el vértice (x_{j-1}, x_j) . Así, obtenemos la siguiente cadena, la cual en efecto es mas corta, pues su longitud se corresponde con la longitud de la subcadena en color malva.

$$((x_i, x_{i+1}), \dots, (x_{j-2}, x_{j-1}), (x_{j-1}, x_i))$$

Ahora, si $j < i$ la cadena circular tendrá una representación de la siguiente forma:

$$((x_0, x_1), \dots, (x_{j-2}, x_{j-1}), (x_{j-1}, x_j), (x_j, x_{j+1}), \dots, (x_{i-1}, x_i), (x_i, x_{i+1}), \dots, (x_n, x_0))$$

Como $(x_{j-1}, x_i) \in C \cup D$, podemos “sustituirlo” en la cadena por el vértice (x_{j-1}, x_j) . Así, obtenemos:

$$((x_0, x_1), \dots, (x_{j-2}, x_{j-1}), (x_{j-1}, x_i), (x_i, x_{i+1}), \dots, (x_n, x_0))$$

La cual es en efecto una cadena mas corta, ya que, en términos simples (x_{j-1}, x_i) viene a sustituir toda la subcadena en color malva.

Ahora para probar la segunda observación, se tiene de forma análoga que si x_j domina a x_i , pero x_j no domina a x_{i-1} en G , entonces (x_{i-1}, x_i) domina a (x_{i-1}, x_j) en G^+ , implicando nuevamente la existencia de una cadena circular más pequeña. Esto no es difícil de verificar mediante un par de esquemas como los usados para probar la primer propiedad.

Terminemos de ver que el hecho de tener una flechas entre dos vértices de x_0, \dots, x_n nos lleva a que se tiene una gráfica completa en x_0, \dots, x_n . Supongamos que x_a domina a x_b en G . La observación 1, implica que todos los antecesores de x_a dominan a x_b , es decir $x_{a-1}, x_{a-2}, \dots, x_{b+1}$ dominan a x_b , observe el primer diagrama de la figura 123123. Ahora como x_{b+1} domina a x_b la propiedad 2, implica que x_{b+1} domina $x_{b-1}, x_{b-2}, \dots, x_{b+2}$ esto es, domina a todos los otros vértices, ver el segundo diagrama de la figura 123123. Ahora usando nuevamente la propiedad 1, tenemos que como x_{b+1} domina a x_{b-1} entonces x_b domina a x_{b-1} , y aplicando la propiedad 2, se obtiene que x_b domina al resto de vértices. Mediante la repetida aplicación de estas propiedades sobre toso los vértices, se puede concluir que los vértices x_0, x_1, \dots, x_n inducen una gráfica completa en G . Finalmente veremos que C es una componente trivial, es decir consta de un solo vértice, supongamos que esto no es así es decir supongamos que en C hay un vértice adicional del (x_n, x_0) , bajo estas hipótesis en la componente revertida C' debe tener a como vértices a (x_0, x_n) y a otro vértice, supongamos (a, b) , el cual no pertenece a $C \cup D$. Como C' es conexa, se tiene que (x_0, x_n) domina a (a, b) , así podemos suponer que x_0 domina a a en G , x_n domina a b en G y que x_0 no domina a b en G . Dado que (a, b) no pertenece a $C \cup D$, entonces la pareja (x_0, x_1) que pertenece a $C \cup D$ no puede dominar a (a, b) por lo que x_1 no domina a b en G . Veamos que x_2 tampoco puede dominar a b , si x_2 domina a b en G entonces (x_1, x_2) domina a (x_0, b) , recordemos que x_1 domina a x_0 porque x_0, x_1, \dots, x_n induce una gráfica completa, continuando, tenemos que a su vez (x_0, b) domina (a, b) en G^+ , pero esto no es posible ya que tendríamos un camino dirigido que comienza en C y termina fuera de $C \cup D$, por lo que alguna flecha debe salir de $C \cup D$, que por hipótesis no puede pasar. Nuevamente si x_3 domina a b entonces (x_2, x_3) domina a (x_1, b) que a su vez domina a (a, b) y se llega a la misma contradicción. De forma análoga, se puede probar que x_n no domina a b , lo cual es falso. La contradicción de todo lo anterior surge de suponer que en C hubo mas de un vértice. Así $C = \{(x_n, x_0)\}$ y $C' = \{(x_0, x_n)\}$. Con esta misma prueba se muestra que C' es una componente madura, pues no hay vértices (a, b) que sean dominados fuera de $C \cup D$. Finalmente si (x_n, x_0) y (x_0, x_n) completan ambos una cadena circular

con D , entonces en D existía ya una cadena circular. Por ejemplo

$$(y_0, y_1), (y_1, y_2), \dots, (y_k, x_0), (x_0, x_n), (x_n, x_0), (x_0, y_{k+1}), \dots, (y_m, y_0)$$

Es una cadena que se forma con vértices de D y con (x_n, x_0) y (x_0, x_n) . Sin embargo, se puede formar la cadena

$$(y_0, y_1), (y_1, y_2), \dots, (y_k, x_0), (x_0, y_{k+1}), \dots, (y_m, y_0)$$

Que consta de vértices de D .

Pasemos ahora a probar el segundo caso, en este caso suponemos que x_0, x_1, \dots, x_n es un conjunto independiente en G . Probaremos un par de lemas auxiliares.

Lema 3.3.3. *Sea x_0, x_1, \dots, x_n un conjunto independiente en G . Supongamos que p es un vértice de G distinto de x_0, x_1, \dots, x_n , el cual domina a x_{i+1} pero no a x_i . Entonces $(x_0, x_1), \dots, (x_i, p), (p, x_{i+2}), \dots, (x_n, x_0)$ es también una cadena circular creada al mismo tiempo.*

Proof. Del hecho de que $(x_i x_{i+1})$ domina a (x_i, p) en G^+ y dado que (x_i, x_{i+1}) pertenece a $C \cup D$ se debe tener que (x_i, p) debe pertenecer también a $C \cup D$. Además, dado que x_{i+1} no domina o es dominado por x_{i+2} en G , también debemos tener que (x_{i+1}, x_{i+2}) domina a (p, x_{i+2}) cuando (p, x_{i+2}) está en $C \cup D$. En conclusión vemos que cualquier vértice p podemos reemplazarlo por x_{i+1} en la cadena circular $(x_0, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_n, x_0)$ \square

Lema 3.3.4. *Supongamos que el conjunto x_0, x_1, \dots, x_n es un conjunto independiente:*

1. *Si p es un vértice de G distinto de x_0, x_1, \dots, x_n el cual domina a x_j y x_k , con $j \neq k$, entonces p domina a cada x_i .*
2. *Si p es un vértice de G distinto de x_0, x_1, \dots, x_n el cual es dominado por x_j y x_k , con $j \neq k$, entonces p es dominado por cada x_i .*
3. *Si p es un vértice de G distinto de x_0, x_1, \dots, x_n el cual domina a x_j y es dominado por x_k , con $j \neq k$, entonces p es dominado por cada x_i .*

Proof. Si p domina a x_{i+1} pero no a x_i usando el Lema 3.3.3 tenemos que p puede reemplazar a x_{i+1} en la cadena circular. Ahora, x_j o x_k , alguno de los dos es distinto de x_{i+1} (ya que x_0, x_1, \dots, x_n es independiente). Entonces estamos en el caso en el que tenemos una cadena donde hay al menos una flecha, luego por el caso 1, se llega a que tenemos una gráfica completa. Los otros dos puntos pueden probarse de una manera similar. \square

Afirmamos ahora que en la cadena circular $(x_0, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_n, x_0)$ hay a lo mas una pareja en C , supongamos que es (x_n, x_0) y el resto de parejas pertenecen a D . Supongamos que esto no es así, es decir que además de (x_n, x_0) hay otra pareja (x_i, x_{i+1}) en C $i \neq n$ y sea P un camino dirigido en C de (x_n, x_0) a (x_i, x_{i+1}) . Sea (p, q) el penúltimo vértice en este camino y supongamos sin pérdida de generalidad que $px_i, qx_{i+1} \in E(G), px_{i+1} \notin E(G)$. Por el Lema 3.3.4 p no puede dominar a ningún otro x_j ya que llegaríamos a que domina a dos vértices y por ende dominaría a todos e particular a x_{i+1} . Ahora, q no domina a x_i , de hecho si q domina a x_i nuevamente por el Lema 3.3.4 tendremos que q domina a todos los x_i , esto es una contradicción ya que se llega a que (p, q) domina a (x_i, x_{i+2}) en G^+ lo que nos dice que (x_i, x_{i+2}) pertenece a $C \cup D$ y así tendemos una cadena circular mas pequeña en H . Tal como se muestra abajo:

$$(x, x_1), \dots, (x_{i-1}, x_i), (x_i, x_{i+1}), (x_{i+1}, x_{i+2}), (x_{i+2}, x_{i+3}), \dots, (x_n, x_0)$$

$$(x, x_1), \dots, (x_{i-1}, x_i), (x_i, x_{i+2}), (x_{i+2}, x_{i+3}), \dots, (x_n, x_0)$$

Por lo tanto q no domina a x_i . Mediante una doble aplicación del Lema 3.3.3 concluimos que x_i, x_{i+1} pueden ser reemplazados por p, q respectivamente en la cadena circular en G . Continuando de esta forma, podemos reemplazar (p, q) por el par previo en el camino P , hasta obetener el par (p', q') el cual es el primero en aparecer en el camino que es distinto de (x_n, x_0) . Dado que x_0 es adyacente a q' , regresamos al caso 1.

Así en efecto en la cadena $(x_0, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_n, x_0)$ tiene solamente el par (x_n, x_0) en C y cualquier otra cadena en $C \cup D$ debe tener exactamente un par en C . Ahora asumimos que nuestra cadena circular minimiza la suma de la longitud de la distancia entre los vértices x_0, x_1, \dots, x_n en la gráfica subyacente de G .

La digráfica G resulta tener una estructura muy especial. Afirmamos que en esta situación existe un conjunto no vacío K de vértices de G tales que $G - K$ tiene componentes débiles C_1, C_2, \dots, C_m donde $x_i \in C_i$ con $i = 1, \dots, n$ y tal que si $p \in K$ domina un vértice en C_i entonces p domina todos los vértices de C_i , mas aún si x'_0, x'_1, \dots, x'_n son cualesquiera vértices con $x'_i \in C_i$ entonces $(x'_0, x'_1), (x'_1, x'_2), \dots, (x'_n, x'_0)$ es también una cadena circular. El conjunto K corresponde a todos los vértices de G que dominan a cada x_i o que son dominados por cada x_i . Recordando el Lema 3.3.4 se tiene que para que un p pertenezca a K basta dominar o ser dominado por dos elementos de $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. Ahora, debe existir un $p \in K$ ya que estamos asumiendo que la cadena minimiza la suma de la longitud de las distancias entre los vértices, es decir si no existe un p el cual domina (o es dominado) por al menos dos elementos de $\{x_i\}_{i=1}^n$, entonces eso quiere decir que todo p vértice de $G - \{x_i\}_{i=1}^n$

domina a un único x_i , mas aún domina a x_i y no domina a x_{i-1} . Entonces, haciendo uso del Lema 3.3.3, obtenemos una cadena circular mas pequeña, lo que contradice el hecho de haber tomado una cadena que minimiza la suma de las longitudes.

El mismo argumento muestra que dos vértices distintos x_j, x_k no pueden estar en la misma componente débil C_i de $G - K$, ya que se demostró que cualquier camino que conecta x_j con x_k contiene un vértice de K . Por lo tanto, podemos numerar los componentes de manera que C_i contenga a x_i para $i = 1, 2, \dots, n$. (Puede haber componentes adicionales C_i con $i = n + 1, \dots, m$.) Ahora, el Lema 3.3.3 implica que cada x_i puede ser reemplazado por cualquier vecino en C_i ; así, cualquier vértice de C_i puede tomarse como x_i . De esta manera, cada $p \in K$ que domina un vértice en C_i también domina todos los vértices en C_i , y de manera similar para los vértices p dominados por un vértice en C_i .

Esto crea una situación en la que cualquier par (y, y') en la componente fuerte C de G^+ que contiene (x_n, x_0) debe satisfacer $y \in C_n, y' \in C_0$. Esto implica fácilmente que la componente fuerte C no tiene aristas que ingresen desde el exterior, y por lo tanto, la componente fuerte C' junto con C son maduras. C' no puede completar una cadena circular con D . De lo contrario, el par (x_0, x_n) también completaría una cadena circular por el mismo argumento. Por lo que, tanto (x_0, x_n) como (x_n, x_0) completan una cadena circular con D , de donde se sigue que D ya debe contener una cadena circular, lo cual es una contradicción.

Por supuesto, si la adición de C' no crea una cadena circular, entonces agregamos C' a D y C a D' . ■

Bibliography

- [1] J. A. Bondy y U. S. R. Murty, **Graph Theory**, Springer, 2008.
- [2] D. Corneil, H. Lerchs y L. Stewart Burlingham, *Complement reducible graphs*, Discrete Applied Mathematics 3 (1981) 163–174.
- [3] R. Diestel, **Graph Theory, Fifth Edition**, Springer, 2017.
- [4] A. Jones, F. Protti y R. R. Del-Vecchio, *Cograph generation with linear delay*, Theoretical Computer Science 713 (2018) 1–10.
- [5] T. Oetiker, H. Partl, I. Hyna, and E. Schlegl, The Not So Short Introduction to L^AT_EX Version 6.4 (2021), <https://tobi.oetiker.ch/lshort/lshort.pdf>.