



Dr. Christian Tsoungui Obama

Fiche Mémo ML #3

Approfondissement : Maîtriser la Régression

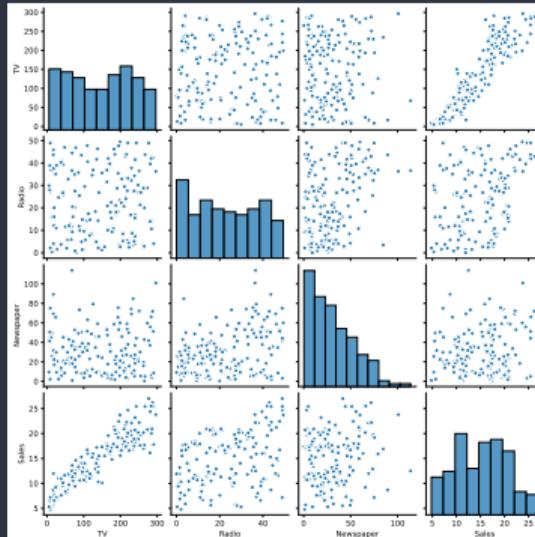
Guide fondamental pour aspirants Data Scientists

Basé sur
"Hands-On Machine Learning with Scikit-learn, Keras & TensorFlow"
par

Aurélien Géron

« Tous les modèles sont faux, mais certains sont utiles » George P. Box

- Construire un modèle d'apprentissage automatique (ML) revient à « tenter » de trouver la relation « inconnue » entre la variable cible et les caractéristiques des données (features).
- Les modèles sont construits en faisant des « hypothèses » sur ce que pourrait être la « vérité » basée sur les données disponibles.
- Dans les problèmes de régression, visualiser les nuages de points entre la cible et chaque caractéristique permet de formuler des hypothèses sur le modèle réel.



Les modèles de Régression Linéaire supposent une relation linéaire

Ventes	TV	Radio	Journal
22.1	230.1	37.8	69.2
10.4	44.5	39.3	45.1
:			
18.4	232.1	8.6	8.7

$\underbrace{\mathbf{y}}$ $\underbrace{\mathbf{X}}$

Modèle de régression linéaire pour la cible \mathbf{y} et les caractéristiques $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_L)$:

$$\mathbf{y} = \theta_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \dots + \theta_L x_L,$$

où $\Theta = (\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_L)$ sont les paramètres inconnus. Pour le jeu de données publicitaires, le modèle est :

$$\text{Ventes} = \theta_0 + \theta_1 \text{TV} + \theta_2 \text{Radio} + \theta_3 \text{Journal}.$$

Entraîner un modèle signifie estimer les meilleures valeurs de $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_L$

- Le modèle réel estime Ventes = 22.1 pour TV = 230.1, Radio = 37.8, Journal = 69.2, etc.
- **Attention : il est impossible de connaître le modèle réel avec certitude.** Le meilleur modèle est celui qui prédit des valeurs de ventes les plus proches des valeurs réelles.
- Le meilleur modèle possible minimise l'erreur sur tous les échantillons, c'est-à-dire l'erreur quadratique moyenne (EQM) calculée ainsi :

$$EQM(\Theta) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\hat{y}^{(i)} - y^{(i)} \right)^2,$$

où N est la taille de l'échantillon et $\hat{y}^{(i)}$ l'estimation de la cible pour le i -ème échantillon.

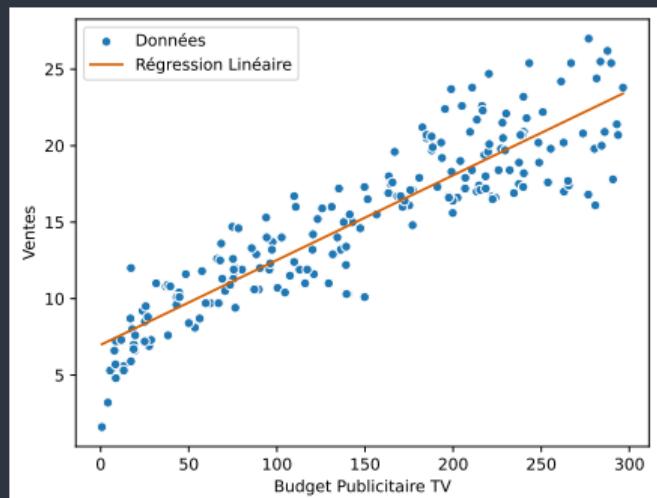
Estimation des meilleurs paramètres $\hat{\Theta}$ dans un modèle linéaire

Équation Normale : Formule exacte pour minimiser la EQM

$$\hat{\Theta} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y},$$

où \mathbf{X}^T est la transposée de \mathbf{X} .

```
1 # Implementation de l'Equation Normale
2 import numpy as np
3
4 def normal_equation_fit(X, Y):
5     X_exp = np.c_[np.ones((X.shape[0], 1)), X] # Ajout d'un échantillon pour l'estimation de theta_0
6     return np.linalg.inv(X_exp.T.dot(X_exp)).dot(
7         X_exp.T).dot(Y)
8
9 # Estimation des meilleurs paramètres du modèle
# pour Sales and TV data
10 best_parameters = normal_equation_fit(adsSales[["TV"]], adsSales[["Sales"]])
11
12 best_parameters
```



Visualisation : estimations des paramètres $\hat{\theta}_0 = 6.975$, $\hat{\theta}_1 = 0.055$

Équation Normale optimisée avec Scikit-learn

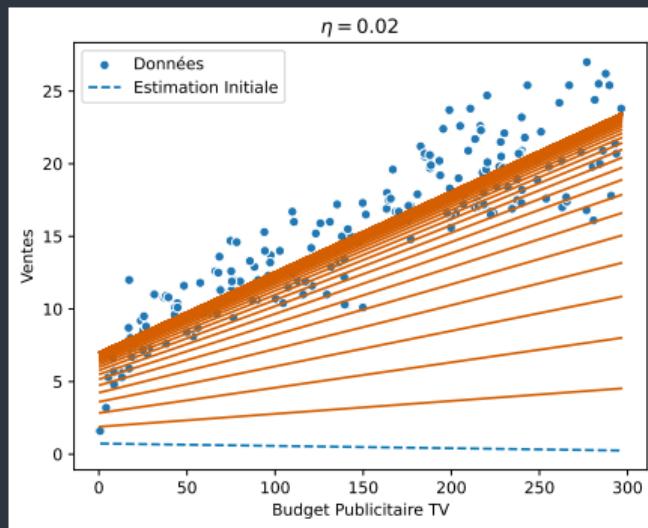
- L'Équation Normale peut échouer si le nombre de caractéristiques L est grand par rapport à N ou en cas de multicolinéarité.
- Généralement lente pour les grands jeux de données.
- Scikit-learn résout cela en utilisant la pseudo-inverse de Moore-Penrose $\mathbf{X}^+ = (\mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T)^+$ de \mathbf{X} , soit :

$$\hat{\Theta} = \mathbf{X}^+ \mathbf{y},$$

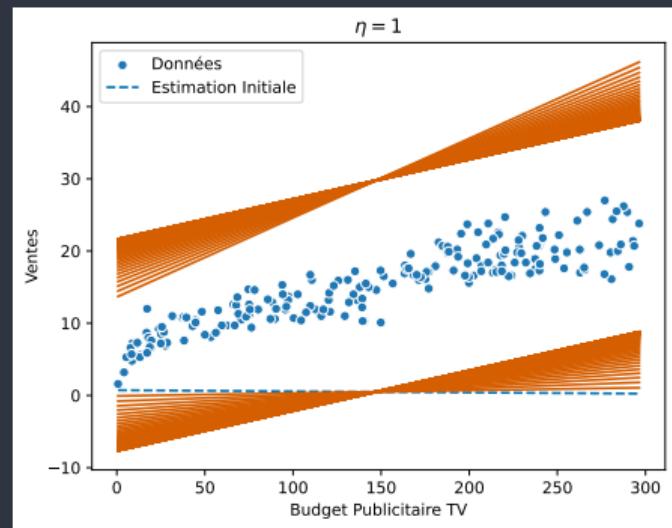
```
1 # Entrainement et valuation sur l'ensemble de formation : Regression Lineaire
2 from sklearn.linear_model import LinearRegression
3
4 lin_reg = LinearRegression()
5 lin_reg.fit(adsSales[["TV"]], adsSales[["Sales"]])
6
7 lin_reg.intercept_, lin_reg.coef_
8
```

Approche numérique : Descente de Gradient par Batch (BGD)

- Pour les grands jeux de données, l'Équation Normale est inefficace.
- La BGD trouve le meilleur modèle $\hat{\Theta}$ de manière itérative :
$$\Theta^{(t+1)} = \Theta^{(t)} - \eta \frac{2}{N} \mathbf{X}^T (\mathbf{X}\Theta^{(t)} - \mathbf{y}).$$
- Un taux d'apprentissage η trop petit ralentit la convergence.
- Un η trop grand fait diverger l'algorithme.



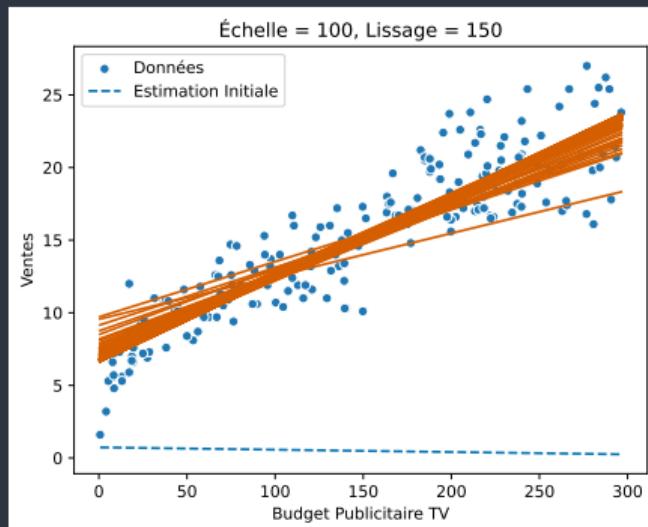
η trop petit : le modèle est trouvé mais cela prend trop de temps



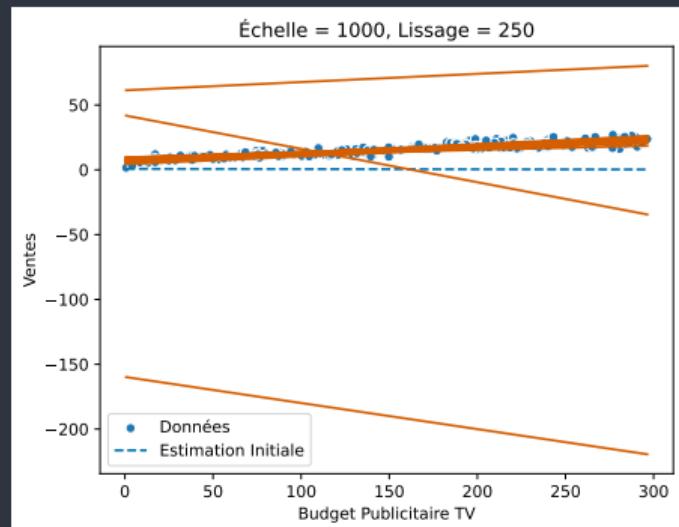
η trop grand : le meilleur modèle risque de ne pas être trouvé

Descente de Gradient Stochastique (SGD)

- La BGD peut rester bloquée dans un minimum local.
 - La SGD peut s'en échapper en s'entraînant sur un seul échantillon aléatoire par itération :
- $$\Theta^{(t+1)} = \Theta^{(t)} - \eta 2\mathbf{X}_{(i)}^T (\mathbf{X}^{(i)}\Theta^{(t)} - \mathbf{y}^{(i)}).$$
- La SGD est idéale pour les grands jeux de données et l'apprentissage en ligne.
 - Elle peut osciller et ne jamais se stabiliser exactement au minimum.

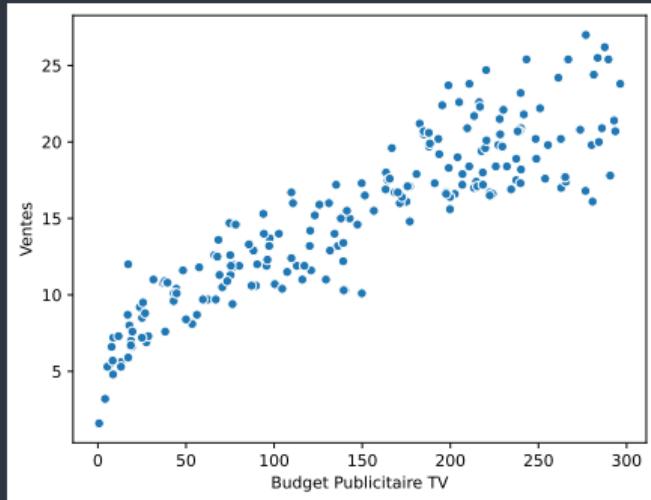


Convergence rapide : la SGD trouve le modèle relativement vite



Comportement oscillatoire : la SGD rebondit avant de se stabiliser

Et si le nuage de points ressemble à une courbe ?



Ventes vs TV : le nuage de points ressemble à une courbe, pas une droite

Modèle de régression polynomiale :

Pour les courbes, un polynôme de degré d pourrait être plus adapté :

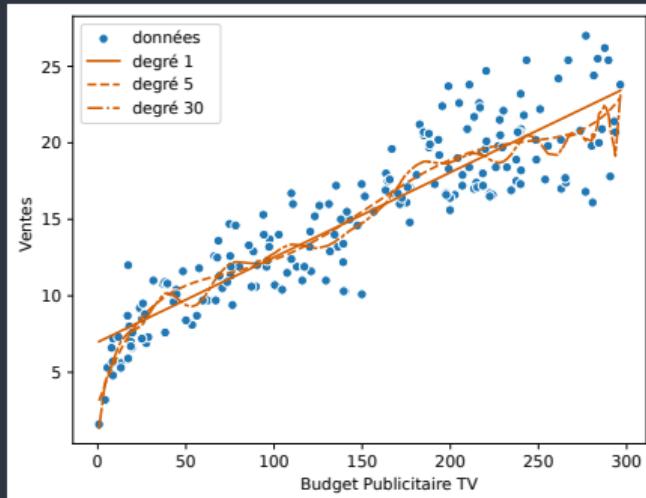
$$\mathbf{y} = \theta_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_1^2 + \dots + \theta_d x_1^d,$$

où Θ sont les paramètres. Exemple :

$$\text{Ventes} = \theta_0 + \theta_1 \text{TV} + \theta_2 \text{TV}^2 + \dots + \theta_d \text{TV}^d.$$

Modèles complexes : Surapprentissage vs Sous-apprentissage

- Les modèles simples (ex : linéaires) peuvent rater des motifs importants : c'est le sous-apprentissage (underfitting).
- Les modèles complexes (ex : polynôme de haut degré) collent trop aux données et prédisent mal les nouvelles données : c'est le surapprentissage (overfitting).
- **Compromis** : Les modèles complexes sont flexibles mais risqués ; les modèles simples sont rigides mais limités.



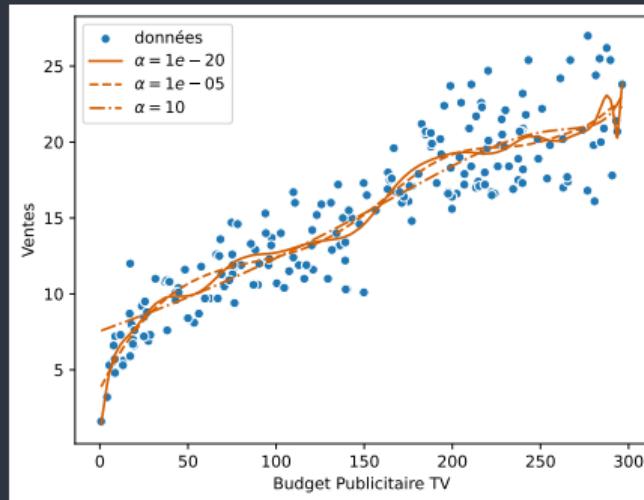
Complexité : La ligne est trop simple, le polynôme degré 30 trop complexe

Régularisation : La Régression Ridge

- On peut contraindre un modèle complexe en encourageant des valeurs de Θ petites.
- La **Régularisation** minimise la norme de Θ .
- **Régression Ridge** : utilise la norme L_2 de Θ , minimisant :

$$EQM(\Theta) + \alpha \frac{1}{2} \sum_{k=1}^L \theta_k^2,$$

où α contrôle l'intensité de la régularisation.

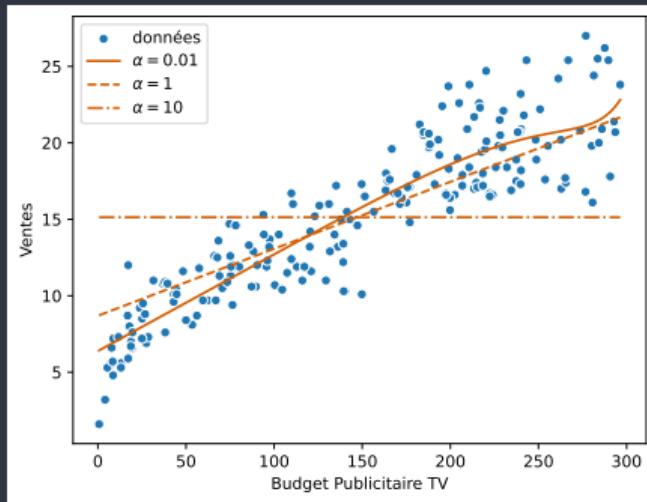


Effet de α (Ridge) : le modèle se simplifie à mesure que α augmente

Régression LASSO

- Contrairement à Ridge, la **régression LASSO** peut annuler certains paramètres (les mettre à zéro).
- Cela permet une **sélection automatique de variables**.
- LASSO utilise la norme L_1 de Θ et minimise :

$$EQM(\Theta) + \alpha \sum_{k=1}^L |\theta_k|.$$



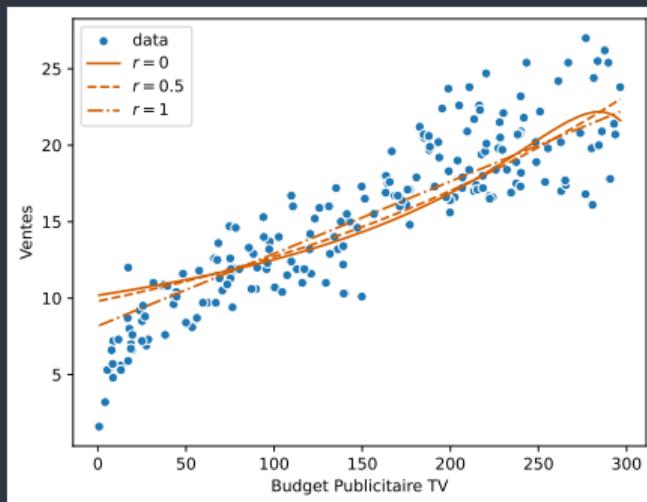
Effet de α (LASSO) : le modèle finit par se réduire à une constante θ_0

Elastic Net

- **Elastic Net** combine Ridge et LASSO avec un ratio de mélange r :

$$EQM(\Theta) + r\alpha \sum_{k=1}^L |\theta_k| + \frac{1-r}{2}\alpha \sum_{k=1}^L \theta_k^2.$$

- $r = 0$ correspond à Ridge et $r = 1$ à LASSO.



Effet du ratio r : similarité entre les modèles Ridge et Elastic Net régularisés

Ce qu'il faut retenir

- Évitez la régression linéaire simple (sans régularisation).
- Préférez Ridge si vous n'avez pas besoin de sélectionner des variables.
- Préférez Elastic Net à LASSO si certaines caractéristiques sont suspectées inutiles.

Modèles	Hyperparamètres	Avantages	Inconvénients
Régression Linéaire	Aucun	Solution exacte, déterministe, rapide	Sensible aux valeurs aberrantes & à la multicolinéarité
Descente de Gradient (BGD)	Taux d'apprentissage	Itératif, plus rapide sur grands jeux	Peut bloquer sur un minimum local Lent pour les très grands jeux
Gradient Stochastique (SGD)	Taux d'apprentissage	Très rapide, apprentissage en ligne	Approximatif, nécessite un planning d'apprentissage, oscille



Avez-vous trouvé cela utile ?

⌚ Notebook complet : » Dépôt GitHub (cliquez ici) «

💬 Commentez : Pouvez-vous expliquer pourquoi la SGD oscille ?

👤+ Suivez-moi : pour la prochaine fiche de cette série.

❤️ Aimez ce post : pour m'aider à toucher plus de monde.

Restons connectés !

/in/christiantsoungui @TsounguiChris