7. Ejercicios de repaso

1. Para cada una de las siguientes funciones:
   a) Determinar el dominio de la función.
   b) Estudiar la continuidad: indicar el conjunto donde la función es continua, señalar y clasificar sus discontinuidades si las hay.
   c) Estudiar la existencia de asíntotas verticales y horizontales.
   d) Determinar el conjunto donde es derivable.

   i) $f(x) = 4x^3 + 1$

   ii) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

   iii) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$

   iv) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 3x + 2}$

   v) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+2} & \text{si } x \geq -1 \\ x^2 + 1 & \text{si } x < -1 \end{cases}$

   vi) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x} & \text{si } x \geq 0 \\ x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

2. Calcular los siguientes limites

   i) $\displaystyle \lim_{x\to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$

   ii) $\displaystyle \lim_{x\to 2} (2-x)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{2}{2-x}\right)$

   iii) $\displaystyle \lim_{x\to 4} \frac{4x - x^2}{2 - \sqrt{x}}$

   iv) $\displaystyle \lim_{x\to -\infty} \frac{1 - x^4}{3x^3}$

   v) $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$

   vi) $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{e^x}$

   vii) $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} \frac{5x^2 + x + 1}{2x^2 - x}$

   viii) $\displaystyle \lim_{x\to -\infty} \frac{3x^6 + 1}{2x^4 - x^2}$

3. Calcular las derivadas de las siguientes funciones utilizando reglas de derivación.

i) $f(x) = \tan(2\pi x)$

ii) $b(x) = e^{x^2+1}$

iii) $c(x) = \dfrac{3x}{2x+10}$

iv) $d(x) = \ln(x^2+1)$

v) $e(x) = \cos(2x)\ \mathrm{sen}(x)$

vi) $h(x) = \sqrt{1+x^4} - 1$

vii) $g(x) = \dfrac{e^{2x}}{x-1}$

viii) $j(x) = \dfrac{\ln(x+2)}{\mathrm{sen}(x)}$

4. Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes de las siguientes funciones en los puntos indicados.

i) $f(x) = e^x + 1$ en $x = 0$

ii) $g(x) = -x^4 + 2x + 1$ en $x = 2$

iii) $h(x) = 2\ \ln(x^2+2)$ en $x = 1$

iv) $i(x) = \mathrm{sen}(2x)$ en $x = \pi$

v) $j(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x}$ en $x = 1$

5. Graficar las siguientes funciones a trozos. Para qué valores de x las funciones no son derivables?

i) $a(x) = |\, x\,|$

ii) $c(x) = \begin{cases} x-2 & \text{si } x \leq 2 \\ 3x-3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

iii) $e(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ x+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

iv) $d(x) = \begin{cases} e^x + 1 & \text{si } x \leq -1 \\ \dfrac{1}{x+2} & \text{si } x > -1 \end{cases}$

6. Realizar el estudio de las siguientes funciones y graficar.

i) $f(x) = x^3 - 3x$

ii) $h(x) = \dfrac{x^2+x}{x-1}$

iii) $g(x) = x^2 + ln(x)$

iv) $j(x) = x\,e^x$

7. En cada caso, realice el gráfico de una función $f(x)$ que cumpla con los siguientes requisitos:

i)
- Dominio de $f(x) : (-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$.
- Continuidad: $(-\infty, -3) \cup (-3, 2) \cup (2, +\infty)$.
- Discontinuidad inevitable en $x = 2$.
- $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -2$.

- $f'(x) > 0$ en $(-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$.
- $f'(x) < 0$ en $(-3, -1)$.
- $f''(x) > 0$ en $(-\infty, -3) \cup (-3, 0) \cup (2, +\infty)$.
- $f''(x) < 0$ en $(0, 2)$.
- Mínimo local en $x = -1$.

ii)
- Dominio de $f(x) : [-2, 8]$ y continua en ese dominio.
- Creciente en $(-2, 4) \cup (6, 8)$ y decreciente en el intervalo $(4, 6)$.
- $f''(x) > 0$ en $(-2, 2) \cup (5, 8)$ y $f''(x) < 0$ en $(2, 5)$.

La función que dibujaste en el inciso ii) ¿tiene máximo absoluto?

Integrales definidas e indefinidas: Técnicas de Integración- Área entre curvas

8. Calcular las siguientes integrales indefinidas

i) $\displaystyle\int \frac{\pi}{2} cos(x)\, dx$

ii) $\displaystyle\int 2x^8 - \frac{1}{x}\, dx$

iii) $\displaystyle\int cos(3x)\, dx$

iv) $\displaystyle\int x sen(x)\, dx$

v) $\displaystyle\int x^2 e^x\, dx$

vi) $\displaystyle\int x^2(1 + x^3)\, dx$

vii) $\displaystyle\int (e^x - 3x^3)^5 \cdot (e^x - 9x^2)\, dx$

viii) $\displaystyle\int sen(x) cos(x)\, dx$

ix) $\displaystyle\int \frac{x}{x+1}\, dx$

x) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\, dx$

xi) $\displaystyle\int \frac{4}{(ln\, x)^3\, x}\, dx$

9. Calcular las siguientes integrales definidas.

i) $\displaystyle\int_1^3 (2x+3)^2\, dx$

ii) $\displaystyle\int_0^{\pi} sen(x)\, dx$

iii) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^{1/3}\, dx$

iv) $\displaystyle\int_0^{\pi} \left[cos(x) + 3x^4\right] dx$

v) $\displaystyle\int_1^e \frac{2x}{x^2+1}\, dx$

vi) $\displaystyle\int_0^4 e^x x^3\, dx$

vii) $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{2x+3}\, dx$

viii) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$

10. Graficar las curvas y hallar el área de la región encerrada entre las gráficas de esas curvas.

i) $y = x^2$ y $y = 2x$.

ii) $y = 2x^3$ y $y = 2x$.

iii) $y = -\frac{x^2}{2} + 2$ y $y = 0$.

iv) $y = 2x^3 - x$ y $y = x^3$

7.1. Respuestas de Ejercicios de repaso

Ejercicio 1

i) $Dom f = \mathbb{R}$. Continuidad=$\mathbb{R}$. No tiene AV ni AH.

ii) $Dom f = \mathbb{R} - \{1\}$. Continuidad=$\mathbb{R} - \{1\}$. En $x = 1$ hay discontinuidad evitable. No tiene AV ni AH.

iii) $Dom f = \mathbb{R} - \{0\}$. Continuidad=$\mathbb{R} - \{0\}$. En $x = 0$ hay discontinuidad inevitable. No tiene AV ni AH.

iv) $Dom f = \mathbb{R}$. Continuidad=$\mathbb{R} - \{-1\}$. En $x = -1$ hay discontinuidad inevitable. No tiene AV , tiene AH en $y = 0$.

v) $Dom f = \mathbb{R} - \{1, 2\}$. Continuidad=$\mathbb{R} - \{1, 2\}$. En $x = 1$ hay discontinuidad evitable, en $x = 2$ discontinuidad inevitable. Tiene AV en $x = 2$ y AH en $y = 0$.

vi) $Dom f = \mathbb{R}$. Continuidad=$\mathbb{R}$. No tiene AV, tiene AH en $y = 0$.

Ejercicio 2 i)$\rightarrow 5$, ii)$\rightarrow 0$, iii) $\rightarrow 4$, iv)$\rightarrow -\infty$, v) $\rightarrow 0$, vi) $\rightarrow 0$ vii) $\rightarrow \frac{5}{2}$, viii) $\rightarrow +\infty$

Ejercicio 3

i) Recordar $\tan(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$. $f'(x) = \frac{2\pi}{\cos^2(2\pi x)}$.

ii) (Regla de composición), $b'(x) = e^{x^2+1}(2x)$.

iii) (Regla del cociente), $c'(x) = \frac{3(2x+10) - 6x}{(2x+10)^2}$.

iv) (Regla de composición), $d'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

v) (Regla de producto y composición), $e'(x) = (-2\operatorname{sen}(2x))(sen(x)) + (cos(2x))(\cos(x))$.

vi) (Regla de suma y composición), $h'(x) = \frac{1}{2}(1 + x^4)^{-1/2}(4x^3)$.

vii) (Regla del cociente y composición), $g'(x) = \frac{e^{2x}\,2(x-1) - e^{2x}}{(x-1)^2}$.

viii) (Regla del cociente y composición), $j'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x+2}\right)\operatorname{sen}(x) - ln(x+2)(\cos(x))}{(\operatorname{sen}(x))^2}$.

Ejercicio 4 Recordar que la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = a$ es

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

i) $f'(0) = 1$, $f(0) = 2$.

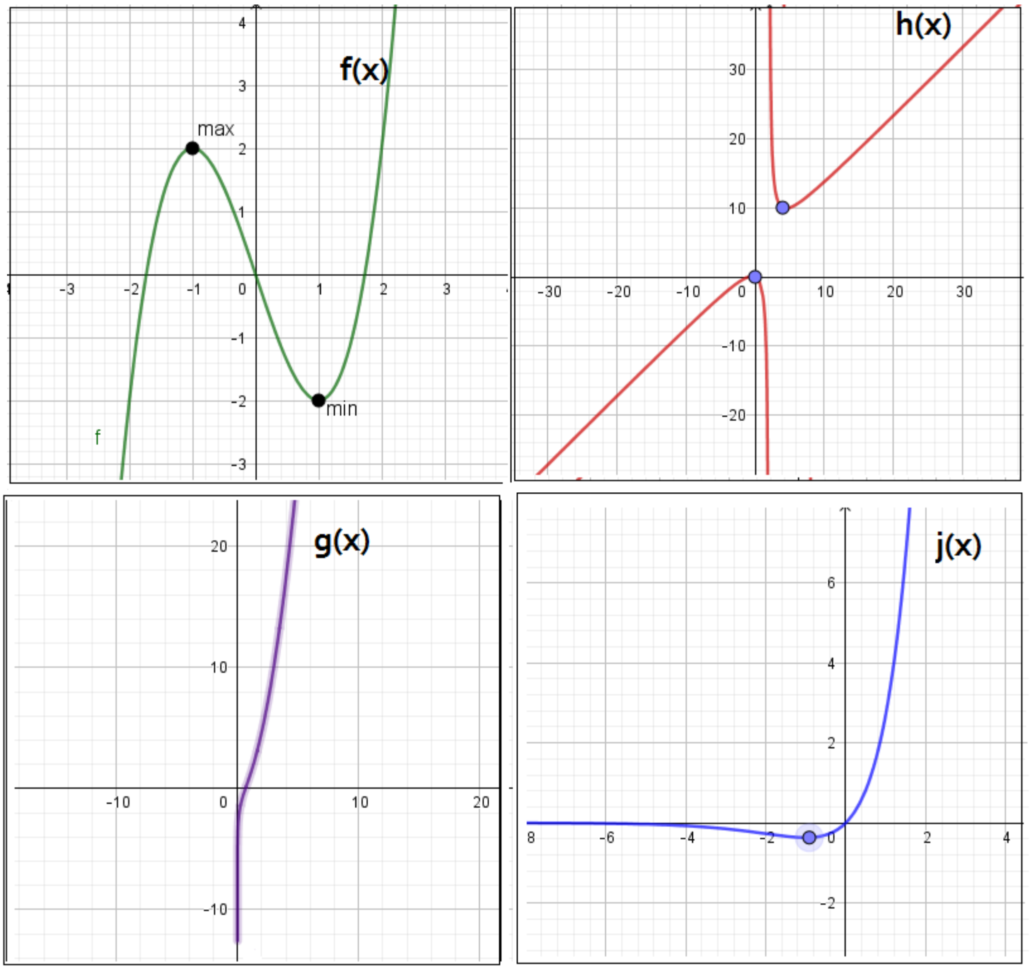
ii) $g'(2) = -27$, $g(2) = -11$.

iii) $h'(1) = \frac{4}{3}$, $h(1) = 2\ln(3)$.

iv) $i'(\pi) = 2$, $i(\pi) = 0$.

v) $j'(1) = 3$, $j(1) = 0$.

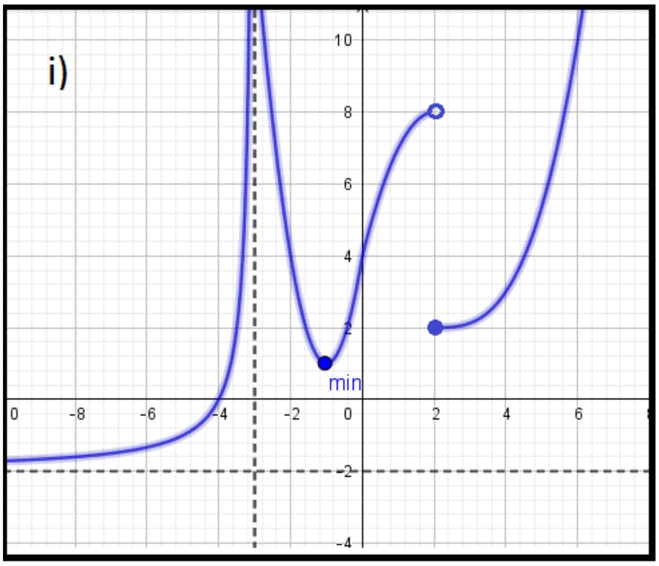
Ejercicio 6



Ejercicio 7 Para trazar una gráfica del inciso i), hacemos un resumen en el siguiente cuadro:

	$(-\infty,-3)$	$(-3,-1)$	$(-1,0)$	$(0,2)$	$(2,+\infty)$
f'	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$
f''	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$

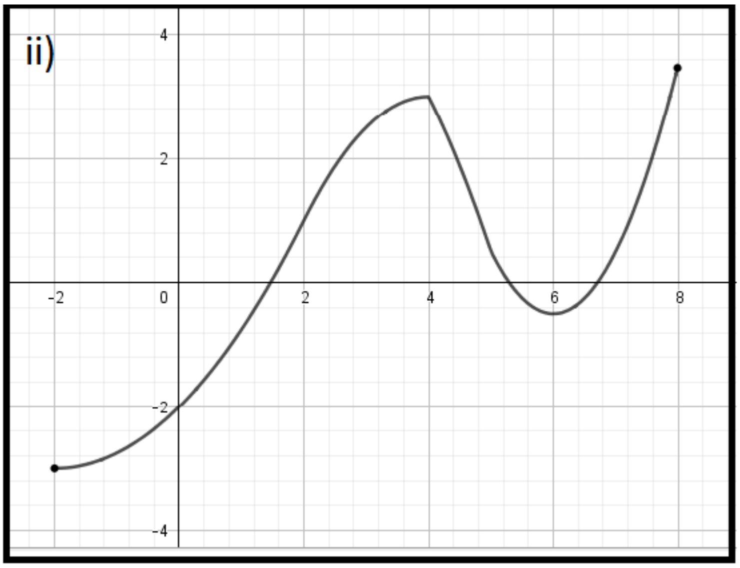
Teniendo en cuenta las demás condiciones que debe cumplir la función, un posible gráfico (no es el único) podría ser:



Para la gráfica del inciso ii), resumimos la información en el siguiente cuadro.

	$(-2,2)$	$(2,4)$	$(4,5)$	$(5,6)$	$(6,8)$
f'	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
f''	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$

Y a continuación un posible gráfico para f:



Ejercicio 8

i) Rta $= \dfrac{\pi}{2}\sin(x) + c$ (Directo)

ii) Rta $= \dfrac{2}{9}x^9 - \ln(x) + c$ (Directo)

iii) Rta $= \dfrac{\sin(3x)}{3} + c$ (Sustitución o directo)

iv) Rta $= -x\cos(x) + \sin(x) + c$ (Partes)

v) Rta $= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c$ (2 veces partes)

vi) Rta $= \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^6}{6} + c$ (Directo)

vii) Rta $= \dfrac{(e^x - 3x^3)^6}{6} + c$ (Sustitución)

viii) Rta $= \dfrac{(\sin(x))^2}{2} + c$ (Sustitución)

ix) Rta $= (x+1) - \ln(x+1) + c$ (Sustitución)

x) Rta $= \ln(x^2 + x + 1) + c$ (Sustitución)

xi) Rta$= \dfrac{-2}{(\ln(x))^2} + c$ (Sustitución)

Ejercicio 9 i) Rta $= 100{,}66$. ii) Rta $= 2$. iii) Rta $= 0$. iv) Rta $= \dfrac{3}{5}\pi^5$.

v) Rta $= \ln(e^2 + 1) - \ln(2)$ (Sustitución). vi)Rta $= 34e^4 + 6$ (3 veces partes).

vii) Rta $= 8{,}44$. viii) Rta $= 2\sqrt{3} - 2$.

Ejercicio 10