Coordinate Baricentriche e Proiezione Prospettica con Profondità

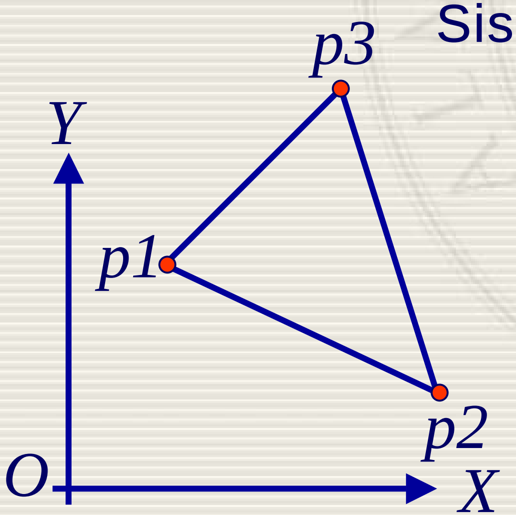
Sistema di Riferimento 2D

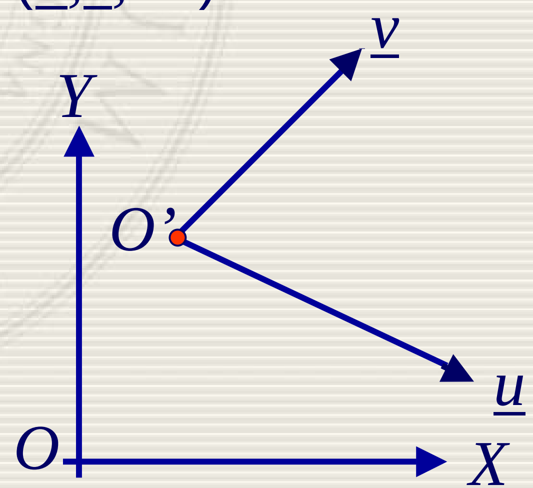
Riprendendo i concetti di Spazio Affine e Sistema di Riferimento, per esempio nel caso 2D, si ha che dato un triangolo nel piano si può definire un sistema di riferimento a lui associato.

Il triangolo sia dato mediante i tre vertici non allineati $p1$, $p2$ e $p3$ (in senso antiorario) in un sistema di coordinate cartesiane XYO.

Allora possiamo definire il seguente Sistema di Riferimento: $(\underline{u},\underline{v},O')$

$$O' = p1$$
$$\underline{u} = p2-p1$$
$$\underline{v} = p3-p1$$





Sistema Baricentrico

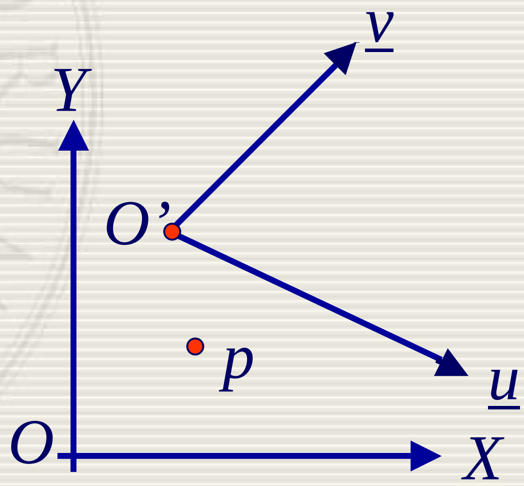
I punti p di coordinate cartesiane $[x,y]$, possono allora essere rappresentati nel nuovo sistema di riferimento non ortogonale/cartesiano, ma affine, come:

$$p = p1 + \beta(p2-p1) + \gamma(p3-p1)$$

e le sue coordinate saranno: $p = [\beta, \gamma, 1]$.

A partire dalla rappresentazione per p possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} p &= p1 + \beta(p2-p1) + \gamma(p3-p1) \\ &= (1-\beta-\gamma)p1 + \beta p2 + \gamma p3 \\ &= \alpha p1 + \beta p2 + \gamma p3 \end{aligned}$$



che porta a

$$p(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha p1 + \beta p2 + \gamma p3$$

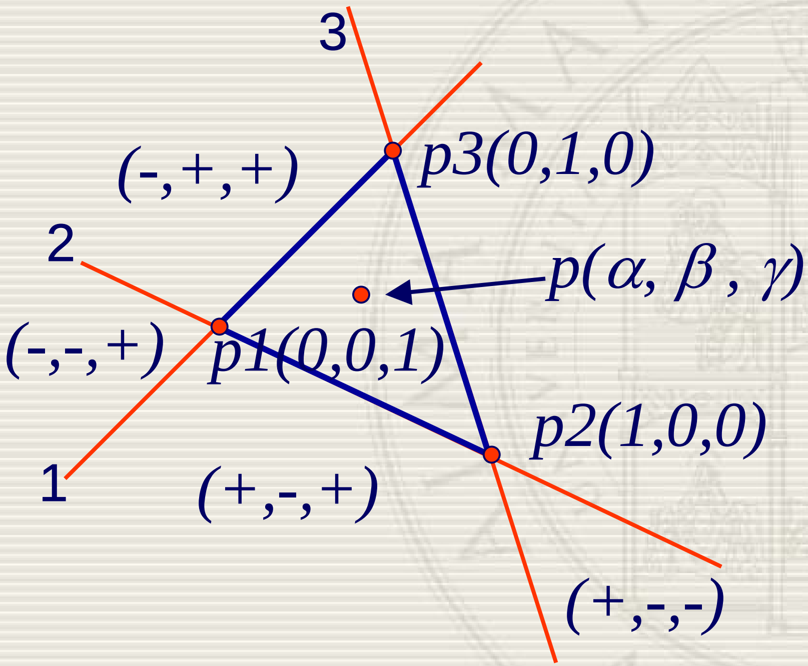
con

$$\alpha + \beta + \gamma = 1$$

Siamo allora in un sistema di riferimento baricentrico e $[\alpha, \beta, \gamma]$ sono dette coordinate baricentriche di p.

Sistema Baricentrico

Osservazione: le coordinate baricentriche descrivono un punto p come combinazione affine dei vertici del triangolo.



- Per ogni punto p interno al triangolo di vertici $p1$, $p2$ e $p3$ si ha:

$$0 < \alpha < 1$$
$$0 < \beta < 1$$
$$0 < \gamma < 1$$

- Punti su un lato del triangolo hanno una coordinata nulla
- Le coordinate di un vertice del triangolo sono due 0 ed un 1

Esercizio: si osservino le zone del piano con coordinate negative; completare le mancanti.

Coordinate Baricentriche

Osservazione: dati due punti *p1* e *p2* resta definito un segmento; possiamo definire il sistema baricentrico $(\underline{t},O')=(p2-p1,p1)$ così che ogni punto *p* sulla retta per *p1* e *p2* potrà essere espresso in coordinate baricentriche come:

$$p = \alpha\, p1 + \beta\, p2 \quad \text{con} \quad \alpha + \beta = 1.$$

Ma questo lo abbiamo già visto in precedenza e altro non è che la rappresentazione in forma parametrica di un segmento:

$$p(t) = (1-t)\, p1 + t\, p2 \quad \text{con} \quad t \in [0, 1].$$

Problema: dato il punto $p=[p_x,p_y]$ sulla retta per *p1* e *p2* quali sono le sue coordinate baricentriche?

Dall'espressione in forma parametrica ricaviamo il valore di *t* da una delle due componenti; sarà:

$$p_x = (1-t)\, p1_x + t\, p2_x = t\, p1_x + t\,(p2_x - p1_x)$$

da cui

$$t = \frac{p_x - p1_x}{p2_x - p1_x}$$

Coordinate Baricentriche

Problema: dato il punto $p = [p_x, p_y]$ sul piano definito dai tre punti non allineati $p1$, $p2$ e $p3$ quali sono le sue coordinate baricentriche?

Dall'espressione per componenti si ha:

$$\begin{cases} p_x = \alpha\, p1_x + \beta\, p2_x + \gamma\, p3_x \\ p_y = \alpha\, p1_y + \beta\, p2_y + \gamma\, p3_y \\ \alpha + \beta + \gamma = 1 \end{cases}$$

Si tratta di un sistema lineare, non singolare, nelle incognite α, β e γ

$$\begin{pmatrix} p1_x & p2_x & p3_x \\ p1_y & p2_y & p3_y \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

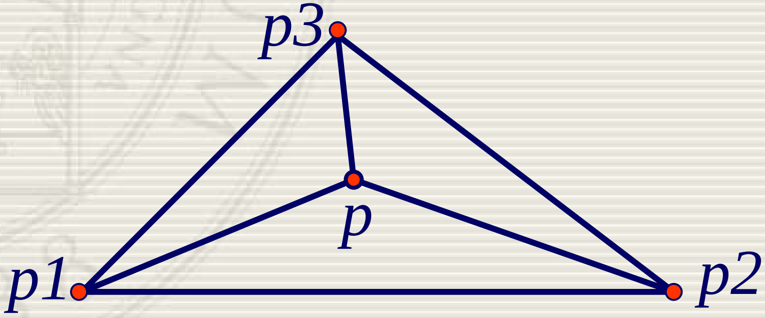
Coordinate Baricentriche

Risolvendo con Cramer (forma esplicita):

$$\alpha = \frac{< p, p2, p3 >}{< p1, p2, p3 >} \quad \beta = \frac{< p1, p, p3 >}{< p1, p2, p3 >} \quad \gamma = \frac{< p1, p2, p >}{< p1, p2, p3 >}$$

con $<A,B,C>$ =Area del triangolo di vertici A, B e C dati in senso antiorario, ossia:

$$< A, B, C >= \frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} A_x & B_x & C_x \\ A_y & B_y & C_y \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



Nota: α, β, e γ sono ottenute come il rapporto delle aree dei triangoli individuati da p, $p1$, $p2$ e $p3$.

Coord. Baricentriche e Intepolazione

Le espressioni viste

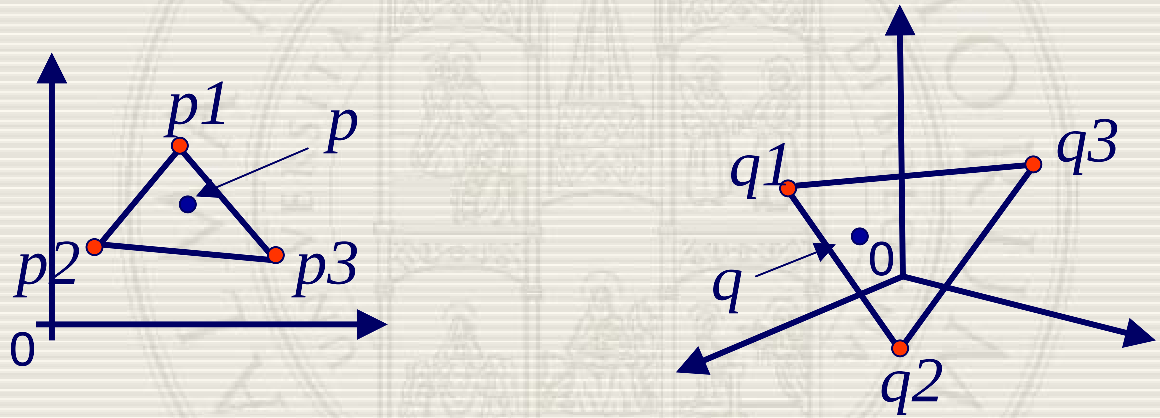
$$p(\alpha, \beta) = \alpha\, p1 + \beta\, p2$$
$$p(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha\, p1 + \beta\, p2 + \gamma\, p3$$

rappresentano la retta ed il piano di interpolazione (forma parametrica) rispettivamente dei due punti $p1$ e $p2$ e dei tre punti non allineati $p1$, $p2$ e $p3$.
Si osservi che i punti possono essere in R^n (cioè una qualunque dimensione) e le espressioni continueranno a valere.

Noi siamo interessati ad usarle sia in R^2 che in R^3.

Coord. Baricentriche e Intepolazione

Osservazione: dati un triangolo 2D ed un triangolo 3D è semplice, usando le coordinate baricentriche, definire un mapping lineare che trasformi i punti del primo in punti del secondo (tale mapping viene definito univocamente chiedendo che $p1 \rightarrow q1$, $p2 \rightarrow q2$ *e* $p3 \rightarrow q3$);



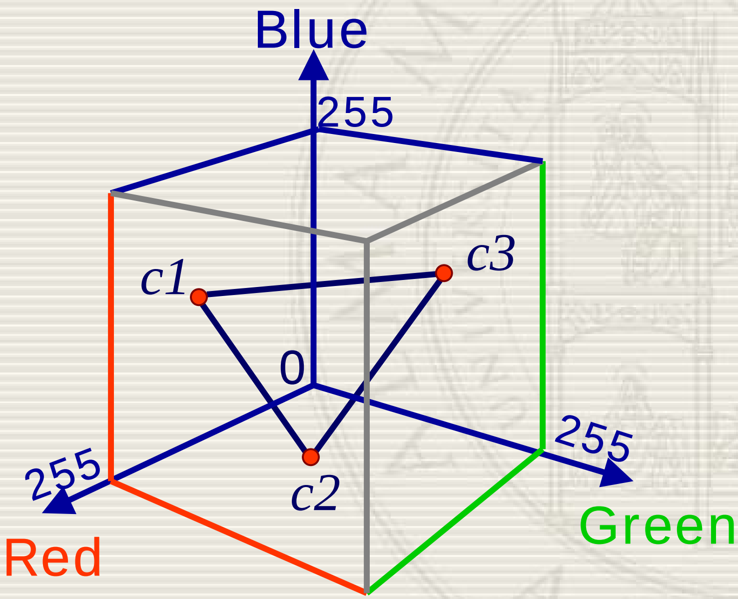
Siano (α, β, γ) le coordinate baricentriche di p nel triangolo $p1,p2,p3$, allora il suo corrispondente q in $q1,q2,q3$ sarà dato da

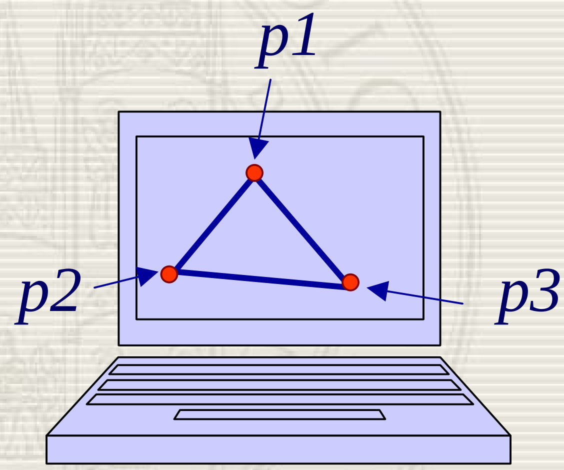
$$q = \alpha\, q1 + \beta\, q2 + \gamma\, q3.$$

Nota: p e q avranno le stesse cordinate (α, β, γ) nei due triangoli.

Interpolazione Colori

Dati tre colori *c1*, *c2* e *c3* nello spazio RGB dei colori, si possono usare le coordinate baricentriche per ottenere l'interpolazione colore.





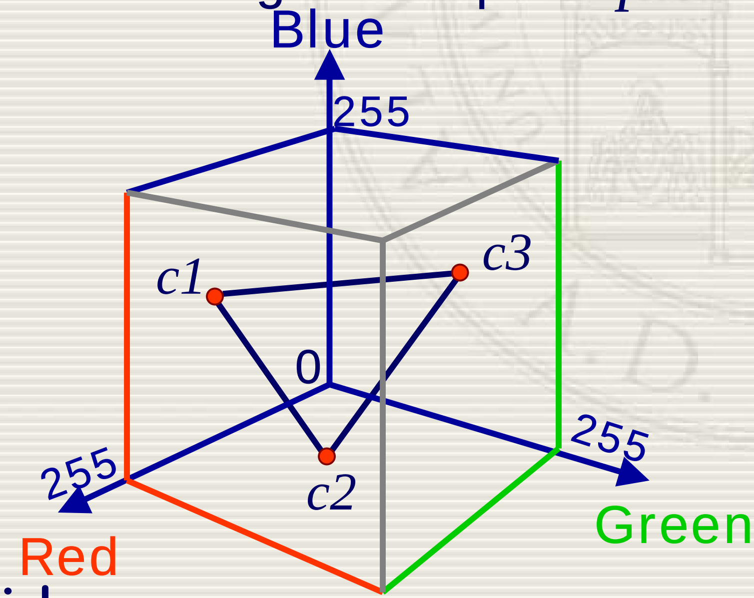
Siano $p1=[x1,y1]$, $p2=[x2,y2]$ e $p3=[x3,y3]$ tre punti in coordinate schermo, $c1=[r1,g1,b1]$, $c2=[r2,g2,b2]$ e $c3=[r3,g3,b3]$ tre colori …

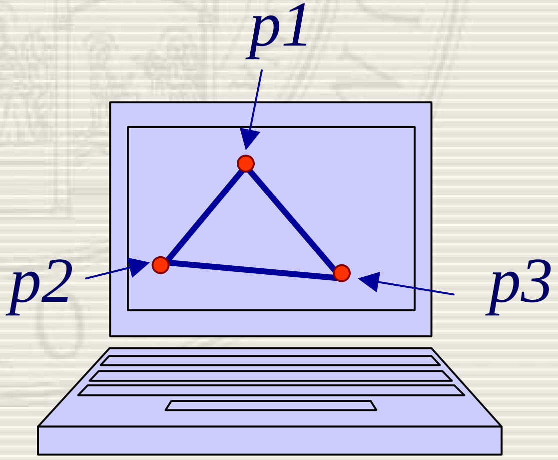
Interpolazione Colori

... allora per colorare o rasterizzare il triangolo a schermo, mediante l'interpolazione colore, si può seguire la seguente procedura:

-per ogni pixel $p=[x,y]$ del triangolo schermo;

- determinare le coordinate baricentriche $p(\alpha, \beta, \gamma)$ rispetto a $p1$, $p2$ e $p3$;
- calcolare $c = \alpha\, c1 + \beta\, c2 + \gamma\, c3$;
- disegnare il pixel p con il colore c: draw(p,c)





Interpolazione Colori

per y=v_{ymin},v_{ymax}

per x=v_{xmin},v_{xmax}

$$\alpha = \frac{<p, p2, p3>}{<p1, p2, p3>}$$

$$\beta = \frac{<p1, p, p3>}{<p1, p2, p3>}$$

$$\gamma = \frac{<p1, p2, p>}{<p1, p2, p3>}$$

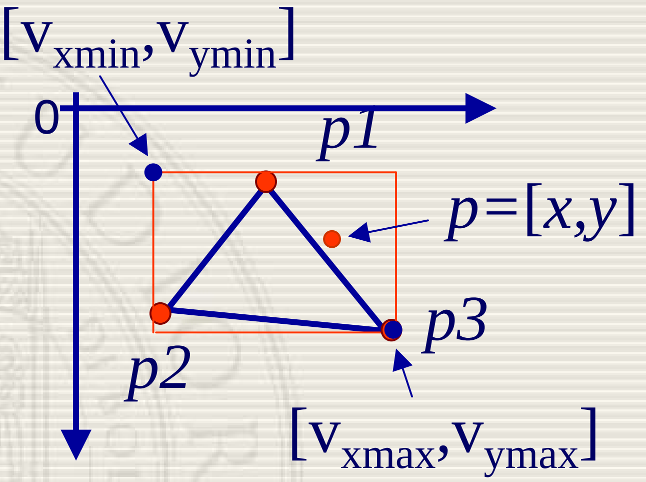
se $(\alpha >=0 \ \& \ \beta >=0 \ \& \ \gamma >=0)$

$$c_x = \alpha \ r1 + \beta \ r2 + \gamma \ r3$$

$$c_y = \alpha \ g1 + \beta \ g2 + \gamma \ g3$$

$$c_z = \alpha \ b1 + \beta \ b2 + \gamma \ b3$$

draw(p,c)



Esempi

Archvio SDL2prg_1516.tgz, cartella SDL2prg1, codice:

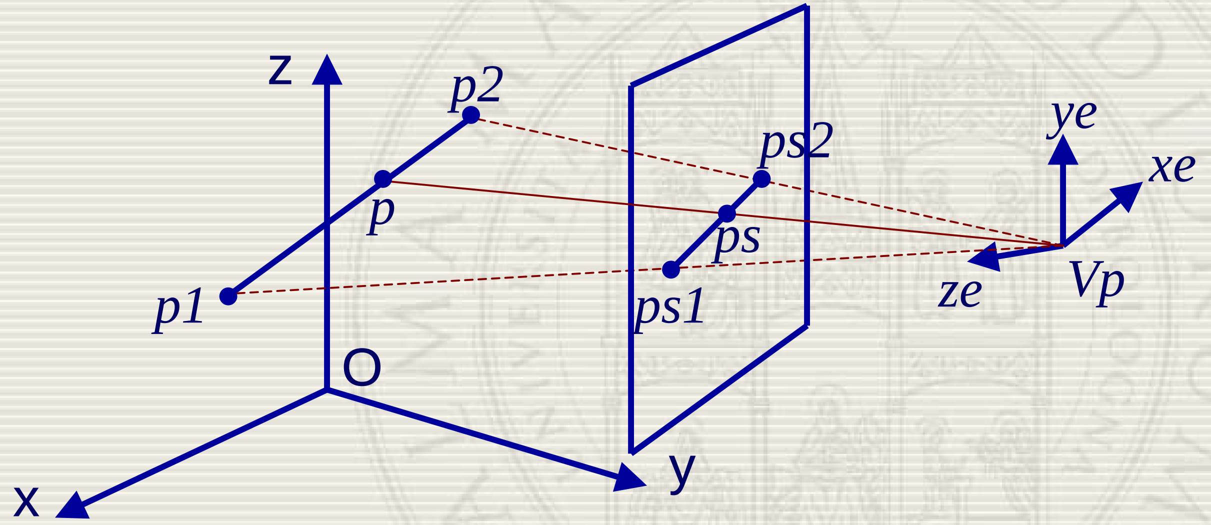
raster_draw_color.c

Archvio SDL2prg_1516.tgz, cartella SDL2prg2, codice:

persp_cube_color_sdl.c

Profondità di un Pixel

Riprendendo l'algoritmo Z-Buffer (o Depth buffer) per la rimozione di parti nascoste, vogliamo affrontare il problema di come calcolare la profondità di un pixel.



Siano *ps1* e *ps2* i proiettati di *p1* e *p2*; si considerano tutti i punti/pixel *ps* del segmento *ps1*-*ps2*, e per ognuno si deve determinare la sua profondità, cioè la coordinata *z* di *p* nel sistema *xeyezeVp* dell'osservatore di cui *ps* è la proiezione.

Profondità di un Pixel

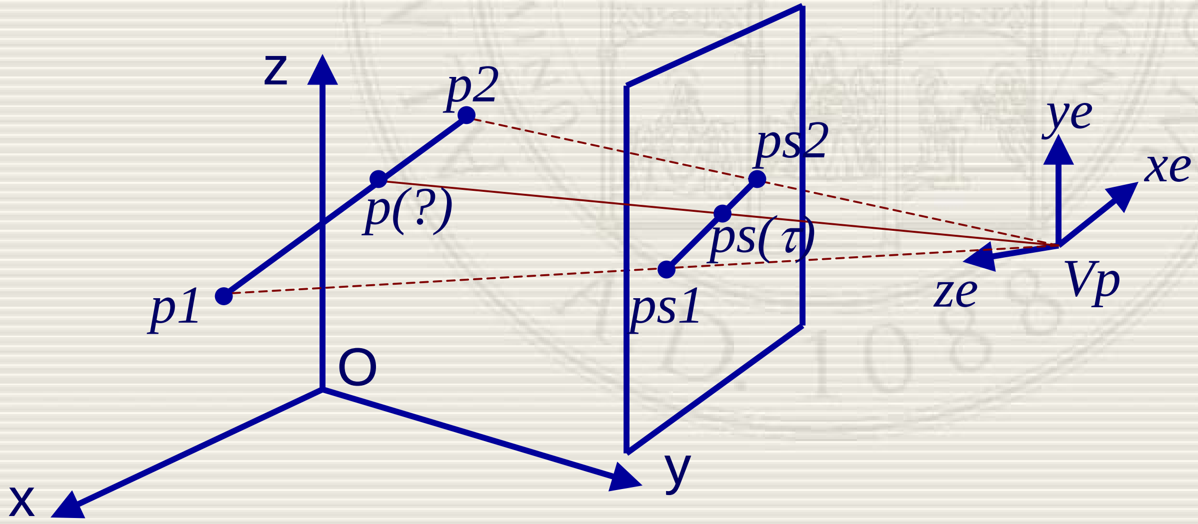
Scriviamo *ps1-ps2* in forma baricentrica/parametrica:

$$ps(\tau) = (1-\tau)\,ps1 + \tau\,ps2 \quad \text{con } \tau \in [0, 1].$$

A $ps(\tau)$ associamo la profondità (coordinata z) di p sul segmento $p1$-$p2$ usando lo stesso parametro τ

$$p(\tau) = (1-\tau)\,p1 + \tau\,p2$$

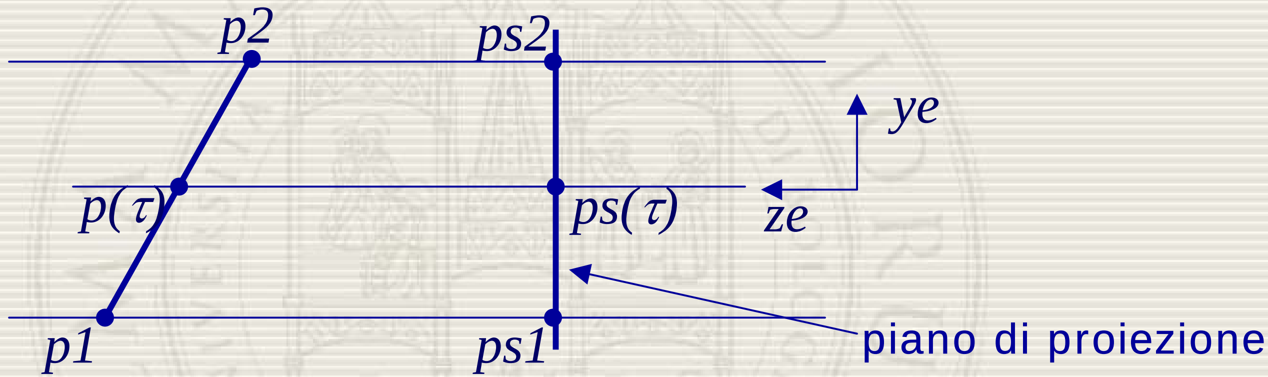
Questo modo di procedere è CORRETTO?



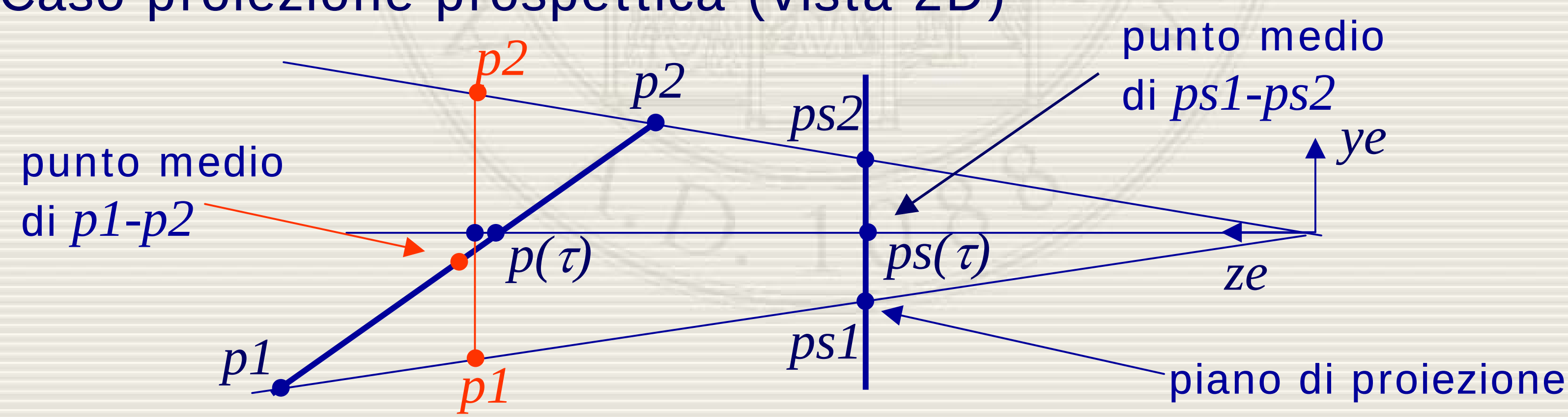
Profondità di un Pixel

E' CORRETTO solo se si sta effettuando una proiezione parallela, ma NON sarà CORRETTO nel caso di proiezione prospettica.

Caso proiezione parallela (vista 2D)

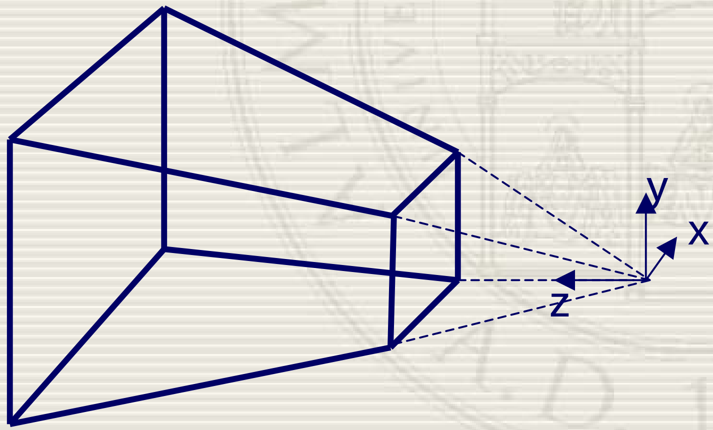


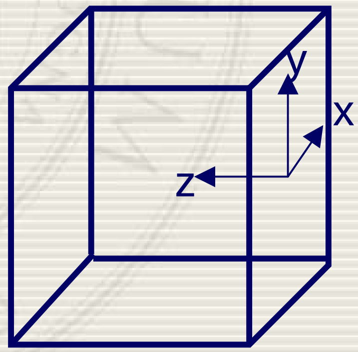
Caso proiezione prospettica (vista 2D)



Prospettiva con Profondità

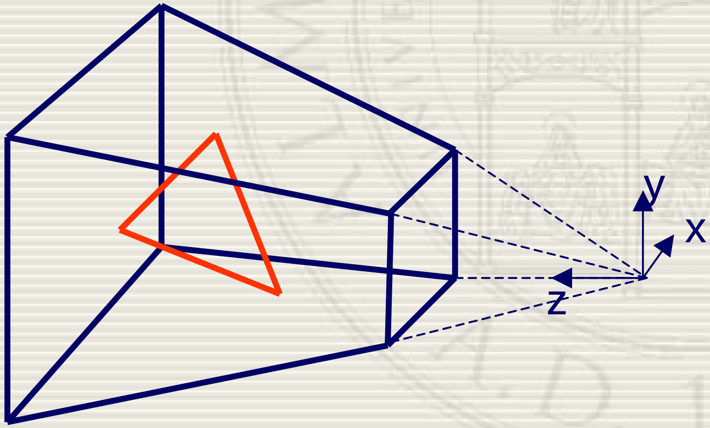
L'obiettivo è quello di definire una trasformazione prospettica dal "sistema 3D dell'osservatore" al "sistema 3D del piano di proiezione" con lo scopo di deformare lo spazio 3D di un tronco di piramide in uno spazio 3D di un cubo, così da poter interpretare la proiezione prospettica come una proiezione parallela e poter applicare un calcolo semplice per la profondità dei pixel.

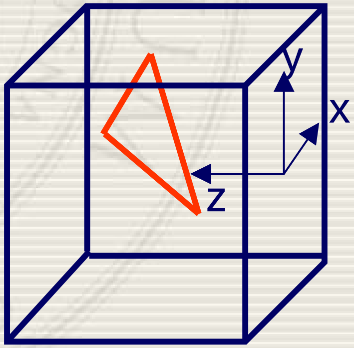




Prospettiva con Profondità

La trasformazione che si cerca deve essere tale da mantenere l'ordine di profondità dei punti trasformati nella stessa relazione dei punti originali ed ancora deve essere tale da trasformare rette in rette e piani in piani in quanto una geometria poligonale piana sottoposta a questa trasformazione dovrà rimanere poligonale piana.





Prospettiva con Profondità

Teorema. La proiezione

$$\begin{cases} xs = xe/ze \\ ys = ye/ze \\ zs = \alpha + \beta/ze \end{cases} \qquad (1)$$

comporta una trasformazione dallo "spazio dell'osservatore" (xe,ye,ze,Oe) allo "spazio del piano di proiezione" (xw,yw, zw,Ow) con la proprietà di trasformare rette in rette e piani in piani, per $\alpha, \beta \neq 0$.

Prospettiva con Profondità

Vediamo per rette: se un segmento viene trasformato in un segmento dovrà esistere una relazione tra i parametri delle due forme parametriche.

Sia $p(t) = (1\text{-}t)\, p1 + t\, p2 \quad t \in [0, 1]$

un segmento nello spazio dell'osservatore con $p_i = [x_i, y_i, z_i]$ $i=1,2$.

Siano $ps_i = [xs_i, ys_i, zs_i]$ $i=1,2$ i punti ottenuti applicando la trasformazione, cioè $ps_i = [xe_i/ze_i, ye_i/ze_i, \alpha+\beta/ze_i]$ ed il segmento relativo sia $ps(\tau) = (1\text{-}\tau)\, ps1 + \tau\, ps2 \quad \tau \in [0, 1]$.

Che relazione c'è tra t e τ? La relazione si ricaverà imponendo che $p(t)$ venga trasformato in $ps(\tau)$;

guardiamo l'ascissa del punto trasformato e a cosa corrisponde:

$$\frac{(1-t)x_1 + tx_2}{(1-t)z_1 + tz_2} = (1-\tau)\frac{x_1}{z_1} + \tau\frac{x_2}{z_2}$$

Prospettiva con Profondità

i passaggi:

$$\frac{(1-t)x_1+tx_2}{(1-t)z_1+tz_2}=(1-\tau)\frac{x_1}{z_1}+\tau\frac{x_2}{z_2}$$

$$\frac{(1-t)x_1+tx_2}{(1-t)z_1+tz_2}=\frac{x_1}{z_1}+\tau\left(\frac{x_2}{z_2}-\frac{x_1}{z_1}\right)$$

ricaviamo τ: $$\tau=\left(\frac{(1-t)x_1+tx_2}{(1-t)z_1+tz_2}-\frac{x_1}{z_1}\right)\frac{1}{\left(\frac{x_2}{z_2}-\frac{x_1}{z_1}\right)}$$

e facendo un po' di conti:

$$\boxed{\tau=\frac{tz_2}{(1-t)z_1+tz_2}} \qquad (2)$$

Prospettiva con Profondità

Dalla relazione (2), si può ricavare banalmente la (3) e ricavando *t*, le relazioni inverse (4) e (5):

(2) $$\boxed{\tau = \frac{t \cdot z_2}{(1-t)\cdot z_1 + t \cdot z_2}}$$

$$(1-\tau) = \frac{(1-t)\cdot z_1}{(1-t)\cdot z_1 + t \cdot z_2}$$ (3)

(4) $$t = \frac{\tau \cdot z_1}{\tau \cdot z_1 + (1-\tau)\cdot z_2}$$

$$(1-t) = \frac{(1-\tau)\cdot z_2}{\tau \cdot z_1 + (1-\tau)\cdot z_2}$$ (5)

Prospettiva con Profondità

Verifichiamo che la proiezione (1) trasforma rette in rette. Si considera la proiezione di un punto *p(t)* della retta per *p1 p2* e si verifica che stia sulla retta per *ps1 ps2*.

$$ps = \left[\frac{(1-t)\cdot x_1 + t x_2}{(1-t)\cdot z_1 + t\cdot z_2}, \frac{(1-t)\cdot y_1 + t y_2}{(1-t)\cdot z_1 + t\cdot z_2}, \alpha + \frac{\beta}{(1-t)\cdot z_1 + t\cdot z_2} \right]$$

Consideriamo la prima coordinata di *ps* e moltiplichiamo e dividiamo per z_1 e z_2:

$$\frac{(1-t)\cdot x_1}{(1-t)\cdot z_1 + t\cdot z_2}\frac{z_1}{z_1} + \frac{t x_2}{(1-t)\cdot z_1 + t\cdot z_2}\frac{z_2}{z_2}$$

(3) $(1-\tau) = \frac{(1-t)\cdot z_1}{(1-t)\cdot z_1 + t\cdot z_2}$ $\tau = \frac{t\cdot z_2}{(1-t)\cdot z_1 + t\cdot z_2}$ (2)

Prospettiva con Profondità

Utilizzando le relazioni (3) e (2) si ha:

$$(1-\tau)\frac{x_1}{z_1}+\tau\frac{x_2}{z_2}$$

Consideriamo ora la terza coordinata di *ps*; dalle (2) e (3), dividendo per z_2 la prima e z_1 la seconda e sommando si ottiene:

$$\frac{\tau}{z_2}+\frac{(1-\tau)}{z_1}=\frac{1}{(1-t)\cdot z_1+t\cdot z_2}$$

sostituendo nella terza coordinata di *ps*

$$\alpha+\frac{\beta}{(1-t)\cdot z_1+t\cdot z_2}=\alpha(1-\tau)+\alpha\tau+\beta\left(\frac{1-\tau}{z_1}+\frac{\tau}{z_2}\right)=$$

Prospettiva con Profondità

$$=(1-\tau)\left(\alpha+\frac{\beta}{z_1}\right)+\tau\left(\alpha+\frac{\beta}{z_2}\right)$$

E quindi le coordinate di *ps* si possono riscrivere:

$$ps=\left[(1-\tau)\frac{x_1}{z_1}+\tau\frac{x_2}{z_2},(1-\tau)\frac{y_1}{z_1}+\tau\frac{y_2}{z_2},(1-\tau)\left(\alpha+\frac{\beta}{z_1}\right)+\tau\left(\alpha+\frac{\beta}{z_2}\right)\right]$$

che verifica si tratta di un punto sul segmento *ps1 ps2* relativo al parametro τ corrispondente di t e quindi che rette vengono trasformate in rette.

Prospettiva con Profondità

Dalle relazioni (2) e (3):

$$\tau = \frac{t \cdot z_2}{(1-t)\cdot z_1 + t \cdot z_2} \quad (2) \qquad (1-\tau) = \frac{(1-t)\cdot z_1}{(1-t)\cdot z_1 + t\cdot z_2} \quad (3)$$

combinare con τ *e* $(1-\tau)$ le coordinate proiettate permette di avere i valori originali proiettati, in particolare per la componente z:

$$\begin{aligned} zs &= (1-\tau)(\alpha + \beta / z_1) + \tau(\alpha + \beta / z_2) \\ &= \frac{(1-t)z_1}{(1-t)z_1 + tz_2}(\alpha + \beta / z_1) + \frac{tz_2}{(1-t)z_1 + tz_2}(\alpha + \beta / z_2) \\ &= \alpha + \frac{\beta}{(1-t)z_1 + tz_2} \\ &= \alpha + \beta / z \end{aligned}$$

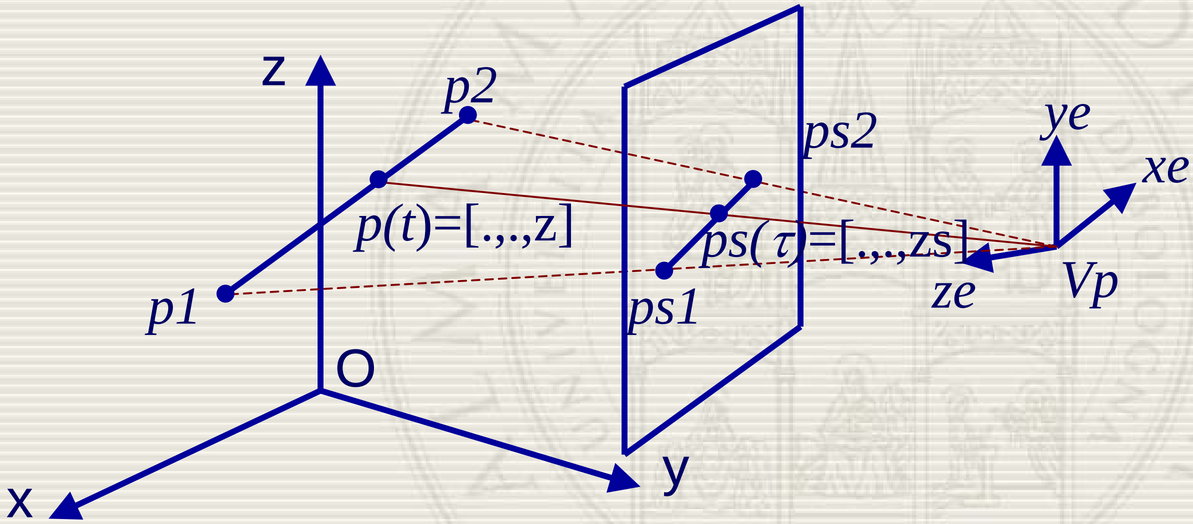
Prospettiva con Profondità

Da quest'ultima, per avere il valore originale z possiamo utilizzare la formula:

$$z = \frac{\beta}{zs - \alpha}$$

dove:

$$zs = (1-\tau)\cdot zs_1 + \tau \cdot zs_2$$



oppure, da τ:

$$t = \frac{\tau \cdot z_1}{\tau \cdot z_1 + (1-\tau)\cdot z_2}$$

Si noti che possiamo usare le coordinate proiettate xs e ys per il disegno e zs per la profondità, ma per il calcolo corretto di colore e texture è essenziale recuperare le coordinate 3D e quindi utilizzare le relazioni viste tra i parametri t e τ o la formula sopra ricavata.

Prospettiva con Profondità

Vediamo per piani: se un triangolo viene trasformato in un triangolo dovrà esistere una relazione tra i parametri delle due forme parametriche.

Sia $p(u,v,s) = u\,p1 + v\,p2 + s\,p3 \quad u,v,s \in [0, 1] \;\; u+v+s=1$

un triangolo nello spazio dell'osservatore con $p_i = [x_i, y_i, z_i]$ $i=1,2,3$.

Siano $ps_i = [xs_i, ys_i, zs_i]$ $i=1,2,3$ *i punti* ottenuti applicando la trasformazione, cioè $ps_i = [xe_i/ze_i, ye_i/ze_i, \alpha+\beta/ze_i]$ ed il triangolo relativo sia $ps(u',v',s') = u'\,ps1 + v'\,ps2 + s'\,ps3 \;\; u',v',s' \in [0, 1]$, $u'+v'+s'=1$.

Che relazione c'è tra u, v, s e u', v', s' ? La relazione si ricaverà imponendo che $p(u,v,s)$ venga trasformato in $ps(u',v',s')$; guardiamo l'ascissa del punto trasformato e a cosa corrisponde:

$$\frac{ux_1 + vx_2 + sx_3}{uz_1 + vz_2 + sz_3} = u'\frac{x_1}{z_1} + v'\frac{x_2}{z_2} + s'\frac{x_3}{z_3}$$

Prospettiva con Profondità

Si ricavano le relazioni dirette:

(6) $$u' = \frac{u \cdot z_1}{u \cdot z_1 + v \cdot z_2 + s \cdot z_3}$$ $$v' = \frac{v \cdot z_2}{u \cdot z_1 + v \cdot z_2 + s \cdot z_3}$$ (7)

$$s' = \frac{s \cdot z_3}{u \cdot z_1 + v \cdot z_2 + s \cdot z_3}$$ (8)

Dalle (6), (7) e (8) si ricava:

$$\frac{u'}{z_1} + \frac{v'}{z_2} + \frac{s'}{z_3} = \frac{1}{u \cdot z_1 + v \cdot z_2 + s \cdot z_3}$$ (9)

e le relazioni inverse delle (6), (7) e (8) ?

Prospettiva con Profondità

Verifichiamo che la proiezione (1) trasforma piani in piani. Si considera la proiezione di un punto *p(u,v,s)* del piano per *p1p2p3* e si verifica che stia sul piano per *ps1ps2ps3*.

$$ps=\left[\frac{u\cdot x_1+v\cdot x_2+s\cdot x_3}{u\cdot z_1+v\cdot z_2+s\cdot z_3},\frac{u\cdot y_1+v\cdot y_2+s\cdot y_3}{u\cdot z_1+v\cdot z_2+s\cdot z_3},\alpha+\frac{\beta}{u\cdot z_1+v\cdot z_2+s\cdot z_3}\right]$$

dalle (6), (7) e (8) e dalla (9), si ha:

$$ps=\left[u'\frac{x_1}{z_1}+v'\frac{x_2}{z_2}+s'\frac{x_3}{z_3},u'\frac{y_1}{z_1}+v'\frac{y_2}{z_2}+s'\frac{y_3}{z_3},u'\left(\alpha+\frac{\beta}{z_1}\right)+v'\left(\alpha+\frac{\beta}{z_2}\right)+s'\left(\alpha+\frac{\beta}{z_3}\right)\right]$$

Prospettiva con Profondità

Dalle relazioni (6), (7) e (8):

$$u' = \frac{u \cdot z_1}{u \cdot z_1 + v \cdot z_2 + s \cdot z_3} \qquad v' = \frac{v \cdot z_2}{u \cdot z_1 + v \cdot z_2 + s \cdot z_3} \qquad s' = \frac{s \cdot z_3}{u \cdot z_1 + v \cdot z_2 + s \cdot z_3}$$

combinare con u', v', s' le coordinate proiettate, permette di avere i valori originali proiettati, in particolare vediamo la componente z:

$$zs = u'(\alpha + \beta / z_1) + v'(\alpha + \beta / z_2) + s'(\alpha + \beta / z_3)$$

$$= \frac{uz_1}{uz_1 + vz_2 + sz_3}(\alpha + \beta / z_1) + \frac{vz_2}{uz_1 + vz_2 + sz_3}(\alpha + \beta / z_2) + \frac{sz_3}{uz_1 + vz_2 + sz_3}(\alpha + \beta / z_3)$$

$$= \alpha + \frac{\beta}{uz_1 + vz_2 + sz_3}$$

$$= \alpha + \beta / z$$

Prospettiva con Profondità

Da quest'ultima, per avere il valore originale z possiamo utilizzare la formula:

$$z = \frac{\beta}{zs - \alpha} \qquad (10)$$

Si noti che possiamo usare le coordinate proiettate xs e ys per il disegno e zs per la profondità, ma per il calcolo corretto di colore e texture è essenziale recuperare le coordinate 3D e quindi utilizzare le relazioni viste tra i parametri o la formula sopra ricavata.

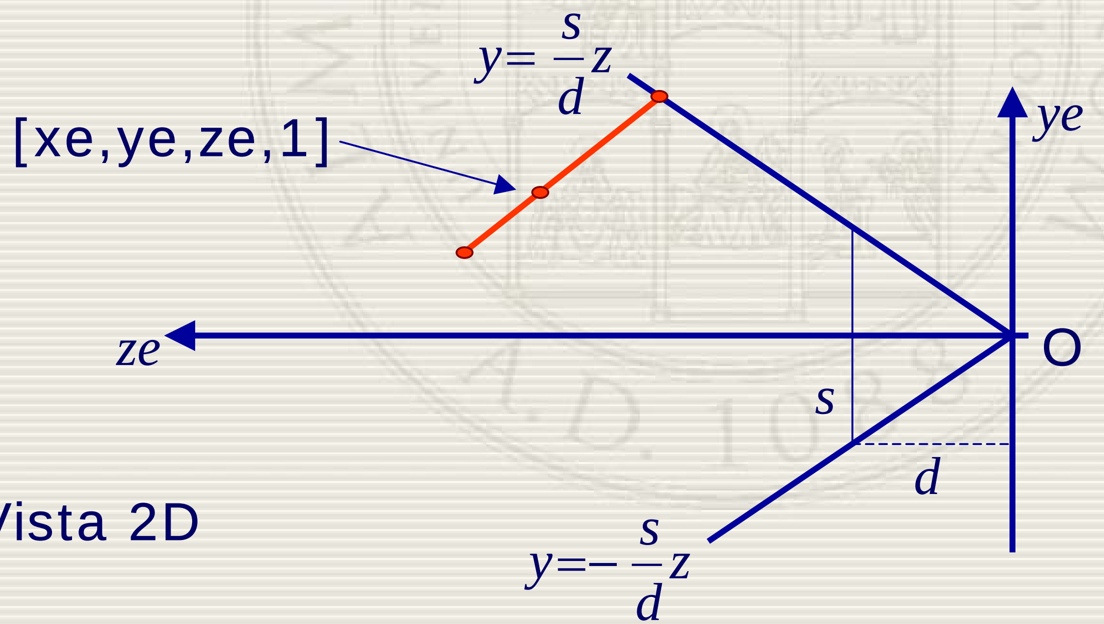
Prospettiva con Profondità

Cerchiamo di capire di più sulla trasformazione (1):

Prima di applicarla effettuiamo la seguente trasformazione di scala:

[xe',ye',ze',1] = [xe,ye,ze,1] S con $S = \begin{pmatrix} d/s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d/s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ed $s = d \tan(\alpha)$



Vista 2D

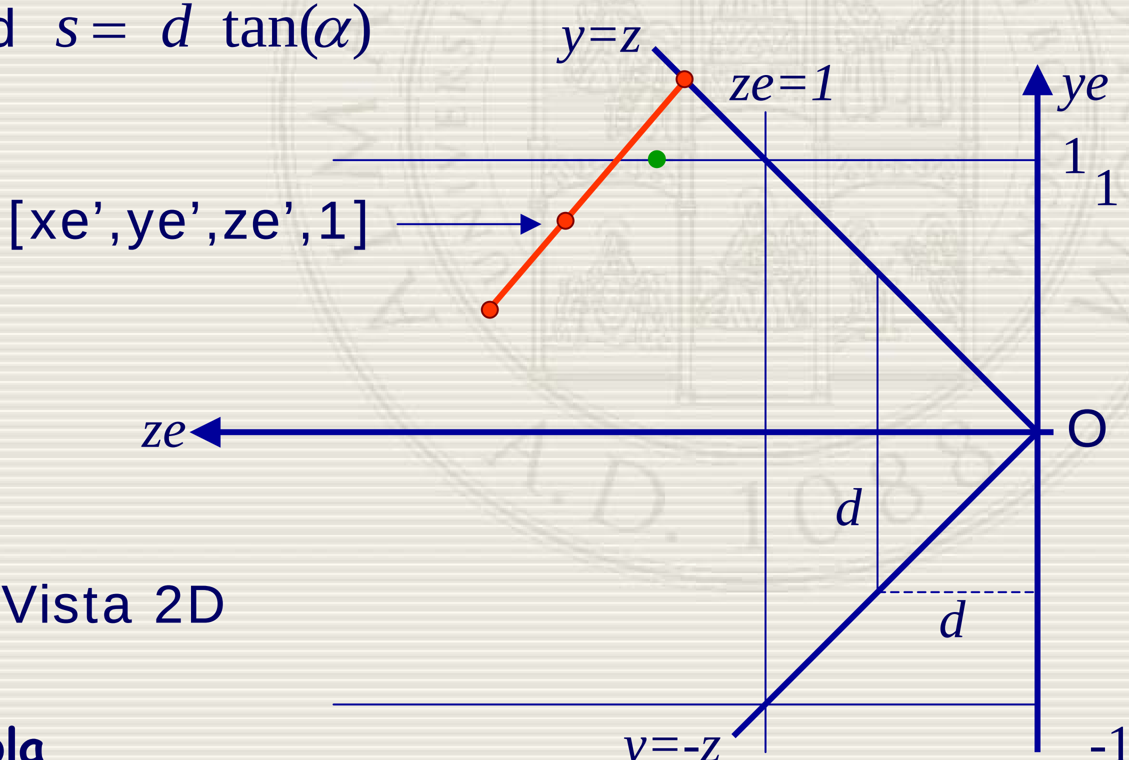
Prospettiva con Profondità

Cerchiamo di capire di più sulla trasformazione (1):

Prima di applicarla effettuiamo la seguente trasformazione di scala:

$$[xe',ye',ze',1] = [xe,ye,ze,1]\ S \quad \text{con} \quad S = \begin{pmatrix} d/s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d/s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ed $s = d\ \tan(\alpha)$



Vista 2D

Applichiamo la (1): i punti della forma

$$\left[\bullet, \bar{z}, \bar{z}\right]$$

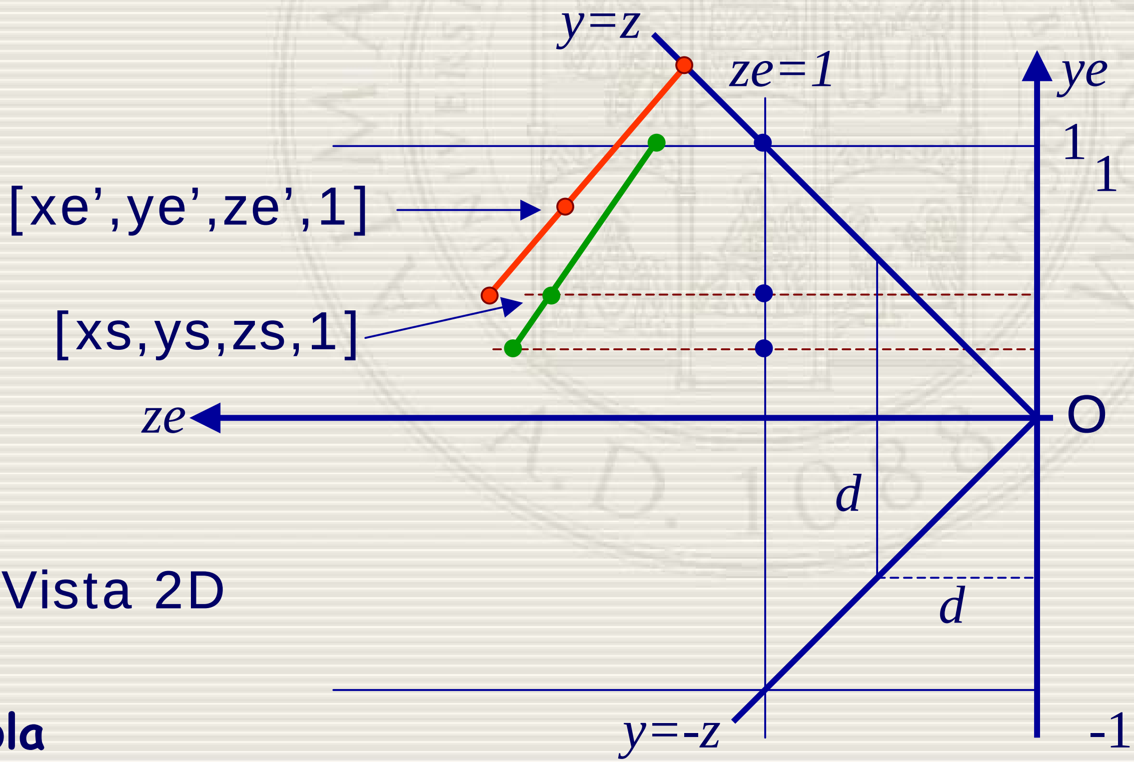
vengono traformati in

$$\left[\bullet, 1, \alpha + \beta / \bar{z}\right]$$

Prospettiva con Profondità

La retta $y=z$ viene trasformata nella retta $y=1$; tutte le rette uscenti dall'origine $y=mz$ saranno trasformate nelle rette $y=m$. In pratica ruotano sul punto di interzezione di $y=mz$ con $ze=1$.

Ancora, punti allineati, una volta trasformati, saranno allineati.



Vista 2D

Prospettiva con Profondità

E' possibile scegliere α e β in modo da ottenere un intervallo conveniente per i valori zs trasformati.
Scegliendo $\beta<0$ si conserva la nozione intuitiva di profondità, cioè se un punto ha un valore ze maggiore di un altro, il suo trasformato zs resterà maggiore.

Siano dati due punti tali che $ze1<ze2$, e verifichiamo che $zs1<zs2$ con $zs_i=a+b/ze_i$ e $\beta<0$.

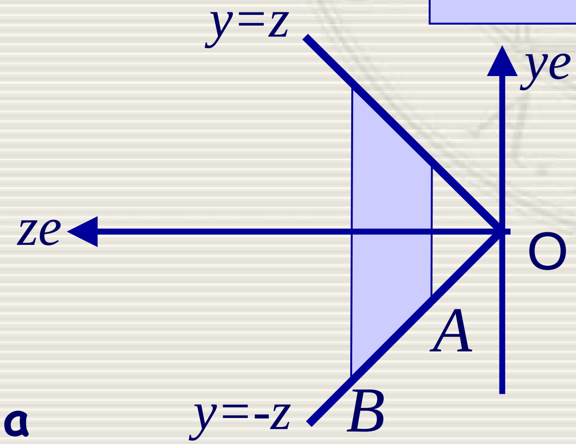
Sarà: $\dfrac{1}{ze1} > \dfrac{1}{ze2}$; e se $\beta < 0$ $\dfrac{\beta}{ze1} < \dfrac{\beta}{ze2}$ $c.v.$

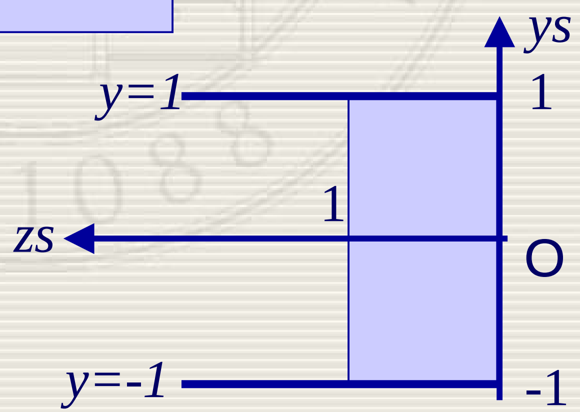
Prospettiva con Profondità

Nello scegliere i valori α e β si può considerare l'intervallo in cui è compreso ze, sia per esempio $[A,B]$ con $A,B>0$, e si voglia ottenere $zs \in [0,1]$; allora sarà:

$$\begin{cases} 0 = \alpha + \beta / A \\ 1 = \alpha + \beta / B \end{cases} \qquad \begin{cases} A\alpha + \beta = 0 \\ B\alpha + \beta = B \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta = -A\alpha \\ B\alpha - A\alpha = B \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = -A\alpha \\ \alpha = \dfrac{B}{B-A} \end{cases} \qquad \boxed{\begin{cases} \beta = -\dfrac{A \cdot B}{B-A} \\ \alpha = \dfrac{B}{B-A} \end{cases}} \qquad (11)$$



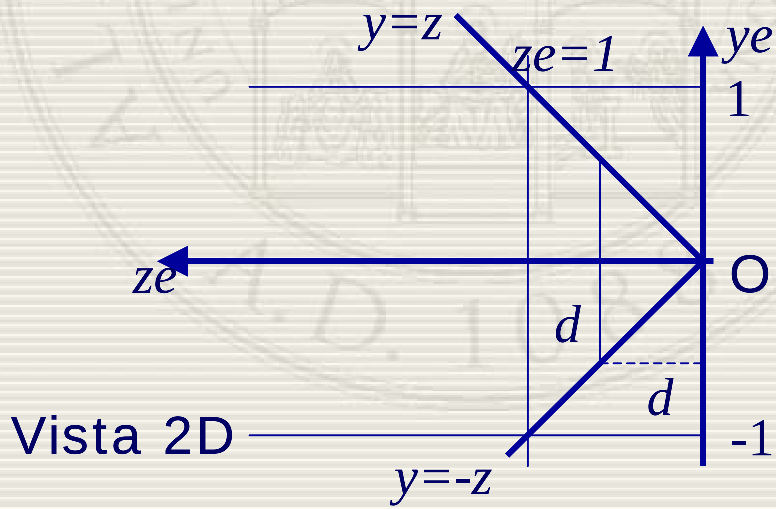


Pipeline di Vista

1.Trasformazione del sistema di riferimento da sistema oggetto a sistema osservatore

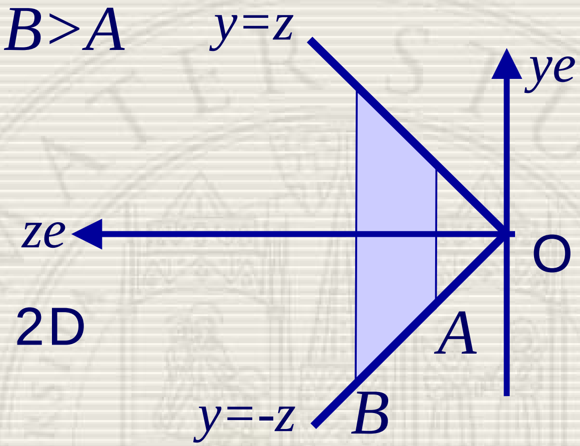
2.Definito il piano di proiezione a distanza d dall'osservatore e l'apertura angolare α, così ché $s=d\ tan(\alpha)$ si applichi la scala S che porta la piramide di vista ad avere le facce laterali ad essere i piani bisettori nel sistema dell'osservatore

$$S=\begin{pmatrix} d/s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d/s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



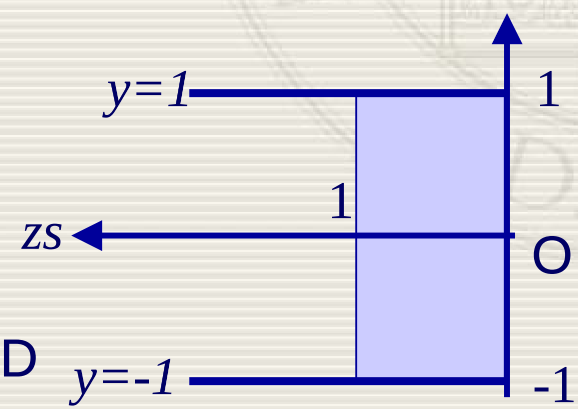
Pipeline di Vista

3.Clipping 3D solo rispetto al front e back plane, ripettivamente per $z=A$ e $z=B$ con $B>A$



Vista 2D

4.Trasformazione dallo spazio dell'osservatore allo spazio del piano di proiezione che porta tutte le z in [0,1] e i piani del tronco di piramide ad essere paralleli all'asse z



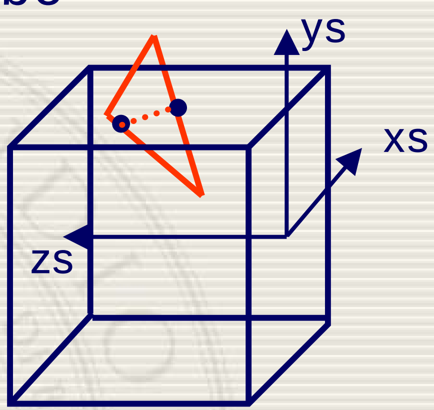
$$\begin{cases} xs = xe/ze \\ ys = ye/ze \\ zs = \alpha + \beta/ze \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta = -\dfrac{A \cdot B}{B - A} \\ \alpha = \dfrac{B}{B - A} \end{cases}$$

Vista 2D

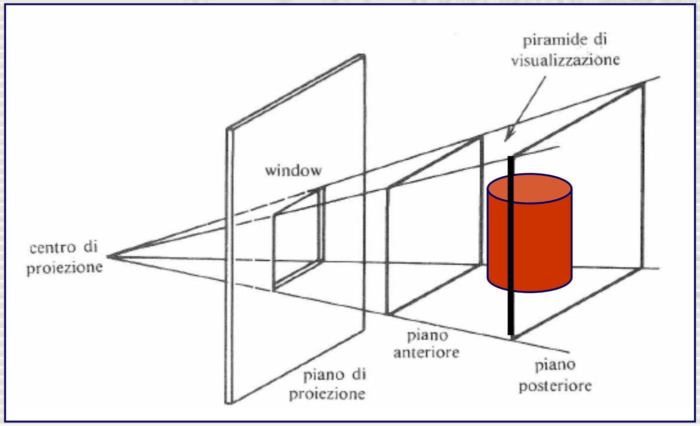
Pipeline di Vista

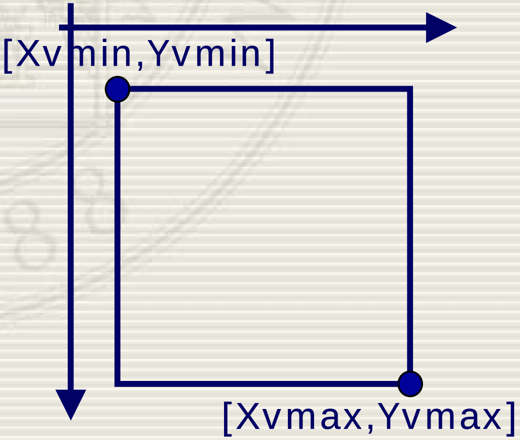
5.Clipping 3D sulle pareti laterali del cubo

$$-1 <= xs <= 1$$
$$-1 <= ys <= 1$$



6.trasformazione window-viewport, $[xs,ys] \longrightarrow [xv,yv]$;
la window ora è [-1,1]x[-1,1]





Pipeline di Vista

Trasformazione Sistema di Riferimento
(x,y,z,O) → (xe,ye,ze,Vp)

↓

Scala della Piramide di Vista

↓

Clipping 3D rispetto al front e back plane

↓

Prospettiva con profondità
(xe,ye,ze,Vp) → (Xw,Yw,Zw,Ow)

↓

Clipping 3D rispetto pareti laterali cubo

↓

Trasformazione Window-Viewport
(Xw,Yw,Ow) → (Xv,Yv,Ov)