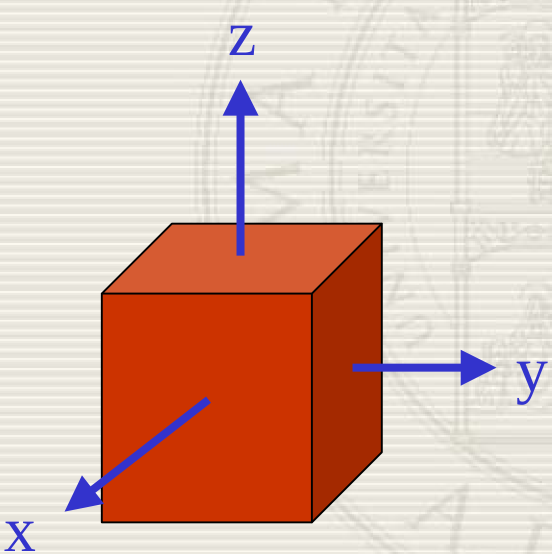
Trasformazione di Vista (Viewing 3D)

Definizione oggetto 3D

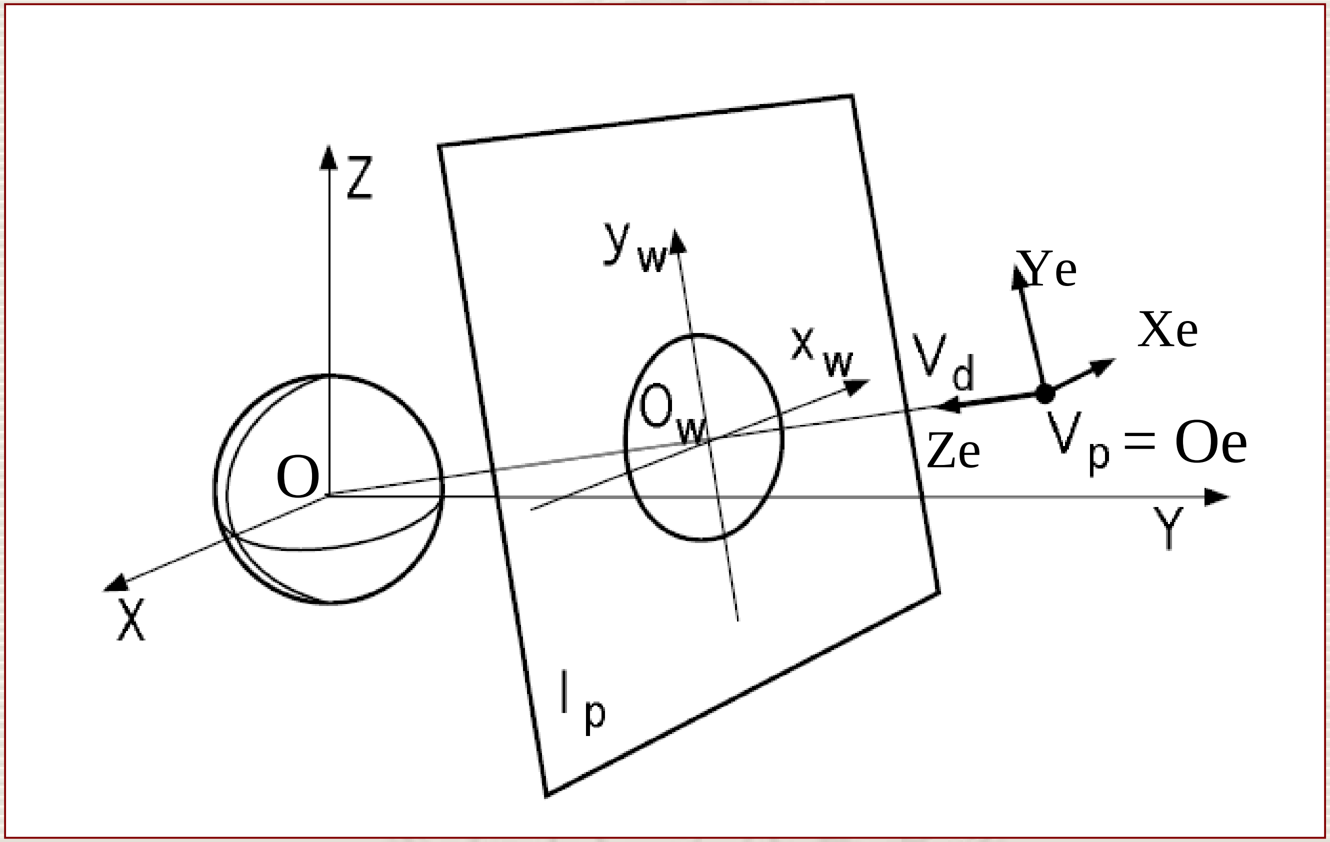
In un sistema di riferimento Cartesiano xyzO destrorso, consideriamo un oggetto mesh dando la lista dei suoi Vertici e Facce piane.

Vogliamo studiare cosa si deve fare per ottenere una sua rappresentazione grafica 2D.




```
Coordinate (X,Y,Z) dei Vertices
1>  1.000000 -1.000000  1.000000
2> -1.000000 -1.000000  1.000000
3> -1.000000  1.000000  1.000000
4>  1.000000  1.000000  1.000000
5>  1.000000 -1.000000 -1.000000
6> -1.000000 -1.000000 -1.000000
7> -1.000000  1.000000 -1.000000
8>  1.000000  1.000000 -1.000000
Indici dei Vertices di ogni Face
1> 4 3 2 1
2> 8 7 3 4
3> 7 8 5 6
4> 5 1 2 6
5> 8 4 1 5
6> …
```

Sistemi di Riferimento



XYZO : Sistema di Riferimento del Mondo

XeYeZeOe : Sistema di Riferimento dell'Osservatore (View Point Vp)

XwYwOw : Sistema di Riferimento 2D Window

Trasformazione di Vista

Scomponiamola in due passi:

1. Trasformazione Sistema di Riferimento

   da XYZO a XeYeZeOe

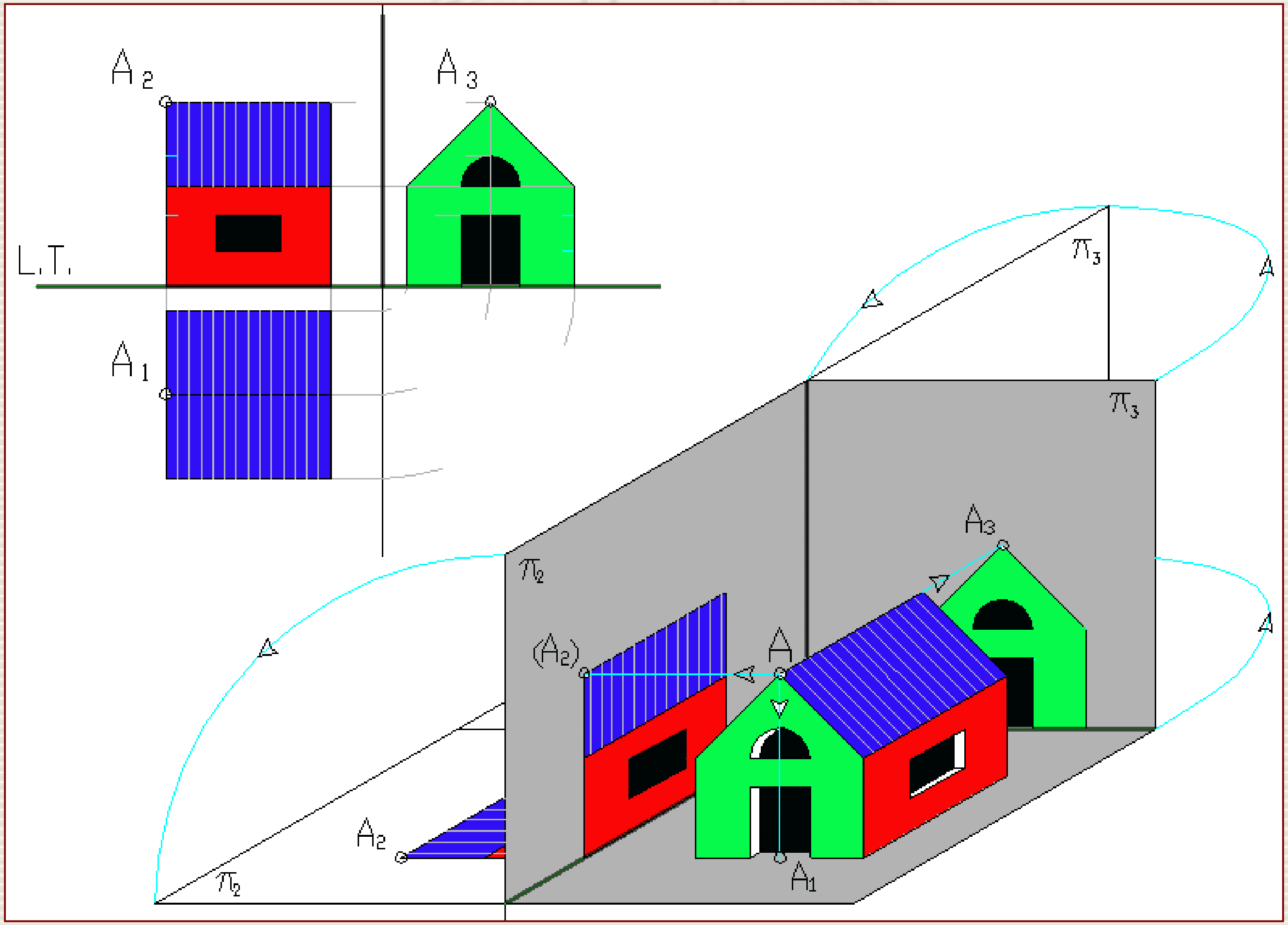
2. Proiezione Geometrica

   da XeYeZeOe a XwYwOw

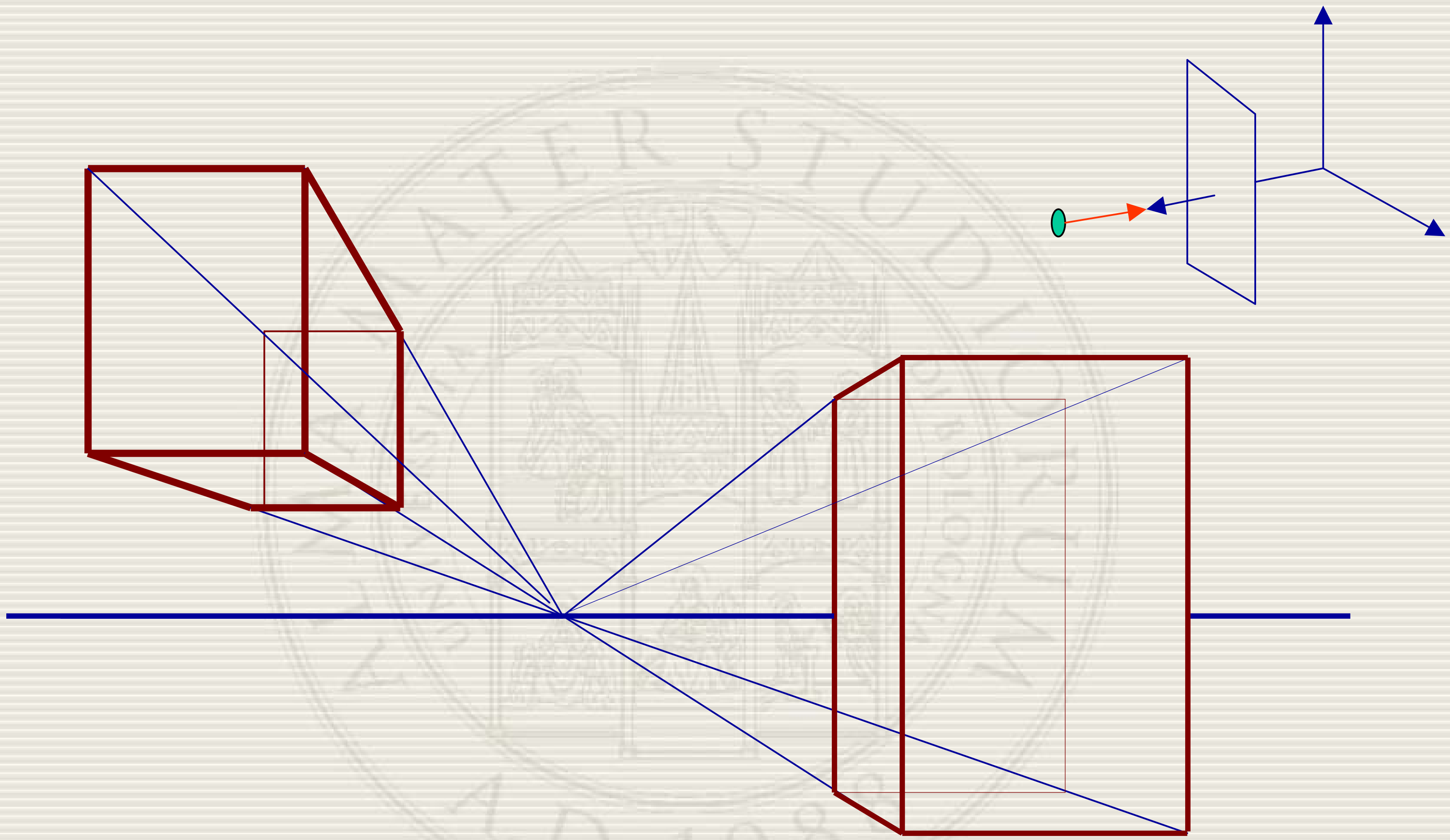
Proiezioni Geometriche

- Proiezioni Geometriche
  - Parallela
    - Ortografica
    - Assonometrica
      - Ortogonale
      - Obliqua
  - Prospettica
    - 1 Punto di Fuga
    - 2 Punti di Fuga
    - 3 Punti di Fuga

Esempio: Proiezione Ortografica

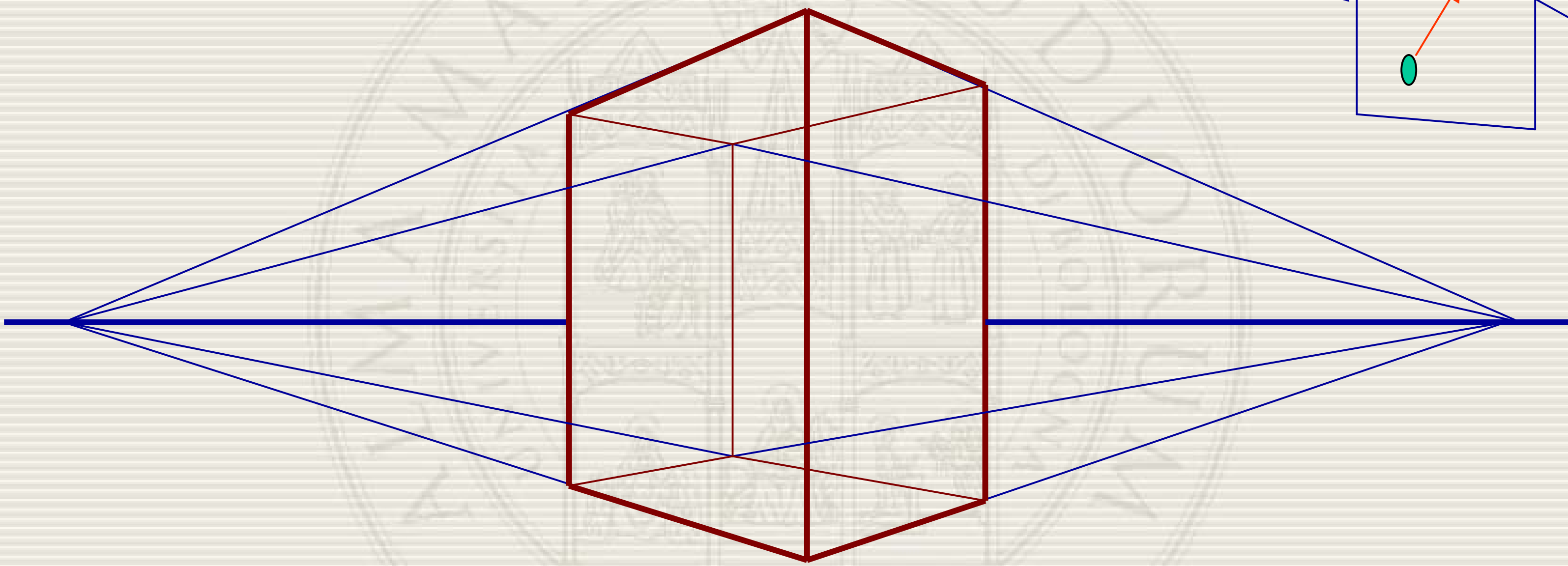


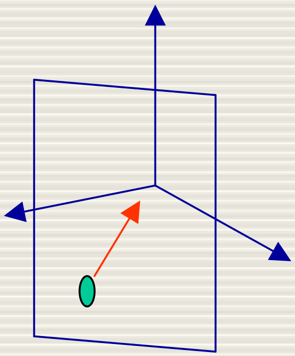
Proiezione a 1 Punto di Fuga



Piano di proiezione ortogonale ad uno degli assi e quindi parallelo agli altri due

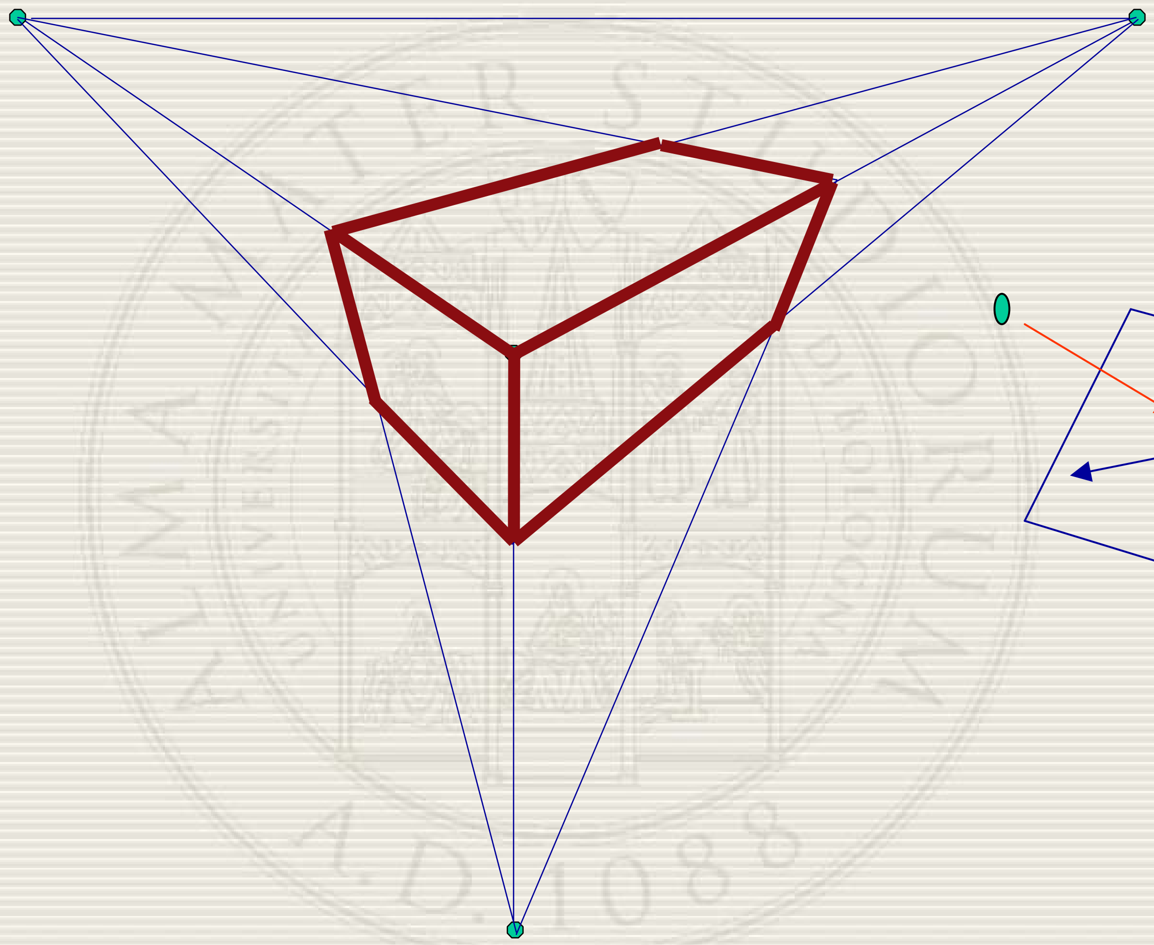
Proiezione a 2 Punti di Fuga

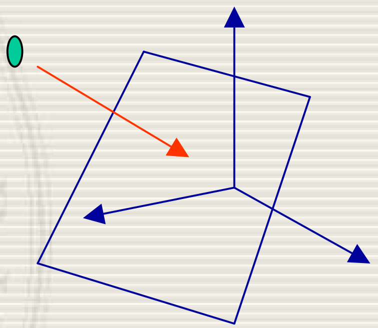




Piano di proiezione parallelo ad uno degli assi coordinati

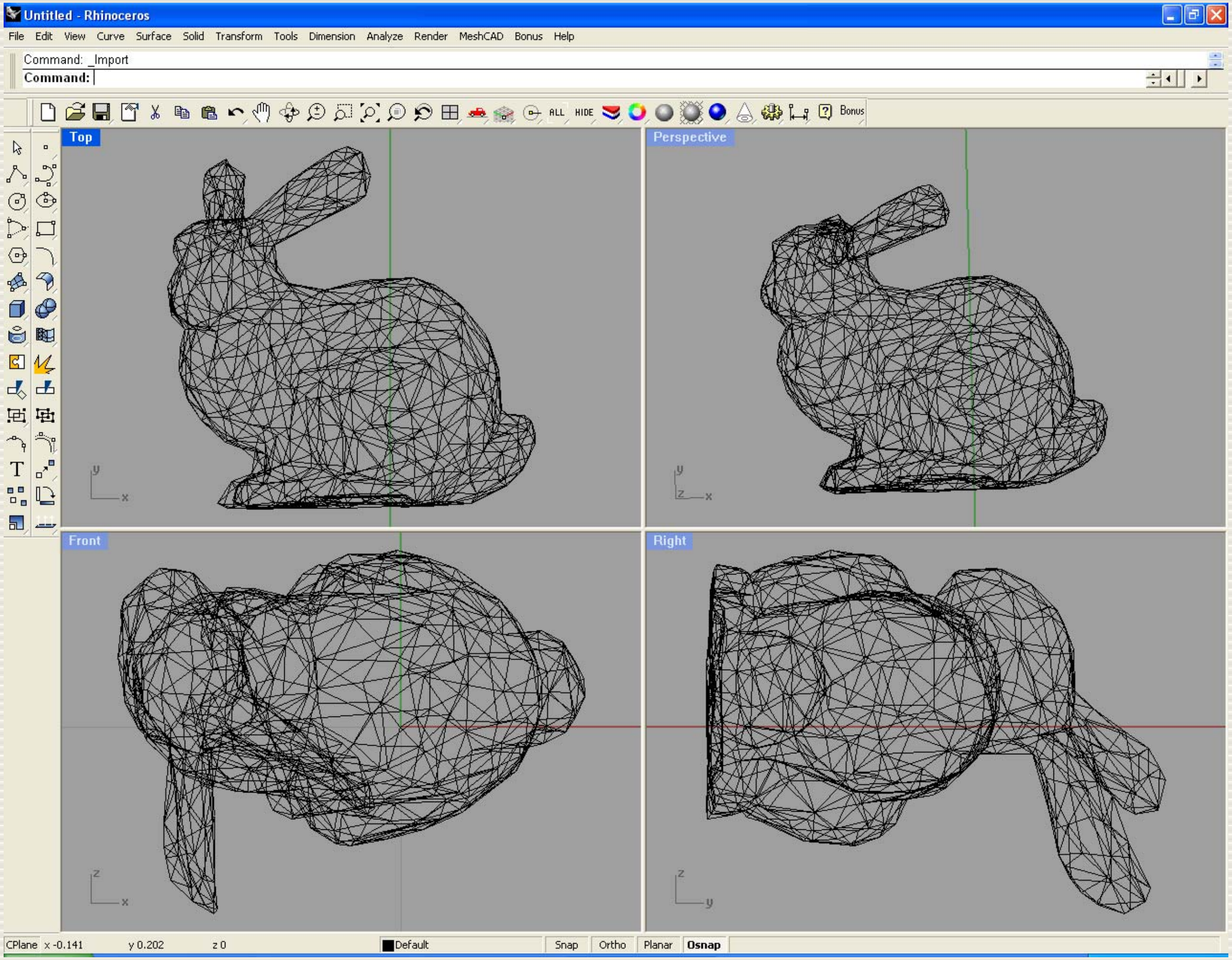
Proiezione a 3 Punti di Fuga





Piano di proiezione in posizione generica

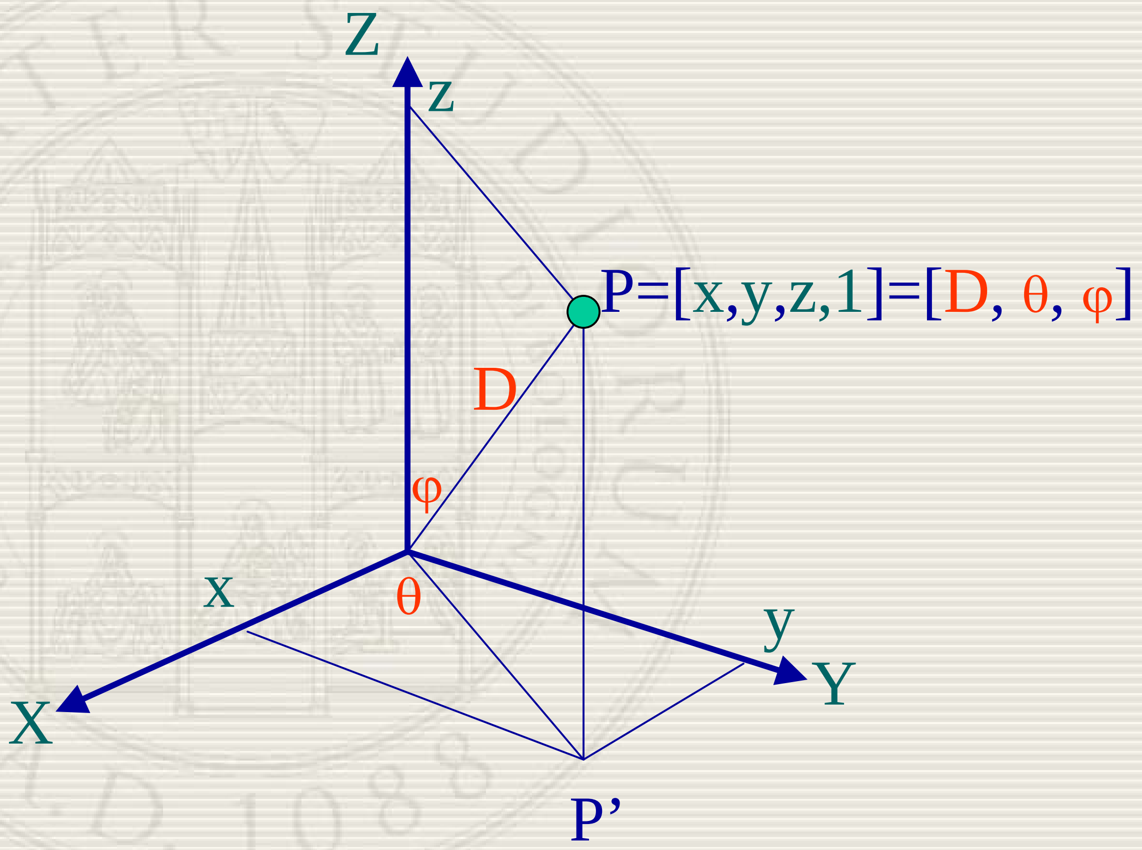
Esempio


Untitled - Rhinoceros
File Edit View Curve Surface Solid Transform Tools Dimension Analyze Render MeshCAD Bonus Help
Command: _Import
Command:
Top
Perspective
Front
Right
CPlane x -0.141 y 0.202 z 0
Default
Snap Ortho Planar Osnap

Coordinate Cartesiane e Sferiche

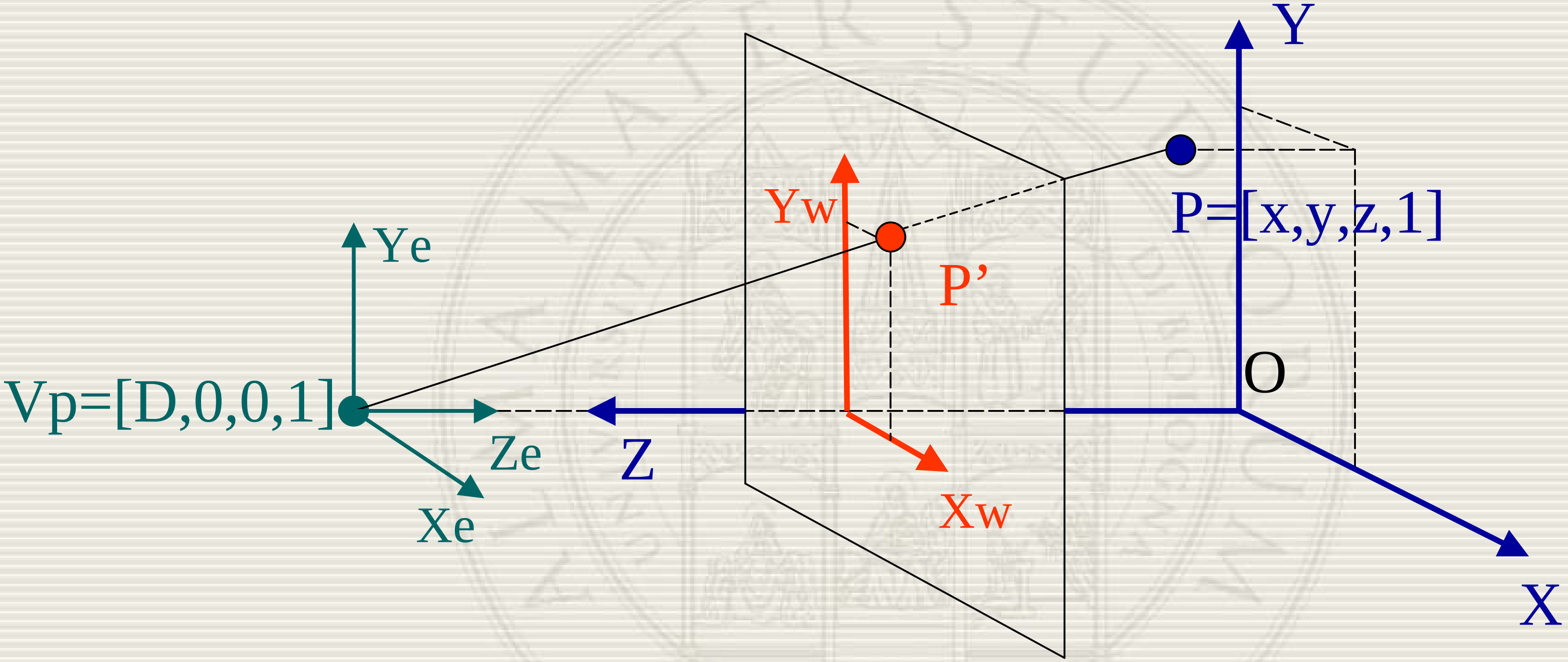
$$\begin{cases} x = D \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ y = D \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ z = D \cos(\varphi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} D = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan (y / x) \\ \varphi = \arccos (z / D) \end{cases}$$



Proiezione centrale (1 punto di fuga)

Trasformazione Sistema di Riferimento

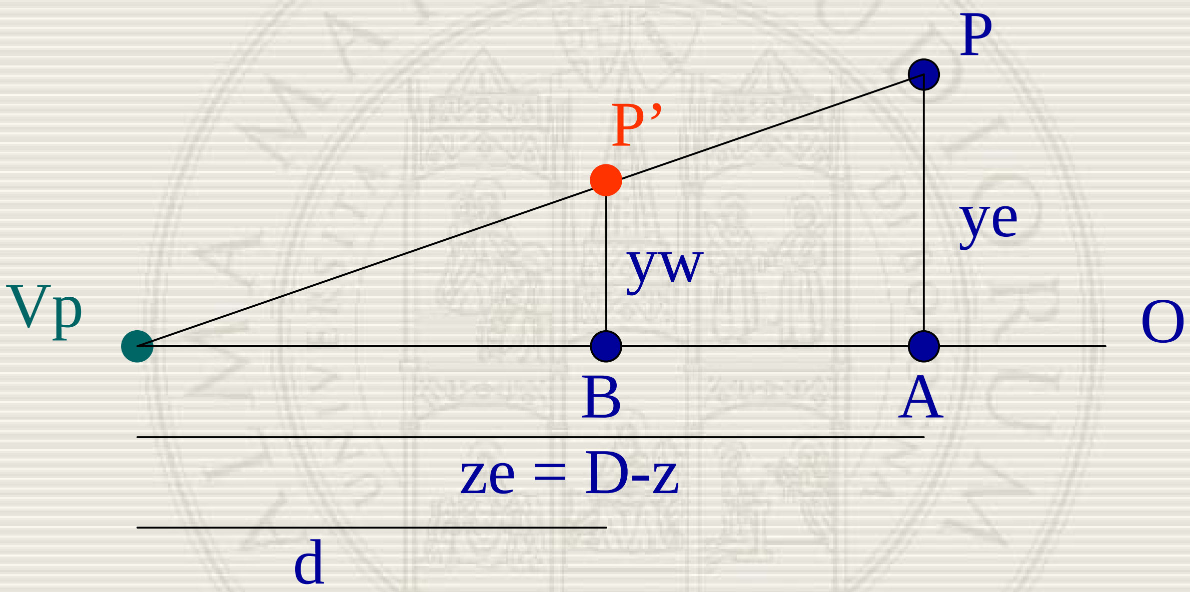


P = [xe,ye,ze,1] = [x,y,D-z,1]

Proiezione centrale (1 punto di fuga)

Proiezione Geometrica

$\widehat{VpAP} \cong \widehat{VpBP'}$

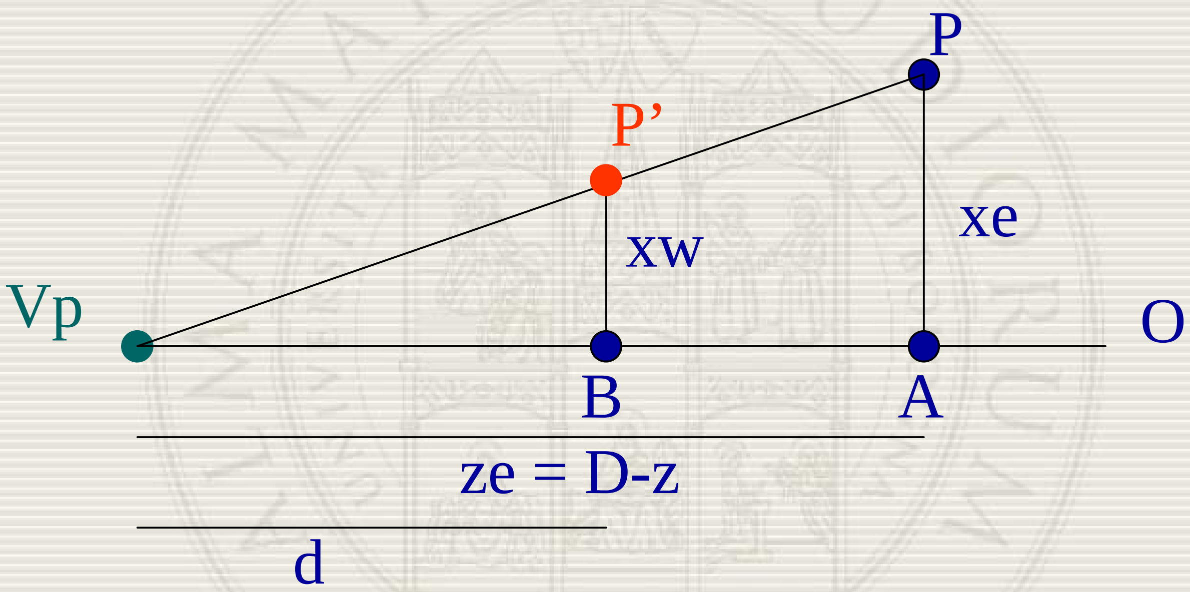


$$yw = \frac{d \cdot ye}{ze} = \frac{d \cdot y}{D - z}$$

Proiezione centrale (1 punto di fuga)

Proiezione Geometrica

$\widehat{VpAP} \cong \widehat{VpBP'}$

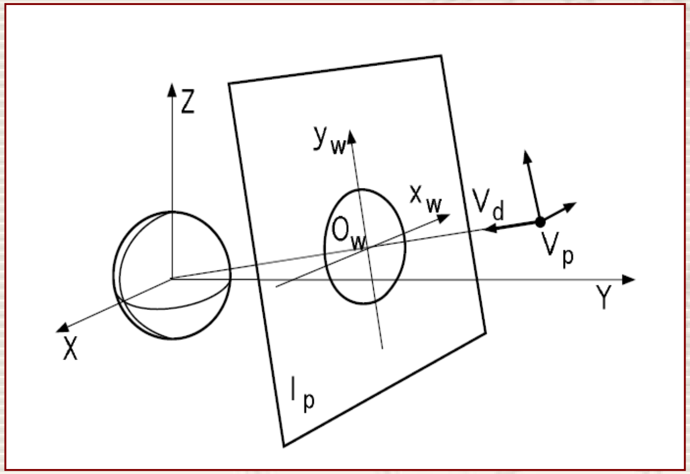


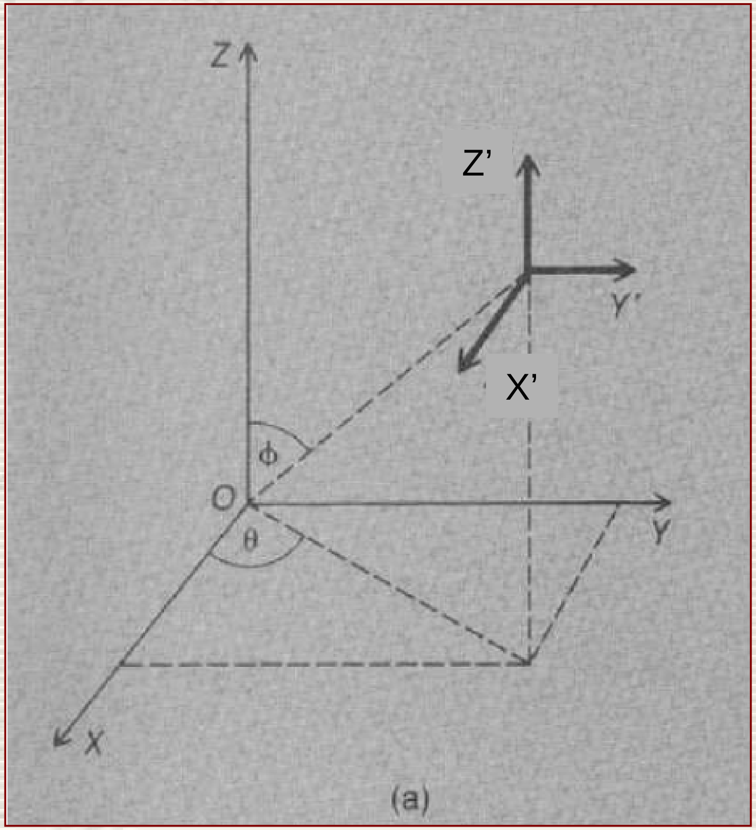
$$xw = \frac{d \cdot xe}{ze} = \frac{d \cdot x}{D - z}$$

Proiezione a 3 punti di fuga

Trasformazione Sistema di Riferimento

$$Vp = [D, \theta, \varphi, 1] = [D \sin\varphi \cos\theta,\ D \sin\varphi \sin\theta,\ D \cos\varphi,\ 1]$$

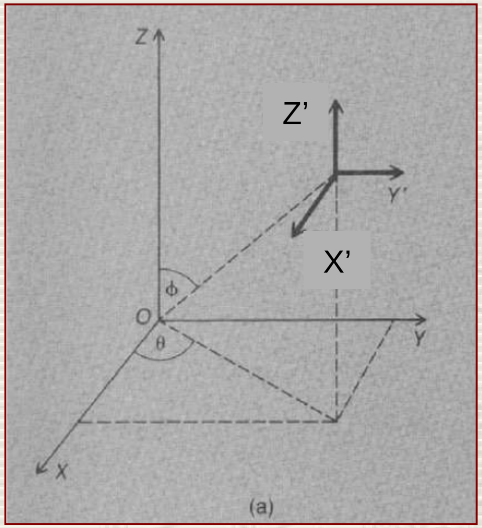


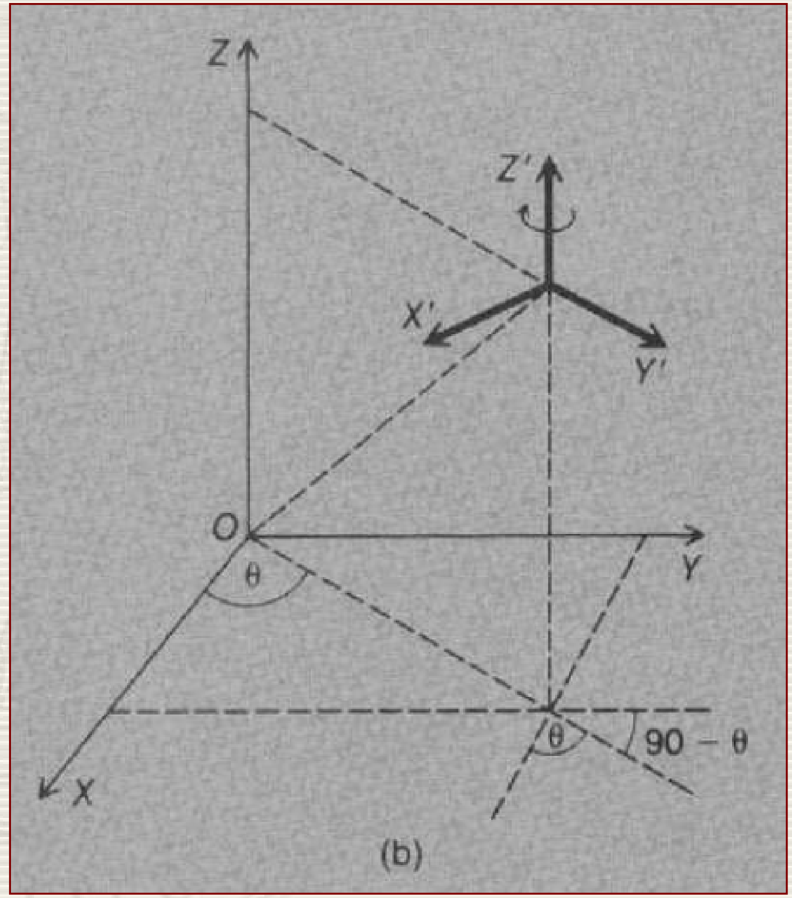


$$T1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ D \sin\varphi \cos\theta & D \sin\varphi \sin\theta & D \cos\varphi & 1 \end{pmatrix}$$

Proiezione a 3 punti di fuga

Trasformazione Sistema di Riferimento





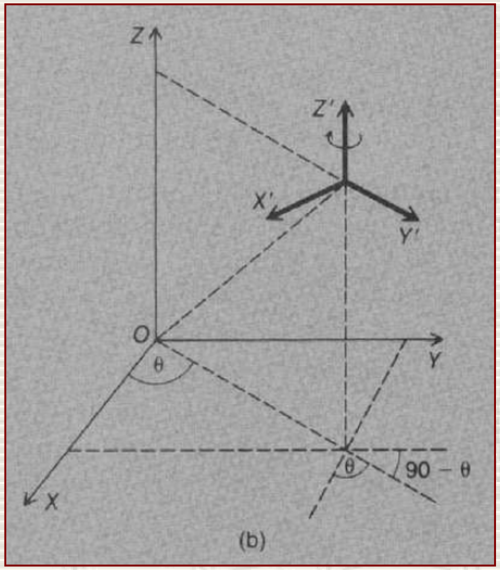
$$T2 = \begin{pmatrix} \sin\theta & -\cos\theta & 0 & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

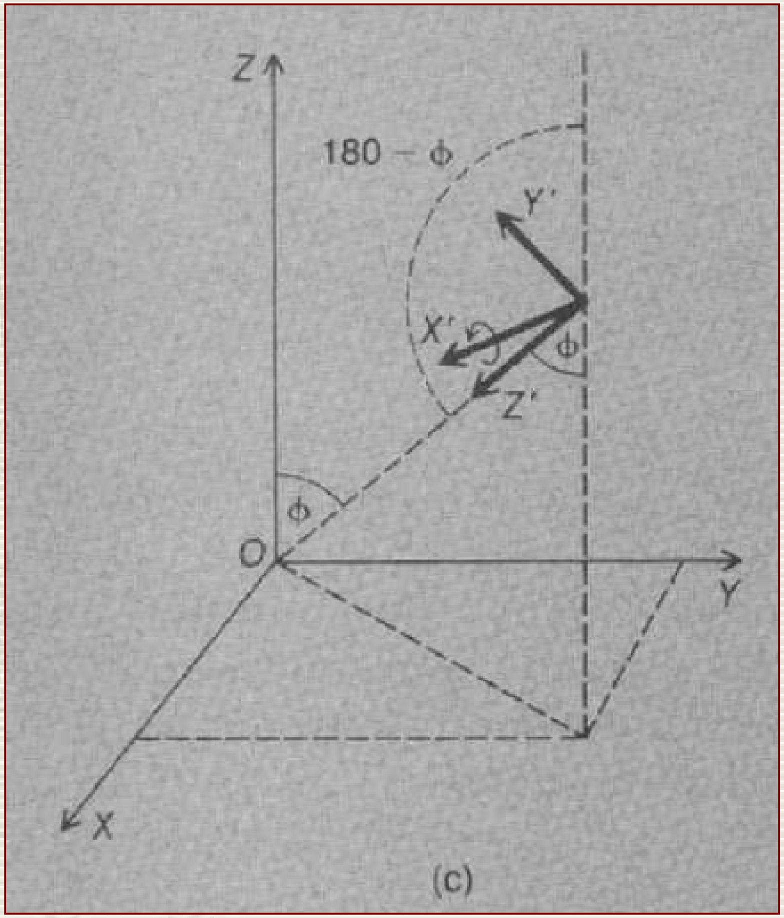
$$\sin -(90-\theta) = -\cos\theta$$

$$\cos -(90-\theta) = \sin\theta$$

Proiezione a 3 punti di fuga

Trasformazione Sistema di Riferimento





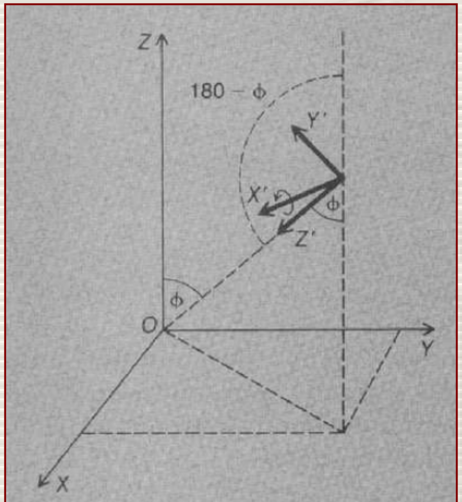
$$T3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & -\sin\varphi & -\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\sin(180 - \varphi) = \sin\varphi$

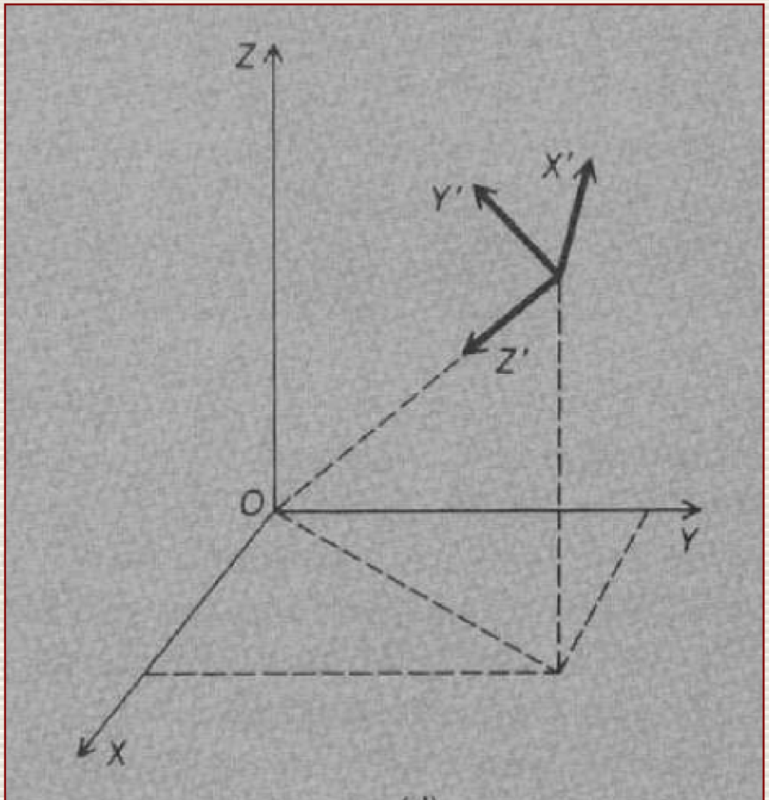
$\cos(180 - \varphi) = -\cos\varphi$

Proiezione a 3 punti di fuga

Trasformazione Sistema di Riferimento



(c)



(d)

$$T4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proiezione a 3 punti di fuga
Trasformazione Sistema di Riferimento

$$[xe, ye, ze, 1] = [x, y, z, 1]\, T$$

$$T = T1^{-1}\, T2^{-1}\, T3^{-1}\, T4^{-1} = \begin{pmatrix} -\sin\theta & -\cos\theta\cos\varphi & -\cos\theta\sin\varphi & 0 \\ \cos\theta & -\sin\theta\cos\varphi & -\sin\theta\sin\varphi & 0 \\ 0 & \sin\varphi & -\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & D & 1 \end{pmatrix}$$

$$xe = -x\sin\theta + y\cos\theta$$

$$ye = -x\cos\theta\cos\varphi - y\sin\theta\cos\varphi + z\sin\varphi$$

$$ze = -x\cos\theta\sin\varphi - y\sin\theta\sin\varphi - z\cos\varphi + D$$

Proiezione a 3 punti di fuga

Proiezione Geometrica

[xw,yw,1] = PG ([xe,ye,ze,1])

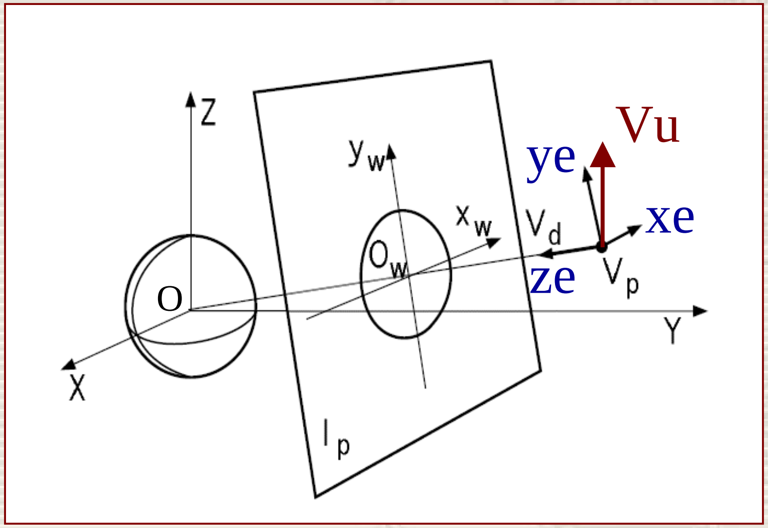
$$xw = \frac{d \cdot xe}{ze}$$

$$yw = \frac{d \cdot ye}{ze}$$

Proiezione a 3 punti di fuga e View-Up vector

Trasformazione Sistema di Riferimento

$$[xe,ye,ze,1] = [x,y,z,1]\ A$$



$$\mathbf{ze} = Vd\ /\ \|Vd\| = -(Vp-O)\ /\ \|Vp-O\|$$

$$\mathbf{xe} = (\mathbf{ze} \times Vu)\ /\ \|\ \mathbf{ze} \times Vu\ \|$$

$$\mathbf{ye} = -(\mathbf{ze} \times \mathbf{xe})\ /\ \|\ \mathbf{ze} \times \mathbf{xe}\ \|$$

$$Vp = [D,\ \theta,\ \varphi,1] = [D \sin\varphi \cos\theta,\ \ D \sin\varphi \sin\theta,\ \ D \cos\varphi\ ,\ \ 1]$$

Proiezione a 3 punti di fuga e View-Up vector

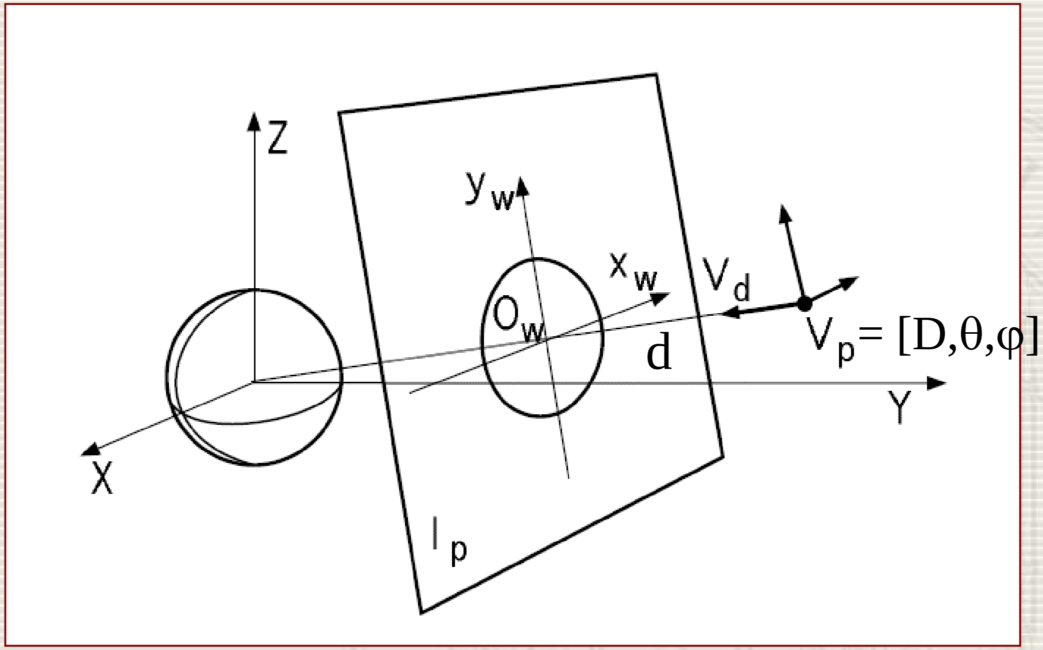
Trasformazione Sistema di Riferimento

$$[xe, ye, ze, 1] = [x, y, z, 1]\, A$$

$$B = \begin{pmatrix} \multicolumn{3}{c}{\boxed{\mathbf{xe}}} & 0 \\ \multicolumn{3}{c}{\boxed{\mathbf{ye}}} & 0 \\ \multicolumn{3}{c}{\boxed{\mathbf{ze}}} & 0 \\ D \sin\varphi \cos\theta & D \sin\varphi \sin\theta & D \cos\varphi & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = B^{-1} = \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{xe}} & \boxed{\mathbf{ye}} & \boxed{\mathbf{ze}} & 0 \\ & & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & D & 1 \end{pmatrix}$$

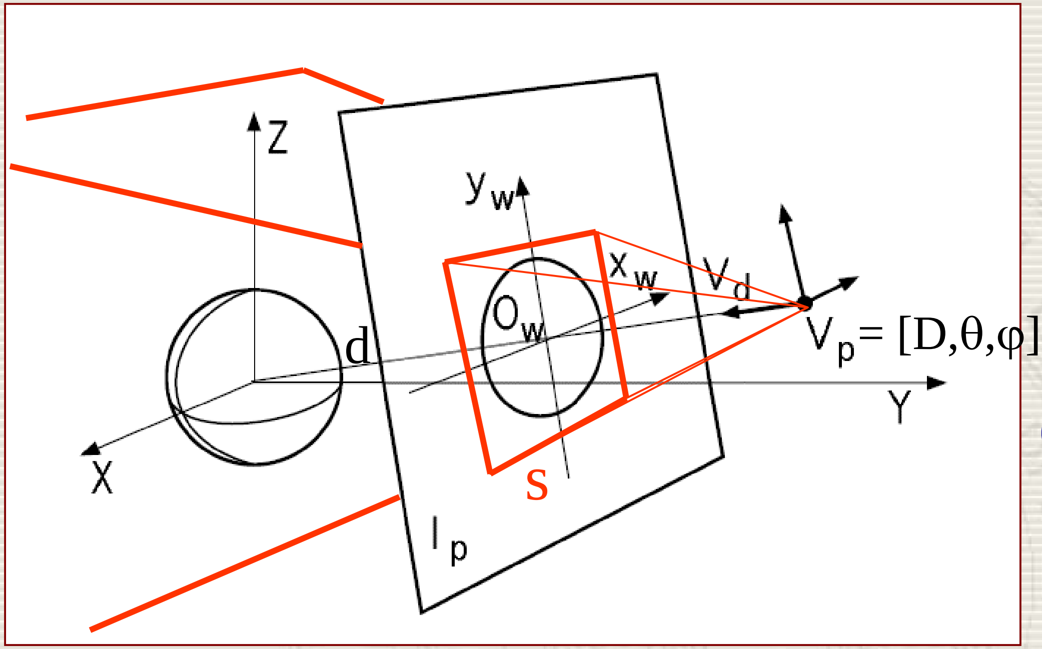
Parametri di Vista

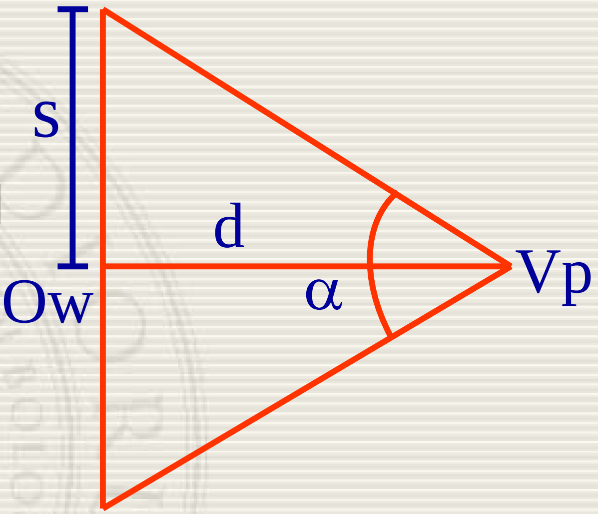


- Variando θ e φ è possibile osservare un oggetto da differenti angolazioni;
- Variando D è possibile spostare l'osservatore vicino o lontano dall'oggetto;

- Tenendo fissato Vp, il variare d modifica la dimensione dell' immagine proiettata, ma non della prospettiva;
- Tenendo fissato d, il variare D modifica la dimensione dell' immagine proiettata e la prospettiva,

Determinazione Window

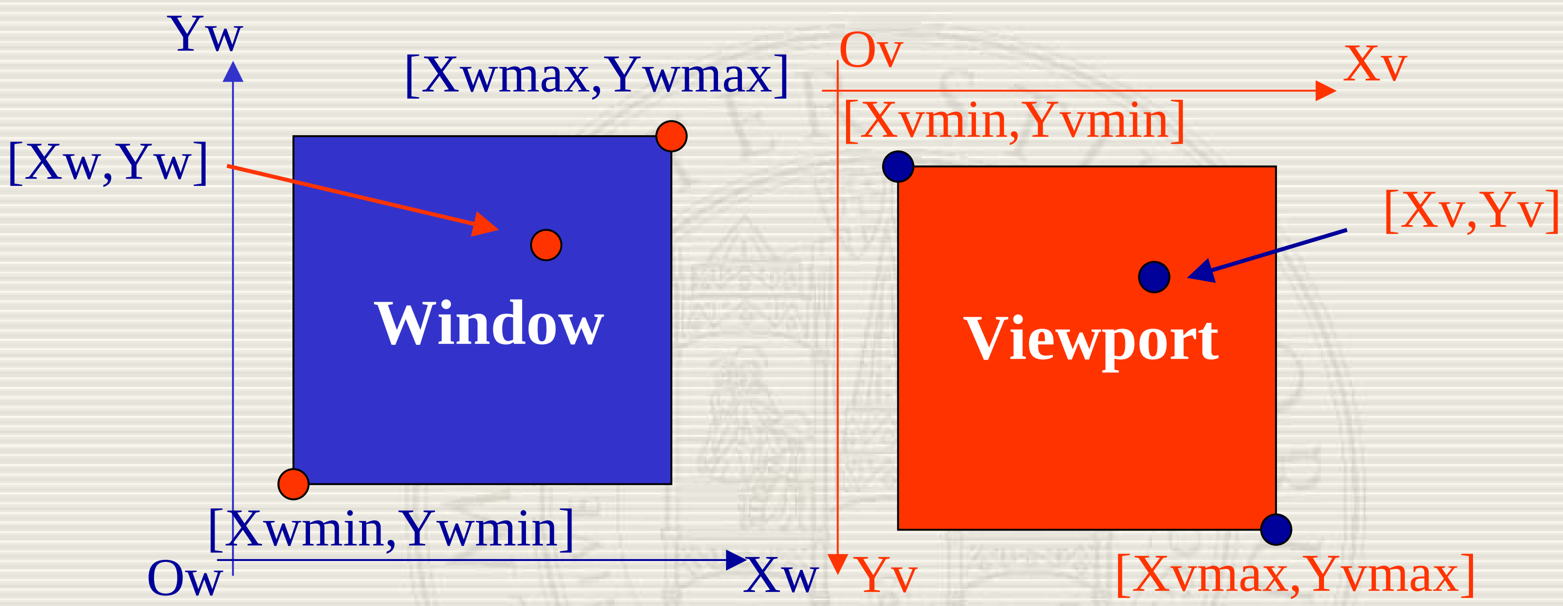




Per determinare l'ampiezza della Window si simula l'ampiezza del cono (o piramide) di vista dell'osservatore mediante la semiampiezza angolare α e la distanza d dal piano di proiezione, da cui

$$s = d \cdot \tan(\alpha / 2)$$

Trasformazione Window-Viewport



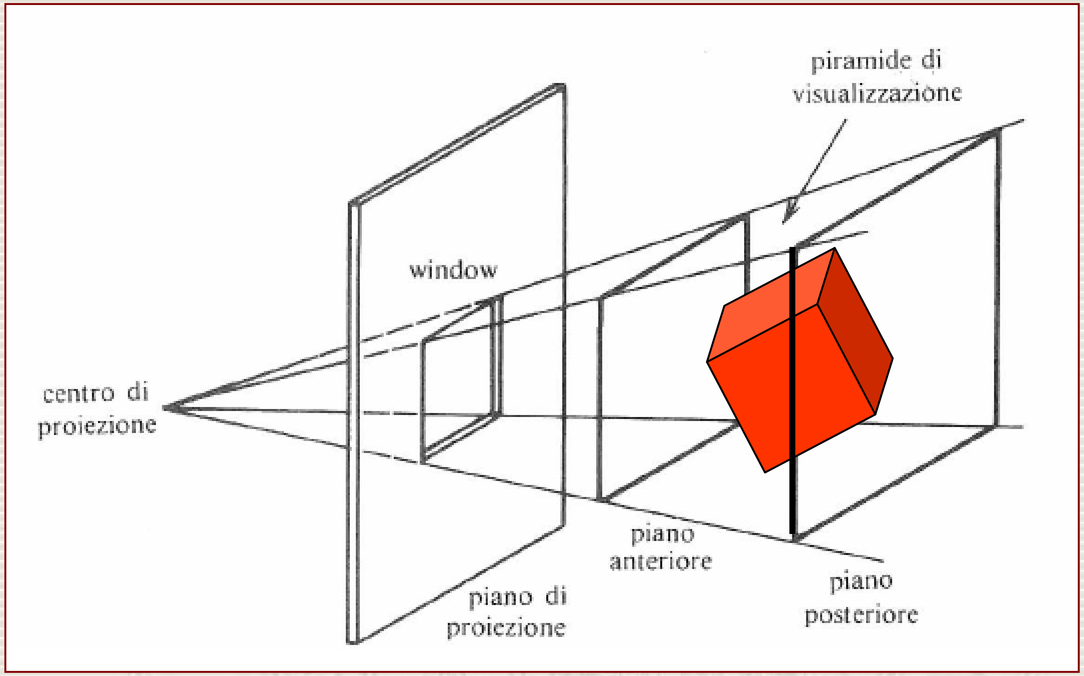
$$Xv = (int)(Sx\ (Xw - Xwmin) + Xvmin\ + 0.5)$$

$$Yv = (int)(Sy\ (Ywmin - Yw) + Yvmax + 0.5)$$

$$Sx = (Xvmax - Xvmin)/(Xwmax – Xwmin)$$

$$Sy = (Yvmax - Yvmin)/(Ywmax – Ywmin)$$

Tronco di Piramide (Frustum)



La determinazione di una piramide di vista con l'aggiunta di un front plane ed un back plane dà luogo ad un tronco di piramide detto Volume di Vista; solo le parti dell'oggetto interne a tale Volume di Vista saranno visibili e quindi da processare (clipping 3D di punti, linee e poligoni).

Pipeline di Rendering o di Vista

Trasformazione Sistema di Riferimento
(x,y,z,O) → (xe,ye,ze,Vp)

↓

Clipping 3D rispetto Volume di Vista

↓

Proiezione Geometrica
(xe,ye,ze,Vp) → (Xw,Yw,Ow)

↓

Trasformazione Window-Viewport
(Xw,Yw,Ow) → (Xv,Yv,Ov)

Esempio

Archvio SDL2prg_1516.tgz ed in particolare codice persp_cube_sdl.c nella cartella SDL2prg2 che usa solo SDL e GCGraLib2 e implementa le trasformazioni di vista analizzate:

persp_cube_sdl.c

Esercizi

Modificare il codice persp_cube_sdl.c per sperimentare:

1. gestione interattiva dei parametri di vista (angoli θ e φ) col mouse
2. gestione di più oggetti (mesh) e trasformazioni geometriche su questi
3. Inserire la trasformazione di vista con View-Up vector
4. progettare una seconda finestra in cui visualizzare l'oggetto e l'osservatore (con i suoi parametri di vista) da un secondo punto di vista

Lo si chiami persp_mesh.c

Nota: nella pipeline di vista, per ora e per semplicità, non gestiamo il clipping 3D rispetto al frustum.