1

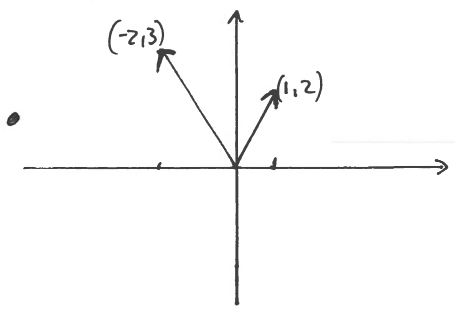
7.2.1

Vis at $(1,2), (-2,3)$, og $(1,1)$ utspenner $\mathbb{R}^2$ men at de ikke er lineært uavhengige.

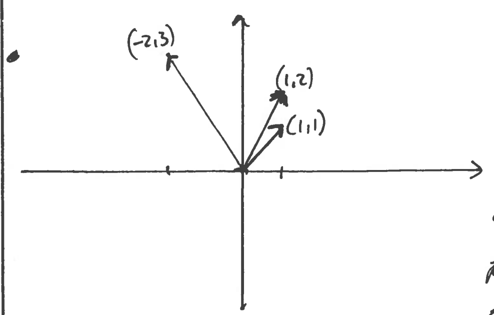
"(7.10) på side 145 sier at 3 vektorer i $\mathbb{R}^2$ alltid er lineært avhengige.*
I tillegg sier setning 7.3 på side 141 at 2 vektorer er lineært uavhengige
hvis determinanten til matrisen som lister disse vektorene er ulik 0."

Vi velger to vilkårlige vektorer og sjekker om de utspenner $\mathbb{R}^2$: her velger jeg
$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$.

- $\begin{vmatrix}1 & -2\\2 & 3\end{vmatrix} = 7 \neq 0 \Rightarrow$ setning 7.3 sier at disse to vektorene er lineært uavhengige.

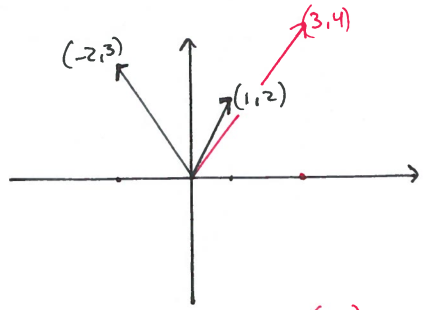
- 


Det betyr at vi kan bruke en kombinasjon (addisjon og skalering) av disse to vektorene for å uttrykke alle punkter i $\mathbb{R}^2$. Derfor kan vi si at $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ utspenner $\mathbb{R}^2$, og vi har allerede vist at disse er lineært uavhengige.

- 


Å legge til en vektor til — her: $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ — gir oss ikke noe mer. Vi kan utspenne $\mathbb{R}^2$ med to vektorer og vi kan selvfølgelig fortsatt utspenne $\mathbb{R}^2$ om vi legger til en til. Men dette innebærer at vi kan bruke en kombinasjon av $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ for å uttrykke punktet $(1,1)$: litt regning viser oss at $\frac{5}{7}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - \frac{1}{7}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. Vi kan derfor si at de tre vektorene $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$, og $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ utspenner $\mathbb{R}^2$ men at de ikke er lineært uavhengige.

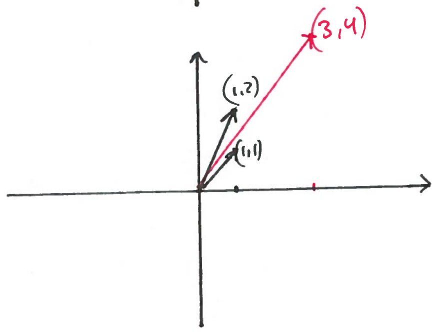
Vi skal så vise at $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ kan skrives som en lineær kombinasjon av disse vektorene på ulike måter.




$$\text{rref}\begin{pmatrix}1 & -2 & \vdots & 3\\ 2 & 3 & \vdots & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & \vdots & 17/7\\ 0 & 1 & \vdots & -2/7\end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

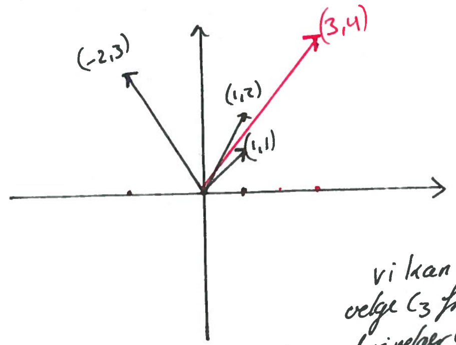
$$\underline{\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \frac{17}{7}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - \frac{2}{7}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}$$




$$\text{rref}\begin{pmatrix}1 & 1 & \vdots & 3\\ 1 & 2 & \vdots & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & \vdots & 2\\ 0 & 1 & \vdots & 1\end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}}$$




$$\text{rref}\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & \vdots & 3\\ 1 & 3 & 2 & \vdots & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 7/5 & \vdots & 17/5\\ 0 & 1 & 1/5 & \vdots & 1/5\end{pmatrix}$$

$\Downarrow$ flytter 3. kolonne over

$$\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \left(\frac{17}{5} - \frac{7}{5}c_3\right)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5}c_3\right)\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

vi kan altså velge $c_3$ fritt. Si at vi velger $c_3 = 6$, får vi

$$\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \frac{17-7\cdot 6}{5}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \left(\frac{1-1\cdot 6}{5}\right)\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \quad \Big| \ \Sigma$$

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = -5\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}}}$$

"Du kan altså uttrykke $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ enten med to eller med tre vektorer, men det blir åpenbart når vi ser på den siste grafen her."

7.2.4

La $U$ og $V$ være underrom av $\mathbb{R}^m$.

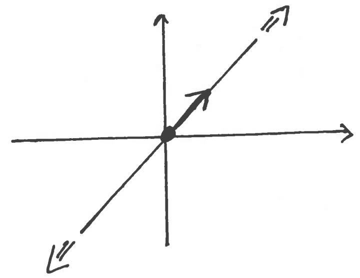
a) Vis at $U \cap V$ er et underrom av $\mathbb{R}^m$.

b) Gi et eksempel som viser at $U \cup V$ ikke alltid er et underrom av $\mathbb{R}^m$.

a) Først må vi si hva et underrom er. Jeg vil også illustrere dette med $\mathbb{R}^2$ fordi det er enkelt å forestille seg, men optimalt burde vi hatt $\mathbb{R}^3$. Jeg skal vise hvorfor senere.

Fra hand-out'en ser vi altså at en delmengde kalles for et underrom hvis, for ~~en~~ vektorer som ligger i delmengden, addisjonen av disse vektorene ligger i delmengden og hvis alle mulige skalarer av vektorene også ligger i delmengden. Et eksempel kan være:

(siden vi bare har én vektor i dette tilfellet, blir addisjonskriteriet overflødig. Det er derfor jeg mente det hadde vært bedre å tegne et plan i $\mathbb{R}^3$ siden vi da hadde hatt to vektorer. Uansett.)



Vi vet altså at $U$ og $V$ er underrom av $\mathbb{R}^m$.

- Si at vi har to vektorer som ligger i $U \cap V$ kalt $w_1$ og $w_2$. Vi sier at $w_1 \in U \cap V$ og $w_2 \in U \cap V$
- $U \cap V$ er et underrom hvis både addisjon av og skalarer av $w_1$ og $w_2$ også ligger i delmengden $U \cap V$.

~~Addisjon~~:
- Vi vet at $U \cap V \subseteq U$. Siden vi vet at vektorene $w_1$ og $w_2$ er elementer av en større av delmengden $U \cap V$, må de naturligvis være elementer av mengde $U$. Så vi sier at $w_1 \in U$ og $w_2 \in U$. Det samme gjelder for $V$: $U \cap V \subseteq V$ så $w_1 \in V$ og $w_2 \in V$.

Addisjon
- Vel, vi vet at $U$ er et underrom og at $V$ er et underrom. Og hva sier definisjonen av et underrom? Jo, at to vektorer som ~~kan~~ ligger i delmengden adderes og denne summen ligger fortsatt i delmengden, da er et av kriteriene for underrom bestått. Derfor kan vi si at

~~$u_1 + u_2$~~ $w_1 + w_2 \in U$ og at $w_1 + w_2 \in V$.

Men når $w_1 + w_2$ er et element både av $U$ og av $V$, da kan vi jo si at $w_1 + w_2 \in U \cap V$. Så første kriterie for at $U \cap V$ er et underrom er bestått.

multiplikasjon / skalarer.

- det andre kriteriet for et underrom er at alle mulige skalarer for vektorene også ligger i delmengden, inkludert skalaren 0.
  Så vi innfører nå skalaren $c$ som vi kan velge fritt. M.a.o. $c \in \mathbb{R}$.

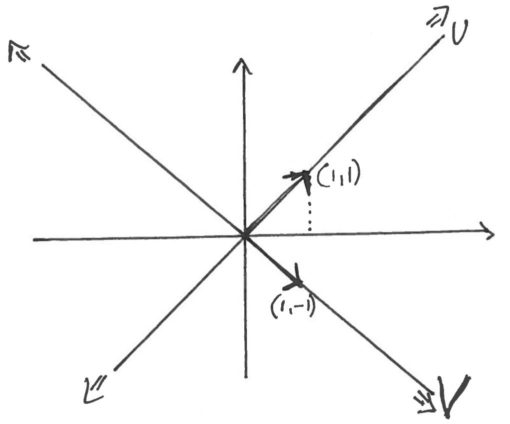
Vi vet at $U$ er et underrom, så det andre kriteriet for et underrom sier med andre ord at $cW_1 \in U$ siden vi allerede har fastsatt at $W_1 \in U$.

Den samme tankegangen gjelder for $V$, så $cW_1 \in V$.

Så $cW_1 \in U$ og $cW_1 \in V$, men når skalarer er et element både av $U$ og av $V$, da kan vi jo si at $cW_1 \in U \cap V$.

Vi har nå vist at alle skalarer av $W_1$ ligger i delmengden $U \cap V$. Med samme resonnement som over kan vi vise at det samme gjelder for $W_2$. Så når alle mulige skalarer av de to vektorene ligger i delmengden, da er andre kriterie for at $U \cap V$ være et underrom bestått. Vi har dermed vist at $U \cap V$ også er et underrom.

Eksempel:

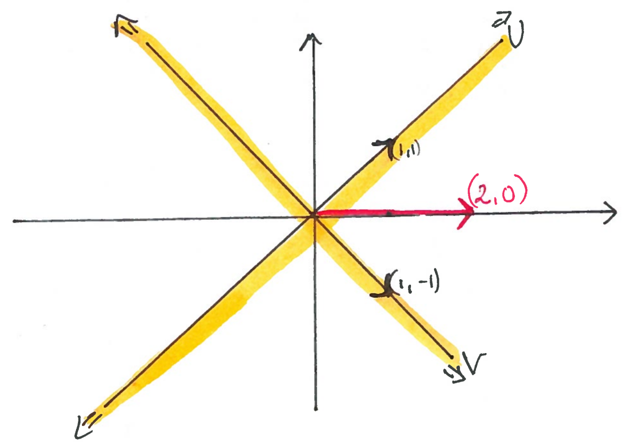



Her er $U \cap V = (0,0)$. I notatet jeg har gitt ut, har jeg vist at origo er et underrom, så vi kan si at snittet av to underrom også er et underrom.

5

b)

Si at vi har to vektoner : $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ og at $w_1 \in U$ og $w_2 \in V$




- $U \cup V$ er markert i oransje.
- Vi har to vektorer i denne delmengden: $w_1$ og $w_2$.
- Er $U \cup V$ alltid et underrom?
- Vel, første kriterie er at summen av to vektorer også må ligge i delmengden.
  $w_1 + w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- Vi ser at $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ligger utenfor delmengden.

H.a.o. $w_1 + w_2 \notin U \cup V$.
Første kriterie for et underrom er ikke bestått, så vi kan konkludere med at unionen av to ~~det~~ underrom ikke alltid er et underrom.

7.3.2

Her skal vi ~~velge om mense~~ se på en mengde av ~~vektorer~~ og si hva rommet utspent av disse vektorene er, om de er lineært avhengige eller ikke, og om de utgjør en basis for $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, eller $\mathbb{R}^4$.

Jeg kommer til å bruke elementære rekkeoperasjoner på disse uttrykkene og vil ha ~~Jeg viser~~ matrisene på redusert trappeform (rref kalles dette især på kalkulator). Jeg viser, fullstendig og grundig, hvordan kun første gangen siden dere har gjort dette før.

Lineært avhengige hvis og bare hvis $\rightarrow c_1, \beta \in \mathbb{R}$

a) $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$, | Flytter over

$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \beta \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ | $-\beta = c_2$ for å gjøre det mer oversiktlig

(*) $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ | Matriseform

$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ | Koeffisientmatrise

$\begin{pmatrix} 1 & -2 & \vdots & 0 \\ 2 & -4 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \cdot (-2)$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$ | ~~Ligningsform~~ Matriseform

$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ | Ligningsform

$c_1 - 2c_2 = 0$ | Flytter over

$\underline{c = 2c_2}$

Setter $\downarrow$ inn i (*).

$2c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ | Flytter over og ~~$\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$~~

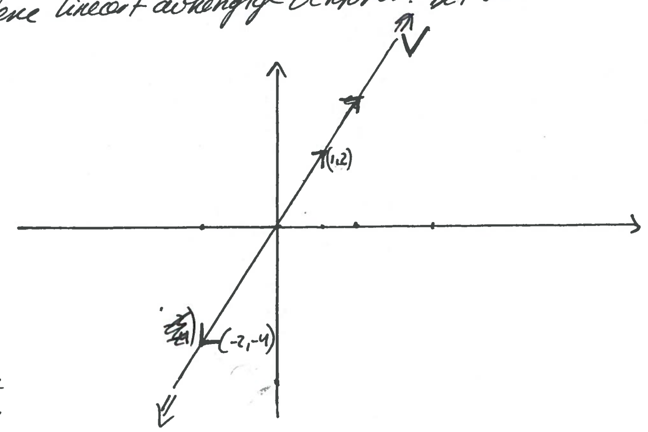
$2c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\underline{2c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}}$

Så de to vektorene er lineært avhengige. Dette var den enormt lange versjonen og jeg gjorde det så dere fra nå av kan bruke den raske metoden jeg snart skal vise dere.

Så vi har vist at $\binom{1}{2}$ og $\binom{-2}{-4}$ er lineært avhengige.

Rommet utspent blir da $V = sp\left[\binom{1}{2}, \binom{-2}{-4}\right] = sp\left[\binom{1}{2}\right]$ siden det er overflødig å inkludere lineært avhengige vektorer. Det blir tydelig i følgende graf:




Vi kan uttrykke V kun med skalarer av én av disse vektorene, så vi eliminerer derfor den andre.

Videre ser vi at $\binom{1}{2}$ kun kan uttrykke punktene i linja V, ikke resten av $\mathbb{R}^2$. Så vi sier at $V = sp\left[\binom{1}{2}\right]$ ikke er en basis for $\mathbb{R}^2$.

b) Nå har vi unnagjort det grunnlige, så nå vil jeg gå inn på det dere bør vite for å løse dette kjapt og samtidig ha stålkontroll.

I a) fant vi redusert trappeform. Dette kan finnes med rref-kommandoen på kalkulatoren.

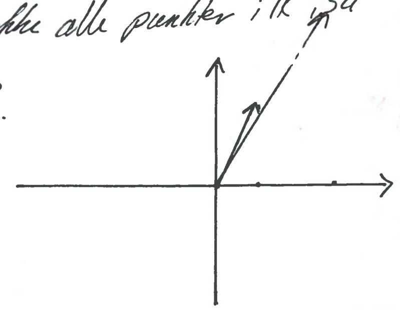
Her har vi vektorene $\binom{1}{2}$ og $\binom{3}{5}$. Dette, som vi så i a), kan skrives som

$rref\left(\begin{array}{cc:c} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \binom{c_1}{c_2} = \binom{0}{0}$. Dette sier altså at det kun er når begge skalarene er lik 0 at $c_1\binom{1}{2} = c_2\binom{3}{5}$. Derfor er de lineært uavhengige.

Nå vil jeg gjerne innføre litt nyttig teori som jeg tror ikke nevnes eksplisitt i MAT10.

- ~~Pi~~ Kolonner som inneholder radens ledende ener kalles pivotkolonner. Det er vektorene knyttet til disse kolonnene som former basisen til kolonnerommet.
- Dette innebærer at antall pivotkolonner vi har er derfor antall vektorer i basisen.
- De ikke-pivoterende kolonnene, (kalt frie kolonner) blir derfor avhengige av de pivoterende kolonnene foran. ~~Bi~~ (Antall frie kolonner blir derfor antall egenvektorer) ↳ for egenvektorer.

Her fant vi altså to pivoterende kolonner $\left(\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ og ingen ikke-pivoterende, så rommet er utspent av begge vektorene våre. $V = sp\left[\binom{1}{2}, \binom{3}{5}\right]$ og vektorene er lineært uavhengige. To lineært uavhengige vektorer er nok til å uttrykke alle punkter i $\mathbb{R}^2$, så vi sier at ~~de~~ vektorene danner en basis for $\mathbb{R}^2$.



*Nå øker vi hastigheten siden vi kan all teorien vi trenger.*

c) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$$\text{rref}\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & \vdots & 0\\ 2 & 5 & 1 & \vdots & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & -7 & \vdots & 0\\ 0 & 1 & 3 & \vdots & 0\end{pmatrix}$$

Vi har to pivotkolonner

⇓

de to vektorene $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ utgjør basisen

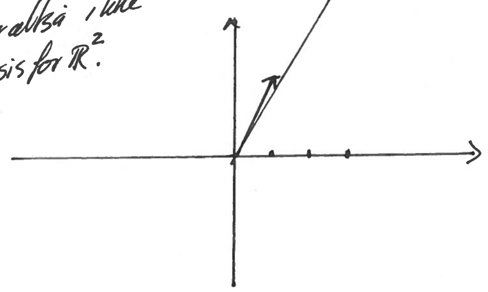
fri (ikke-pivoterende) kolonne: $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ er lineært avhengig av $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$.

↳ Obs: siden jeg har valgt å uttrykke $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ via de to andre vektorene, fjerner jeg denne fra basisen. Men dette kan ha gjort det på en annen måte og dermed ha fjernet en av de andre vektorene fra basisen. Det er også riktig.

Så: $V = sp\left[\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right] = sp\left[\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}\right]$

~~to lin. uavh. vektorer~~ ~~danner~~ basis ~~for $\mathbb{R}^2$~~.

disse tre vektorene danner altså ikke en basis for $\mathbb{R}^2$.



d) $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$$\text{rref}\begin{pmatrix}1 & 3 & 0 & \vdots & 0\\ 2 & 0 & 1 & \vdots & 0\\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \vdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0\end{pmatrix}$$

Vi har tre pivotkolonner og tilhørende vektorer $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$, og $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ utgjør basisen.

Vi har ingen fri (ikke-pivoterende) kolonner, så vektorene er lineært uavhengige.

$$V = sp\Big[\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}}\Big]$$

tre lin. uavh. vektorer i $\mathbb{R}^3$ er nok til å uttrykke hele $\mathbb{R}^3$, så er basis for $\mathbb{R}^3$.

e) $\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

$$\text{rref}\left(\begin{array}{cc:c}2&1&0\\3&0&0\\4&-1&0\end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc:c}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{array}\right)$$

to pivotkolonner utgjør basisen.

Ingen (ikke-pivoterende) frie kolonner, så lineært uavhengige.

$$V = sp\left[\underbrace{\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}}\right]$$

to vektorer i $\mathbb{R}^3$ er ikke nok til å uttrykke hele $\mathbb{R}^3$, så vektorene danner ikke en basis for $\mathbb{R}^3$. De utspenner derimot et underrom i $\mathbb{R}^3$ som er et plan.

f) $\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\-1\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\2\\3\end{pmatrix}$

$$\text{rref}\left(\begin{array}{cccc:c}2&0&3&-1&0\\0&4&0&0&0\\0&0&-1&2&0\\0&2&5&3&0\end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc:c}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{array}\right)$$

fire pivotkolonner $\Rightarrow$ de fire tilhørende vektorene utgjør basisen

Ingen (ikke-pivoterende) frie kolonner, så lineært uavhengige.

$$V = sp\left[\underbrace{\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\-1\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\2\\3\end{pmatrix}}\right]$$

fire lineært uavhengige vektorer og kan uttrykke $\mathbb{R}^4$, så disse vektorene er en basis for $\mathbb{R}^4$.

7.3.7

Finn en basis for løsningsrommet til $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

Vi fortsetter bare der vi slapp og omskriver dette først

til $x_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \text{rref}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$

to pivotkolonner   én (ikke-pivoterende) kolonne. → fri

$\Downarrow$ matriseform

~~[illegible]~~

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{matrix}$

vektorform og flytter over

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x_3\\2x_3\\x_3\end{pmatrix}$ | funksjonen

$x_3$ er jo alltid lik $x_3$, så den likheten er jo sann. →

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = x_3\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ | Kan velge $x_3$ vilkårlig, så vi erstatter den med parameteren $t$, $t \in \mathbb{R}$.

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$

Dette betyr at $\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ er en basis for løsningsrommet vårt.

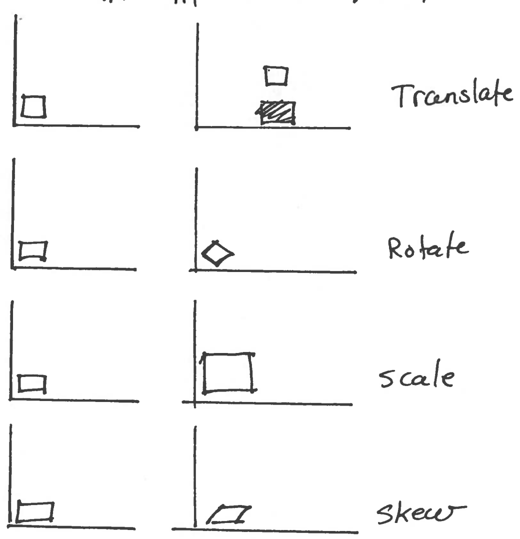
~~9.2.1~~

~~$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$~~

## Lineære transformasjoner

$\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^2$ - transformasjon

- Super-Mario-eksempel
- Fifa-eksempel




Så en matrise sier bare hvordan noe skal bevege seg.

som en lineær transformasjon $T_A$ er tilordnet

### 9.2.1

Vi har $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \downarrow m=2$, $\xrightarrow{n=3}$

er m.a.o. en $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

Tenk på det som at spillerne i Fifa er tegnet som 3D-figurer og at spillkonsollen trenger å lage skygger på gressmatta som blir til 2D-figurer på gressmatta. Denne matrisen ville dermed bare sagt hvordan disse skyggene skal ligge.

En transformasjon er, ifølge setning 9.1. definert som

$T_A(\vec{x}) = A\vec{x}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

Så $T_A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

4

a)

I $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ gir $T_A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 2\cdot 0 \\ 1\cdot 0 - 1\cdot 1 + 1\cdot 0 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}}$

$2\times 3$ $3\times 1$

II $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ gir $T_A\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 0\cdot 3 + 2\cdot 4 \\ 1\cdot 2 - 1\cdot 3 + 1\cdot 4 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}}$

$2\times 3$ $3\times 1$

III $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gir $T_A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot(-1) + 2\cdot 1 \\ 1\cdot 1 - 1\cdot(-1) + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}}$

b) Nullrommet til $T_A$ er $N(T_A) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : T_A(\vec{x}) = \vec{0}\}$

Billedrommet til $T_A$ er $R(T_A) = \{T_A(\vec{x}) : \vec{x} \in \mathbb{R}^n\}$

Vi tar nullrommet først. Definisjonen sier altså at

$T_A(\vec{x}) = \vec{0}$ | $T_A(\vec{x}) = A\vec{x}$

$A\vec{x} = \vec{0}$ | $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}\underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}} = \underset{2\times 1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$ | Koeffisientmatrise.

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$ | Redusert trappeform (rref) gir

$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$ | Pga ledende enere er kolonne 1 og 2 pivotkolonner og kolonne 3 er fri. Ligningsform gir

$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ | Flytter frie kolonner på høyre side.

$\begin{cases} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = -x_3. \end{cases}$ | Definisjonen av nullrommet sier at vi er interessert i mengden av alle ~~$\vec{x} \in \mathbb{R}^3$~~ $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{x} \in \mathbb{R}^3$ som er s.a. $T_A(\vec{x}) = \vec{0}$.

Så vi kan skrive $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ som et uttrykk av høyre side.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Faktoriserer ut $x_3$. og siden $x_3$ kan velges fritt siden det er en fri kolonne, substituerer vi den med parameteren $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}$$

Del Svar: $N(T_A) = \mathrm{sp}\left[\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$, som er en linje i $\mathbb{R}^3$.

Billedrommet er som sagt definert som $R(T_A) = \{ T_A(\vec{x}) : \vec{x} \in \mathbb{R}^n \}$

Vi bruker matrisen fra i stad der vi har brukt elementære rekkeoperasjoner for å få matrisen på redusert trappeform. Altså:

$$\mathrm{rref}(A) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \vec{v}_3 \end{array}$$

Pivoterings kolonne 1 og 2 utgjør en basis fordi vi kan uttrykke kolonne 3 ved hjelp av kolonne en og to. Spesifikt er $\vec{v}_3 = 2\vec{v}_1 + \vec{v}_2$.

Derfor blir $R(T_A) = \underbrace{\mathrm{sp}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]}_{\text{vektorene fra A-matrisen.}} = \underbrace{\mathrm{sp}\left[\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\text{utgjør en basis for } \mathbb{R}^2}\right] = \mathbb{R}^2}_{\text{så rommet utspent av denne basisen blir altså lik } \mathbb{R}^2.}$

Vi hadde altså en $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ og $\dim N(T_A) + \dim R(T_A) = 1 + 2 = \underline{3}$

anse nullrommet som det som forsvinner fra transformasjonen. Har du en 3D-figur og konsollen skal lage en skygge av dette i 2D, "mister du en dimensjon."

9,2,2

Vi vet: $- T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $(T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m)$

$- T = T_A$ (matrisen A er tilordnet en lineær transformasjon)

$- A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \downarrow m=2$, $\xrightarrow{n=3}$

~~$\cdot\; T_A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ | Utleder multipliser~~

- $T_A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ | setter inn for $T_A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ | utleder

$\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$

- $T_A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ | setter inn for $T_A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & a_{12} & a_{13} \\ -3 & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ | utleder

$\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

- $T_A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$ | setter inn for $T_A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & a_{13} \\ -3 & 1 & a_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$ | utleder

$\begin{pmatrix}a_{13}\\a_{23}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$

$\Downarrow$ Hvilket gir oss

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

1/6

$T_A(\vec{x}) = A\vec{x}$ | $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$T_A\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ | Utleder

$\underline{2\times 3} \quad \underline{3\times 1}$

$T_A\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 3 + 1\cdot(-2) + (-2)\cdot 1 \\ -3\cdot 3 + 1\cdot(-2) - 2\cdot 1 \end{pmatrix}$ | $\Sigma$

$T_A\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -13 \end{pmatrix}$

---

*Nullrommet:*

$T_A(\vec{x}) = \vec{0}$ | $T_A(\vec{x}) = A\vec{x}$

$A\vec{x} = \vec{0}$ | $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ | Koeffisientmatrise

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$ | redusert trappeform gir

$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$ | Vi har to pivotkolonner og én fri. Ligningsform.

$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$ | Flytter frie kolonner over på høyreside.

$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2x_3 \end{cases}$ | Skriver $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ som et uttrykk av høyresiden.

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$ | Faktoriserer og $x_3 = t \in \mathbb{R}$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

---

$\hookrightarrow N(T_A) = \mathrm{sp}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$, hvilket er ei linje i $\mathbb{R}^3$.

$R(T_A)$ er rommet utspent av vektorene som tilhører pivotkolonnene.

Så $\underbrace{R(T_A) = \mathrm{sp}\Big[\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{basis for } \mathbb{R}^2}\Big]}_{\text{rommet utspent av denne basisen blir altså lik } \mathbb{R}^2} = \mathbb{R}^2$