1

Oppgave 10.1.1.f)

egenverdi, egenvektor

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}, \quad \vec{x} \neq \vec{0}$$ | flytter over og faktoriserer.

$$(A-\lambda I)\vec{x} = \vec{0}$$

- Siden $\vec{x} \neq \vec{0}$, har vi en ikke-triviell løsning, hvilket betyr at $N(A-\lambda I) \neq \{\vec{0}\}$.
- Siden det eksisterer et ikke-trivielt nullrom, har vi lineær avhengighet.
- Og siden vi har lineær avhengighet, er $\det(A-\lambda I) = 0$.
- Setter inn.

$$\det(A-\lambda I) = 0$$ | $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda I = \lambda I_3 = \lambda\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda \end{pmatrix}$

setter inn og Σ

$$\det\begin{pmatrix} [1-\lambda] & (-1) & 0 \\ (-1) & [2-\lambda] & (-1) \\ 0 & (-1) & [1-\lambda] \end{pmatrix} = 0$$ | Utleder

$$(-1)^{1+1}\cdot(1-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} [2-\lambda] & (-1) \\ (-1) & [1-\lambda] \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} (-1) & (-1) \\ 0 & [1-\lambda] \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}\cdot 0\begin{vmatrix} -1 & [2-\lambda] \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$ | Utleder

$$1\cdot(1-\lambda)\cdot\left([2-\lambda][1-\lambda]-[-1][-1]\right) - 1\cdot(-1)\cdot\left([-1][1-\lambda]\right) + 0 = 0$$ | ~~Utleder~~ Π

rask notasjon for "ganger" og "~~summerer~~"

$$(1-\lambda)\cdot(\lambda^2-3\lambda+2-1) - 1\cdot(1-\lambda) = 0$$ | faktoriserer

$$(1-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+2-1-1) = 0$$ | Σ

$$(1-\lambda)(\lambda^2-3\lambda) = 0$$ | faktoriserer

$$(1-\lambda)\cdot\lambda\cdot(\lambda-3) = 0 \Rightarrow \lambda_i = \begin{cases} 0, & i=1 \\ 1, & i=2 \\ 3, & i=3 \end{cases}$$

Skal deretter finne egenvektorene. Fremgangsmåten er lik for alle egenverdiene, så jeg viser bare den ene.

$\lambda_2 = 1$

$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \quad , \vec{x} \neq \vec{0}$ | flytter over og faktoriserer

$(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$ | $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda = \lambda_2 = 1 \quad , \quad I = I_3, \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Setter inn og Σ

$$\begin{pmatrix} [1-1] & -1 & 0 \\ -1 & [2-1] & -1 \\ 0 & -1 & [1-1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ | Σ og koeffisientmatrise

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ | rref

"Vi gjennomfører radoperasjoner for å få matrisen på redusert trappeform. Siden alle vet hvordan vi gjør det nå, hopper vi rett til den reduserte trappeformen."

↳ men husk å vise mellomstegene på eksamen.

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

"Nå vil jeg nevne nyttig teori som ikke er pensum i MAT110, men som er høyrelevant og ~~de jeg~~ to stykker jeg har lært dette tilsynelatende har lagt sin elsk på dette.

~~Pivotkolonner~~

- Kolonner som inneholder radens ledende ener kalles pivotkolonner. Det er vektorene knyttet til disse kolonnene som former basisen til kolonnerommet.
- Dette innebærer at antall pivotkolonner vi har er derfor antall vektorer i basisen.
- De ikke-piroterende kolonnene — kalt frie kolonner — er altså kolonner som ikke inneholder radens ledende ener. Disse kolonnene er avhengige av de piroterende kolonnene foran.
- Antall frie kolonner blir derfor antall egenvektorer.

~~4~~3

Matriseform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ | Ligningsform

$x_1 + x_3 = 0$
$x_2 = 0$
| ~~Vi vil nå finne egen~~ Flytter x_3 over siden det var en fri kolonne.

$x_1 = -x_3$
$x_2 = 0$
| Vi finner så egenvektoren $\vec{x} \in \mathbb{R}^3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

$\Downarrow$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$$ | Faktoriserer og substituerer x_3 med parameteren t.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Svar: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

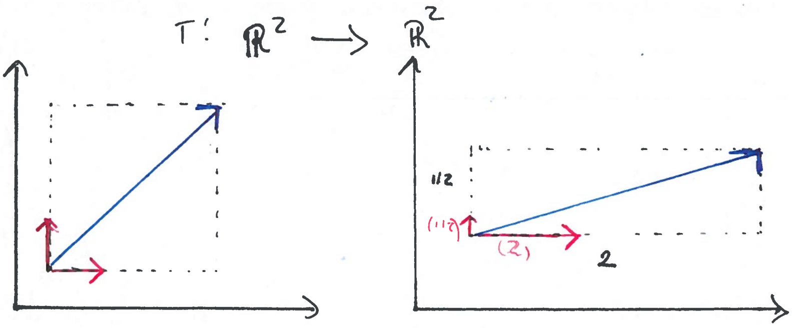
~~Ekstra for å se hele bildet: egenrom. $E_{\lambda=1} = sp[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}]$~~

./.

4

Så hva er egenverdier og egenvektorer (og egenrom)?

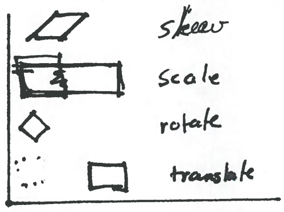
$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$



 er bare for å illustrere den lineære transformasjonen.

De rød vektorene er egenvektorer: disse endrer ikke retning av en lineær transformasjon fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$.

mulige transformasjoner.



ex $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$ er en lineær transformasjon som sier at vi skal skalere med 2 i horisontal retning og 1/2 i vertikal retning.

Egenverdiene er skalarer. I dette tilfellet er de 2 og 1/2.

Bevis:

$\lambda = 2$ gir $\left(\begin{array}{cc|c} [2-2] & 0 & 0 \\ 0 & [1/2-2] & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{rref}} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{fri} & \text{pivot} \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}.$

$\lambda = \frac{1}{2}$ gir $\left(\begin{array}{cc|c} [2-1/2] & 0 & 0 \\ 0 & [1/2-1/2] & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{rref}} \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \text{pivot} & \text{fri} \end{array} \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$

grunnen til at $\vec{x} \neq \vec{0}$ er fordi den ikke har noen retning som ikke skal endres.

Videre for å se kobling til tidligere:

samlingen av alle egenvektorer tilhørende en egenverdi er egenrommet.

Formelt skrives dette som $E_\lambda = N(A_{n\times n} - \lambda I_n)$.

Her: $E_{\lambda=2} = \text{sp}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$

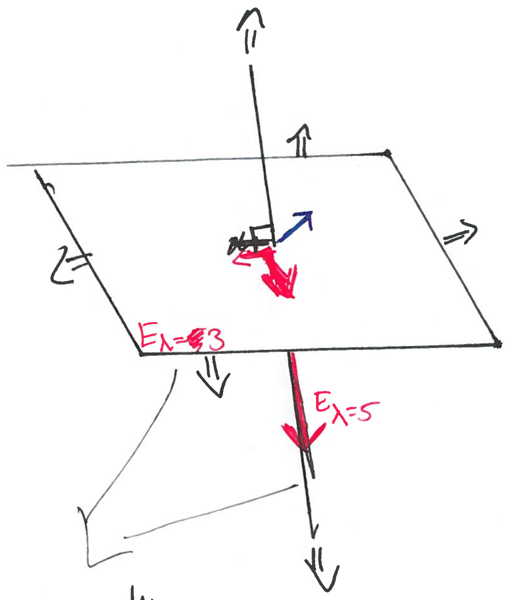
$E_{\lambda=1/2} = \text{sp}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$

5

Hva sier egentlig egenrommet?

La oss ta et annet eksempel.

Egenrom ikke en del av pensum i min tid



Har vi en vilkårlig vektor som ligger i egenrommet til $\lambda=3$ og vi bruker transformasjonen på denne vektoren, vil den bli $\lambda=3$ ganger så lang. Så igjen, λ er en skalar. og fortsatt ligge i ~~egenro~~ egenrommet til $\lambda=3$.

Disse er forøvrig ortogonale, ref. setning 10.3 på s.205 i boka.

10.1.2

$A\vec{x} = \lambda\vec{x},\ \vec{x} \neq \vec{0}.$ | Flytter over og faktoriserer

$(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$

$\Downarrow$ $\det \overset{=0}{,}$ se tidligere.

$\det(A - \lambda I) = 0$ | $\det(B) = \det(B^T)$, Her: $B = A - \lambda I$

$\det(A^T - \lambda I^T) = 0$ | $I^T = I$ $\quad \cancel{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\det(A^T - \lambda I) = 0$

$\Downarrow$

$(A^T - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$ | Deler opp og Flytter over

$$\underline{\underline{A^T x = \lambda\vec{x}}}$$

10.1.3

"Vis at om $|A| \neq 0$, er $\lambda \neq 0$"

La oss først studere hva som skjer ved $\lambda = 0$.

$$|A - \lambda I| = 0 \quad | \; \lambda = 0$$

$$|A - 0I| = 0$$

$$|A - 0| = 0$$

$$|A| = 0$$

Dette gir mening. Vi har sagt at λ er skalaren til egenvektorene.
~~så~~ Om $\lambda = 0$, skaleres egenvektorene til null etter transformasjonen.
Determinanten måler areal, volum, etc avhengig av hvilken n i $\mathbb{R}^n$ vi studerer. Hvis egenvektorene er lik 0, vil ~~arealet~~ det ikke være noe areal å måle. Så $|A| = 0$.

Har vi $\lambda \neq 0$, er ikke egenvektorene skalert til null, og da eksisterer det et område vi kan måle ~~volumet til~~ arealet, volumet, etc. til via determinanten til A.
Så ved $\lambda \neq 0$ er $|A| \neq 0$.

Vis at $\frac{1}{\lambda}$ er egenverdi til A^{-1}!

λ eg. verdi for A

$A\vec{x} = \lambda \vec{x}$ | ~~Flytter over og faktoriserer.~~

~~$(A - \lambda I)\vec{x} = 0$~~

- Hvis $\lambda \neq 0$, så er $|A| \neq 0$.
- Hvis $|A| \neq 0$, så eksisterer A^{-1}!
- Så $A^{-1}(VS) = A^{-1}(HS)$

$$A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\lambda\vec{x} \quad | \; A^{-1}A = I$$

$$I\vec{x} = A^{-1}\lambda\vec{x} \quad | \; I\vec{x} = \vec{x}$$

$$\vec{x} = A^{-1}\lambda\vec{x} \quad | \; \cdot 1/\lambda \text{ og } VS = HS$$

~~$\frac{1}{\lambda}\vec{x} = A^{-1}\vec{x}$~~

$$A^{-1}\vec{x} = \frac{1}{\lambda}\vec{x}.$$

$\frac{1}{\lambda}$ eg. verdi for A^{-1}.

8

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$D^2 = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}}_{3\times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}}_{3\times 3} = \underline{\begin{pmatrix} (1/2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (1/3)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (1/3)^2 \end{pmatrix}}$$

$$D^n = \underline{\begin{pmatrix} (1/2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (1/3)^n & 0 \\ 0 & 0 & (1/4)^n \end{pmatrix}}$$

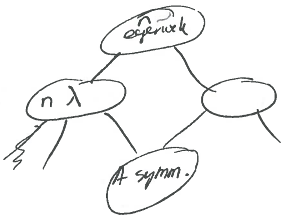
$$\lim_{n\to\infty} D^n = \begin{pmatrix} \lim_{n\to\infty}(1/2)^n & 0 & 0 \\ 0 & \lim_{n\to\infty}(1/3)^n & 0 \\ 0 & 0 & \lim_{n\to\infty}(1/4)^n \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

10.2.2 b)

Er matrisen diagonaliserbar?

Diagonalisering av $A_{n \times n}$ mulig hvis og bare hvis

fundamentalt forskjellige n egenvektorer.
$\uparrow$ n forskjellige egenverdier
A er symmetrisk



Ⓘ Symmetrisk?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Ja} \Rightarrow \text{Diagonaliserbar.}$$

10.2.3 a

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Ⓘ Symmetrisk? Nei.

Ⓘⓘ $A\vec{x} = \lambda \vec{x}$

$$\Downarrow$$

$$\begin{vmatrix} [2-\lambda] & 1 \\ 0 & [-1-\lambda] \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)(-1-\lambda) = 0$$

$$-(2-\lambda)(1+\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_i = \begin{cases} 2, & i=1 \\ -1, & i=2 \end{cases}$$

→ nå forskjellige egenverdier.

$\Downarrow$

Diagonaliserbar

Sidenote som er høyrelevant til eksamen:
$P = [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2]$, der $\vec{v}_1$ er egenvektoren til λ_1 og $\vec{v}_2$ er egenvektoren til λ_2.

~~$\lambda = 2$ gir $\left(\begin{smallmatrix} [2-1] & 1 & 0 \\ 0 & [-1-1] & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ rref~~

$$\lambda_1 = 2 \text{ gir } \left(\begin{array}{cc|c} [2-2] & 1 & 0 \\ 0 & [-1-2] & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{rref}} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

fri pivot

$$\lambda_2 = -1 \text{ gir } \left(\begin{array}{cc|c} [2-(-1)] & 1 & 0 \\ 0 & [-1-(-1)] & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{rref}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3\, x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

pivot fri

siden t kan velges til å være hva som helst, velg en presentasjon av vektoren som ser bra ut.

Så

$$P = \left[\underset{\vec{v}_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \; \underset{\vec{v}_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Om vi regner ut $P^{-1}AP$, får vi $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

λ_1

λ_2

Så $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$

er A diagonaliserbar, har vi →

↳ Diagonalmatrise

10.3.1

$$P(\lambda) = -(\lambda-1)^3(\lambda+3)^2(\lambda^2+2\lambda+5)^2$$

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2-4\cdot1\cdot5}}{2}$$

$$\lambda = -1 \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{-16}$$

$$\lambda = -1 \pm \tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{16}\cdot i$$

$$\lambda = -1 \pm 2i$$

$$P(\lambda) = -(\lambda-1)^3(\lambda+3)^2\left([\lambda-(-1+2i)][\lambda-(-1-2i)]\right)^2$$

$$(a\cdot b)^2 = a^2\cdot b^2$$

~~Utleder~~ ~~forenkler~~

$$\cancel{P(\lambda) = -(\lambda-1)^3(\lambda+3)^2([\lambda+1-2i][}$$

$$P(\lambda) = -(\lambda-1)^3(\lambda+3)(\lambda-[-1+2i])^2(\lambda-[-1-2i])^2.$$

Nullpunkter	Multiplisitet
1	3
-3	2
$-1+2i$	2
$-1-2i$	2
Σ	9

, som gir mening siden vi hadde en 9×9-matrise!

~~den har jo 9 nullpunkter~~

vi har ikke nødvendigvis 9 nullpunkter, men ~~sammen av~~ multiplisiteten av disse vil tilsammen være 9.

10.3.2 a

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$

Vi har regnet egenverdier så mange ganger nå at vi ikke viser det her.

$\lambda_i = \begin{cases} 2, & i=1 \\ -3, & i=2 \end{cases}$

Setning 10.4 sier at $|A| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ og at $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

på s. 207

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3)$ og $1 + (-2) = 2 + (-3)$ | Utleder.

$-6 = -6$ og $-1 = -1$

"Likhetene gjelder, så vi har verifisert ~~1~~ a) i setning 10.4.

$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$, $P = [\vec{v}_1 \cdots \vec{v}_n]$

$U^{-1}AU = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$, $U = \left[\frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} \cdots \frac{\vec{v}_n}{\|\vec{v}_n\|}\right]$

parvis ortogonale: setning 10.3

lengde lik 1: $\frac{\vec{v}_i}{\|\vec{v}_i\|}$

Kvadratiske former:

1. Test for indefinitt: $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Z_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ } m.a.o. sjekker langs diagonalen ~~etter positive~~ om vi har både positive og negative tall. Hvis ja, så indefinitt.

2. test for PD eller ND med D_k: PD: $D_k > 0 \ \forall k$; ND: $(-1)^k D_k > 0 \ \forall k$

3. ~~Hvi~~ Finn og evaluer egenverdiene.

PD: $\lambda_i > 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$

PSD: $\lambda_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$

ND: $\lambda_i < 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$

NSD: $\lambda_i \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$

ID: $\exists \lambda_i > 0, \lambda_j < 0, \ i, j \in \{1, \dots, n\}$.

10,5,2

$$Q(\vec{x}) = \underline{x}^T A \underline{x}$$

a) $x^2 + 2xy + y^2 \Rightarrow (x \;\; y)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

b) $3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_1x_3 + x_2^2 - 4x_2x_3 + 3x_3^2 \Rightarrow \cancel{(x_1 \;\; x_2 \;\; x_3)\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & \\ -2 & & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}$

$$\Rightarrow (x_1 \;\; x_2 \;\; x_3)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3/2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3/2 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

10,5,3a

$x_1^2 + 8x_2^2 \Rightarrow (x_1 \;\; x_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Her ser jeg at egenverdiene er $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 8$ Siden så kan konkludere at den er PD. $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$

10,5,3,b

$x_2^2 + 8x_3^2 \Rightarrow (x_1 \;\; x_2 \;\; x_3)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

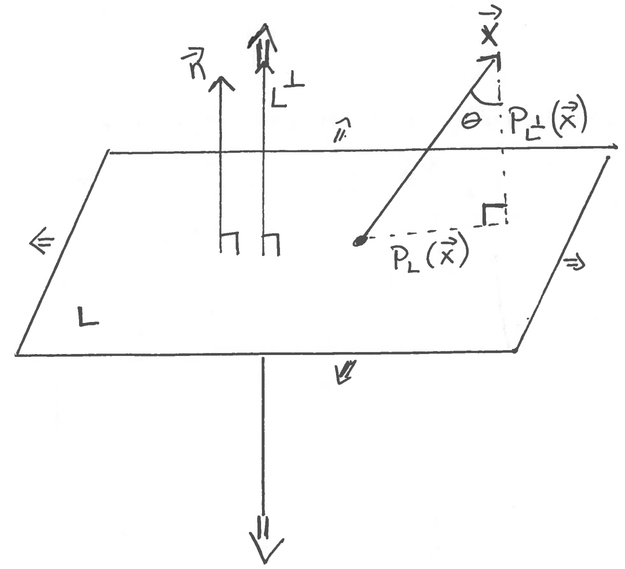
(I) Test for ID: $Q\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$, $Q\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$, $Q\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 8$. Ingen konk.

(II)

	PD		ND
$D_1 = 0$	X	$(-1)^1 D_1 = 0$	X
$D_2 = 0$	X	$(-1)^2 D_2 = 0$	X
$D_3 = 0$	X	$(-1)^3 D_3 = 0$	X

Ingen konk.

(III) Vèa finner egenverdier som er $0, 1, 8$. $\Rightarrow$ PSD.



$\vec{x} = P_L(\vec{x}) + P_{L^\perp}(\vec{x})$ | Flytter over

$P_L(\vec{x}) = \vec{x} - P_{L^\perp}(\vec{x})$ | Kjenner ikke $P_{L^\perp}(\vec{x})$ men vet at

$P_{L^\perp}(\vec{x}) \parallel \vec{n} \Rightarrow P_{L^\perp}(\vec{x}) = c \cdot \vec{n}$

~~proporsjonal~~ parallell

$P_L(\vec{x}) = \vec{x} - c \cdot \vec{n}$ | Vet ikke hva c er, men kan finne analytisk. skalarproduktet:

$$\cos\theta = \frac{P_{L^\perp}(\vec{x}) \cdot \vec{x}}{\|P_{L^\perp}(\vec{x})\| \cdot \|\vec{x}\|}$$ | $P_{L^\perp}(\vec{x}) \parallel \vec{n}$, så

$$\cos\theta = \frac{\vec{n} \cdot \vec{x}}{\|\vec{n}\| \cdot \|\vec{x}\|}$$

| $\cos\theta = \dfrac{\text{nærliggende}}{\text{hypotenus}} =$

$$\cos\theta = \frac{\|P_{L^\perp}(\vec{x})\|}{\|\vec{x}\|}$$ | $P_{L^\perp}(\vec{x}) = c \cdot \vec{n}$

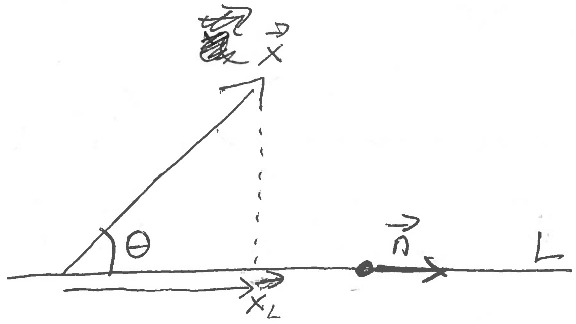
$$\cos\theta = \frac{\|c \cdot \vec{n}\|}{\|\vec{x}\|}$$

$$\cos\theta = c \cdot \frac{\|\vec{n}\|}{\|\vec{x}\|}$$

$$c \cdot \frac{\|\vec{n}\|}{\|\vec{x}\|} = \frac{\vec{n} \cdot \vec{x}}{\|\vec{n}\| \cdot \|\vec{x}\|}$$ | $\cdot \dfrac{\|\vec{x}\|}{\|\vec{n}\|}$

$$c = \frac{\vec{n} \cdot \vec{x}}{\|\vec{n}\|^2}$$

$$P_L(\vec{x}) = \vec{x} - \frac{\vec{n} \cdot \vec{x}}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \vec{n}$$



underrommet L ↓ utspent av ↙

$$L = sp[\vec{n}]$$

Finn $\vec{x}_L$

Vet ikke hva $\vec{x}_L$ er, men vet at den er parallell med $\vec{n}$. $\vec{x}_L \parallel \vec{n} \Rightarrow \vec{x}_L = c \cdot \vec{n}$.

$$\vec{x}_L = c \cdot \vec{n}$$

Vet ikke hva c er, men finner fra skalarproduktet.

$$\cos\theta = \frac{\vec{x}_L \cdot \cancel{\vec{x}}}{\|\vec{x}_L\| \cdot \|\vec{x}\|} \quad \Big| \quad \vec{x}_L \parallel \vec{n}, \text{ så}$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{n} \cdot \vec{x}}{\|\vec{n}\| \cdot \|\vec{x}\|}$$

$$\cos\theta = \frac{adj}{hyp}$$

$$\cancel{\cos\theta = \|\vec{n}\|}$$

$$\cos\theta = \frac{\|\vec{x}_L\|}{\|\vec{x}\|} = \frac{\|c \cdot \vec{n}\|}{\|\vec{x}\|} = c \cdot \frac{\|\vec{n}\|}{\|\vec{x}\|}$$

$$c \cdot \frac{\|\vec{n}\|}{\|\vec{x}\|} = \frac{\vec{n} \cdot \vec{x}}{\|\vec{n}\| \cdot \|\vec{x}\|} \quad \Big| \cdot \frac{\|\vec{x}\|}{\|\vec{n}\|}$$

$$\Downarrow$$

$$c = \frac{\vec{n} \cdot \vec{x}}{\|\vec{n}\|^2}$$

$$\vec{x}_L = \frac{\vec{n} \cdot \vec{x}}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \vec{n}$$

$$P_L(\vec{x}) = \vec{x} - \frac{\vec{n}\cdot\vec{x}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$$

Omskriver til matrisenotasjon:

$\vec{x} = X$

$\vec{n} = C$

$P_L(\vec{x}) = A\vec{x} \rightarrow P_L(\vec{x}) = AX$

Bruker også egenskapene:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\times\vec{b}^T \Rightarrow \left(\frac{\vec{n}\cdot\vec{x}}{\|\vec{n}\|^2}\right)\cdot\vec{n}$$

$$= \left(\frac{\vec{n}\cdot\vec{x}}{\|\vec{n}\|^2}\right)\times\vec{n}^T$$

og

$$\frac{1}{\|\vec{n}\|^2} = (C^TC)^{-1} \quad \text{og } \vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$$

setter inn og faktoriserer

$$AX = \cancel{X}\left(I_3 - C[C^TC]^{-1}C^T\right)X \quad \Big| \quad (VS)X^{-1} = (HS)X^{-1}$$

$$A = \left(I_3 - C(C^TC)^{-1}C^T\right) \quad \Big| \quad C(C^TC)^{-1}C^T = B$$

$$A = I_3 - B$$

$\Downarrow$

$$A = I_3 - \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A = I_3 - \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}\cdot\underset{1\times 1}{(1/2)}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A = I_3 - \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix}1/2\\0\\1/2\end{pmatrix}}\underset{1\times 3}{\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}}$$

$$A = I_3 - \underbrace{\begin{pmatrix}1/2 & 0 & 1/2\\0 & 0 & 0\\1/2 & 0 & 1/2\end{pmatrix}}_{B}$$

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1/2 & 0 & 1/2\\0 & 0 & 0\\1/2 & 0 & 1/2\end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix}1/2 & 0 & -1/2\\0 & 1 & 0\\-1/2 & 0 & 1/2\end{pmatrix}$$