Christian Braathen

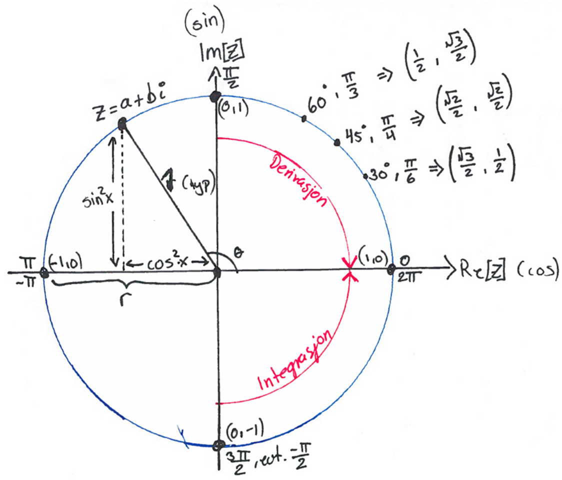
MAT10, 3.gr. time

Vinkelen mellom to vektorer som begge er definert i $\mathbb{R}^n$

(I) $\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|}$, $\theta \in [0^\circ ; 180^\circ]$

Trigonometri

(II)



(V) Punkter og plan

Ett punkt og én retning: $\vec{x} = \vec{p} + t\vec{a}$

To punkter : $\vec{x} = t\vec{r} + (1-t)\vec{s}$

Plan : $\vec{p}(\vec{x}-\vec{a}) = 0$

(III) Matriser

$\xrightarrow{\quad}$ A　　$\downarrow$ B (retningen det ganges med)

$\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$

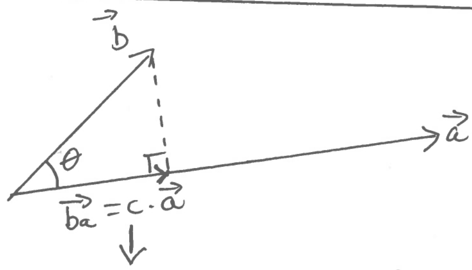
$a \times \underline{b}$　　$\underline{c} \times d$ (husk: rekker før søyler. en 3x4-matrise er 3 rekker og 4 søyler)

- Et matriseprodukt er definert hvis og bare hvis $\underline{b} = \underline{c}$
- Hvis det er definert, blir resultatet en $a \times d$ - matrise.

Noen matriseegenskaper:

- $(A^T)^T = A$ (notasjon for transponert er T og ')
- $A^T + B^T = (A+B)^T$
- $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$

(IV) Projeksjoner, ekstra utledning for forståelse



Vi kjenner ikke c, men kan finne den analytisk via skalarproduktet.

$\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|}$ | $\cos\theta = \dfrac{adj}{hyp} = \dfrac{\|c\cdot\vec{a}\|}{\|\vec{b}\|} = c \cdot \dfrac{\|\vec{a}\|}{\|\vec{b}\|}$

$c\cdot\dfrac{\|\vec{a}\|}{\|\vec{b}\|} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|}$ | $\cdot \dfrac{\|\vec{b}\|}{\|\vec{a}\|}$

$c = \dfrac{\vec{a}\circ\vec{b}}{\|\vec{a}\|^2}$

$\vec{b_a} = c\cdot\vec{a}$ | Setter inn for c

$$\vec{b_a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|^2}\cdot\vec{a}$$

1

2.1.8

"Uttrykk vektoren (4, -11) som en lineær kombinasjon av (2, -1) og (1, 4)"

~~Der oppgaven sier at hvis x har koeffisient 2~~

Metode 1

$$x\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-11\end{pmatrix} \quad \Big| \text{ Ligningsform}$$

$$\begin{aligned} 2x + y &= 4 \\ -x + 4y &= -11 \end{aligned} \quad \Big| \text{ Setter inn } y = 4 - 2x \text{ i II}$$

$$-x + 4(4-2x) = -11 \quad \Big| \text{ Løser opp}$$

$$-9x + 16 = -11 \quad \Big| \text{ Flytter over og } \Sigma$$

$$27 = 9x \quad \Big| \cdot \tfrac{1}{9} \text{ og VS} \leftrightarrow \text{HS}$$

$$\underline{x = 3}$$

$$y = 4 - 2x \quad \Big| \; x = 3$$

$$\underline{y = -2}$$

Svar: $3\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-11\end{pmatrix}$

Metode 2

$$x\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-11\end{pmatrix} \quad \Big| \text{ Matriseform}$$

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\-1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-11\end{pmatrix} \quad \Big| \text{ Koeffisientmatrise}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}2 & 1 & 4\\-1 & 4 & -11\end{array}\right) \begin{matrix}\cdot \frac{1}{2} \\ \cdot(+1)\end{matrix}$$

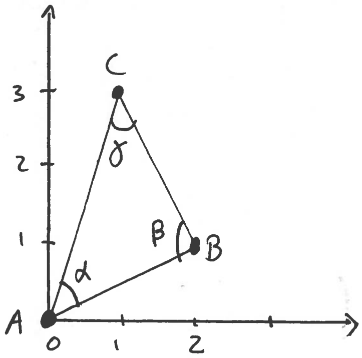
$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 1/2 & 2\\0 & 9/2 & -9\end{array}\right) \begin{matrix}\cdot(-1/2) \\ \cdot \frac{2}{9}\end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 3\\0 & 1 & -2\end{array}\right) \xRightarrow{\text{Matriseform}} \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Ligningsform}} \begin{aligned}x &= 3\\ y &= -2\end{aligned}$$

Metode 3

$$\text{rref}\left(\begin{array}{cc|c}2 & 1 & 4\\-1 & 4 & -11\end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 3\\0 & 1 & -2\end{array}\right) \Rightarrow \begin{aligned}x &= 3\\ y &= -2\end{aligned}$$

Oppgave 2,5,4



Beregn vinklene i ABC.

"Vi finner bare én vinkel nå siden det er samme fremgangsmåte for alle. Men hvis noen ønsker å se alle bli løst, er det bare å komme til meg i pausen."

Finn α

i) Definer vektorene som spenner ut fra punktet A.

- $\vec{AB} = B - A = (2,1) - (0,0) = (2,1)$
- $\vec{AC} = C - A = (1,3) - (0,0) = (1,3)$

ii) finner vinkelen.

Bruker (I)

$$\cos\alpha = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{\|\vec{AB}\|\cdot\|\vec{AC}\|}$$

Setter inn:
$\vec{AB} = (2,1)$
$\vec{AC} = (1,3)$
$\|\vec{AB}\| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$
$\|\vec{AC}\| = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$

$$\cos\alpha = \frac{(2,1)\cdot(1,3)}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}$$

Utleder teller
Stykker opp nevner

$$\cos\alpha = \frac{2\cdot 1 + 1\cdot 3}{\sqrt{5}\cdot(\sqrt{5}\cdot\sqrt{2})}$$

Trekker sammen

$$\cos\alpha = \frac{5}{5\sqrt{2}}$$

Forenkler

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cdot$ arccos

Arccos: hvilken vinkel har cos lik $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\arccos(\cos\alpha) = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$\arccos(\cos\alpha) = \alpha$
og bruker (II), evt. kalkulator, for H.S.

$$\underline{\underline{\alpha = \frac{\pi}{4}}}$$

Ikke gå gjennom disse :

finner β :

$-\ \vec{BA} = A - B = (0,0) - (2,1) = (-2,-1)$

$-\ \vec{BC} = C - B = (1,3) - (2,1) = (-1,2)$

finner vinkelen :

$$\cos\beta = \frac{(-2,-1)\cdot(-1,2)}{\|(-2,-1)\|\cdot\|(-1,2)\|}$$

$$\cos\beta = \frac{2-2}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}$$

$$\cos\beta = 0$$

$$\underline{\beta = \frac{\pi}{2} = 90^\circ}$$

finner γ :

$-\ CA :\ \cancel{(1,3)\ (0,0)}\quad A - C = (0,0) - (1,3) = (-1,-3)$

$-\ CB :\ \cancel{(3)}\quad B - C = (2,1) - (1,3) = (1,-2)$

$$\cos\gamma : \frac{(-1,-3)\cdot(1,-2)}{\|(-1,-3)\|\cdot\|(1,-2)\|} = \frac{5}{\sqrt{10}\sqrt{5}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \cancel{\ } \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\underline{\underline{\gamma = 45^\circ}}$$

4

2.6.1 Bruker (V)

a) Parameterframstilling for linjen som går gjennom punktet $(1,3,2)$ $\vec{p}$ og har retning $(0,-1,1)$ $\vec{a}$.

$$\vec{x} = \vec{p} + t\vec{a}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Svar: $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) = (1, 3-t, 2+t)$, $t \in \mathbb{R}$.

---

b) Finn parameterframstilling for linjen som går gjennom punktene $(3,-2,2)$ og $(10,2,1)$

$$\vec{x} = t\vec{r} + (1-t)\vec{s}$$

| vi velger $r = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $s = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
| men kunne fint valgt $r = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $s = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Får to forskjellige men likeverdige svar.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + (1-t) \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} \cancel{x_1} \\ \cancel{x_2} \\ \cancel{x_3} \end{pmatrix}$

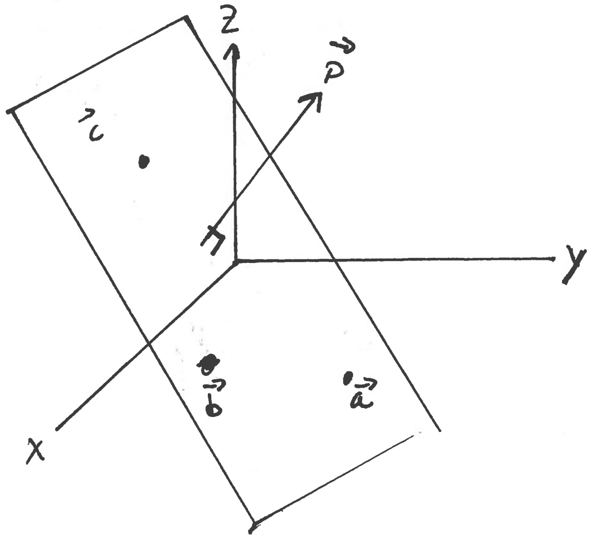
Svar: $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) = (10-7t, 2-4t, 1+t)$

Har du valgt motsatt $\vec{r}$ og $\vec{s}$, ville du fått

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) = (3+7t, -2+4t, 2-t)$.

2,6,3

Bruker V



$\vec{a} = (3,4,-3)$
$\vec{b} = (5,2,1)$
$\vec{c} = (2,-1,4)$

- For å finne likningen for planet, trenger vi en normalvektor $\vec{p}$.

- Denne må være ortogonal på vektorene langs planet, men enn så lenge har vi kun punkter.

- Definerer vektorene $\vec{ab} = \vec{b} - \vec{a} = (5,2,1) - (3,4,-3) = (2,-2,4)$
  og $\vec{ac} = \vec{c} - \vec{a} = (2,-1,4) - (3,4,-3) = (-1,-5,7)$.

Som sagt skal normalvektoren være ortogonal på vektorene langs planet.

- Det gir oss:

$$p \perp \vec{ab} \Rightarrow \vec{p} \bullet \vec{ab} = 0 \Rightarrow 2p_1 - 2p_2 + 4p_3 = 0$$
$$p \perp \vec{ac} \Rightarrow \vec{p} \bullet \vec{ac} = 0 \Rightarrow -p_1 - 5p_2 + 7p_3 = 0 \quad | \text{ flytter over}$$

- $p_1 = -5p_2 + 7p_3$ og $2(-5p_2 + 7p_3) - 2p_2 + 4p_3 = 0 \quad | \ \sum$

$$-12p_2 + 18p_3 = 0 \quad | \text{ Flytter over og } \cdot \tfrac{1}{12}$$

$$\underline{p_2 = \tfrac{3}{2} p_3}$$

$$p_1 = -5\left(\tfrac{3}{2}p_3\right) + 7p_3 \quad | \ \sum$$

$$\underline{p_1 = \tfrac{-1}{2} p_3}$$

Så p_3 kan velges fritt og vi kan substituere den med parameteren t.

6

Det gir.

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cancel{} \frac{-1}{2}t \\ \frac{3}{2}t \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

• Vi må nå finne planets ligning. Det kan vi finne med ~~$\vec{p}(\vec{x}-\vec{a})=0$~~.

$$\vec{p}\,(\vec{x}-\vec{a})=0 \quad \left| \begin{array}{l} \vec{p} = (\frac{-1}{2}t, \frac{3}{2}t, t) \\ \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \\ \vec{a} = (3, 4, -3) \end{array} \right.$$

kunne brukt andre punkter også, men det gir bare samme ligningen

$$\left(\frac{-1}{2}t, \frac{3}{2}t, t\right)(x_1-3, x_2-4, x_3+3)=0$$

Vi må velge en parameterverdi t. Det er likegyldig hvilken dere velger, men det ser ryddigst ut hvis $p_1 = \frac{-1}{2}t$ blir lik 1. Så vi velger $t=-2$ for å få det til. Velger dere andre t-verdier, får dere den påfølgende ligningen ganget med en konstant.

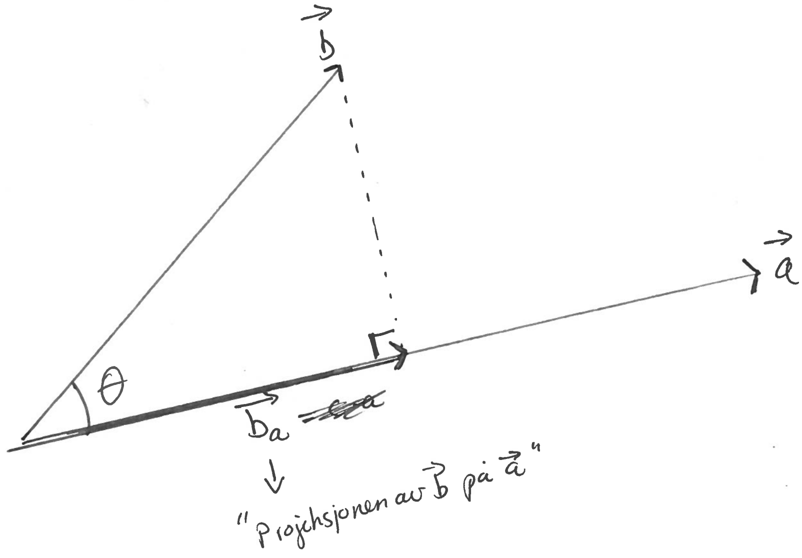
$$(1, -3, -2)(x_1-3, x_2-4, x_3+3)=0 \quad | \text{ Utleder}$$

$$1(x_1-3) - 3(x_2-4) - 2(x_3+3)=0 \quad | \ \Sigma \text{ og flytter over}$$

$$\underline{\underline{x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -3}}$$

2,7,1

Finn projeksjonen av $\vec{b} = (1,2,3)$ på $\vec{a} = (-1,3,2)$



Bruker (IV)

$$\vec{b}_a = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|^2}\cdot a \qquad \Big| \; \begin{array}{l} \vec{a} = (-1,3,2) \\ \vec{b} = (1,2,3) \end{array}$$

$$\vec{b}_a = \frac{(-1,3,2)(1,2,3)}{\left(\sqrt{(-1)^2+3^2+2^2}\right)^2}\cdot(-1,3,2) \qquad \Big| \text{ Utleder}$$

$$\vec{b}_a = \frac{-1+6+6}{(\sqrt{14})^2}\cdot(-1,3,2) \qquad \Big| \; \Sigma$$

$$\vec{b}_a = \frac{11}{14}(-1,3,2)$$

Oppgave 3.2.6

Finn alle X ~~som~~ som er slik at $XA = AX$ når $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Vi bruker (III) :

- XA gir $\underset{a \times b}{\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}} \underset{2 \times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}$

  For at matriseproduktet i det hele tatt skal være definert, må $b = 2$. Resultatet blir da en $a \times 2$-matrise.

- AX gir $\underset{2 \times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}} \underset{a \times b}{\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}}$

  For at matriseproduktet i det hele tatt skal være definert, må $a = 2$. Resultatet blir da en $2 \times b$-matrise.

Så, for at XA og AX skal være definert, har vi $a = 2$ og $b = 2$, hvilket gjør X til en 2×2-matrise.

Må deretter finne X-matrisen som gir $XA = AX$.

$$XA = AX \qquad \Big| \quad X = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \qquad \Big| \quad \text{Utleder}$$

$$\begin{pmatrix} c \cdot 1 + d \cdot 2 & c \cdot 2 + d \cdot 3 \\ e \cdot 1 + f \cdot 2 & e \cdot 2 + f \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1c + 2e & 1d + 2f \\ 2c + 3e & 2d + 3f \end{pmatrix}$$

"Vi har fire likninger og fire ukjente" løsningsform

$$\left.\begin{aligned} c + 2d &= c + 2e \\ 2c + 3d &= d + 2f \\ e + 2f &= 2c + 3e \\ 2e + 3f &= 2d + 3f \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{flytter over}} \left.\begin{aligned} 2d &= 2e \\ 2c + 2d &= 2f \\ 2f &= 2c + 2e \\ 2e &= 2d \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\cdot \frac{1}{2}} \begin{aligned} d &= e \\ c + d &= f \\ f &= c + e \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} d &= e \\ f &= c + e \end{aligned}$$

$$X = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{matrix} c & d \\ d & c + d \end{matrix}$$

Like, så vi fjerner en

9

$$\begin{aligned} c+2d &= c+2e \\ 2c+3d &= d+2f \\ e+2f &= 2c+2e \\ 2e+3f &= 2d+3f \end{aligned}$$

Flytter over

$$\begin{aligned} 2d &= 2e \\ 2c+2d &= 2f \\ 2f &= 2c+2e \\ 2e &= 2d \end{aligned}$$

$2e = 2d$ og $\cdot \frac{1}{2}$

$\cancel{2d = 2e}$

$$\begin{aligned} d &= e \\ c+d &= f \\ f &= c+d \\ e &= d \end{aligned}$$

Fjerner duplikatene

$$\begin{aligned} e &= d \\ f &= c+d \end{aligned} \xRightarrow{\text{hvilket gir oss}} X = \begin{pmatrix} c & d \\ d & c+d \end{pmatrix}, \quad c, d \in \mathbb{R}$$

~~Alternativt:~~

3,4,2

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \underset{n \times n}{\overset{A}{\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}}} \underset{n \times n}{\overset{A}{\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}}} = \begin{pmatrix} a_1^2+0+0+\ldots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n^2+0+0+\ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \overset{A^2}{\begin{pmatrix} a_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix}} \overset{A}{\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} a^3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a^3 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$A^k = \overset{A^{k-1}}{\begin{pmatrix} a_1^{k-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n^{k-1} \end{pmatrix}} \overset{A}{\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} a^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a^k \end{pmatrix}$$

11 (valgfri)

Oppgave 3.5.5

"Er produktet av to symmetriske matriser nødvendigvis symmetrisk?"

- Vi vet at ~~[illegible]~~ når A og B er symmetriske, er $A = A^T$ og $B = B^T$.
- Påstand: $AB = (AB)^T$.

Definerer to generelle matriser som er symmetriske:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} d & e \\ e & f \end{pmatrix}$$

- Finner AB.

$$AB = \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}} \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} d & e \\ e & f \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} ad+be & ae+bf \\ bd+ce & be+cf \end{pmatrix}$$

Kan velges vilkårlig

For at påstanden skal være sann, må disse være like.

$$ae + bf = bd + ce.$$

~~Disse er ikke like for alle matriser~~

~~Det~~ Disse er like kun for noen ~~[illegible]~~ kombinasjoner av a, b, c, d, e, f og dermed ~~er den ikke symmetrisk~~ er påstanden usann.

Eks.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ gir } AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{men} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ gir } AB = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

3,5,2

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = -2$$

- $$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

- $$B^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- $$(A+B)^T = \begin{pmatrix} 3+0 & 2+2 \\ -1+2 & 5+2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

- $$(\alpha A)^T = \begin{pmatrix} (-2)\cdot 3 & (-2)2 \\ (-2)\cdot(-1) & (-2)5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -6 & -4 \\ 2 & -10 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -4 & -10 \end{pmatrix}$$

- $$AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 0+2\cdot 2 & 3\cdot 2+2\cdot 2 \\ -1\cdot 0+5\cdot 2 & -1\cdot 2+5\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$$

- $$AB^T = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$$

- $$B^T A^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 3+2\cdot 2 & 0\cdot(-1)+2\cdot 5 \\ 2\cdot 3+2\cdot 2 & 2\cdot(-1)+2\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$$

- $$A^T B^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 0 -1\cdot 2 & 3\cdot 2 -1\cdot 2 \\ 2\cdot 0+5\cdot 2 & 2\cdot 2+5\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}$$

13

3,1,2

$$A = (a_{ij})_{2\times 3} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

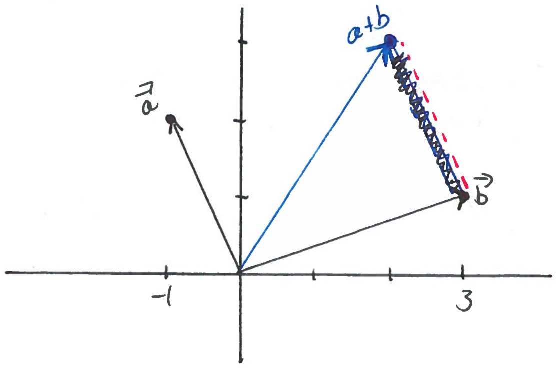
a) $a_{ij} = i+j$ gir $A = \underline{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}}$

b) $a_{ij} = (-1)^{i+j}$ gir $A = \underline{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$

14

2,4,12

$\vec{a} = (-1,2)$
$\vec{b} = (3,1)$



a) $\|\vec{a}\| = \sqrt{(-1)^2+2^2} = \sqrt{5}$

$\|\vec{b}\| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$

~~$\|(a+b)\|$~~

$\|\vec{a}+\vec{b}\| = \sqrt{(-1+3)^2+(2+1)^2} = \sqrt{13}$

$\|\vec{a}+\vec{b}\| < \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$ fordi det er kortere å gå i en rett linje fra origo ($\|\vec{a}+\vec{b}\|$) til $\vec{a}+\vec{b}$ enn å først gå langs $\vec{b}$ ($\|\vec{b}\|$) for så å bevege seg i samme retning som $\vec{a}$ ($\|\vec{a}\|$).

b) Cauchy-Schwarz' ulikhet: $|\vec{a}\cdot\vec{b}| \le \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|$

$|\vec{a}\cdot\vec{b}| \le \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|$

$\|\vec{a}\| = \sqrt{5}$
$\|\vec{b}\| = \sqrt{10}$
$\vec{a}\cdot\vec{b} = (-1)\cdot 3 + 2\cdot 1 = \underline{(-1)}$

$|(-1)| \le \sqrt{5}\sqrt{10}$

$|-1| = 1$

$\underline{\underline{1 \le 5\sqrt{2}}}$ ✓

15

2,4,6

$$\vec{a} = (3,1,1)$$
$$\vec{b} = (0,3,2)$$
$$\vec{w} = (x,y,z)$$

Vi må finne alle $\vec{w} \perp \vec{a} \Rightarrow \vec{w}\cdot\vec{a} = 0 \Rightarrow 3x + y + z = 0$

$\vec{w} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{w}\cdot\vec{b} = 0 \Rightarrow 3y + 2z = 0$

Vi har ~~to~~ to likninger og tre ukjente. Vi må derfor omdanne én variabel til en parameter siden svaret til de to andre variablene avhenger av hva verdien til den 3. (altså parameteren) er.

Setter $z = t$. Det gir
$$3x + y + t = 0$$
$$3y + 2t = 0$$

Likning # 2 gir $y = \frac{-2}{3}t$

Satt inn i # 1. får vi $3x - \frac{2}{3}t + t = 0 \quad | \ \Sigma$

$3x + \frac{1}{3}t = 0 \quad | \ \cdot \frac{1}{3}$ og flytter over

$$x = \frac{-1}{9}t$$

~~Svar: $\vec{w} = \frac{-1}{9}t$,~~

Så vi har $\vec{w} = \left(\frac{-1}{9}t, \frac{-2}{3}t, t\right)$, $t \in \mathbb{R}$.

Men dette ser ikke så pent ut. ~~Så bedre å~~ Siden t kan velges fritt uansett, omskriver vi for å fjerne flest mulig brøker og negative fortegn. Så hvis vi har en parameter som er (-9) ganger større enn t, får vi $\vec{w} = (t, 6t, -9t)$, $t \in \mathbb{R}$. Dette ser cleanere ut.

Merk: hvis $t = 0$, ~~er~~ $\vec{w} = (0,0,0)$. Så alle $\vec{w}$-vektorenes mulige kombinasjoner for t ligger på en rett linje gjennom origo.

16

2.5.5

~~$\|\vec{a}+\vec{b}\| \leq$~~

$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = (a+b)\cdot(a+b)$

$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b$

$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + 2a\cdot b + \|\vec{b}\|^2 \quad \Big| \ |\vec{a}\cdot\vec{b}| \leq \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|$

$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 \leq \|\vec{a}\|^2 + 2\cdot\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\| + \|\vec{b}\|^2$

$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 \leq \left(\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|\right)^2 \quad \Big| \ \sqrt{VS} \leq \sqrt{HS}$

$\underline{\|\vec{a}+\vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|}$