Norges Handelshøyskole / Norwegian School of Economics

Besvarelse i / Exam in: MAT13

Dato/Date: 9/5/17

Antall ark tilsammen (påføres første side) / Total sum pages (write on the first page): 44

Kandidatens nr/Candidate number: 13006

Side/Page: 1

Oppgave 1.

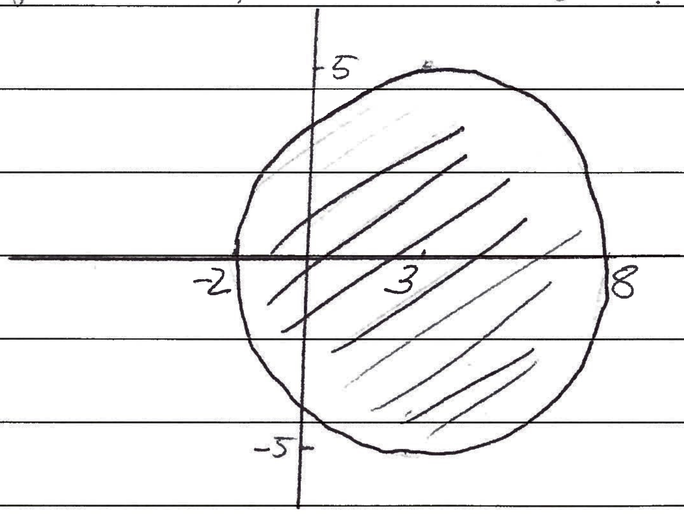
$$\text{maks } f(x,y) = -x + ry \quad , r \in \mathbb{R}$$

$$\text{gitt} \quad (x-3)^2 + y^2 \leq 25$$

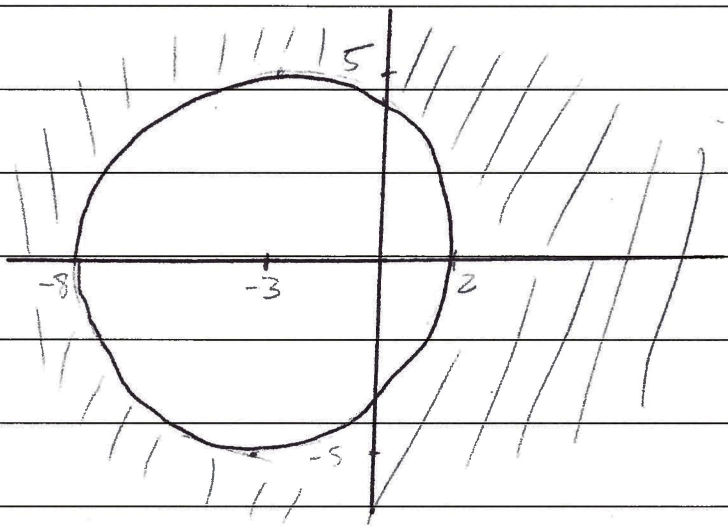
$$(x+3)^2 + y^2 \geq 25$$

Jeg vil gjerne tegne restriksjonene enkeltvis først.

1. restriksjon:



2. restriksjon:

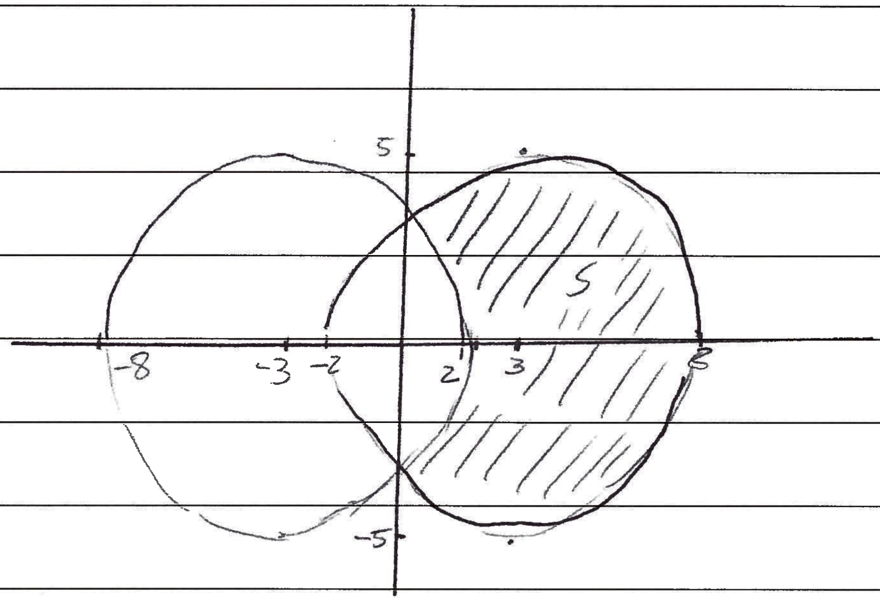


Skravert område er hver sin restriksjon sitt mulighetsområde.

Kopien med rød trekant beholdes av kandidaten/Copy with the red triangle is the candidate´s copy

bl. 800.003 A

Samlet får vi:



• Skriver så problemet på standard form:

$$\text{maks } f(x,y) = -x + ry, \quad r \in \mathbb{R}$$

$$\text{gitt} \quad (x-3)^2 + y^2 \leq 25$$

$$-(x+3)^2 - y^2 \leq -25$$

• Finner gradientene: $\nabla f = (-1, r)$

$$\nabla g_1 = ([2x-6], 2y)$$

$$\nabla g_2 = ([-2x-6], -2y)$$

- Kuhn – Tucker - betingelsene (heretter: K-T-bet.) er:

$$\begin{cases} \nabla f = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i \nabla g_i \\ (x-3)^2 + y^2 \leq 25, \quad \lambda_1 \geq 0 \\ -(x+3)^2 - y^2 \leq -25, \quad \lambda_2 \geq 0 \end{cases}$$ med kompl. slakk.

- Siden vi ikke trenger å sjekke for brudd på føringsbetingelsen, går vi rett til scenariene.

- Vi har $2^2 = 4$ ~~mulig~~ scenarier.

scenario #	λ_1	λ_2	~~Kommentar~~
1	$=0$	$=0$	
2	>0	$=0$	
3	$=0$	>0	
4	>0	>0	

Sjekker samtlige.

scenario 1: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$

Vi har $(-1, r) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \nabla g_1 \\ \nabla g_2 \end{pmatrix}$.

$-1 \neq 0$, så ~~denne~~ et indre punkt inneholder ikke den optimale løsningen.

$\therefore$ Ingen kandidat.

scenario 2: $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$

Vi har

$$\begin{cases} (-1, r) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} [2x-6], 2y \\ \nabla g_2 \end{pmatrix} \\ (x-3)^2 + y^2 = 25 \quad \text{(pga kompl. slakk)} \\ \cancel{(x+3)^2 + y^2 \geq} \quad -(x+3)^2 - y^2 \leq -25. \end{cases}$$

~~Vi~~ Likhetene gir oss:

$$\begin{cases} -1 = \lambda_1 \cdot (2x - 6) \\ r = \lambda_1 \cdot 2y \\ (x-3)^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

/.

- $-1 = \lambda_1 \cdot 2x - 6\lambda_1$

$$2\lambda_1 x = 6\lambda_1 - 1$$

$$\underline{x = 3 - \frac{1}{2\lambda_1}}$$

- $r = \lambda_1 \cdot 2y$

$$\underline{y = \frac{r}{2\lambda_1}}$$

- $(x-3)^2 + y^2 = 25$ | setter inn

$$\left(3 - \frac{1}{2\lambda_1} - 3\right)^2 + \left(\frac{r}{2\lambda_1}\right)^2 = 25$$ | summerer

$$\left(\frac{-1}{2\lambda_1}\right)^2 + \left(\frac{r}{2\lambda_1}\right)^2 = 25$$ | Løser opp

$$\frac{1}{4\lambda_1^2} + \frac{r^2}{4\lambda_1^2} = 25$$ | $\cdot 4\lambda_1^2$

$$1 + r^2 = 100\lambda_1^2$$ | $\sqrt{VS} = \sqrt{HS}$

$$\pm\sqrt{1+r^2} = 10\lambda_1$$ | ~~en~~ en kvadratrot er ikke-negativ og $\lambda_1 > 0$, så beholder kun positiv rot

$$\underline{\underline{\lambda_1 = \frac{\sqrt{1+r^2}}{10}}}$$

- setter inn:

$$X = 3 - \frac{1}{2\lambda_1} \qquad \lambda_1 = \frac{\sqrt{1+r^2}}{10}$$

$$X = 3 - \left(\frac{1}{2\left(\frac{\sqrt{1+r^2}}{10}\right)}\right)$$

$$X = 3 - \frac{5}{\sqrt{1+r^2}}$$

$$Y = \frac{r}{2\frac{\sqrt{1+r^2}}{10}}$$

$$Y = \frac{5r}{\sqrt{1+r^2}}$$

~~Vi har også kravet~~

$$\cancel{-(x+3)^2 - y^2 \leq -25}$$

$$\cancel{-\left(3 - \frac{5}{\sqrt{1+r^2}} + 3\right)^2 - \left(\frac{5r}{\sqrt{1+r^2}}\right) \leq -25}$$

$$\cancel{-\left(6 - \frac{5}{\sqrt{1+r^2}}\right)^2 - \left(\frac{5r}{\sqrt{1+r^2}}\right) \leq -25}$$

/.

Norges Handelshøyskole / Norwegian School of Economics

Besvarelse i
Exam in ....

Dato/Date ....

Antall ark tilsammen (påføres første side)
Total sum pages (write on the first page)

Kandidatens nr/Candidate number 13006

Side/Page 7

• Vi har også kravet:

$$-(x+3)^2 - y^2 \leq -25 \quad \Big| \cdot (-1)$$

$$(x+3)^2 + y^2 \geq 25 \quad \Big| \text{ setter inn for } x \text{ og } y$$

$$\left(3 - \frac{5}{\sqrt{1+r^2}} + 3\right)^2 + \left(\frac{5r}{\sqrt{1+r^2}}\right)^2 \geq 25$$

$$\frac{\left(6\sqrt{1+r^2} - 5\right)^2}{1+r^2} + \frac{25r^2}{1+r^2} \geq 25 \quad \Big| \cdot \underbrace{(1+r^2)}_{>0}$$

$$\left(6\sqrt{1+r^2} - 5\right)^2 + 25r^2 \geq 25 + 25r^2 \quad \Big| \text{ flytter over}$$

$$\left(6\sqrt{1+r^2} - 5\right)^2 \geq 25 \quad \Big| \text{ Kv. rot}$$

$$-5 \leq 6\sqrt{1+r^2} - 5 \leq 5 \quad \Big| \text{ flytter over}$$

$$0 \leq 6\sqrt{1+r^2} \leq 10 \quad \Big| \cdot \frac{1}{6}$$

$$0 \leq \sqrt{1+r^2} \leq \cancel{\tfrac{10}{6}}\ \frac{5}{3} \quad \Big| \text{ Kvadrat}$$

$$0 \leq 1+r^2 \leq \frac{25}{9} \quad \Big| \text{ flytter over}$$

$$-1 \leq r^2 \leq 16/9 \Rightarrow 0 \leq r^2 \leq 16/9 \Rightarrow 0 \leq \cancel{r^2} \leq$$

~~• Løsningskandidat for $r \in [-1, 16/9]$~~ ⁄.

V ~~i har o~~

Kopien med rød trekant beholdes av kandidaten/Copy with the red triangle is the candidate´s copy

bl. 800.003 A

Norges Handelshøyskole / Norwegian School of Economics

Besvarelse i
Exam in ....

Dato/Date ....

Antall ark tilsammen (påføres første side)
Total sum pages (write on the first page)

Kandidatens nr/Candidate number 13006

Side/Page 8

Vi har altså $-1 \leq r^2 \leq 16/9$, men $r^2 \geq 0$

$\therefore \; 0 \leq r^2 \leq 16/9$. | Kvadratrot.

$\underline{0 \leq r}$ og $-4/3 \leq \underline{r \leq 4/3}$

$\therefore$ Kandidat hvis $r \in [0; 4/3]$.

Kopien med rød trekant beholdes av kandidaten/Copy with the red triangle is the candidate´s copy

bl. 800.003 A

Scenario 3: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$

Vi får $(-1, r) = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \nabla g_1 \\ -2x-6, -2y \end{pmatrix}$

$-(x+3)^2 - y^2 = -25$

$(x-3)^2 + y^2 \leq 25$

- $-1 = \lambda_2 \cdot (-2x-6) \iff -1 = -2\lambda_2(x+3)$

$\iff \underline{x+3 = \frac{1}{2\lambda_2}}$

- $r = -2\lambda_2 y \iff \underline{y = \frac{-r}{2\lambda_2}}$

- $-\left(\frac{1}{2\lambda_2}\right)^2 - \left(\frac{-r}{2\lambda_2}\right)^2 = -25 \quad \Big| \cdot (-1)$

$\frac{1}{4\lambda_2^2} + \frac{r^2}{4\lambda_2^2} = 25 \quad \Big| \cdot 4\lambda_2^2$

$1 + r^2 = 100\lambda_2^2 \quad \Big| \quad \sqrt{\sqrt{5}} = \sqrt{1+5}$

$\lambda_2 = \pm \frac{\sqrt{1+r^2}}{10} \quad \Big| \quad \lambda_2 > 0$ og $\sqrt{1+r^2} > 0$

$\therefore$ Beholder bare den positive roten

$$\underline{\underline{\lambda_2 = \frac{\sqrt{1+r^2}}{10}}}$$

- $$X + 3 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+r^2}}{10} \right)^{-1}$$

$$X + 3 = \frac{5}{\sqrt{1+r^2}}$$

$$X = \frac{5}{\sqrt{1+r^2}} - 3$$

- $$y = \frac{-r}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+r^2}}{10} \right)^{-1}$$

$$y = \frac{-5r}{\sqrt{1+r^2}}$$

• Vi har også krav om

$(x-3)^2 + y^2 \leq 25$ | setter inn

$\left(\frac{5}{\sqrt{1+r^2}} - 6\right)^2 + \left(\frac{-5r}{\sqrt{1+r^2}}\right)^2 \leq 25$

$\frac{(5 - 6\sqrt{1+r^2})^2}{1+r^2} + \frac{25r^2}{1+r^2} \leq 25$ | $\cdot 1+r^2 > 0$

$(5 - 6\sqrt{1+r^2})^2 + 25r^2 \leq 25 + 25r^2$

$(5-6\sqrt{1+r^2})^2 \leq 25$ | Kv. rot

$-5 \leq 5-6\sqrt{1+r^2} \leq 5$

$-10 \leq -6\sqrt{1+r^2} \leq 0$

$\frac{5}{3} \geq \sqrt{1+r^2} \geq 0$ | bytter side

$0 \leq \sqrt{1+r^2} \leq \frac{5}{3}$ | kvadrat

$0 \leq 1+r^2 \leq \frac{25}{9}$ | flytter

$-1 \leq r^2 \leq 16/9$ | $r^2 \geq 0$

$0 \leq r^2 \leq 16/9$ | kv. rot

$0 \leq r \;,\; -4/3 \leq r \leq 4/3$

$\therefore$ Kandidat hvis $r \in [0, 4/3]$.

Scenario 4: $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$.

$$(-1, r) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2x-6, & 2y \\ -2x-6, & -2y \end{pmatrix}$$

$$-1 = \lambda_1 (2x-6) + \lambda_2(-2x-6)$$

$$r = \lambda_1 (2y) + \lambda_2 (-2y)$$

$$(x-3)^2 + y^2 = 25 \Leftrightarrow y^2 = 25 - (x-3)^2$$

$$-(x+3)^2 - y^2 = -25 \Leftrightarrow 25 = (x+3)^2 + y^2$$

$$y^2 = 25 - (x+3)^2$$

- $25 - (x-3)^2 = 25 - (x+3)^2$

$$(x+3)^2 - (x-3)^2 = 0$$

$$(x^2 + 6x + 9) - (x^2 - 6x + 9) = 0$$

$$12x = 0$$

$$\underline{\underline{x = 0}}$$

- $y^2 = 25 - (0+3)^2$

$$y^2 = 25 - 9$$

$$y^2 = 16$$

$$\underline{\underline{y = \pm 4}}$$

Norges Handelshøyskole / Norwegian School of Economics

Besvarelse i
Exam in ....

Antall ark tilsammen (påføres første side)
Total sum pages (write on the first page)

Kandidatens nr/Candidate number 13 006

Side/Page 13

Dato/Date ....

- $-1 = \lambda_1(0-6) + \lambda_2(-0-6)$

$r = 2\lambda_1 \cdot y - 2\lambda_2 y$

- $-1 = -6\lambda_1 - 6\lambda_2$

$6\lambda_1 + 6\lambda_2 = 1$

- Har to y'er.

$\cancel{y=y}$

$\begin{cases} r = 8\lambda_1 - 8\lambda_2 \end{cases}$

- $\cancel{8}\begin{pmatrix} 6\lambda_1 + 6\lambda_2 = 1 \\ 8\lambda_1 - 8\lambda_2 = r \end{pmatrix}$

- $\lambda_1 + \lambda_2 = 1/6 \iff \lambda_1 = \frac{1}{6} - \lambda_2$

$8\lambda_1 - 8\lambda_2 = r$

$8\left(\frac{1}{6} - \lambda_2\right) - 8\lambda_2 = r$

$\frac{8}{6} - 16\lambda_2 = r$

$16\lambda_2 = \frac{8}{6} - r$

$\lambda_2 = \frac{1}{12} - \frac{1}{16} r > 0$

$\frac{4}{3} > r$ Krav.

Kopien med rød trekant beholdes av kandidaten/Copy with the red triangle is the candidate´s copy

bl. 800.003 A

Besvarelse i
Exam in ....

Antall ark tilsammen (påføres første side)
Total sum pages (write on the first page)

Kandidatens nr/Candidate number 13006

Side/Page 14

Dato/Date ....

- $y = -4$

$$6\lambda_1 + 6\lambda_2 = 1 \iff \lambda_1 = \frac{1}{6} - \lambda_2$$

$$r = -8\lambda_1 + 8\lambda_2$$

$$r = -8\left(\frac{1}{6} - \lambda_2\right) + 8\lambda_2$$

$$r = \frac{-4}{3} + \cancel{8\lambda} \; 16\lambda_2$$

$$16\lambda_2 = r + 4/3$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{16}r + \frac{1}{12} > 0$$

$$\underline{\underline{r > -\frac{4}{3}}}$$

Vi har følgende kandidater:

	X	Y
$r \in [0; 4/3]$	$3 - \frac{5}{\sqrt{1+r^2}}$	$\frac{5r}{\sqrt{1+r^2}}$
$r \in [0; 4/3]$	$\frac{5}{\sqrt{1+r^2}}$ -3	$\frac{-5r}{\sqrt{1+r^2}}$

~~$r \in \langle 4/3; \infty$~~

$r \in \langle -\infty; 4/3 \rangle$	0	4
$r \langle -4/3; \infty \rangle$	0	-4

Vi har overlapp:

$d(x,y)$

$\#1 \; r \in [0; 4/3]$ $\quad \frac{5}{\sqrt{1+r^2}} - 3 + \frac{5r^2}{\sqrt{1+r^2}}$

$\#2 \; r \in [0; 4/3]$ $\quad 3 - \frac{5}{\sqrt{1+r^2}} - \frac{5r^2}{\sqrt{1+r^2}}$

$\#3 \; r \langle -\infty; 4/3 \rangle$ $\quad 4r$

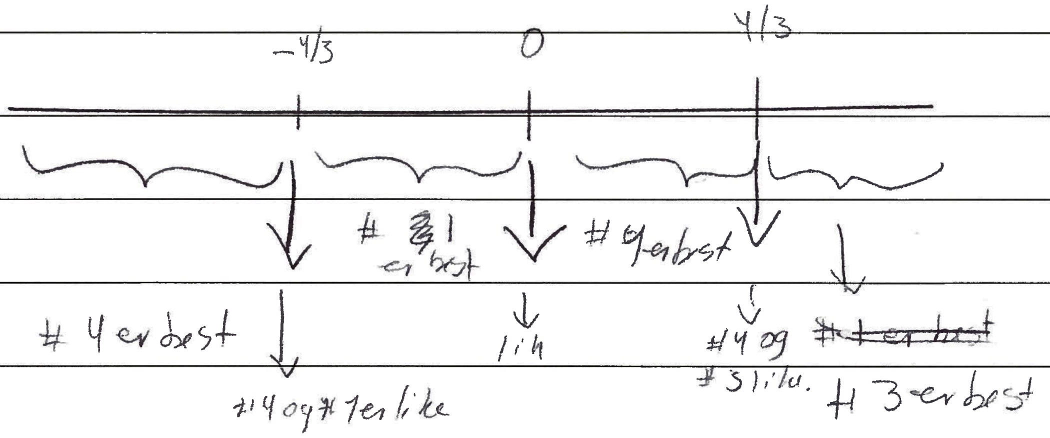
$\#4 \; r \in \langle -4/3; \infty \rangle - 4r.$

#1 $f(x,y) = \frac{5+r^2}{\sqrt{1+r^2}} - 3 = \underline{5\sqrt{1+r^2} - 3}$ ✓

#2 $f(x,y) = 3 - \frac{5+5r^2}{\sqrt{1+r^2}} = 3 - 5(\sqrt{1+r^2})$

#3 $f(x,y) = 4r$

#4 $f(x,y) = -4r$



b)

Knekk punkter OK ?

$$\therefore V(r) = \begin{cases} -4r, & r \in \langle -\infty; -4/3 \rangle \\ 5\sqrt{1+r^2} - 3, & r \in [-4/3; 4/3] \\ 4r, & r \in \langle 4/3; \infty \rangle. \end{cases}$$

~~Sjekker knekker: de er like så~~

$\cancel{\frac{\partial}{\partial r}[-4r] = -4 \quad \text{og} \quad \frac{5}{2}\left(1+\frac{-4}{3}\right)^{-1/2} \cdot 3}$

Norges Handelshøyskole / Norwegian School of Economics

Besvarelse i
Exam in ....

Antall ark tilsammen (påføres første side)
Total sum pages (write on the first page)

Kandidatens nr/Candidate number 13006

Side/Page 17

Dato/Date ....

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[5\left(1+r^2\right)^{1/2}-3\right]$$

$$= \frac{5}{2}\left(1+r^2\right)^{-1/2}\cdot 2r - 3$$

$i\ r = -4/3 = \cancel{-11/3} = -7$

$\frac{\partial}{\partial r}$; $r = 4/3$: -7.

~~Svar~~ ~~Jeg~~

$r = -4/3$: $-16/3$ og $5\sqrt{1+(\frac{-4}{3})^2} \cdot 4 - 3 = -\frac{16}{3}$

$r = 4/3$: $16/3$ og $5\sqrt{1+(\frac{4}{3})} - 3 = 16/3$ ✓

Svar: Kontinuerlig men ikke deriverbar.

Kopien med rød trekant beholdes av kandidaten/Copy with the red triangle is the candidate´s copy

bl. 800.003 A

~~Mat~~

oppgave 7:

Bruker standardform:

$\nabla g_1 = (2x-6, 2y)$

$\nabla g_2 = (-2x-6, -2y)$

$\nabla g_3 = (1, 1)$

1 aktiv

$g_1: (2x-6, 2y) = \vec{0}$ $\quad x=3, y=0$

men g_1 er ikke aktiv her. OK!

$g_2: (-2x-6, -2y) = \vec{0}$ $\quad x=-3, y=0.$

men g_2 ikke aktiv her.

OK!

$g_3: (1,1) \neq \vec{0}$ OK!

<u>2 aktive</u>

g_1, g_2

$$\begin{vmatrix} 2x-6 & -2x-6 \\ 2y & -2y \end{vmatrix} = 0$$

FB bryter hvis det = 0

$$(2x-6)(-2y) - 2y(-2x-6) = 0$$

$$2y(2x-6) + 2y(-2x-6) = 0$$

$$2y(2x-6) - 2y(2x-6) = 0$$

$$(2x-6)(2y-2y) = 0$$

$$2x-6=0$$

$x=3$. Men g_1 og g_2 ikke aktive: $x=3$. OK!

Q2, og 93

$$\begin{vmatrix} 2x-6 & 1 \\ 2y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$2x - 6 - 2y = 0$

$2x - 2y = 6 \quad \bigg| \ \cancel{x = x + y - y} \quad \cdot \frac{1}{2}$

$x - y = 3 \quad \bigg| \ x = x + y - y$

$(x+y) - 2y = 3 \quad \bigg| \ x + y = c$ når g_3 aktiv

$c - 2y = 3$

$c = 3 + 2y$ som er slik at $y^2 = 25 - (x-3)^2$

g_2 og g_3 aktiv:

$$\begin{vmatrix} -2x-6 & 1 \\ -2y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$-2x - 6 + 2y = 0$

$\cancel{-6 = 2x - 2y}$

$2y - 2x = 6 \quad | \cdot \frac{1}{2}$

$y - x = 3 \quad | \cancel{y = y + x - x} \quad \cdot(-1)$

$x - y = -3 \quad | \; x = x + y - y$

$(x+y) - 2y = -3 \quad | \; x + y = c$

$c - 2y = -3$

$\cancel{3} \; c = 2y - 3$ Som er slik at $y^2 = 25 - (x+3)^2$

Norges Handelshøyskole / Norwegian School of Economics

Besvarelse i
Exam in ....

Antall ark tilsammen (påføres første side)
Total sum pages (write on the first page)

Kandidatens nr/Candidate number 13006

Dato/Date ....

Side/Page 22

3 aktive.

Disse ~~eraltti~~ har alltid budd.

- $(x-3)^2 + y^2 = 25$

$(x+3)^2 + y^2 = 25$

$x + y = C$

- $(x-3)^2 + y^2 = (x+3)^2 + y^2$

$(x-3)^2 = (x+3)^2$

$(x^2 - 6x + 9) - (x^2 + 6x + 9) = 0$

$-12x = 0$

$x = 0$

$y = \pm 5 \quad \rightarrow \quad C = 5 \mp x$

s.a. $(x-3)^2 + y^2 = 25$

- ~~+ tillegg~~

Kopien med rød trekant beholdes av kandidaten/Copy with the red triangle is the candidate´s copy

bl. 800.003 A

Norges Handelshøyskole / Norwegian School of Economics

Besvarelse i
Exam in ....

Antall ark tilsammen (påføres første side)
Total sum pages (write on the first page)

Kandidatens nr/Candidate number 13006

Side/Page 23

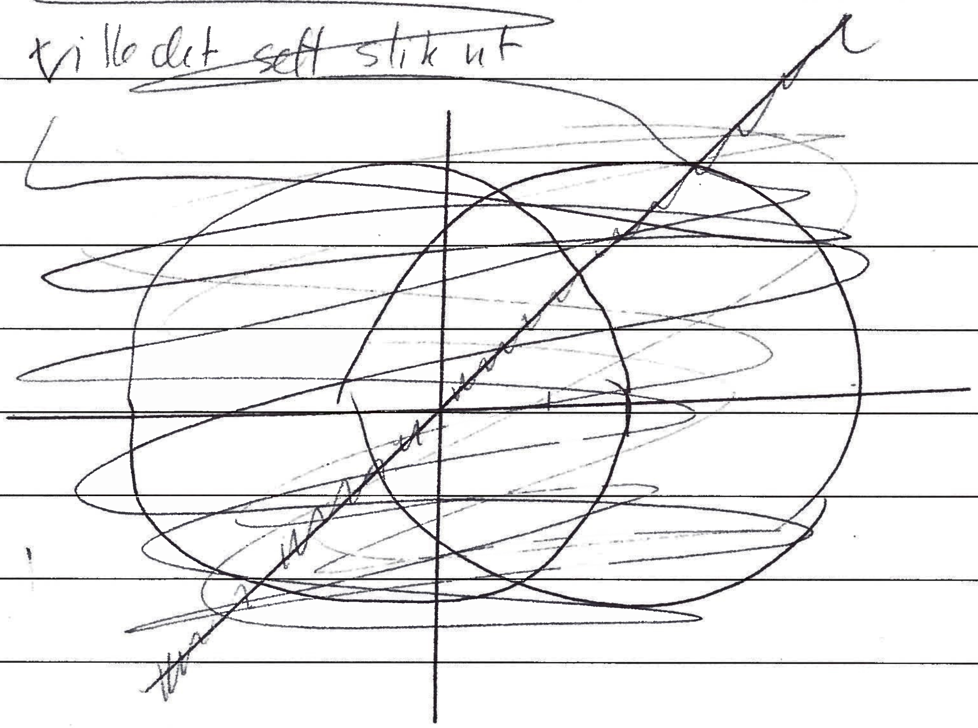
Dato/Date ....

Vi har da for følgende.

• Vi har FB-brudd, og der med løsningskandidater herifra for alle

$$\begin{cases} c = 2+2y \text{ som er slik at } y^2 = 25-(x-3)^2 \\ c = 2y-3 \text{ } \cancel{\text{som er}} \text{ som er slik at } y^2 = 25-(x+3)^2 \\ c = 5 \mp x \text{ som er slik at } (x-3)^2+y^2 = 25 \text{ og } (x+3)^2+y^2=25 \end{cases}$$

Jeg kunne dekomponert y og x mer, ~~så~~ for å få en konkret c, men jeg rekker ikke ~~alle~~ å gjøre dette. Hvis ~~du ser på side 2,~~ ~~ser man hvor FB ville vært de forskjellige betingelsene er aktive~~. Ved å ha en lineær restriksjon, ville det ~~sett slik ut~~



Oppgave 3.

$S = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max(|x|, |y|) \leq 1 \}$.

Vi kan bruke at $|x| = \max(-x, x)$
og $|y| = \max(-y, y)$

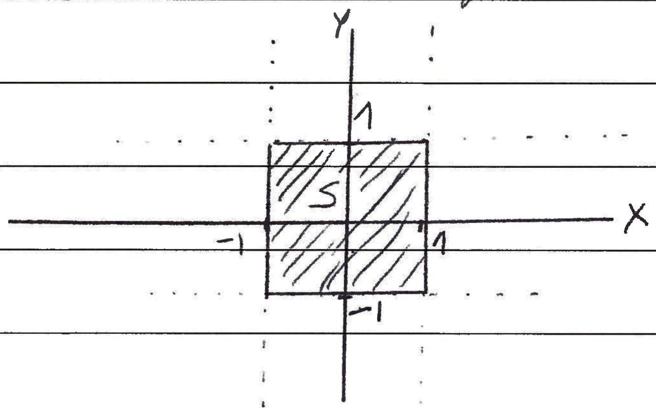
$S = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max(-x, x, -y, y) \leq 1 \}$

Vi kan bruke at $\max(a, b) \leq c$ betyr at
$a \leq c$ og $b \leq c$.

$S = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{-x \leq 1}_{\text{konveks}}, \underbrace{x \leq 1}_{\text{konveks}}, \underbrace{-y \leq 1}_{\text{konveks}}, \underbrace{y \leq 1}_{\text{konveks}} \}$

$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -x \leq 1\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 1\} \cap$
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -y \leq 1\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 1\}$.

$S = \bigcap_{i=1}^{4} S_i$, hvor S_i, $i = 1,2,3,4$ er de 4 konvekse mengdene ovenfor, er derfor konveks.



Norges Handelshøyskole / Norwegian School of Economics

Besvarelse i
Exam in ....

Antall ark tilsammen (påføres første side)
Total sum pages (write on the first page)

Kandidatens nr/Candidate number 13006

Side/Page 25

Dato/Date ....

Oppgave 4 a)

- Definisjonen sier at $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definert over en konveks mengde S i $\mathbb{R}^n$ er konkav hvis

$$f(\lambda \vec{x}^0 + [1-\lambda]\vec{x}^1) \geq \lambda f(\vec{x}^0) + (1-\lambda) f(\vec{x}^1)$$

$$\forall\ \vec{x}^0, \vec{x}^1 \in S,\ \forall \lambda \in [0,1].$$

- Vi bruker denne:

$$f(\lambda \vec{x}^0 + [1-\lambda]\vec{x}^1) \geq \lambda f(\vec{x}^0) + (1-\lambda) f(\vec{x}^1)$$

$\varphi(t)$ er voksende, så ulikheten holder når vi tar $\varphi(VS) \geq \varphi(HS)$

$$\varphi\left(f(\lambda \vec{x}^0 + [1-\lambda]\vec{x}^1)\right) \geq \varphi\left(\lambda f(\vec{x}^0) + (1-\lambda) f(\vec{x}^1)\right)$$

$\varphi(f(\vec{x})) = g(\vec{x})$

$$g(\lambda \vec{x}^0 + [1-\lambda]\vec{x}^1) \geq \varphi\left(\lambda f(\vec{x}^0) + (1-\lambda) f(\vec{x}^1)\right) \qquad (\star)$$

- $\varphi(t)$ er konkav, så $\cancel{\varphi(\lambda f(\vec{x}^0) + (1-\lambda) f(\vec{x}^1))}$

$$\varphi\left(\lambda f(\vec{x}^0) + (1-\lambda) f(\vec{x}^1)\right) \geq \lambda \varphi(f(\vec{x}^0)) + (1-\lambda)\varphi(f(\vec{x}^1)).$$

Fordi høyre side av ulikheten også er mindre enn ~~høyr~~ venstre side i ulikhet $(\star)$, kan vi substituere inn

./.

Norges Handelshøyskole / Norwegian School of Economics

Besvarelse i
Exam in ....

Antall ark tilsammen (påføres første side)
Total sum pages (write on the first page)

Kandidatens nr/Candidate number 13006

Side/Page ~~2~~ 26

Dato/Date ....

$$g\left(\lambda \vec{x}^0 + [1-\lambda]\vec{x}^1\right) \geq \lambda \varphi\left(f(\vec{x}^0)\right) + (1-\lambda)\varphi\left(f(\vec{x}^1)\right)$$

$\varphi(f(\vec{x})) = g(x)$

(✱✱)

$$g\left(\lambda \vec{x}^0 + (1-\lambda)\vec{x}^1\right) \geq \lambda g(\vec{x}^0) + (1-\lambda) g(\vec{x}^1), \text{ der } g(\vec{x}) = \varphi(f(\vec{x})).$$

Svar: Ulikhet (✱✱) er identisk med definisjonen av en konkav funksjon, så vi har bevist at $g(\vec{x}) = \varphi(f(\vec{x}))$ er konkav.

Oppgave 4b

· $f(x,y) = \ln(1-x^2-y^2)$

· Siden $f(x,y)$ er en C^2-funksjon, kan jeg løse dette med en hessisk matrise.

· Først, litt mellomregninger:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-2x}{1-x^2-y^2} = -2x \cdot (1-x^2-y^2)^{-1}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2(1-x^2-y^2)^{-1} - 2x \cdot (-1)(1-x^2-y^2)^{-2} \cdot (-2x)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2(1-x^2-y^2)^{-1} - (-2x)^2(1-x^2-y^2)^{-2}$$

Tilsvarende vil vi få for ~~y de~~ partiellderivert av y.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y(1-x^2-y^2)^{-1}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2(1-x^2-y^2)^{-1} - (-2y)^2(1-x^2-y^2)^{-2}$$

∂

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}\left[-2x \cdot (1-x^2-y^2)^{-1}\right]$$

$$= 0 \cdot (1-x^2-y^2)^{-1} + (-2x) \cdot (-1) \cdot (1-x^2-y^2)^{-2} \cdot (-2y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -(-2)^2 xy \cdot (1-x^2-y^2)^{-2}$$

Setter opp den hessiske matrisen:

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} \left[(-2)(1-x^2-y^2)^{-1} - (-2x)^2(1-x^2-y^2)^{-2}\right] & \left[-(-2)^2 xy \cdot (1-x^2-y^2)^{-2}\right] \\ \left[-(-2)^2 xy \cdot (1-x^2-y^2)^{-2}\right] & \left[(-2)(1-x^2-y^2)^{-1} - (-2y)^2(1-x^2-y^2)^{-2}\right] \end{pmatrix}$$

Uttrykkene på diagonalen kan omskrives så vi kan faktorisere.

$$(1-x^2-y^2)^{-1} = (1-x^2-y^2)^{-2} \cdot (1-x^2-y^2)$$

På diagonalen får vi dermed

$$(1-x^2-y^2)^{-2} \cdot \left[(-2)(1-x^2-y^2) - (-2x)^2\right] \quad \begin{pmatrix} 1. \text{ ~~linje~~ rekke} \\ 1. \text{ søyle} \end{pmatrix}$$

og $$(1-x^2-y^2)^{-2} \cdot \left[(-2)(1-x^2-y^2) - (-2y)^2\right] \quad \begin{pmatrix} 2. \text{ rekke} \\ 2. \text{ søyle} \end{pmatrix}$$

Besvarelse i
Exam in ....

Antall ark tilsammen (påføres første side)
Total sum pages (write on the first page)

Kandidatens nr/Candidate number 13006

Side/Page 29

Dato/Date ....

$$D^2 f(x,y) = \underbrace{(1-x^2-y^2)^{-2}}_{>0 \text{ fordi } x^2+y^2<1} \cdot \begin{pmatrix} [(-2)(1-x^2-y^2)-(-2x)^2] & -(-2)^2 xy \\ -(-2)^2 xy & [(-2)(1-x^2-y^2)-(-2y)^2] \end{pmatrix}$$

Vi ~~tester deretter~~

Vi renskriver matrisen:

$$D^2 f(x,y) = (1-x^2-y^2)^{-2} \cdot \begin{pmatrix} [-2\cdot(1-x^2-y^2)-4x^2] & [-4xy] \\ [-4xy] & [-2(1-x^2-y^2)-4y^2] \end{pmatrix}$$

Tester først for NSD.

$$(-1)^1 \Delta_1 = \begin{cases} \cancel{2}(-1)^1 \cdot [-2\cdot(1-x^2-y^2)-4x^2] \geq 0 \\ (-1)^1 \cdot [-2(1-x^2-y^2)-4y^2] \geq 0 \end{cases}$$

$$(-1)^2 \Delta_2 = 1 \cdot \left([-2(1-x^2-y^2)-4x^2][-2(1-x^2-y^2)-4y^2] - [-4xy]^2\right) \geq 0$$

Vi jobber med disse tre kravene.

- $2(1-x^2-y^2)+4x^2 \geq 0$

$x^2+y^2<1$, så $1-(x^2+y^2)>0$. Begge leddene er ikke-negative, så likheten holder. ✓

- $2(1-x^2-y^2)+4y^2 \geq 0$

Av tilsvarende resonnement som over, holder likheten ✓.

- $[-2(1-x^2-y^2)-4x^2][-2(1-x^2-y^2)-4y^2]-[-4xy]^2 \geq 0$

$[-2+2x^2+2y^2-4x^2][-2+2x^2+2y^2-4y^2]-[-4xy]^2 \geq 0$

Trekker sammen:

$[-2-2x^2+2y^2][-2+2x^2-2y^2]-16x^2y^2 \geq 0$

Faktoriserer:

$[2(-1-x^2+y^2)][2(-1+x^2-y^2)]-16x^2y^2 \geq 0$

Trekker ut

$2 \cdot 2 \cdot (-1-x^2+y^2)(-1+x^2-y^2)-16x^2y^2 \geq 0 \quad \Big| \cdot \frac{1}{4}$

$(-1-x^2+y^2)(-1+x^2-y^2)-4x^2y^2 \geq 0$

Ganger sammen.

$$\begin{pmatrix} 1 - x^2 + y^2 - x^4 + x^2y^2 - y^4 \\ + x^2 - y^2 \qquad\qquad + x^2y^2 \end{pmatrix} - 4x^2y^2 \geq 0$$

Trekker sammen

$$1 - x^4 + 2x^2y^2 - y^4 - 4x^2y^2 \geq 0$$

Trekker sammen

$$1 - x^4 - y^4 - 2x^2y^2 \geq 0$$

Flytter over

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 \leq 1$$

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)(x^2 + y^2)$$

$$\underbrace{(x^2+y^2)}_{<1}\underbrace{(x^2+y^2)}_{<1} \leq 1$$

Et produkt av to tall som begge er mindre enn 1, vil være mindre enn 1. Ulikheten er oppfylt, og funksjonen $f(x,y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$ er derfor konkav.

fordi $\forall k.\,(-1)^k \Delta_k \geq 0$ er besvart

Vi vil deretter teste om funksjonen ~~kan~~ er strengt konkav. Tester for ND og bruker utregningene mine fra de to foregående sidene. Jeg vil derfor ikke utlede alt på nytt. Husk den strenge ulikheten: $\forall k . (-1)^k D_k > 0$

$$\cdot (-1)^1 D_1 = \underbrace{2(1-x^2-y^2)}_{>0} + \underbrace{4x^2}_{\geq 0} > 0 \quad \checkmark$$

siden ett ledd er større enn null og det andre er ikke-negativt, holder den strenge ulikheten.

$$\cdot (-1)^2 D_2 = 1-(x^2+y^2)(x^2+y^2) > 0 \quad \checkmark$$

Flytter over: $1 > \underbrace{(x^2+y^2)}_{<1}\underbrace{(x^2+y^2)}_{<1}$

Et produkt av to tall som begge er mindre enn 1, vil være mindre enn 1. Ulikheten er derfor oppfylt.

Siden begge ulikhetene holder, kan vi konkludere og si at funksjonen er strengt konkav.

Oppgave 5 a)

- setter problemet på standardform

$$\text{maks } z = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

$$\text{gitt} \quad 0x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 5$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 4$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 7$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0.$$

- Innfører slakkvariabler. For å ha en tydeligere oversikt inn mot oppgave b, kaller jeg disse r_1, r_2, r_3 istedenfor det typiske x_4, x_5, x_6.

Vi får:

$$\text{maks } z = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 0r_1 + 0r_2 + 0r_3$$

$$\text{gitt} \quad 0x_1 + 2x_2 + 3x_3 + r_1 = 5$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + r_2 = 4$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + r_3 = 7$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0, r_1 \geq 0, r_2 \geq 0, r_3 \geq 0$$

- Dermed får vi

$$c = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

• Begynner med $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ som startpunkt.

Vi får

$$X_B = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}, X_N = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$C_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, C_N = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\cancel{B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad N = (}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Vi har krav om $B^{-1}b \geq 0$ komponentvis. For å ~~bevis~~ demonstrere at jeg kan finne invers, gjør jeg det én gang (men ikke mer siden det ikke er pensum). Jeg gjør dette dog i deloppgave c siden det er der det passer seg best å vise.

~~Kravet er~~ Et av kravene er altså $B^{-1}b = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \geq 0$ ✓

Vi har også krav om $C_N^T - C_B^T B^{-1} N \leq 0$ komponentvis.

Jeg vil vise matriseoperasjonene kun én gang siden det ~~er~~ er MET020- og MAT010-pensum.

/.

Setter inn:

$$(2\ 3\ 2) - (0\ 0\ 0)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0&2&3\\1&1&2\\1&2&3\end{pmatrix} \quad \Big|\ I^{-1} = I$$

$$= (2\ 3\ 2) - (0\ 0\ 0)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&3\\1&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}$$

$$= (2\ 3\ 2) - (0\ 0\ 0)\begin{pmatrix}0+0+0 & 2+0+0 & 3+0+0\\0+1+0 & 0+1+0 & 0+2+0\\0+0+1 & 0+0+2 & 0+0+3\end{pmatrix}$$

$$= (2\ 3\ 2) - (0\ 0\ 0)\begin{pmatrix}0&2&3\\1&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}$$

$1\times 3 \qquad 3\times 3$

$$= (2\ 3\ 2) - (0+0+0\quad 0+0+0\quad 0+0+0)$$

$$= (2\ 3\ 2) - (0\ 0\ 0)$$

$$= (2\ \underline{3}\ 2) \not\leq 0 \text{ komponentvis}$$

Ikke optimal og flytter X_2 inn i basis

(siden $X_N^T = (x_1\ \underline{x_2}\ x_3)$) samme tilhørende plassering som 3.

- Spørsmålet er nå hvilken variabel vi skal flytte ut av basis.

./.

Vi har $x_B = B^{-1}b - B^{-1}N x_N$

Setter inn, holder alle variabler i x_N unntatt x_2 lik 0.

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_2 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

Krav om $x_B \geq 0$.

$r_1: \ 0 \leq 5 - 2x_2$
$r_2: \ 0 \leq 4 - x_2$
$r_3: \ 0 \leq 7 - 2x_2$

flytter over

$r_1: \ 2x_2 \leq 5 \quad | \cdot \frac{1}{2}$
$r_2: \ x_2 \leq 4$
$r_3: \ 2x_2 \leq 7 \quad | \cdot \frac{1}{2}$

$r_1: \ x_2 \leq 5/2$ $\longrightarrow$ r_1 blir null først når x_2 økes, så vi flytter r_1 ut av basis.
$r_2: \ x_2 \leq 4$
$r_3: \ x_2 \leq 7/2$

2. hjørnepunkt

$$X_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}, \quad X_N = \begin{pmatrix} x_1 \\ r_1 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$c_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_N = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Krav om $B^{-1}b = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 3/2 \\ 2 \end{pmatrix} \geq 0$ komponentvis. OK ✓

Krav om $c_N^T - c_B^T B^{-1} N = \begin{pmatrix} \underline{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \nleq 0$ komponentvis.

↳ flytter x_1 inn i basis.

∘ Hvilken skal vi flytte ut? Bruker $X_B = B^{-1}b - B^{-1}N X_N$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 3/2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 3/2 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 3/2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Krav om at $X_B \geq 0$

x_2: $0 \leq 5/2$ ✓

r_2: $\cancel{3}\ 0 \leq 3/2 - x_1 \iff \underline{x_1 \leq 3/2}$

r_3: $0 \leq 2 - x_1$ $\quad x_1 \leq 2.$

Viser at r_2 blir null først når vi øker x_1, så vi flytter r_2 ut av basis.

3. hjørnepunkt

$$X_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ r_3 \end{pmatrix}, \quad X_N = \begin{pmatrix} r_2 \\ r_1 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$C_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Krav om $B^{-1}b = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \geq 0$ komponentvis ✓

Krav om $C_N^T - C_B^T B^{-1} N = \begin{pmatrix} -2 & \frac{-1}{2} & \frac{-7}{2} \end{pmatrix} \leq 0$ ∴ optimum.

Svar: Begge kravene våre er oppfylt, og det optimale er derfor $X^* = (x_1^* \; x_2^* \; x_3^* \; r_1^* \; r_2^* \; r_3^*) = \left(\frac{3}{2} \; \frac{5}{2} \; 0 \; 0 \; 0 \; \frac{1}{2}\right)$, hvilket gir $Z^* = c \cdot X^* = (2 \; 3 \; 2 \; 0 \; 0 \; 0) \cdot \left(\frac{3}{2} \; \frac{5}{2} \; 0 \; 0 \; 0 \; \frac{1}{2}\right)$

$$\underline{\underline{Z^* = 21/2}}$$

Oppgave 5b

Merk: jeg velger å bruke standardformen til å sette opp dualen fordi jeg anser det som det ryddigste.

Dual av primalen på standardform:

$$\min W = 5y_1 + 4y_2 + 7y_3$$

gitt

$$0y_1 + 1y_2 + 1y_3 \geq 2$$

$$2y_1 + 1y_2 + 2y_3 \geq 3$$

$$3y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 2$$

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0$$

Komplementær slakk gir oss

at $\forall i = 1,2,3. \quad r_i y_i = 0$

$\forall j = 1,2,3. \quad s_j x_j = 0$

I oppgave a) fant jeg

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2 \\ x_3 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 5/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \begin{matrix} >0 \\ >0 \\ =0 \\ =0 \\ =0 \\ >0. \end{matrix} \begin{matrix} \longrightarrow s_1 = 0 \\ \longrightarrow s_2 = 0 \\ \longrightarrow s_3 \geq 0 \\ \longrightarrow y_1 \geq 0 \\ \longrightarrow y_2 \geq 0 \\ \longrightarrow y_3 = 0 \end{matrix}$$

Derfor må vi ha (pga kompl. slakk)

Norges Handelshøyskole / Norwegian School of Economics

Besvarelse i Exam in ....

Antall ark tilsammen (påføres første side) Total sum pages (write on the first page)

Kandidatens nr/Candidate number 13006

Side/Page 40

Dato/Date ....

Vi ser altså at 1. og 2. restriksjon i dualen binder og at $y_3 = 0$. Får ligningssettet:

$$\begin{cases} 0y_1 + 1y_2 + 1y_3 = 2 \\ 2y_1 + 1y_2 + 2y_3 = 3 \end{cases} \qquad y_3 = 0$$

$$\begin{cases} y_2 = 2 \\ 2y_1 + 1y_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y_1 = 1/2 \\ y_2 = 2 \end{matrix}$$

Svar: Vi får at $y^* = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, og da blir

$w^* = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1/2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 21/2 = Z^*$. Sterk dualitet er tilfredsstilt fordi $w^* = z^*$.

Kopien med rød trekant beholdes av kandidaten/Copy with the red triangle is the candidate´s copy

Oppgave 5c

1 a) vær det i det optimale hjørnepunktet

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ og } c_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Finner invers B^{-1}:

$$BI = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot(-2) \quad \cdot(-2)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \cdot(-1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ \cdot(+2) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right) \cdot(-1) \quad \cdot(+1) \quad \cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1 & 1 \end{array}\right) = IB^{-1}$$

~~Svar~~ Delsvar: $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Vi har altså

$$y^* = (B^{-1})^T C_B$$ | setter inn og transponerer

$$y^* = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$ | Utleder

$3 \times 3 \qquad 3 \times 1$

$$y^* = \begin{pmatrix} 3/2 - 1 + 0 \\ 0 + 2 + 0 \\ 0 + 0 + 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{y^* = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

(hvilket samsvarer med det vi fant i b).)

Norges Handelshøyskole / Norwegian School of Economics

Besvarelse i
Exam in ....

Antall ark tilsammen (påføres første side)
Total sum pages (write on the first page)

Kandidatens nr/Candidate number 13006

Dato/Date ....

Side/Page 43

Oppgave 5d

Vi setter inn α for 7 i b. ~~i optimum~~: $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ \alpha \end{pmatrix}$

Vi har to krav: $B^{-1}b \geq 0$ og $C_N^T - C_B^T B^{-1} N \leq 0$.

Sistnevnte er tilfredsstilt for alle α fordi b ikke inngår.

Vi har dermed $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ og invers av den som jeg viste i forrige deloppgave.

$B^{-1}b \geq 0$: $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ \alpha \end{pmatrix} \geq 0$ | Ulikhet, ligningsform

$\frac{5}{4} + 0 + 0 \geq 0$ ✓

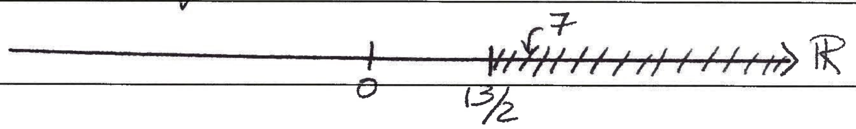
$-\frac{5}{2} + 4 \geq 0$ ✓

$-\frac{5}{2} - 4 + \alpha \geq 0$ | slemmener

$-\frac{13}{2} + \alpha \geq 0$ | flytter over

$$\underline{\underline{\alpha \geq \frac{13}{2}}}$$

Svar: $\forall \alpha \in [13/2 ; \infty\rangle$ vil det være optimalt med samme valg av basiske variabler som i a.



Oppgave 5e

X_3 er en ikke-basisk variabel i optimum, så vi bytter ut $C_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ med $C_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}$, hvor $X_N = \begin{pmatrix} r_2 \\ r_1 \\ X_3 \end{pmatrix}$

Vi har to krav: $B^{-1}b \geq 0$ er tilfredsstilt for alle β fordi den ikke avhenger av C_N, ~~...~~ og $C_N^T - C_B^T B^{-1} N \leq 0$.

Setter inn og får

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \leq 0$$ | utleder

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{11}{2} \end{pmatrix} \leq 0$$ | sjekker komponentvis

$0 - 2 \leq 0$ ✓

$0 - \frac{1}{2} \leq 0$ ✓

$\beta - \frac{11}{2} \leq 0 \iff \beta \leq 11/2$

Svar: $\forall \beta \in \langle -\infty; 11/2]$ vil det være optimalt med samme valg av ~~variable~~ basiske variabler som i a).

$$\mathbb{R}: \quad 0 \quad 2 \quad 11/2$$