Funciones de Variable Real - Ejercicios y Procedimientos

Christian Bueno

Desarrollador de Software

15 de febrero del 2025

+593 99 028 8710

Guayaquil, Ecuador

christianbueno.me

Contents

1 Funciones de Variable Real

1.1 Dominio

Ejercicio 1: Determinar el dominio de $f(x) = \frac{x+2}{x^2-4}$.
Solución:

- Identificamos restricciones en el denominador:

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

- El dominio es:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$$

Ejercicio 2: Determinar el dominio de $f(x) = \sqrt{5-x}$.
Solución:

- La raíz cuadrada requiere que el argumento sea no negativo:

$$5 - x \geq 0$$

- Resolviendo:

$$x \leq 5$$

- El dominio es:

$$D_f = (-\infty, 5]$$

Ejercicio 3: Determinar el dominio de $f(x) = \ln(3x-2)$.
Solución:

- La función logarítmica está definida cuando su argumento es positivo:

$$3x - 2 > 0$$

- Resolviendo:

$$x > \frac{2}{3}$$

- El dominio es:

$$D_f = \left(\frac{2}{3}, \infty\right)$$

Ejercicio 4: Determinar el dominio de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-4}}$.
Solución:

- La raíz cuadrada requiere que el argumento sea positivo (no solo no negativo, porque está en el denominador):

$$x - 4 > 0$$

- Resolviendo:

$$x > 4$$

- El dominio es:

$$D_f = (4, \infty)$$

Ejercicio 5: Determinar el dominio de $f(x) = \frac{x}{x^2 - x - 6}$.
Solución:

- Factorizamos el denominador:

$$x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$$

- Evitamos los valores que hacen el denominador cero:

$$x \neq -2, \quad x \neq 3$$

- El dominio es:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$$

1.2 Rango

Ejercicio 1: Determinar el rango de $f(x) = x^2 - 4$.
Solución:

- La función es una parábola con vértice en $(0, -4)$.
- Como $a > 0$, la parábola abre hacia arriba.
- El mínimo valor es -4 y no tiene límite superior.
- El rango es:
$$R_f = [-4, \infty)$$

Ejercicio 2: Determinar el rango de $f(x) = \frac{1}{x}$.
Solución:

- La función no se anula y toma todos los valores reales excepto 0.
- El rango es:
$$R_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Ejercicio 3: Determinar el rango de $f(x) = e^x$.
Solución:

- La función exponencial e^x solo toma valores positivos.
- No hay límite superior, pero sí un límite inferior en 0 (no se anula ni es negativa).
- El rango es:
$$R_f = (0, \infty)$$

Ejercicio 4: Determinar el rango de $f(x) = \sqrt{x - 2}$.
Solución:

- La raíz cuadrada solo toma valores no negativos.
- Cuando $x = 2$, $f(x) = 0$.
- A medida que $x \to \infty$, también $f(x) \to \infty$.
- El rango es:
$$R_f = [0, \infty)$$

Ejercicio 5: Determinar el rango de $f(x) = \sin(x) + 3$.
Solución:

- La función seno oscila entre -1 y 1.
- Sumando 3, los valores oscilan entre 2 y 4.
- El rango es:
$$R_f = [2, 4]$$

1.3 Gráfica de una función de variable real

Ejercicio 1: Graficar $f(x) = x^2 - 3x + 2$. **Solución:** Es una parábola con vértices en $(1.5, -0.25)$, corta el eje x en $x = 1, 2$.

Ejercicio 2: Graficar $f(x) = \frac{1}{x}$. **Solución:** Hiperbola con asíntotas en $x = 0$ y $y = 0$.

Ejercicio 3: Graficar $f(x) = \ln(x)$. **Solución:** Creciente, pasa por $(1, 0)$ y no está definida para $x \leq 0$.

Ejercicio 4: Graficar $f(x) = e^{-x}$. **Solución:** Decreciente, tiende a 0 cuando $x \to \infty$, pasa por $(0, 1)$.

Ejercicio 5: Graficar $f(x) = \sqrt{x} - 2$. **Solución:** Definida para $x \geq 0$, inicia en (-2) y crece lentamente.

1.4 Monotonía

Ejercicio 2: Determinar la monotonía de $f(x) = x^3 - 3x$.
Solución:

- Para analizar cómo cambia la función, evaluamos algunos valores:

$$f(-2) = (-2)^3 - 3(-2) = -8 + 6 = -2$$

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = -1 + 3 = 2$$

$$f(0) = 0^3 - 3(0) = 0$$

$$f(1) = 1^3 - 3(1) = 1 - 3 = -2$$

$$f(2) = 2^3 - 3(2) = 8 - 6 = 2$$

- Observamos que la función aumenta en $(-\infty, -1)$, luego disminuye en $(-1, 1)$ y vuelve a aumentar en $(1, \infty)$.

- Por lo tanto:

$$\text{Crece en } (-\infty, -1) \cup (1, \infty), \quad \text{Decrece en } (-1, 1).$$

Ejercicio 3: Determinar la monotonía de $f(x) = e^x - x^2$.
Solución:

- Analizamos valores en la función:

$$f(0) = e^0 - 0^2 = 1$$

$$f(1) = e^1 - 1^2 = 2.718 - 1 = 1.718$$

$$f(2) = e^2 - 2^2 = 7.389 - 4 = 3.389$$

$$f(-1) = e^{-1} - (-1)^2 = 0.368 - 1 = -0.632$$

- Observamos que antes de un cierto punto (aproximadamente $x = 0.7$), la función disminuye, y después de ese punto comienza a aumentar.
- Entonces:

$$\text{Decrece en } (-\infty, 0.7), \quad \text{Crece en } (0.7, \infty).$$

Ejercicio 4: Determinar la monotonía de $f(x) = \ln(x) - x$.
Solución:

- Probamos valores:

$$f(0.5) = \ln(0.5) - 0.5 \approx -0.693 - 0.5 = -1.193$$

$$f(1) = \ln(1) - 1 = 0 - 1 = -1$$

$$f(2) = \ln(2) - 2 \approx 0.693 - 2 = -1.307$$

$$f(3) = \ln(3) - 3 \approx 1.099 - 3 = -1.901$$

- Vemos que la función crece para $x < 1$ y decrece para $x > 1$.
- Entonces:

$$\text{Crece en } (0, 1), \quad \text{Decrece en } (1, \infty).$$

Ejercicio 5: Determinar la monotonía de $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$.
Solución:

- Evaluamos algunos valores:

$$f(-2) = (-2)^4 - 4(-2)^2 + 2 = 16 - 16 + 2 = 2$$

$$f(-1) = (-1)^4 - 4(-1)^2 + 2 = 1 - 4 + 2 = -1$$

$$f(0) = 0^4 - 4(0)^2 + 2 = 2$$

$$f(1) = 1^4 - 4(1)^2 + 2 = 1 - 4 + 2 = -1$$

$$f(2) = 2^4 - 4(2)^2 + 2 = 16 - 16 + 2 = 2$$

- Notamos que la función disminuye entre $-\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$, y aumenta fuera de ese intervalo.
- Entonces:

$$\text{Crece en } (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty), \quad \text{Decrece en } (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$