

Universität Potsdam
Mathematisch-Naturwissenschaftliche
Fakultät
Institut für Physik und Astronomie



COMPUTATIONAL PHYSICS

Star Trek Dreikörperproblem

Autor: Marcus Dahlenburg
Matrikel-Nr.: 761708
Autor: Christian Gößl (f)
Matrikel-Nr.: 762627

Korrektor: Prof. Dr. Arkady Pikovsky

24.01.2017

Inhaltsverzeichnis

I. Einleitung	3
II. Grundlagen	4
III. Auswertung	6
1. Lagrangepunkte und Hill's Region	6
2. Iterationsverfahren	7
2.1. Runge-Kutta-Verfahren	7
2.2. Symplektisches Integrationsverfahren	8
2.2.1. Energieerhaltung	8
3. Interessante Trajektorien	9
3.1. Erde-Mond-Erde	9
3.2. Erde-Mond-Weltall	12
3.3. Weltall-Mond-Erde-Weltall	14
IV. Mathematische Grundlagen und Algorithmen	15
4. Bisektionsverfahren	15
5. Variationsalgorithmus	15
V. Anhang	17
6. Andere interessante Trajektorien	17
7. Programmiercode	18

Teil I.

Einleitung

Unendliche Weiten, wir schreiben das Jahr 2017 und unser Raumschiff fliegt seine Bahnen um unser Erde-Mond System. Wir werden in unserer Arbeit das Dreikörperproblem genauer untersuchen. Wir betrachten das Gravitationspotential zweier Himmelskörper wie die Erde und den Mond und lassen einen Probekörper - Raumschiff durch dieses System hindurch fliegen. Wie bereits bekannt ist das Dreikörperproblem nicht allgemein exakt analytisch lösbar. Es gibt viele Möglichkeiten das Problem näherungsweise zu lösen. Hier betrachten wir die zwei Körper Erde-Mond als massereiche Körper und ein Raumschiff, was nur eine verschwindend geringe Masse besitzt, was die Dynamik des Erde-Mond Systems kaum stört. Demnach können wir den Hamiltonoperator und daraus die Bewegungsgleichungen des Raumschiffs angeben. Es ist ein gekoppeltes Differentialgleichungssystem, wodurch die Trajektorie des Raumschiffs stark von der Wahl der Anfangsbedingungen abhängt. Die Erde und der Mond befinden sich in einer Ebene und rotieren gemeinsam als ein starrer Körper entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn. Wir gehen über ins mitrotierende System, wo sich die Erde bei $(-\mu, 0)$ und der Mond bei $(1 - \mu, 0)$ befindet. Demnach befindet sich der Schwerpunkt im Ursprung des Koordinatensystems. In unserer Arbeit werden die folgenden Themen näher untersucht: Hills Region, Lagrange-Punkte, Symplektisches Integrationsverfahren und einige interessante Flugbahnen des Raumschiff finden und darstellen.

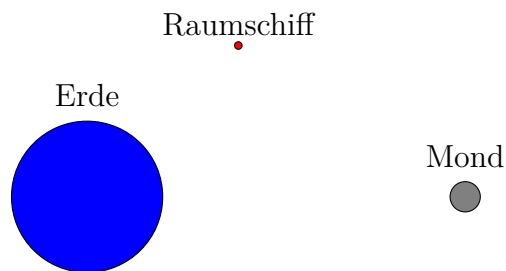


Abbildung 1: Das Erde-Mond System mit Raumschiff im mitrotierenden System.

Teil II. Grundlagen

Die Dynamik dieses Dreikörperproblems wird von folgenden Hamiltonian beschrieben.

$$H = \frac{(p_x + y)^2}{2} + \frac{(p_y - x)^2}{2} - \Omega(x, y) \quad (1)$$

mit $\Omega(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{\mu(1 - \mu)}{2}$

wobei $r_1 = \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x - 1 + \mu)^2 + y^2}$

In Gleichung (1) ist $\mu = m_M$ und $m_E = 1 - \mu$. Die Gesamtmasse des Erd-Mond-Systems ist somit normiert. Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen lauten:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = p_x + y \\ \dot{y} &= \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = p_y - x \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_x &= \frac{dp_x}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = p_y - x + \Omega_x \\ \dot{p}_y &= \frac{dp_y}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y} = -p_x - y + \Omega_y \end{aligned} \quad (3)$$

mit $\Omega_x = \frac{\partial \Omega}{\partial x}$, $\Omega_y = \frac{\partial \Omega}{\partial y}$

Leitet man die Glg. (2) nach t ab und setzt Glg. (3) ein so erhält man:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \dot{p}_x + \dot{y} = p_y - x + \Omega_x + \dot{y} \\ \ddot{y} &= \dot{p}_y - \dot{x} = -p_x - y + \Omega_y - \dot{x} \end{aligned} \quad (4)$$

Stellt man Glg. (2) nach $p = (p_x, p_y)^T$ um und setzt diese Ausdrücke in Glg. (4) ein, erhält man schließlich die grundlegenden Bewegungsgleichungen, die wir für unserer weiteren Untersuchungen numerisch analysieren werden.

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \dot{y} + x - x + \Omega_x + \dot{y} = 2\dot{y} + \Omega_x \\ \ddot{y} &= -\dot{x} + y - y + \Omega_y - \dot{x} = -2\dot{x} + \Omega_y \end{aligned} \quad (5)$$

Des Weiteren ist die Energie des Systems E wie folgt definiert.

$$E = \Omega(x, y) - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} \quad (6)$$

Bei näheren Untersuchungen stellt sich heraus, dass die Energie eine Erhaltungsgröße ist.

$$\dot{E} = \dot{\Omega}(x, y) - \ddot{x}\dot{x} - \ddot{y}\dot{y} = \Omega_x\dot{x} + \Omega_y\dot{y} - \ddot{x}\dot{x} - \ddot{y}\dot{y} \quad (7)$$

Aus Gleichung (5) erhält man $\Omega_y = \ddot{y} + 2\dot{x}$ und $\Omega_x = \ddot{x} - 2\dot{y}$. Setzt man dies nun in Glg. (7) ein erkennt man, dass die Energie erhalten ist.

$$\begin{aligned} \dot{E} &= (\ddot{x} - 2\dot{y})\dot{x} + (\ddot{y} + 2\dot{x})\dot{y} - \ddot{x}\dot{x} - \ddot{y}\dot{y} \\ &= \ddot{x}\dot{x} - 2\dot{y}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y} + 2\dot{x}\dot{y} - \ddot{x}\dot{x} - \ddot{y}\dot{y} = 0 \end{aligned}$$

Für die numerische Analyse des Differentialgleichungssystem (5) transformieren wir dieses zu einem Differentialgleichungssystem 1. Ordnung mit 4 Variablen:

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_3 \\
\dot{z}_2 &= z_4 \\
\dot{z}_3 &= 2z_4 + z_1 - \frac{(1-\mu) \cdot (z_1 + \mu)}{r_1^3} - \frac{\mu \cdot (z_1 - 1 + \mu)}{r_2^3} = 2z_4 + \Omega_{z_1}(z_1, z_2) \\
\dot{z}_4 &= -2z_3 + z_2 - \frac{(1-\mu) \cdot z_2}{r_1^3} - \frac{\mu \cdot z_2}{r_2^3} = -2z_3 + \Omega_{z_2}(z_1, z_2)
\end{aligned} \tag{8}$$

mit $z_1 = x$ und $z_2 = y$
wobei $r_1 = \sqrt{(z_1 + \mu)^2 + z_2^2}$, $r_2 = \sqrt{(z_1 - 1 + \mu)^2 + z_2^2}$

Um herauszufinden, wo die Lagrange-Punkte $L_1 - L_5$ (Gleichgewichtspunkte, siehe Abb. 2) liegen, erhalten wir mithilfe des Euler-Verfahren folgende Iterationsvorschrift:

$$\begin{aligned}
\vec{z}^{n+1} &\begin{cases} z_1^{n+1} = z_1^n + z_3^n h \\ z_2^{n+1} = z_2^n + z_4^n h \\ z_3^{n+1} = z_3^n + \Omega_{z_1}(z_1^n, z_2^n) h \\ z_4^{n+1} = z_4^n + \Omega_{z_2}(z_1^n, z_2^n) h \end{cases} \\
\Leftrightarrow \vec{z}^{n+1} &= \vec{z}^n + \vec{f}(z_1^n, z_2^n, z_3^n, z_4^n) \cdot h \\
\text{mit } h &= t^{n+1} - t^n \text{ und } \vec{z}^n = (z_1^n, z_2^n, z_3^n, z_4^n)^T
\end{aligned} \tag{9}$$

Die Gleichgewichtsbedingung für Gleichung (9) lautet $\vec{z}^{n+1} = \vec{z}^n$ und ist erfüllt, wenn $\vec{f}(z_1^n, z_2^n, z_3^n, z_4^n) = \vec{0}$ gilt. Somit sind dort $z_3^n = 0$ und $z_4^n = 0 \forall n \in \mathbb{Z}^+$. Für L_1, L_2 und L_3 ist $z_2 = 0$ und somit $\Omega_{z_2}(z_1, z_2 = 0) = 0$. Damit vereinfacht sich die Findung dieser Lagrangepunkte zur einfachen Bestimmung der Nullstelle von $\Omega_{z_1}(z_1, z_2 = 0) = 0$. Diese bestimmen wir mithilfe des Bisektionsverfahren (Glg. (18), S. 15).

Teil III.

Auswertung

1. Lagrangepunkte und Hill's Region

Die Werte für die Koordinaten und die Potentiale an den Lagrangepunkten sind in der Tabelle **1** aufgeführt.

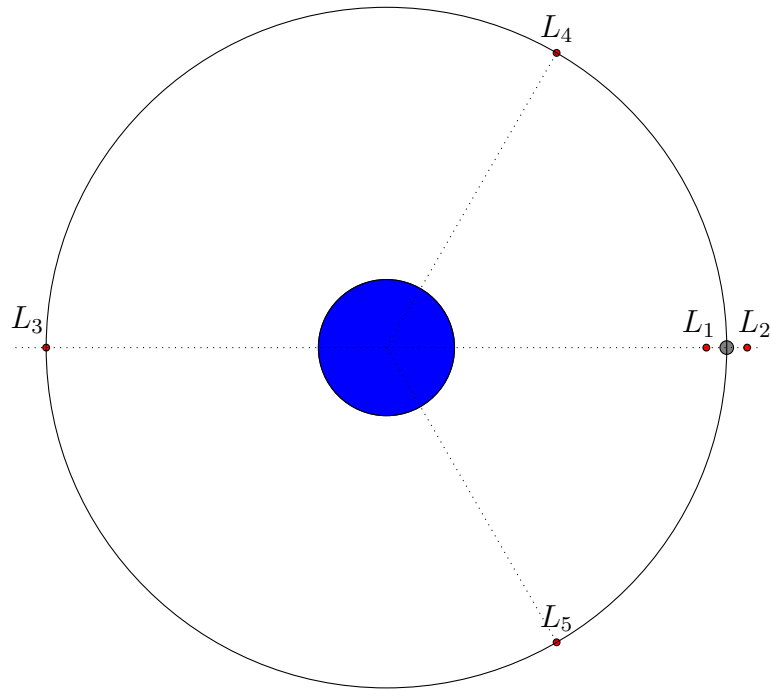


Abbildung **2**: Die Lagrange Punkte im Gravitationsfeld des Erde-Mond Systems.

i	$L_i = (x_i, y_i)$	$\Omega_i = \Omega(x_i, y_i)$
1	(0.716,0)	1.734
2	(1.228,0)	1.701
3	(-1.021,0)	1.549

Tabelle **1**: Tabelle mit Koordinaten der Lagrangepunkte L_i (Werte mit einer Genauigkeit von 0.001) und der dort existenten Potentiale $\Omega(L_i)$.

Die Menge aller Punkte (x,y) für die $\Omega(x,y) \geq E$ definiert ein Gebiet namens Hill's Region, welches für ein Raumfahrzeug mit der Energie E erreichbar ist. In der Abbildung **3** sind die Begrenzungen von 6 solcher Regionen dargestellt.

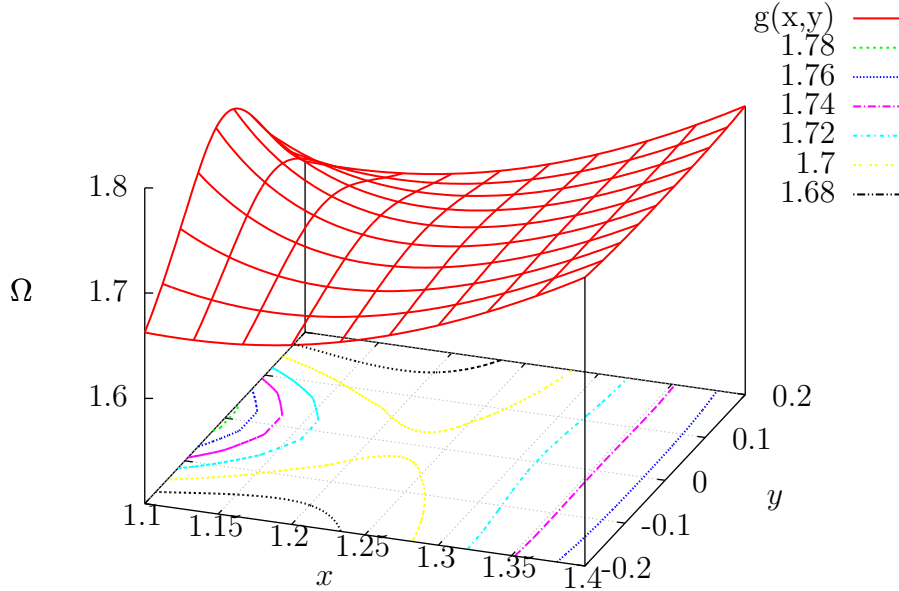


Abbildung **3**: Potential Ω um L_2 mit 6 Begrenzungen der jeweiligen Hill's Region.

Anhand der Abb. **3** ist ersichtlich, dass sich für Energien $E \leq \Omega_2$ ein „Hals“ausbildet, welcher es einem Körper ermöglicht von außerhalb des Mondes ($x > x_2$) zur inneren Region ($|x| < 1 - \mu - R_2$, wobei R_1 =Radius der Erde, R_2 =Radius des Mondes) zu gelangen und umgekehrt. Ein umkreisen der Erde ist aufgrund der Energiebilanz $\Omega_2 < \Omega_1$ nie ausgeschlossen. Diskutiert man jedoch die Frage: Existiert ein E für die ein Raumfahrzeug von der Erde aus startend den Mond umkreisen kann, ohne das System Erde-Mond verlassen zu können?, so ist dies durchaus der Fall. Die Bedingung dafür lautet $\Omega_1 < E < \Omega_2$.

Trotz dieser Betrachtungen ist anzumerken, dass energetische Bedingungen nicht genügen, um die Trajektorie des Raumfahrzeugs oder lediglich Charakteristika, wie z.B. Anzahl der Umdrehungen des zu betrachtenden Körpers bzw. das Verhalten des Körpers für $t \rightarrow \infty$ vorherzusagen. Die Dynamik des Systems ist durch die Anfangsbedingungen determiniert, wobei sie bei diesem Problem sensitiv von ihnen beeinflusst wird.

2. Iterationsverfahren

2.1. Runge-Kutta-Verfahren

In Kapitel II ergab sich die Differenzialgleichung (8). Aus Gleichung (9) ist $\vec{f}(z_1, z_2, z_3, z_4)$ bekannt. Folglich betrachten wir das Problem:

$$\dot{\vec{z}} = \vec{f}(\vec{z}) \tag{10}$$

Aufgrund der niedrigen Konvergenzordnung $q = 1$ verwenden wir das Iterationsverfahren (9) nicht. Stattdessen nutzen wir das folgende Verfahren mit Konvergenzordnung 3:

$$\vec{z}^{n+1} = \vec{z}^n + h \left(\frac{1}{6} \vec{k}_1 + \frac{4}{6} \vec{k}_2 + \frac{1}{6} \vec{k}_3 \right) \quad (11)$$

mit

$$\vec{k}_1 = \vec{f}(\vec{z}^n)$$

$$\vec{k}_2 = \vec{f} \left(\vec{z}^n + \frac{h}{2} \vec{k}_1 \right)$$

$$\vec{k}_3 = \vec{f} \left(\vec{z}^n - h \vec{k}_1 + 2h \vec{k}_2 \right) .$$

2.2. Symplektisches Integrationsverfahren

In der Hamiltonischen Mechanik bietet es sich an das Symplektische Integrationsverfahren anzuwenden. Dabei wird der Gesamthamiltonoperator in zwei Operatoren aufgespalten. Speziell für unser Problem ergibt sich:

$$H = H_1 + H_2 \quad H_1 = \frac{(p_x + y)^2}{2} + \frac{(p_y - x)^2}{2} \quad H_2 = -\Omega \quad (12)$$

Aus diesen beiden Operatoren H_1, H_2 bekommen wir die Evolutionsoperatoren unter Anwendung der Vorschrift zur Berechnung der Bewegungsgleichungen.

$$\Psi_1 = \begin{pmatrix} \vec{x} + h \nabla_{\vec{p}} H_1 \\ \vec{p} \end{pmatrix}$$

$$\Psi_2 = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{p} + h \nabla_{\vec{x}} \Omega \end{pmatrix}$$

Hiermit gelangen wir zu der vollständigen Iterationsvorschrift für dieses Verfahren, dabei werden Halbschritte bei der Ausführung von Ψ_2 gemacht.

$$\Psi_2 \left(\frac{h}{2} \right) \Psi_1(h) \Psi_2 \left(\frac{h}{2} \right) \Leftrightarrow \begin{aligned} \vec{p}^{n+\frac{1}{2}} &= \vec{p}^n + \frac{h}{2} \nabla_{\vec{x}} \Omega(\vec{x}^n) \\ \vec{x}^{n+1} &= \vec{x}^n + h \nabla_{\vec{p}} H_1(\vec{p}^n, \vec{x}^n) \\ \vec{p}^{n+1} &= \vec{p}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} \nabla_{\vec{x}} \Omega(\vec{x}^n) \end{aligned}$$

2.2.1. Energieerhaltung

Für den Test der Energieerhaltung haben wir beide numerische Verfahren benutzt, um ein Vergleich zu haben. Zur Berechnung der Energie im Symplektischen Verfahren müssen die berechneten Impulse wieder in die entsprechenden Geschwindigkeiten transformiert werden. Die Transformationsgleichungen lauten:

$$\begin{aligned} p_x &= \dot{x} - y \\ p_y &= \dot{y} + x. \end{aligned} \quad (13)$$

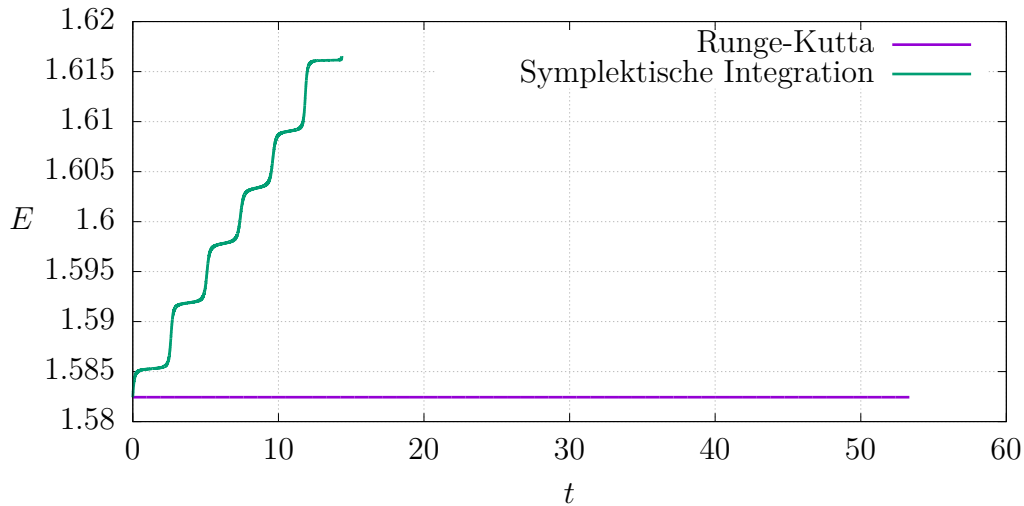


Abbildung 4: Energie-Zeit Diagramm zur Überprüfung der Energieerhaltung mit den Werten $v = 2.55541$ und $\alpha = 1.44513$.

Das Symplektische Verfahren zeigt bei allen gewählten Zeitschritten einen Anstieg der Gesamtenergie an. Ein maximalen Anstiege scheinen periodisch aufzutreten. Beim Runge-Kutta-Verfahren hingegen bleibt die Energie erhalten. Eine mögliche Erklärung dafür ist, dass das Runge-Kutta-Verfahren aufgrund der höheren Konvergenzordnung genauer arbeitet. Die Periodizität der großen Energieverluste könnte ein Indiz dafür sein, dass die Trajektorie zu diesen Zeitpunkten die stärkste Richtungsänderung aufweist, wodurch sich somit auch der größte Rechenfehler ergibt. Daraus sieht man wie stark die Wahl des Iterationsverfahren die Flugbahn beeinflussen kann, zumal die Dynamik sensitiv ist.

3. Interessante Trajektorien

Allgemein ist das Ende der Flugbahn erreicht, sobald eine der folgenden 4 Bedingungen zutreffen:

$$\begin{aligned}
 &\text{if}(|x| > 2) \\
 &\text{if}(|y| > 2) \\
 &\text{if}((x + \mu)^2 + y^2 < R_1^2) \\
 &\text{if}(((x - (1 - \mu))^2 + y^2 < R_2^2)
 \end{aligned}$$

wobei $R_1 = 0.2 = \text{Radius der Erde}$ und $R_2 = 0.01 = \text{Radius des Mondes}$

Weiterhin ist aus Gleichung (13) (S. 8) bekannt, wie sich die initialen Impulse $\vec{p} = (p_x, p_y)$ aus den initialen Geschwindigkeiten $\vec{v} = (v_x, v_y)$ berechnen. Die Vorgabe der jeweiligen \vec{v} erfolgt in den folgenden jeweiligen Abschnitten.

3.1. Erde-Mond-Erde

Als erstes untersuchen wir hier Trajektorien denen es, wie im Abschnitt 1 beschrieben, energetisch möglich ist die Erde zu verlassen und den Mond zu umkreisen, jedoch nicht das Erde-Mond-System zu verlassen. Die Flugbahnen enden somit auf dem Mond oder auf der Erde, wobei wir unsere Betrachtung auf die Bahnen beschränken, welche auf der Erdoberfläche enden. Weiterhin ist j die Anzahl der Mondumdrehungen. Diese wird

berechnet, indem man annimmt, dass zu Beginn der Flugbahn $j = 0$. Weiterhin wird j gemäß der Bedingung (14) bis zum Ende der Trajektorie erhöht:

$$\begin{aligned} &\text{if}(y(t_n) > 0)\{ \\ &\quad \text{if}(\text{sgn}(x(t_n) - (1 - \mu)) \neq \text{sgn}(x(t_{n+1}) - (1 - \mu))) \quad j = j + 1; \\ &\} \end{aligned} \quad (14)$$

wobei $\text{sgn}(x)$ im Abschnitt 4 (S. 15) definiert wurde

Aus der Gleichung (6) ergibt sich der Bereich für die initialen Geschwindigkeitsbeträge $|\vec{v}|$, die diese Trajektorien begünstigen. Ein Korrekturwert von 0.1 wird aufgrund der Dissipativität des Iterationsverfahrens hinzugefügt.

$$2.60861 \approx \sqrt{2 \cdot (\Omega_E - \Omega_2)} + 0.1 > |\vec{v}| \geq \sqrt{2 \cdot (\Omega_E - \Omega_1)} \approx 2.49541 \quad (15)$$

Hierbei ist $\Omega_E = \Omega(x_E, y_E)$, wobei (x_E, y_E) ein Punkt auf der Erdoberfläche ist. Hierfür wählten wir $(x_E, y_E) = (0.15, 0)$. Weiterhin wird die Orientierung der initialen Geschwindigkeit durch den Winkel $\alpha = \arctan\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)$ bestimmt, also ist $v_x = |\vec{v}| \cos(\alpha)$ und $v_y = |\vec{v}| \sin(\alpha)$. Somit haben wir zwei Werte, welche wir auf der Suche nach der maximalen Umdrehungszahl um den Mond variieren können α und $|\vec{v}|$. Dabei lassen wir $|\vec{v}|$ konstant und suchen den Winkel α_{\max} mit dem wir die bis dahin meisten Mondumrundungen erzeugt haben. Danach speichern wir den Wert für diesen Winkel und setzen ihn zurück und variieren $|\vec{v}|$. Im Anschluss starten wir wieder den Suchlauf nach α_{\max} . Das Tupel $(|\vec{v}|, \alpha)$ mit den größtem j und dem von uns gewünschten Ende (Weltall oder Erdoberfläche) wird abgespeichert. Die jeweiligen Variationsalgorithmen sind gleich und im Abschnitt 5 (S. 15) beschrieben. Hierbei sei m die Dimension des Vektors, welcher für den Variationsalgorithmus benötigt wird. Für den Winkel gilt $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$.

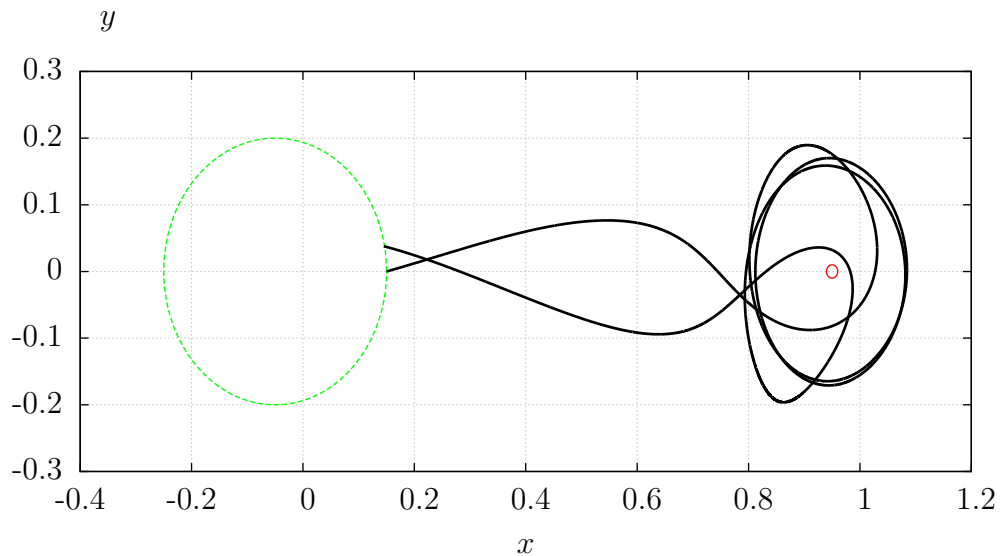


Abbildung 5: Simuliert mit dem Symplektischen Integrationsverfahren mit den Werten $m = 20$, $\epsilon = 10^{-5}$, $|\vec{v}| = 2.52937$ und $\alpha = 0.229572$.

In Abbildung 5 ist die vierfache Umdrehung des Mondes mit anschließendem Zurückkehren zur Erde dargestellt. Neben der Abbruchbedingung (20) (Seite 16), welche hier lediglich für die Variation des Winkels benötigt wurde, musste der Abbruch der Variation beider Variablen $|\vec{v}|$ und α erfolgen sobald $j = 4$.

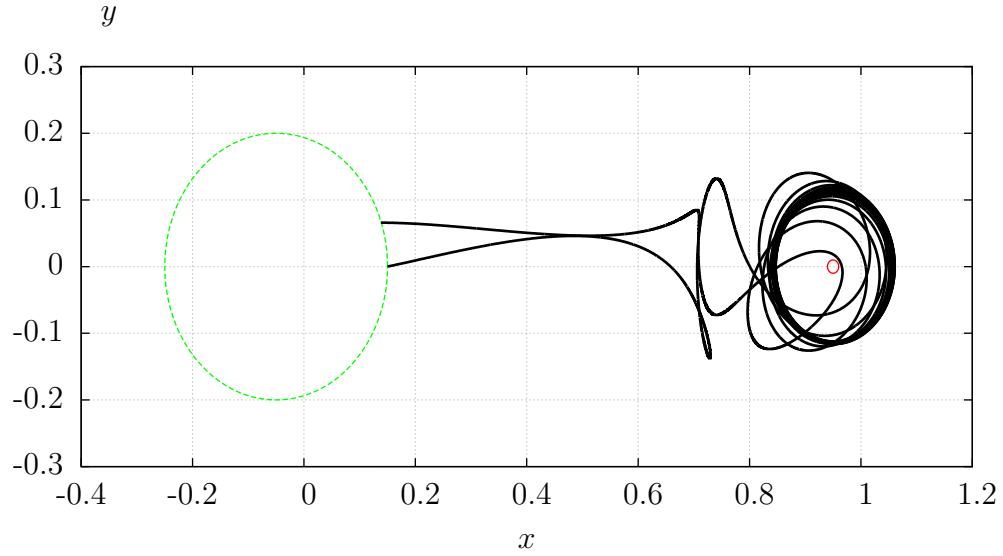


Abbildung 6: Simuliert mit dem Symplektischen Integrationsverfahren mit den Werten $m = 120$, $\epsilon = 10^{-8}$, $|\vec{v}| = 2.51215$ und $\alpha = 0.177274$.

In Abbildung 6 ist die achtzehnfache Umdrehung des Mondes mit anschließendem Zurückkehren zur Erde dargestellt. Dies ist die maximale Anzahl an Mondumrundungen mit anschließender Erdrückkehr, welche wir mit dem Symplektischen Integrationsverfahren gefunden haben.

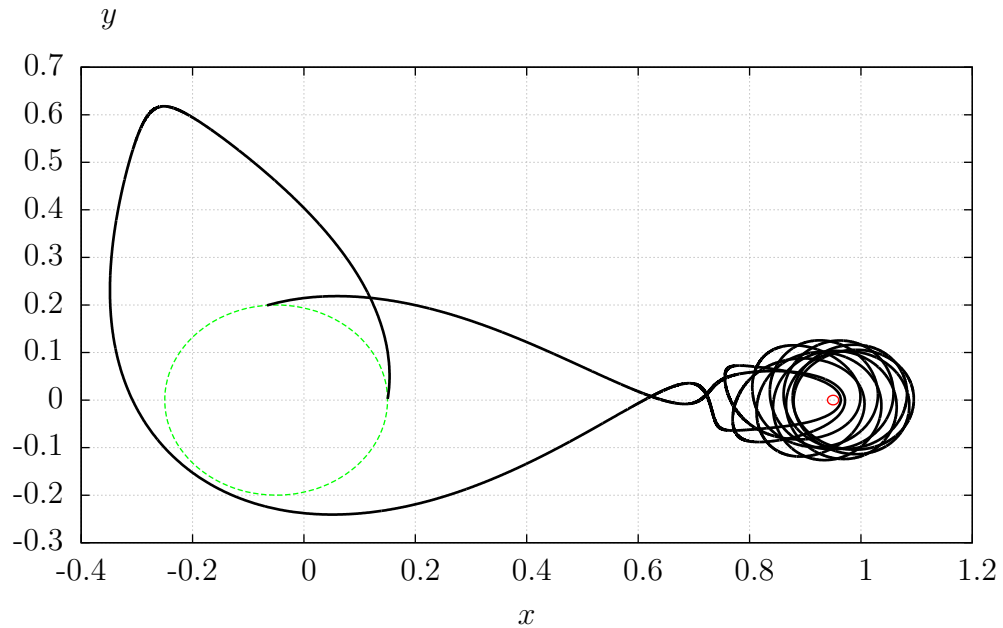


Abbildung 7: Simuliert mit dem Runge-Kutta-Verfahren mit den Werten $m = 10$, $\epsilon = 10^{-6}$, $|\vec{v}| = 2.4983$ und $\alpha = 1.42628$.

In Abbildung 7 ist die 18-fache Umdrehung des Mondes mit anschließendem Zurückkehren zur Erde dargestellt. Dies ist die maximale Anzahl an Mondumrundungen mit anschließender Erdrückkehr, welche wir mit dem Runge-Kutta-Verfahren gefunden haben.

Vergleicht man die Trajektorien Abbildungen 6 und 7, so erkennt man, dass die mit dem Runge-Kutta-Verfahren simulierten Trajektorien erst eine Erdumdrehung verrichten bevor sie den Mond umkreisen, was bei der Symplektischen Integration nicht der Fall ist. Außer, dass also sich die α stark unterscheiden, benötigt das Runge-Kutta-Verfahren für maximale Mondumdrehungen kleinere Anfangsgeschwindigkeiten als das Symplektische Integrationsverfahren. Unter Betrachtung der Abbildungen 12 und 13 (Abschnitt 6, S. 17) wird ein weiterer Unterschied ersichtlich. Untersucht wurden die Trajektorien die auf der Mondoerfläche enden mit $|\vec{v}|$, wie bereits definiert, als Anfangsgeschwindigkeit. In Abb. 12 ist mit 17 die maximale Anzahl von Mondumdrehungen mithilfe des Symplektische Integrationsverfahren gefunden worden. In Abb. 13 wurde mit 1378 eine vergleichsweise große Anzahl an Mondumdrehungen mit dem Runge-Kutta-Verfahren simuliert, welche nicht die maximale Anzahl ist. Das Problem hierbei war die Rechenzeit, welche für eine so große Anzahl an Umdrehungen sehr groß wird.

3.2. Erde-Mond-Weltall

Die nächsten für uns interessanten Trajektorien sind diejenigen, welche nach ihren Mondumrundungen das Erde-Mond-System verlassen. Für die initiale Geschwindigkeit \vec{v} gilt:

$$0.697826 = \sqrt{2 \cdot (\Omega(x_2 + 0.1, 0) - \Omega_3)} + 0.1 > |\vec{v}| \geq \sqrt{2 \cdot (\Omega_E - \Omega_2)} = 0.250861 \quad (16)$$

Die Bedingung (16) ermöglicht den Trajektorien das Erde-Mond-System um den Lagrange punkt L_2 zu verlassen, wobei es wiederum unmöglich ist das System um L_3 bzw. an anderen Orten (x, y) zu verlassen. Trotzdem ist ein Ende der Trajektorie auf der Erde bzw. Mondoerfläche nicht ausgeschlossen.

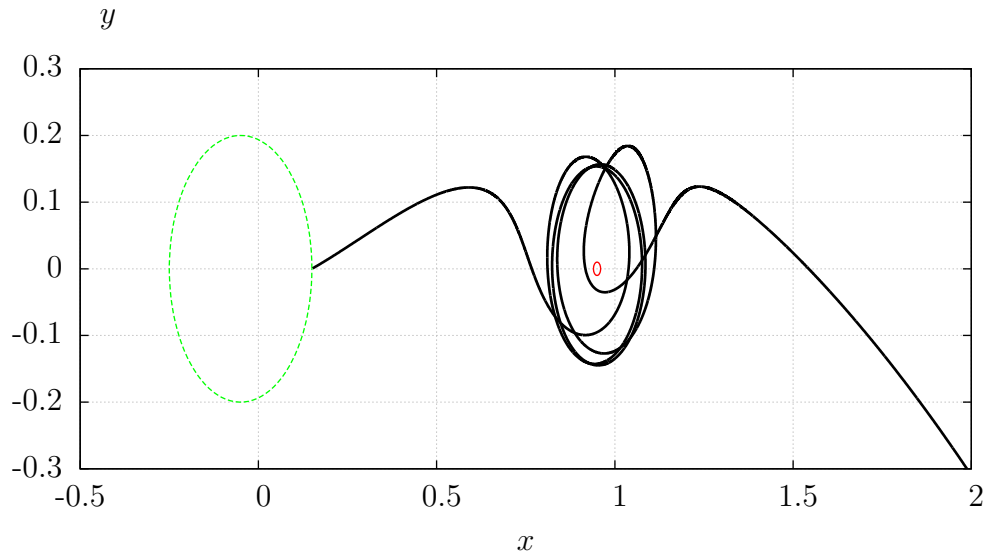


Abbildung 8: Simuliert mit dem Symplektischen Integrationsverfahren mit den Werten $m = 20$, $\epsilon = 10^{-5}$, $|\vec{v}| = 2.5246$ und $\alpha = 0.275675$.

In Abbildung 8 ist die vierfache Umdrehung des Mondes mit anschließendem Zurückkehren zur Erde dargestellt. Die Abbruchbedingung wurde auch hier, wie im Unterabschnitt 3.1 beschrieben, modifiziert.

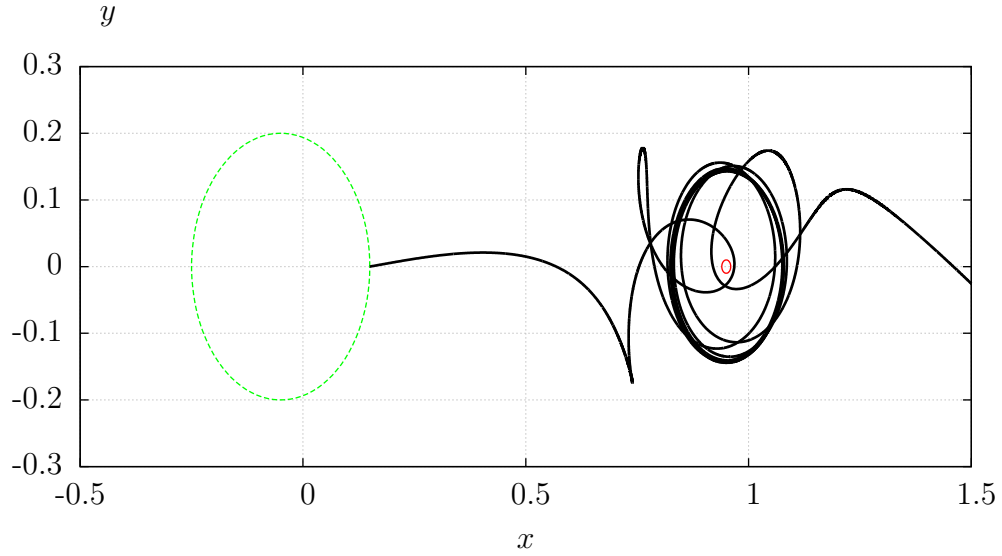


Abbildung 9: Simuliert mit dem Symplektischen Integrationsverfahren mit den Werten $m = 120$, $\epsilon = 10^{-8}$, $|\vec{v}| = 2.5206$ und $\alpha = 0.119901$.

In Abbildung 9 ist die neunfache Umdrehung des Mondes mit anschließendem Verlassen des Erde-Mond-Systems dargestellt. Dies ist die maximale Anzahl an Mondumrundungen ohne zwischenzeitlicher Rückkehr zum Erdorbit, welche wir mit dem Symplektischen Integrationsverfahren gefunden haben.

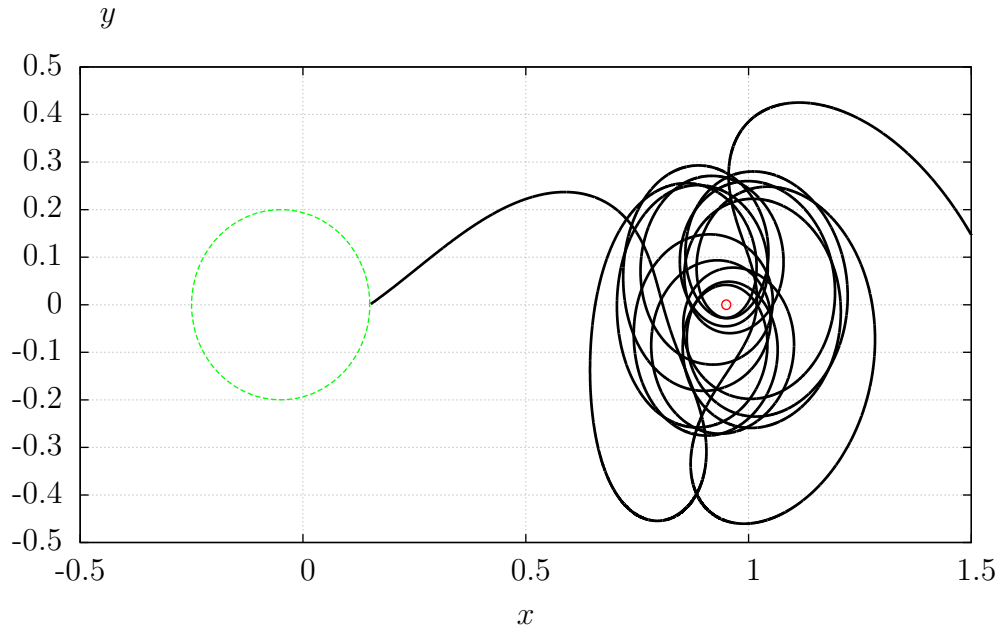


Abbildung 10: Simuliert mit dem Runge-Kutta-Verfahren mit den Werten $m = 30$, $\epsilon = 10^{-6}$, $|\vec{v}| = 2.58559$ und $\alpha = 0.578022$.

In Abbildung 10 ist die 12-fache Umdrehung des Mondes mit anschließendem Verlassen des Erde-Mond-Systems dargestellt. Dies ist die maximale Anzahl an Mondumrundungen ohne zwischenzeitlicher Rückkehr zum Erdorbit, welche wir mit dem Runge-Kutta-Verfahren gefunden haben.

3.3. Weltall-Mond-Erde-Weltall

Hierbei soll die im Weltall beginnende Trajektorie mehrere Mondumdrehungen aufweisen, bevor sie nach mehreren Erdumrundungen im Weltall verschwindet. Als Startpunkt wählen wir $(x_2 + 0.1, 0)$, wobei x_2 die x -Koordinate des Lagrangepunktes L_2 ist. Für die Suche passen wir hier den Variationsalgorithmus an, indem wir ein j_E definieren, was die Anzahl der Erdumrundungen angibt. Das für j_E verwendete Zählverfahren gleicht dem für j (14). Damit erweitern wir den Variationsalgorithmus um folgende Abbruchbedingung:

$$\begin{aligned} &\text{if}(j \geq 2)\{ \\ &\quad \text{if}(j_E \geq 2) \text{ Abbruch;} \\ &\} \end{aligned} \tag{17}$$

Der nun durch die Bedingung (17) erweiterte Variationsalgorithmus findet eine Trajektorie, welche mindestens 2 Mond- bzw. 2 Erdumdrehungen aufweist, bevor die Trajektorie im Weltall endet. Weiterhin gestattet dieses Suchverfahren auch die Vorgabe von mehr als jeweils 2 Umrundungen. Für den Winkel gilt $\alpha \in [\pi, \frac{3\pi}{2})$. Für die Geschwindigkeit \vec{v} gilt weiterhin Bedingung (16):

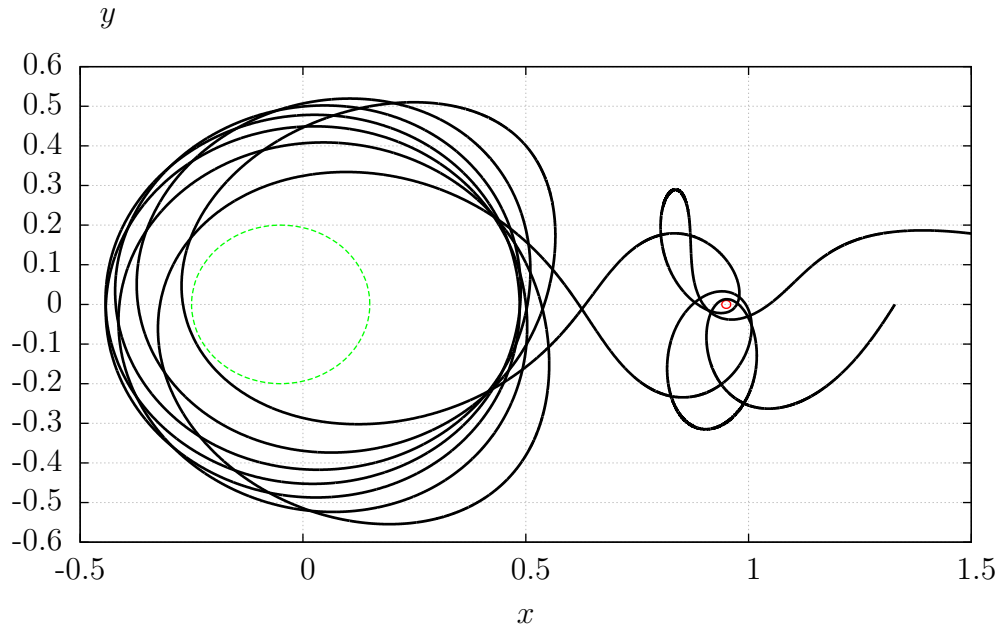


Abbildung 11: Simuliert mit dem Symplektischen Integrationsverfahren mit den Werten $m = 100$, $\epsilon = 10^{-6}$, $|\vec{v}| = 0.557495$ und $\alpha = 4.20377$.

Die in Abb. 11 dargestellte Trajektorie weist 7 Erdumrundungen und 3 Mondumrundungen auf, wobei eine Mondumrundung erst nach den Erdumkreisungen stattfindet, woraufhin der Körper ins Weltall verschwindet. Bei Vorgabe höherer Umrundungen sind häufigere Erd-Mond-Übergänge nicht ausgeschlossen, weswegen wir uns bei der Vorgabe der Minimalumrundungen mit jeweils 2 zufrieden gegeben haben. Sofern mehrere Umrundungen ohne Erhöhung der Erd-Mond-Transitionen gefordert wären, müsste man den Suchalgorithmus weiterhin modifizieren.

Abb. 14 (S. 18) zeigt eine Trajektorie mit mehreren Übergängen und jeweils 4 Umrundungen.

Teil IV.

Mathematische Grundlagen und Algorithmen

4. Bisektionsverfahren

Sei f eine stetige Funktion, wobei $f(x_0)$ und $f(y_0)$ verschiedene Vorzeichen haben, so existiert laut des Zwischenwertsatzes eine Nullstelle $z \in [x_0; y_0]$. Durch folgende Iteration kann man z approximativ bestimmen.

$$\begin{cases} z_k = \frac{x_{k-1} + y_{k-1}}{2} & , \forall k \in \mathbb{Z}^+ \\ x_k = z_k, y_k = y_{k-1} & , \text{falls } \text{sgn}(f(z_k)) = \text{sgn}(f(y_{k-1})) \\ y_k = z_k, x_k = x_{k-1} & , \text{sonst} \end{cases} \quad (18)$$

In der Gleichung (18) ist $\text{sgn}(x)$ die Signumfunktion für die folgendes gilt:

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \forall x > 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \\ -1, & \text{sonst} \end{cases}$$

5. Variationsalgorithmus

Sei $\vec{x}(t)$ eine Trajektorie um den Mond, wobei die Anzahl der Mondumdrehung j maximiert werden soll, indem der Anfangswert w variiert wird. Weiterhin soll gelten $w \in [a, b]$. Man definiert $\vec{W} \in \mathbb{R}^m$ und $\vec{J} \in \mathbb{N}^m$, wobei $\vec{W} = (w_0, w_1, \dots, w_{m-1})$ und $\vec{J} = (j_0, j_1, \dots, j_{m-1})$. Dabei ist $w_i = a + i \cdot w_{\text{step}} \forall i \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ mit $w_{\text{step}} = \frac{b-a}{m}$ und j_i gibt die Anzahl an Umdrehungen an, welche mit dem Anfangswert w_i erreicht wurden. Definiert man nun:

$$\begin{aligned} j_{\max} &= \max\{j_0, j_1, \dots, j_{m-1}\} \\ l &= \text{Anzahl der Maximalelemente in } \vec{J} \\ k &= \text{kleinster Index aller Maximalelemente in } \vec{J} \end{aligned}$$

Das heißt, sofern es $l > 1$ Maximalelemente in \vec{J} gibt, ist k das Minimum der Menge der Indizes aller j_{\max} in \vec{J} .

Mithilfe dieser Grundlagen lautet der Variationsalgorithmus:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{if}(l == m) \\
& \quad w_{\text{step,neu}} = \epsilon; \\
& \mathbf{else}\{ \\
& \quad \mathbf{if}(l == 1)\{ \\
& \quad \quad \mathbf{if}(k == 0)\{ \\
& \quad \quad \quad w_0 = w_k; \\
& \quad \quad \quad w_{\text{step,neu}} = \frac{w_{\text{step,alt}}}{m}; \\
& \quad \quad \} \\
& \quad \quad \mathbf{if}(k == m - 1)\{ \\
& \quad \quad \quad w_0 = w_{k-1}; \\
& \quad \quad \quad w_{\text{step,neu}} = \frac{w_{\text{step,alt}}}{m}; \\
& \quad \quad \} \\
& \quad \mathbf{else}\{ \\
& \quad \quad w_0 = w_{k-1}; \\
& \quad \quad w_{\text{step,neu}} = 2 \cdot \frac{w_{\text{step,alt}}}{m}; \\
& \quad \} \\
& \} \\
& \mathbf{else}\{ \\
& \quad w_0 = w_k; \\
& \quad w_{\text{step,neu}} = (l - 1) \cdot \frac{w_{\text{step,alt}}}{m}; \\
& \} \\
& \}
\end{aligned} \tag{19}$$

Wobei dieser Algorithmus endet, sofern die Abbruchbedingung (20) erfüllt ist.

$$\mathbf{if}(w_{\text{step,neu}} \leq \epsilon) \tag{20}$$

Sofern alle in \vec{W} enthaltenen Anfangswerte die gleiche Anzahl an Mondumrundungen zur Folge haben, erfolgt der Abbruch. Existieren mehrere aber weniger als m Maximalwerte, so beginnt der Algorithmus erneut ab dem Anfangswert j_{\max} mit dem kleinsten Index k und endet bei j_{\max} mit dem größten Index. Es wird also nur zwischen diesen j_{\max} geschaut, wobei wir davon ausgegangen sind, dass diese Maximalwerte hintereinanderliegen, also dass, wenn l die Anzahl der j_{\max} ist, der größter Index der Maximalwerte $k + l - 1$ ist. Folglich ist $w_{\text{step,neu}} = (l - 1) \cdot \frac{w_{\text{step,alt}}}{m}$. Tritt der Fall auf, dass es genau ein j_{\max} gibt und k dessen Index sei, so wird um diesen Maximalwert geschaut, also zwischen w_{k-1} und w_{k+1} . Folglich ist hier $w_{\text{step,neu}} = 2 \cdot \frac{w_{\text{step,alt}}}{m}$. Da dies für die Fälle, dass $k = 0$ bzw. $k = m - 1$ nicht möglich ist, wird hier zwischen w_0 und w_1 bzw. w_{m-2} und w_{m-1} geschaut. Somit ist die neue Schrittweite $w_{\text{step,neu}} = \frac{w_{\text{step,alt}}}{m}$.

Teil V. Anhang

6. Andere interessante Trajektorien

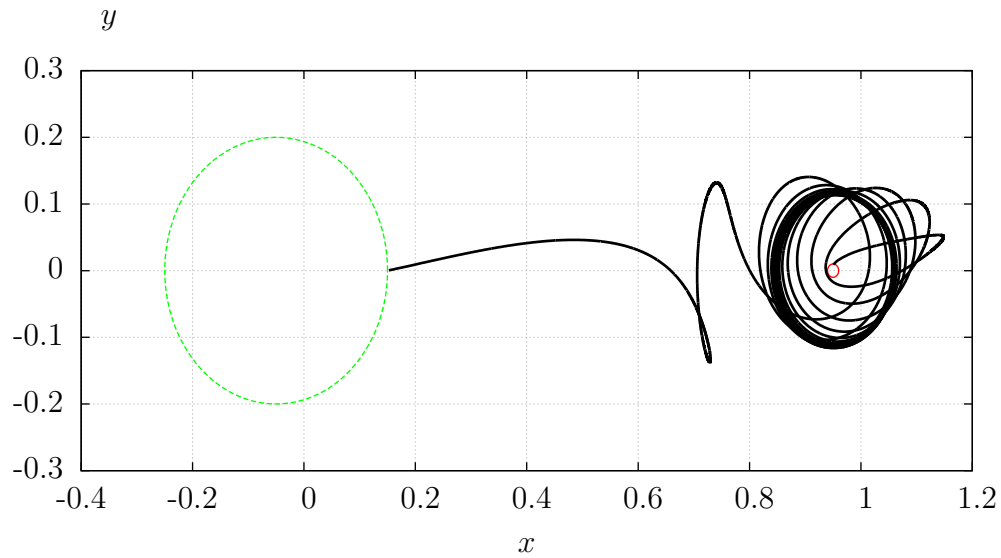


Abbildung 12: Simuliert mit dem Symplektischen Integrationsverfahren mit den Werten $m = 120$, $\epsilon = 10^{-8}$, $|\vec{v}| = 2.54291$ und $\alpha = 0.235626$.

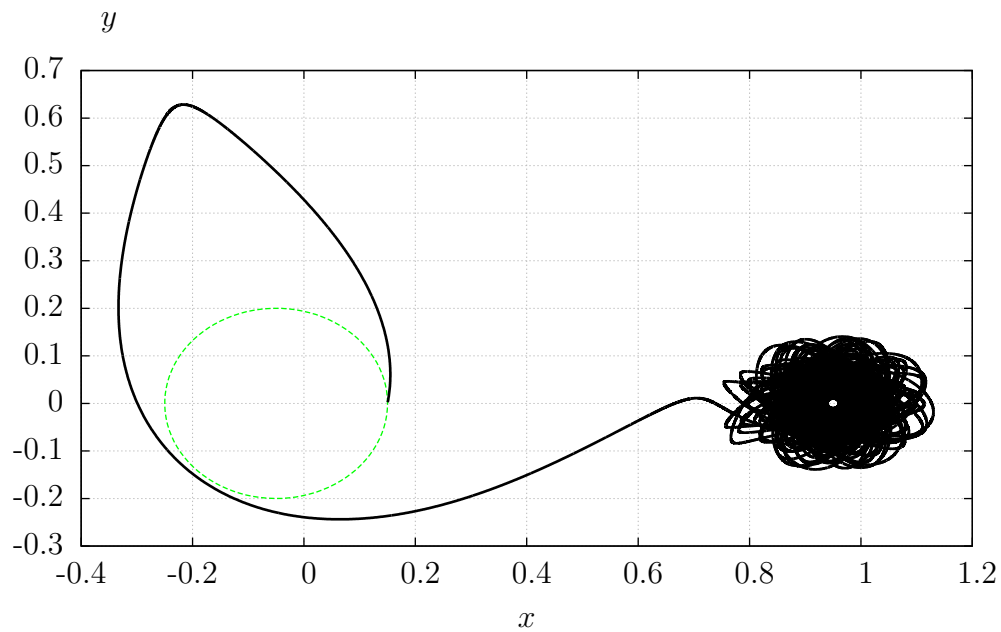


Abbildung 13: Simuliert mit dem Runge-Kutta-Verfahren mit den Werten $m = 10$, $\epsilon = 10^{-6}$, $|\vec{v}| = 2.4983$ und $\alpha = 1.40115$.

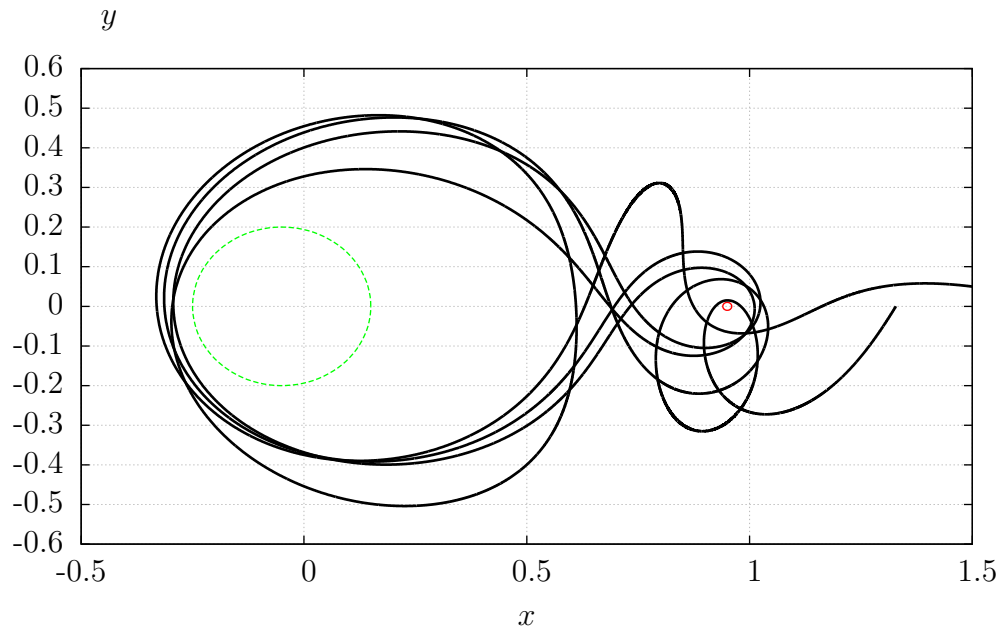


Abbildung 14: Simuliert mit dem Symplektischen Integrationsverfahren mit den Werten

$$m = 100,$$

$$\epsilon = 10^{-6}, |\vec{v}| = 0.56685 \text{ und } \alpha = 4.21256.$$

7. Programmiercode

```

1  /***** planet-system *****/
2
3  using namespace std;
4  #include <stdlib.h>
5  #include <iostream>
6  #include <fstream>
7  #include <math.h>
8
9
10 /***** important parameters *****/
11 const int neqn = 4;           //Anzahl der Gleichungen
12 bool schalter = true;        //Bedingung fue das jeweilige Verfahren
13 bool abb=false;              //fuer Abbruchbedingung
14 bool abb4=false;             //Bool fuer gewuenshtes Ende der
    ↪ Trajektorie
15 const double tstep=0.001;    //Zeitschritt
16 const double gen=0.001;      //Genauigkeit der Lagrangeunkte
17 const double eps=0.00001;    //Genauigkeit des Geschw. bzw
    ↪ Winkelschritts fuer Abb.
18 const double mu=0.05;        //Mondmasse
19 const double mu2=1-mu;       //Erddmasse
20 const double r1=0.2          //Erdradius

```

```

21  const double r2=0.01;           //Mondradius
22  double omeg1,omeg2,omeg3;       //double fuer jeweilige Potentiale
23  double z1[3], z2;               //fuer das Bisektionsverfahren
24  const double pi=4.*atan(1.);
25  //const double alpha=0.0995*pi;
26
27  /*****
28  int sgn(double h){//Signumfunktion
29      if (h==0) return 0;
30      else return (h>0) ? 1 : -1;
31  }
32  /***** Runge-Kutta Verfahren (Konvergenzordnung 3)
    ↳ *****/
33  void rk(double y[],int n,double x,double h,
34          void (derivs)(double, double[], double[]))
35  {
36      int j,i;
37      double h2,h6,xh, xhh,y1[n],k1[n],k2[n],k3[n];
38      h2=h*0.5;    h6=h/6.;
39      //Simpsonregel
40      xh=x+h2;      xhh=x+h;
41      (derivs)(x,y,k1);
42      for(i=0;i<n;i++) y1[i]=y[i]+h2*k1[i];
43      (derivs)(xh,y1,k2);
44      for(i=0;i<n;i++) y1[i]=y[i]-h*k1[i]+2*h*k2[i];
45      (derivs)(xhh,y1,k3);
46      x+=h;
47      for(i=0;i<n;i++) y[i]+=h6*(k1[i]+4.*k2[i]+k3[i]);
48  }
49
50  void planet(double t,double x[],double
    ↳ dxdt[])//Differentialgleichungen
51  {
52      double l1, l2, k1, k2;//x1=y[0], x2=y[1], x3=y[2], x4=y[3]
53      k1=x[0]+mu;
54      k2=k1-1.;
55      l1=k1*k1+x[1]*x[1];
56      l2=k2*k2+x[1]*x[1];
57      dxdt[0] =x[2];
58      dxdt[1] =x[3];
59      dxdt[2] =2*x[3]+x[0]-(1-mu)*k1/pow(l1, 1.5)-mu*k2/pow(l2, 1.5);
60      dxdt[3] =-2*x[2]+x[1]-(1-mu)*x[1]/pow(l1, 1.5)-mu*x[1]/pow(l2, 1.5);

```

```

61 }
62
63 /*****
64
65 double f(double y_0){//Funktion zur Bestimmung der Nullstelle
66     double k1, k2,g;
67     k1=y_0+mu;
68     k2=k1-1.;
69     g=y_0-(1-mu)*sgn(k1)/(k1*k1)-mu*sgn(k2)/(k2*k2);
70     return g;
71 }
72
73 /*****
74
75 double Omega(double a, double b){//Fkt. zur bestimmung des Potentials
76     double u;
77     u=(a*a+b*b)/2.+(1-mu)/sqrt((a+mu)*(a+mu)+b*b)+mu/sqrt((a-1.+mu)*(a-1_
    ↪ +.+mu)+b*b)+mu*(1-mu)/2.;
78     return u;
79 }
80 /*****Bisektions-Methode*****/
81 /*Nullstelle bestimmen*/
82 void bisec(int a, int m, double b, int i){
83     if(a==m)z1[i]=b;
84     else          z2=b;
85 }
86
87 double lag(int j){
88     double w,c;
89     int m, g;
90     w=fabs(z2-z1[j]);
91     m=sgn(f(z1[j]));
92     while(w>gen){
93         c=(z2+z1[j])/2.;
94         g=sgn(f(c));
95         bisec(g,m, c,j);
96         w=fabs(z2-z1[j]);
97     }
98     return c;
99 }
100 /***** Symplektisches Integrationsverfahren
    ↪ *****/

```

```

101  /*Differentialgleichungen*/
102  void Hamilton(double t, double x[],double F[], bool Imp){
103      double l1, l2, k1, k2;//x1=y[0], x2=y[1], x3=y[2], x4=y[3]
104      if(Imp){
105          k1=x[0]+mu;
106          k2=k1-1.;
107          l1=k1*k1+x[1]*x[1];
108          l2=k2*k2+x[1]*x[1];
109          F[2]=-1*(x[0]-(1-mu)*k1/pow(l1, 1.5)-mu*k2/pow(l2, 1.5));
110          F[3]=-1*(x[1]-(1-mu)*x[1]/pow(l1, 1.5)-mu*x[1]/pow(l2, 1.5));
111      }
112      else{
113          F[0]=x[2]+x[1];
114          F[1]=x[3]-x[0];
115      }
116  }
117
118  void Sympl_Integr(double x[],int n,double &t,double h,
119      void (Ham_deriv)(double, double[], double[], bool))
120  {
121      int i,k=int(n/2);
122      double L[n], h2=h/2.;
123      (Ham_deriv)(t,x,L,true);
124      for(i=k;i<n;i++){//Halbschritt der Impulse
125          x[i]+=-h2*L[i];
126      }
127      (Ham_deriv)(t,x,L,false);
128      for(i=0;i<k;i++){//Schritt der Orte
129          x[i]+=h*L[i];
130      }
131      (Ham_deriv)(t,x,L,true);
132      for(i=k;i<n;i++){//Halbschritt der Impulse
133          x[i]+=-h2*L[i];
134      }
135      t+=h;
136  }
137
138  /******Abbruchbedingungen******/
139
140  double cond_kreis(double x,double a, double r){
141      double abs_quad;
142      abs_quad=r*r-(x-a)*(x-a);

```

```

143     return abs_quad;
144 }
145
146 void cond(double x[]){
147     double g;
148     if (fabs(x[0])>2){//Kasten mit Kantenlaenge 4 in x-Richtung
149         abb=true;
150         abb4=true;
151     }
152     if (fabs(x[1])>2){//Kasten mit Kantenlaenge 4 in y-Richtung
153         abb=true;
154         abb4=true;
155     }
156     if(fabs(x[0]+mu)<r1){//Erdoberflaeche
157         g=x[1]*x[1];
158         if(g<cond_kreis(x[0],-1*mu,r1)){
159             abb=true;
160             //abb4=true;
161         }
162     }
163     if(fabs(x[0]-mu2)<r2){//Mondoberflaeche
164         g=x[1]*x[1];
165         if(g<cond_kreis(x[0],mu2,r2))abb=true;
166     }
167 }
168
169 int count(double x[],double l, int cnt){//Zaehler der Mondumrundungen
170     if(x[1]>0){
171         if(sgn(l-mu2)!=sgn(x[0]-mu2)) cnt+=1;
172     }
173     return cnt;
174 }
175
176 int count1(double x[],double l, int cnt){//Zaehler der Erdumrundungen
177     if(x[1]<0){
178         if(sgn(l+mu)!=sgn(x[0]+mu)) cnt+=1;
179     }
180     return cnt;
181 }
182
183 /*****Suchalgorithmus*****/
    ↪ *****/

```

```

184
185 void opt_wnk(int j, double &wnk_step, double &wnk, double wnk_vec[],
↪ int i, int m){
186     if(j==m)        wnk_step=eps;
187     else{
188         if(j==1){
189             if (i==0){
190                 wnk=wnk_vec[i-1];
191                 wnk_step=wnk_step/(double(m));
192             }
193             if(i==m-1){
194                 wnk=wnk_vec[i-1];
195                 wnk_step=wnk_step/(double(m));
196             }
197             else{
198                 wnk=wnk_vec[i-1];
199                 wnk_step=2*wnk_step/(double(m));
200             }
201         }
202         else{
203             wnk=wnk_vec[i];
204             wnk_step=double(j-1)*wnk_step/(double(m));
205         }
206     }
207 }
208
209 int list_max(int list1[], double list2[], int m){//Maximum des Vektors
↪ bestimmen
210     int y=0;
211     for(int i=0;i<m;i++)        if(list1[i]>y)        y=list1[i];
212     return y;
213 }
214
215 int list_koord(int list1[], double list2[], int m, int y){//minimale
↪ Koordinate von j_max
216     for(int i=0;i<m;i++){
217         if(list1[i]==y)        return i;
218     }
219 }
220
221 int list_len(int list1[], double list2[], int m, int y){//Anzahl von
↪ j_max

```

```

222     int j=0;
223     for(int i=0;i<m;i++){
224         if(list1[i]==y)           j+=1;
225     }
226     return j;
227 }
228
229 double energy(double x[]){//Berechnung der Energie
230     if(schalter) return Omega(x[0],x[1])-((x[2]+x[1])*(x[2]+x[1])+(x[3]-
↪ x[0])*(x[3]-x[0]))/2.;
231     else return Omega(x[0],x[1])-(x[2]*x[2]+x[3]*x[3])/2.;
232 }
233
234 main(){
235     int cnt=0, cnt1=0,k=0,max=20,m,m1=0, m2,len,len2, koord,koord2;
236     int cnt_vec[max],cnt_vec2[max];
237     bool abb1=false,abb2=false;
238     double t=0, wnk_step=(pi/2.)/double(max), wnk=0,w,w1,l, wnkwnk, ww;
239     double x[neqn] ,wnk_vec[max],w_vec[max],lag_punkt[3];
240     const char* Dateiname;
241     z1[0]=-1.9;z1[1]=mu*(-1)+gen;z1[2]=1-mu+gen;
242     if (schalter)Dateiname="DaT_Dateien//planet4.dat";//Datei fuer SympL.
↪ Verf.
243     else Dateiname="DaT_Dateien//planet5.dat";//Datei fuer
↪ Runge-Kutta-Verf.
244     //x1=x[0], x2=x[1], x1^punkt=x[2], x2^punkt=x[3] Anfangsbed.
245     x[1]=0.; x[2]=0.; x[3]=0.; t=0.;
246     for(int i=0;i<3;i++){//Speichern der Lagrangepunkte
247         z2=z1[i]+mu2;
248         lag_punkt[i]=lag(i);
249     }
250     omeg1=Omega(lag_punkt[2],0);
251     omeg2=Omega(lag_punkt[0],0);
252     x[0]=0.15;//lag_punkt[2]+gen;           //x-Startpunkt fuer den Trek
253     omeg3=Omega(x[0],x[1]);
254     w=(sqrt(2*(omeg3-omeg1)));
255     w1=(sqrt(2*(omeg3-omeg2))+0.1);
256     double w_step=(w1-w)/double(max);
257     while(abb2==false){//Suchalgorithmus fuer Geschw.
258         for(int n=0; n<max;n++){
259             while(abb1==false){//Suchalgorithmus fuer Winkel
260                 for(int i=0; i<max;i++){

```



```

261 x[2]=cos(wnk)*w; //-x[1]; //Startgeschwindigkeit/impuls
    ↪ (x-Richtung)
262 x[3]=sin(wnk)*w; //+x[0]; //Startgeschwindigkeit/impuls
    ↪ (y-Richtung)
263 if (schalter){ //Symplectic Integration
264     while(abb==false){
265         l=x[0];
266         Sympl_Integr(x,neqn,t,tstep,Hamilton);
267         cond(x);
268         cnt=count(x,l,cnt); //Zaehler fuer Mondumdrehungen
269         //cnt1=count1(x,l,cnt1); //Zaehler fuer Erdumdrehungen
270     }
271 }
272 else{ //Runge-Kutta Verfahren
273     while(abb==false){
274         l=x[0];
275         rk(x,neqn,t,tstep,planet);
276         cond(x);
277         cnt=count(x,l,cnt);
278     }
279 }
280 cnt_vec[i]=cnt;
281 wnk_vec[i]=wnk;
282 if(abb4==true){
283     if (cnt==4){ //>cnt1){ //Bedingung fuer 4 bzw. Maximalbahn
284         //if(cnt1=2){
285         ww=w;
286         wnkwnk=wnk;
287         n=max;
288         abb2=true;
289         abb1=true;
290         i=max;
291         //cnt1=cnt; //Bei Maximalbahnbestimmung
292         //}
293         //else abb4=false;
294     }
295     else abb4=false;
296 }
297 wnk+=wnk_step;
298 x[0]=0.15; x[1]=0.; abb=false; cnt=0; t=0; //cnt1=0;
299 if(wnk_step<=eps){ //Abbruchbed. fuer Winkel
300     abb1=true;

```

```

301         i=max;
302     }
303 }
304 m=list_max(cnt_vec,wnk_vec, max);
305 koord=list_koord(cnt_vec,wnk_vec, max, m);
306 len=list_len(cnt_vec,wnk_vec, max,m);
307 opt_wnk(len,wnk_step,wnk,wnk_vec, koord, max);
308 }
309 cnt_vec2[n]=m;
310 w_vec[n]=w;
311 w+=w_step;
312 wnk_step=(pi/2.)/double(max); wnk=0;abb1=false;
313 }
314 m2=list_max(cnt_vec2,w_vec, max);
315 koord2=list_koord(cnt_vec2,w_vec, max, m2);
316 len2=list_len(cnt_vec2,w_vec, max,m2);
317 opt_wnk(len2,w_step,w,w_vec, koord2, max);
318 m1=0;
319 if(w_step<=eps){//Abbruchbed. fuer Geschwindigkeit
320     abb2=true;
321 }
322 }
323 ofstream fout(Dateiname,ios::out);
324 fout.setf(ios::scientific);fout.precision(6);
325 w=(sqrt(2*(Omega(0.15,0)-Omega(lag_punkt[1],0) )))+0.06;//ww;
326 wnk=0.46*pi;//wnkwnk;
327 x[0]=0.15;
328 x[1]=0.;
329 x[2]=cos(wnk)*w;//Startgeschwindigkeit (x-Richtung) fuer den Trek
330 x[3]=sin(wnk)*w;//Startgeschwindigkeit (y-Richtung) fuer den Trek
331 if (schalter){//Symplectic Integration
332     x[2]=x[2]-x[1];
333     x[3]=x[3]+x[0];
334     fout<<x[0]<<" "<<x[1]<<" "<< energy(x)<<" "<< t <<endl;
335     while(abb==false){
336         l=x[0];
337         Sympl_Integr(x,neqn,t,tstep,Hamilton);
338         fout<<x[0]<<" "<<x[1]<<" "<< energy(x)<<" "<< t <<endl;
339         cond(x);
340         cnt=count(x,l,cnt);
341     }
342 }

```

```

343 else{//Runge-Kutta Verfahren
344     fout<<x[0]<<" "<<x[1]<<" "<< energy(x)<<" "<< t <<endl;
345     while(abb==false){
346         l=x[0];
347         rk(x,neqn,t,tstep,planet);
348         fout<<x[0]<<" "<<x[1]<<" "<< energy(x)<<" "<< t <<endl;
349         cond(x);
350         cnt=count(x,l,cnt);
351     }
352 }
353 cout<<cnt<<endl;//Ausgabe der Mondumrundungen
354 fout.close();
355 }

```