

Computational Physics - Korteweg-de-Vries - Solitonwellen

Abstract

Das Soliton ist ein Phänomen aus der Wellenmechanik, welches durch die nichtlineare Physik beschrieben werden kann. Es sind Wellen, die über einen langen Zeitraum ihre Form und Geschwindigkeit beibehalten können. Die bekannteste Eigenschaft ist, dass bei einem Zusammenstoß von zwei Solitonen beide nach dem Aufeinandertreffen ihre Form und Geschwindigkeit beibehalten. Sinngemäß, als würden sie sich durchdringen und danach unbeschadet weiter fließen. Wir haben es hier mit einer Wellen zu tun. Für die mathematische Beschreibung benutzen wir die Korteweg de Vries Gleichung, damit können wir die das Phänomen simulieren. Hierbei beschränken wir uns auf den eindimensionalen Fall. In dieser Arbeit wird es hauptsächlich, um die Anwendung der Korteweg-de-Vries Gleichung auf den Fall von Solitonwellen gehen.

$$\eta(x, t)_t + \sqrt{gd} \left(\eta(x, t)_x + \frac{d^2}{6} \eta(x, t)_{xxx} + \frac{3}{2d} \eta(x, t) \eta(x, t)_x \right) = 0$$

Korteweg-de-Vries Gleichung

$$\eta(x, t)_t + \sqrt{gd} \left(\eta(x, t)_x + \frac{d^2}{6} \eta(x, t)_{xxx} + \frac{3}{2d} \eta(x, t) \eta(x, t)_x \right) = 0$$

Hierbei beschreibt $\eta(x, t)$ die Anhebung des Wassers. Wie gewohnt beschreiben x, t die Raumkoordinate und Zeit, g ist die Fallbeschleunigung und d ist die Wassertiefe. Die tiefergestellten Variablen zeigen eine partielle Ableitung an $\partial\eta/\partial t = \eta_t$. Diese Gleichung werden wir nun etwas reskalieren mit

$$t = 6\sqrt{\frac{d}{g}}\tau, \quad x = y \cdot d$$

und wenden die alte Notation an

$$u(t, x)_t + 6u(t, x)u(t, x)_x + u(t, x)_{xxx} = 0.$$

Eine mögliche Lösung für diese Differentialgleichung für Solitonwellen ist:

$$u(x, t) = \frac{A}{\cosh^2(kx - wt - \eta_0)}$$

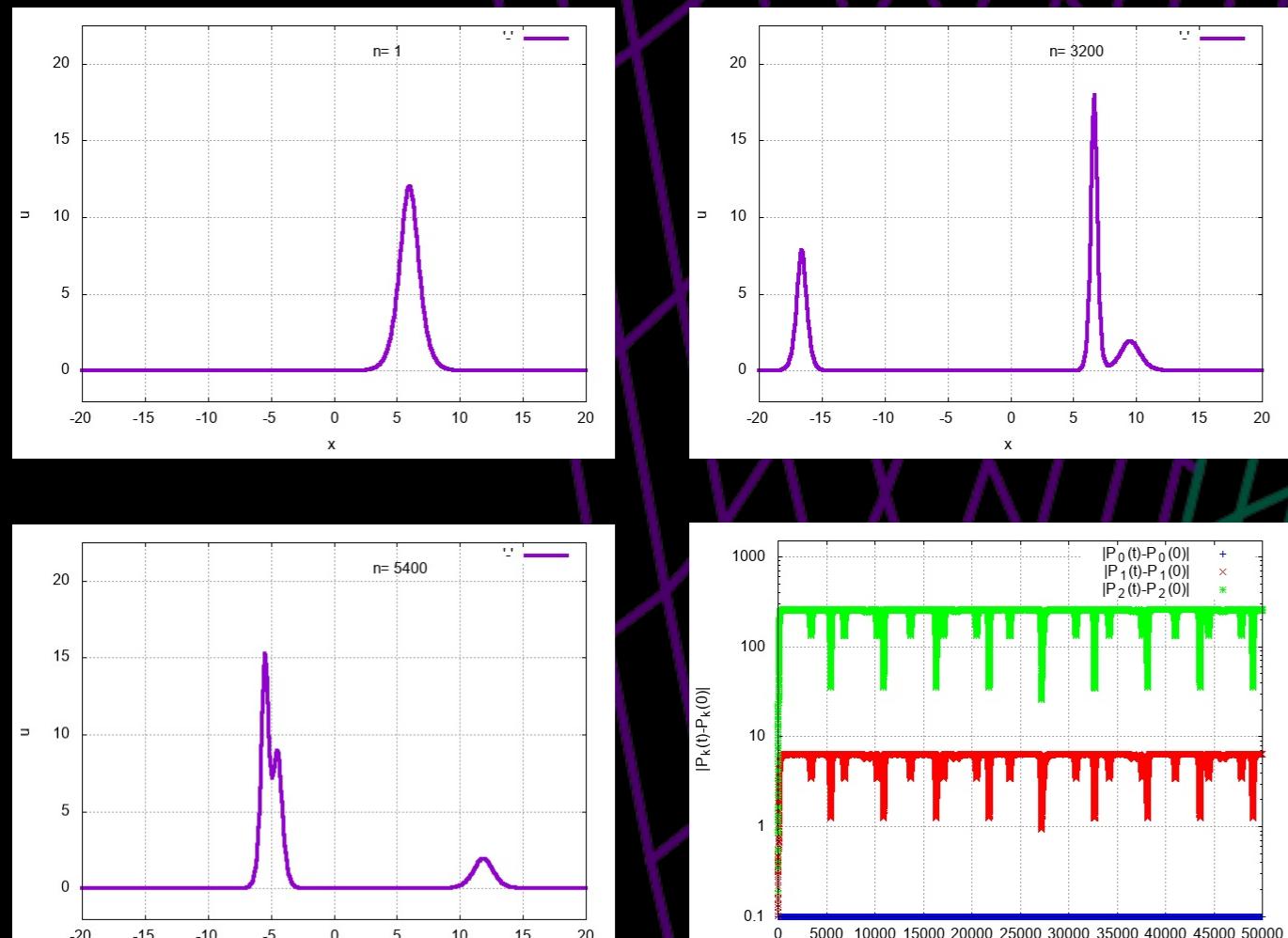
Die Integrale der Momente der Korteweg-de-Vries Gleichung sollen in der Zeit konstant bleiben:

$$\frac{dP_k}{dt} = 0$$

Zur Lösung der KdV Gleichung benutzen wir das Zabuski-Kruska Schema sowie periodische Randbedingungen.

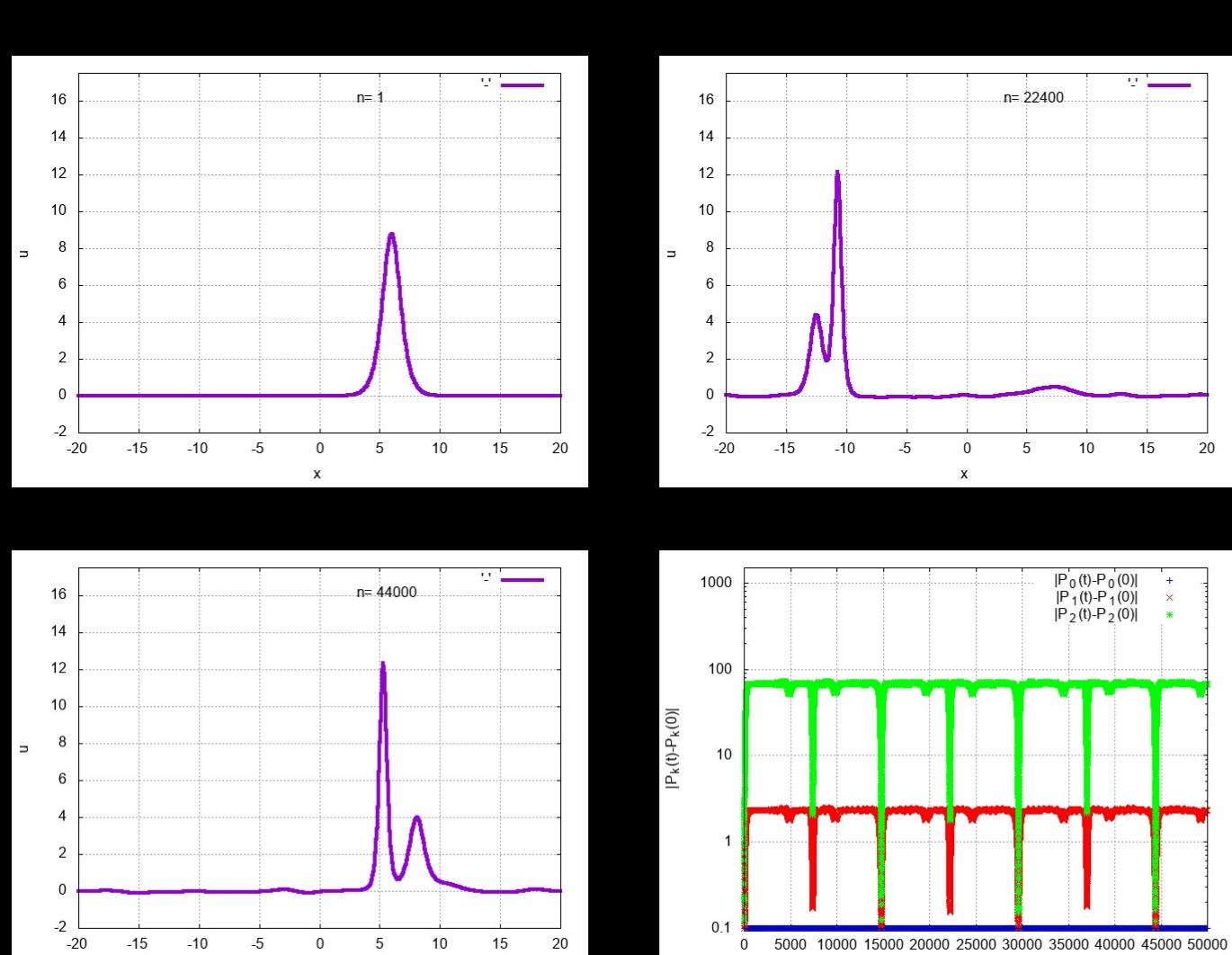
$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = \frac{1}{2\Delta t} (u^{m+1} - u^{m-1}) + \frac{1}{\Delta x} (u_{i-1}^m + u_i^m + u_{i+1}^m)(u_{i+1}^m - u_{i-1}^m) + \frac{1}{2\Delta x^3} (u_{i+2}^m - 2u_{i+1}^m + 2u_{i-1}^m - u_{i-2}^m) = 0$$

Für $N = 3$ erhalten wir das folgende Ergebnis:



Die Solitonwelle bewegt sich nach rechts und teilt sich entsprechend $N = 3$ in drei weitere Wellen auf. Im letzten Diagramm sieht man deutlich bei welchen Zeitpunkten sich die Wellen wieder vereinigen. Die Werte der Integrale sinken wieder auf Null runter.

Für den Fall $N = 2.5$ beobachten wir das selbe, im Unterschied zu dem davor, haben wir hier eine kleinere Welle die sich sehr langsam bewegt und viele winzige Wellen, die sich nach links bewegen.



Die Solitonwelle bewegt sich nach rechts und teilt sich entsprechend $N = 2.5$ in drei weitere Wellen auf. Im letzten Diagramm sieht man deutlich bei welchen Zeitpunkten sich die Wellen wieder vereinigen. Die Werte der Integrale sinken wieder auf Null runter.

Korteweg-de-Vries Gleichung bei variabler Tiefe

Für die Simulation eines Bodenprofils des Wasser führen wir die Wassertiefenfunktion $h(x)$ ein. Dazu wird die Korteweg-de-Vries Gleichung mit $h(x)$ folgendermaßen modifiziert:

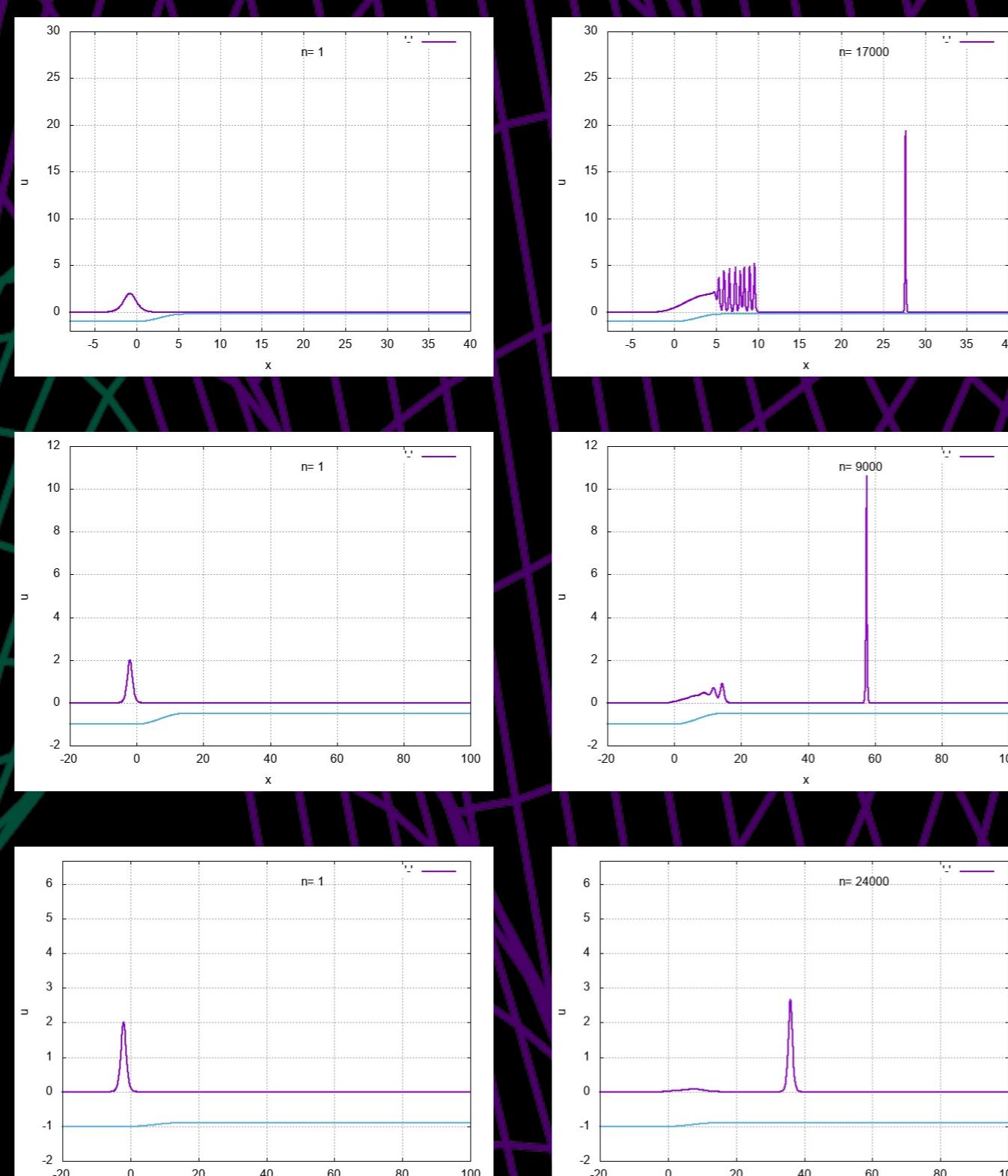
$$u(t, x)_t + \frac{6}{h^{7/4}(x)} u(t, x)u(t, x)_x + h^{1/2}(x)u(t, x)_{xxx} = 0$$

Das Zabuski-Kruskal Schema wird mit den gleichen ausgeführten Anfangsbedingungen und Lösungen verwendet.

$h_1(x)$ Unterwassererhöhung

Wir platzieren im Wasser ein kleine Erhöhung. In unserer ersten Untersuchung bezeichnen wir die Wassertiefenfunktion mit $h_1(x)$. Sie ist folgendermaßen definiert:

$$h_1(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ \frac{1+h_0+(1-h_0)\cos(\pi x/L)}{2} & 0 < x < L \\ h_0 & x > L \end{cases}$$

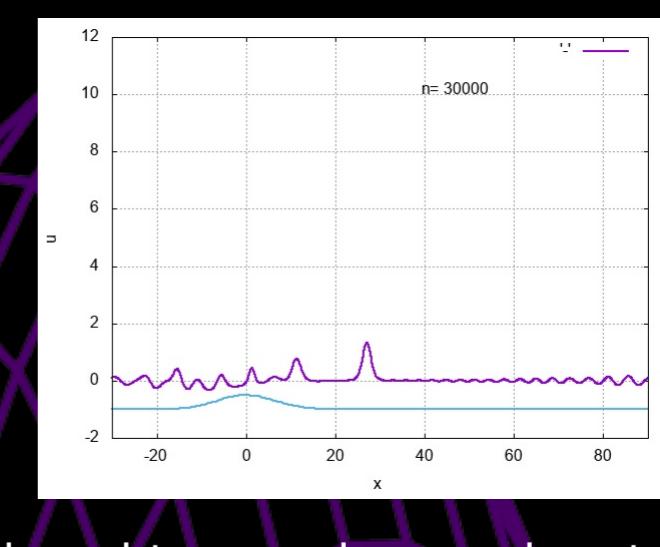
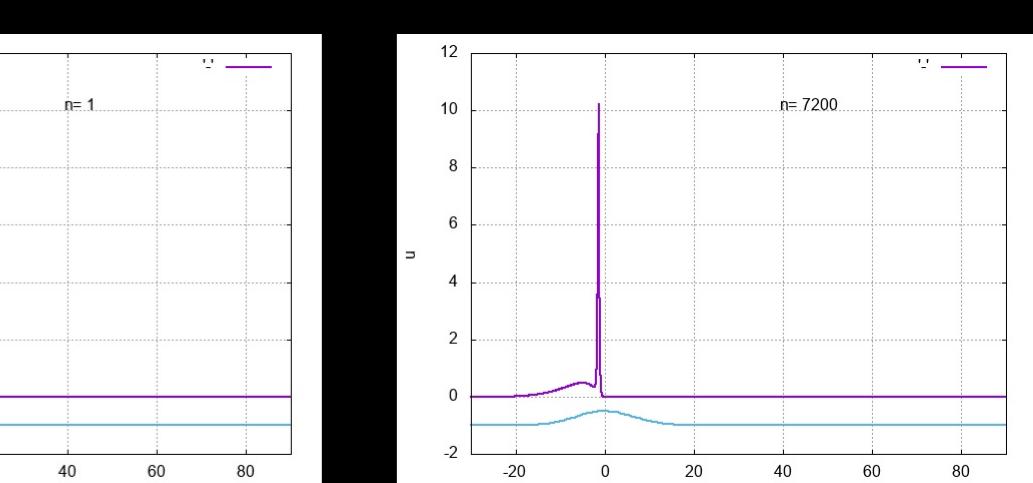
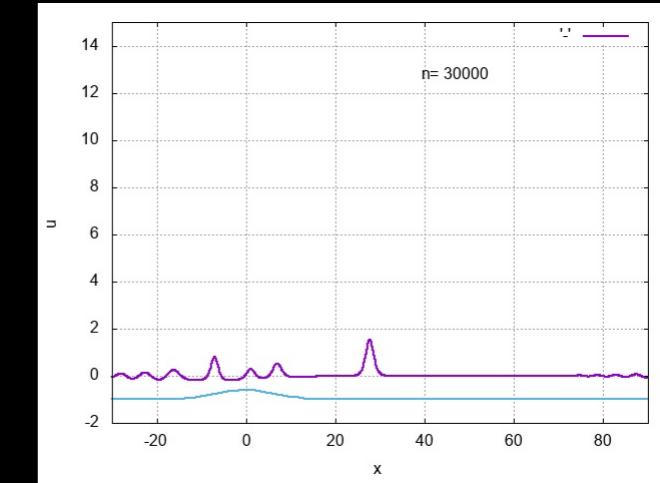
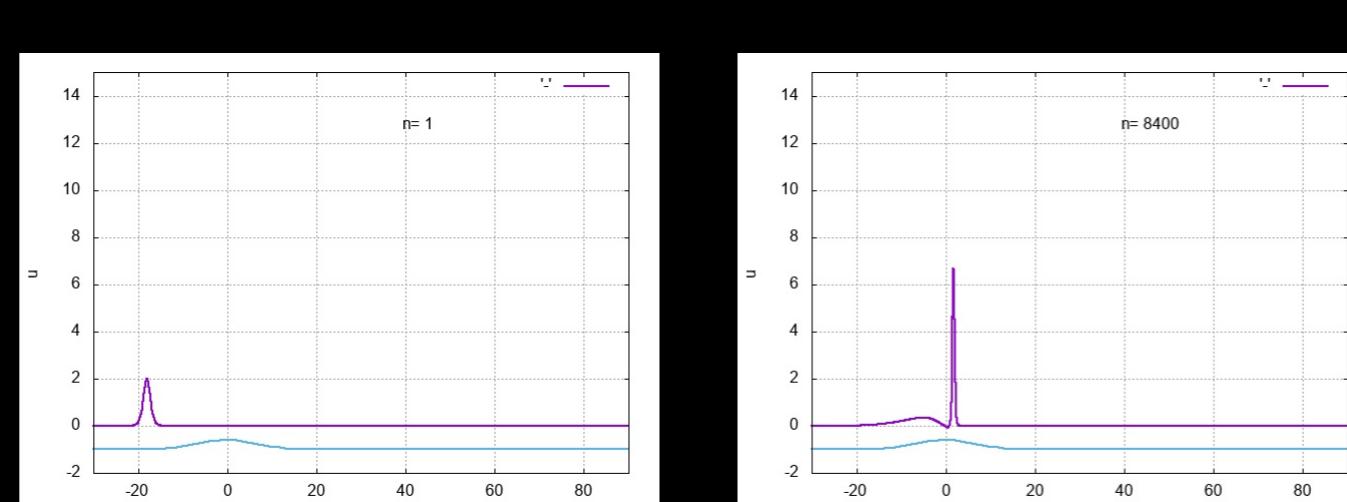


Von oben nach unten, sind die Abbildungen mit aufsteigender Höhe $h_0 = [0.2, 0.5, 0.9]$ angeordnet. Links sind die Ausgangssituationen und rechts sind die Endprodukte der Simulation zu sehen. Die Solitonwelle bewegt sich nach rechts und transformiert sich an der Anhöhe in ein viel größere Welle. Die Amplitude steigt sehr schnell an. Die übrig gebliebene Wellenberg teilt sich weiter in kleinere Welle auf. Je niedriger die Anhöhe im Wasser ist desto schwächer wird die Amplitude Solitonwelle erhöht.

$h_2(x)$ Beispiel eines Unterwasserhügels exponentielle Wassertiefenfunktion

Zur weiteren Untersuchung benutzen wir nun eine weitere Wassertiefenfunktion, den Unterwasserhügel.

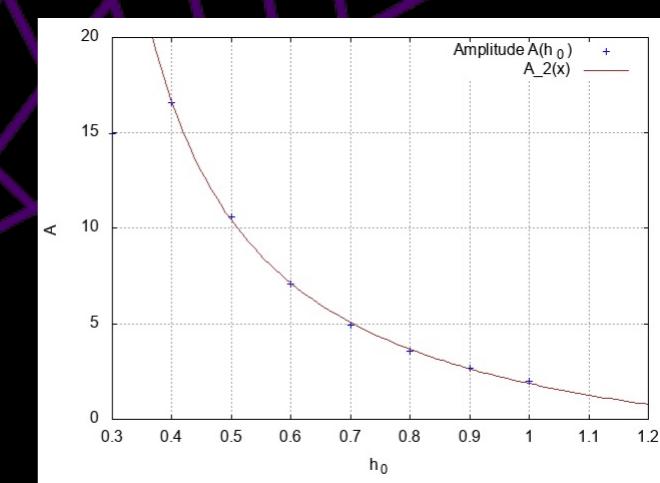
$$h_2(x) = 1 - h_0 \exp(-x^2/L^2)$$



Von links nach rechts von oben nach unten, sind die Abbildungen mit aufsteigender Höhe $h_0 = [0.4, 0.5, 0.9]$ angeordnet. Die Solitonwelle bewegt sich nach rechts und transformiert sich an der Anhöhe in ein viel größere Welle. Die Amplitude steigt sehr schnell an. Die übrig gebliebene Wellenberg teilt sich weiter in kleinere Welle auf. Die Amplitude nimmt mit steigender Höhe zu. Nach der Überquerung der Anhöhe geht die Solitonwelle fasst zurück zu ihrer Ursprungsgröße.

Abhängigkeit der Amplitude $A(h_0)$ von der Tiefe h_0

Wie man an den vorhergehenden Beispielen gesehen hat, wird die Amplitude der Welle bei passieren eines Höhenunterschieds vergrößert. Demnach bringen wir die Höhe h_0 und das Maximum der Amplitude A in Beziehung und erhalten als Ergebnis:



Wenn wir als Fit Funktion die Umkehrfunktion benutzen

$$A(h_0) = \frac{C}{h_0 + e} + d$$

bekommen wir

$$A(h_0) = \frac{4,69}{h_0 - 0,17} - 3,77$$

Zusammenfassung

Wir haben mit diesem Programm das Phänomen des Solitons untersucht. Die fundamentale Eigenschaften solch einer Welle konnten wir mit dieser Simulation aufzeigen. Wir konnten zeigen, dass die Wellen nach einem Zusammenstoß wieder in ihren vorherigen Zustand zurückkehrten. Es ist zu sehen, dass die Wellen bei ihrer Bewegung ihre Form und Geschwindigkeit beibehalten haben. Wir haben die Tiefe des Wasser variiert, um das Verhalten eines Solitons in dieser physikalischen Situation zu studieren und kamen auf das Ergebnis, dass die Welle sich transformierte und weitere Wellen erzeugte. Das Soliton konnte durch keine der gemachten Störungen zerstört werden. Die Eigenschaften blieben erhalten. Die Amplitude der Wellen wurde verändert. Wir haben den Zusammenhang zwischen der Amplitude und Tiefe die Umkehrfunktion finden können. Die Form der Wassertiefenfunktion haben wir verändert und konnten dasselbe Verhalten der Wellen beobachten.

Quellen

- Zabusky, N. J. & Porter, M. A. Soliton. Scholarpedia 5, 2068 (2010).
- Taha, T. R. & Ablowitz, M. J. Analytical and numerical aspects of certain nonlinear evolution equations. III. Numerical, Korteweg-de Vries equation. Journal of Computational Physics 55, 231–253 (1984).
- Johnson, R. S. Some numerical solutions of a variable-coefficient Korteweg-de Vries equation (with applications to solitary wave development on a shelf). Journal of fluid mechanics 54, 81–91 (1972).
- Hui-Ping, W., Yu-Shun, W. & Ying-Ying, H. An explicit scheme for the KdV equation. Chinese Physics Letters 25, 2335 (2008).