Das Zwei-Körper-Problem

Bewegungsgleichungen I

Wir erinnern uns (?):

Die Keplerschen Gesetze

1. Jeder Planet bewegt sich auf einer elliptischen Bahn mit der Sonne in einem der Ellipsen-Brennpunkte.
2. Die Geschwindigkeit eines Planeten erhöht sich mit abnehmendem Abstand zur Sonne so, dass die Verbindungslinie Sonne-Planet in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht.
3. Das Verhältnis P^2/a^3 ist für alle Planeten, die die Sonne umkreisen dasselbe, wobei P die Umlaufzeit des Planeten und a die große Halbachse der Ellipse ist.

Das 1. und 3. Keplersche Gesetz beschreiben die Form der Bahn, aber nicht die Zeitabhängigkeit $\vec{r}(t)$. Diese kann nicht einfach durch elementare Funktionen ausgedrückt werden. Wir werden daher versuchen, eine numerische Lösung zu finden.

Bewegungsgleichungen II

System Erde-Sonne

$\rightarrow$ Zwei-Körper-Problem $\rightarrow$ Ein-Körper-Problem mittels reduzierter Masse:

$$\mu = \frac{M\,m}{m+M} = \frac{m}{\frac{m}{M}+1} \tag{1}$$

da $m_{\mathrm{E}} \ll M_{\odot}$ ist $\mu \approx m$, d.h. Bewegung relativ zum Schwerpunkt $\equiv$ Bewegung von m.
Legen $(0,0)$ in Ursprung des Kraftfeldes erzeugt von M.

Desweiteren: Newtons 2. Gesetz:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \tag{2}$$

Und Kraftfeld gemäß Newtons Gravitationsgesetz:

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^3}\,\vec{r} \tag{3}$$

Bewegungsgleichungen III

Die Keplergesetze, aber auch die Annahme einer Zentralkraft implizieren *Drehimpulserhaltung* $\rightarrow$ Bewegung findet in *einer Ebene* statt ($\rightarrow$ 1. Keplersches Gesetz).
Wir benutzen kartesische Koordinaten in der xy-Ebene:

$$F_x = -\frac{GMm}{r^3}\,x \tag{4}$$

$$F_y = -\frac{GMm}{r^3}\,y \tag{5}$$

Die Bewegungsgleichungen lauten dann

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{GM}{r^3}\,x \tag{6}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{GM}{r^3}\,y \tag{7}$$

$$\text{mit} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{8}$$

Kreisbahnen

Einen Spezialfall als Lösung der Bewegungsgleichungen (6) & (7) ist die Kreisbahn. Für sie gilt

$$\ddot{r} = \frac{v^2}{r} \tag{9}$$

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2} \quad \text{(Kräftegleichgewicht)} \tag{10}$$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \tag{11}$$

Die Beziehung (11) ist somit die Bedingung für eine Kreisbahn. Desweitern ergibt Gl. (11) zusammen mit

$$P = \frac{2\pi r}{v} \tag{12}$$

$$\Rightarrow \quad P^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3 \tag{13}$$

Für unser Sonnensystem ist es praktisch, astronomische Einheiten (AU) zu benutzen:

$$1\,\mathrm{AU} = 1.496 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$$

und die Einheit der Zeit ist das (Erden-) Jahr

$$1\,\mathrm{a} = 3.156 \times 10^{7}\,\mathrm{s} \quad (\approx \pi \times 10^{7}\,\mathrm{s}),$$

dann ist für die Erde $P = 1\,\mathrm{a}$ und $r = 1\,\mathrm{AU}$
Somit folgt aus Gl. (13):

$$GM = \frac{4\pi^2 a^3}{P^2} = 4\pi^2\,\mathrm{AU}^3\,\mathrm{a}^{-2} \tag{14}$$

D.h. wir setzen $GM \equiv 4\pi^2$ in unseren Rechnungen.
Vorteil: handlichere Zahlen!
Dadurch ist z.B. $r = 2$ ungefähr $3 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$ und $t = 0.1$ entspricht $3.16 \times 10^{6}\,\mathrm{s}$, und $v = 6.28$ ist ca. 30 km/s.

Das Euler-Verfahren I

Die Bewegungsgleichungen (6) & (7):

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{GM}{r^3}\vec{r} \tag{15}$$

sind ein System von Differentialgleichungen 2. Ordnung, das nun gelöst werden soll.
Formal: *Integration* der Bewegungsgleichung um die *Bahngleichung* $\vec{r}(t)$ zu erhalten.

Schritt 1: Reduktion

Schreibe Newtonsche Bewegungsgleichung als System von Differentialgleichungen *1. Ordnung* (hier 1D):

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad \& \quad a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{F(x,v,t)}{m} \tag{16}$$

Das Euler-Verfahren II

Schritt 2: Lösen der Differentialgleichung

Differentialgleichungen der Form (Anfangswertproblem)

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad x(t_0) = x_0 \tag{17}$$

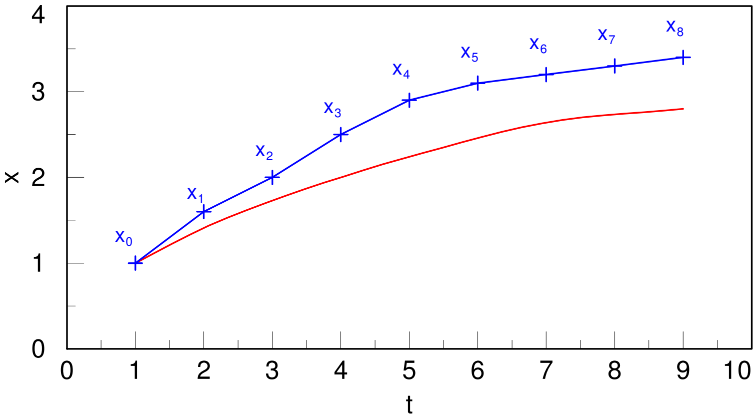
lassen sich durch eine einfache Methode numerisch (Diskretisierung) lösen:

Explizites Euler-Verfahren (Eulersches Polygonzugverfahren)

1. Wähle Schrittweite $\Delta t > 0$, sodass $t_n = t_0 + n\Delta t, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$
2. Berechne die Werte (Iteration):
   $x_{n+1} = x_n + f(x_n, t_n)\Delta t$

Klar: je kleiner die Schrittweite Δt, desto mehr Schritte notwendig, aber auch desto genauer ist das Ergebnis.

Warum Polygonzugverfahren?



Exakte Lösung (–) und numerische Lösung (–).

Herleitung aus Fundamentalsatz der Analysis

$$\text{Integration der Dgl.} \quad \frac{dx}{dt} = f(x,t) \quad \text{von } t_0 \text{ bis } t_0 + \Delta t \tag{18}$$

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \frac{dx}{dt} dt = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} f(x,t) dt \tag{19}$$

$$\Rightarrow x(t_0 + \Delta t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} f(x(t),t) dt \tag{20}$$

Anwenden der Rechteckregel fürs Integral:

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} f(x(t),t) dt \approx \Delta t\, f(x(t_0), t_0) \tag{21}$$

Gleichsetzen von (20) und (21) liefert Euler-Schritt

Herleitung aus Taylorreihenentwicklung

$$x(t_0 + \Delta t) = x(t_0) + \Delta t \, \frac{dx}{dt}(t_0) + \mathcal{O}(\Delta t^2) \tag{22}$$

$$\text{Nutze} \quad \frac{dx}{dt} = f(x, t) \tag{23}$$

$$x(t_0 + \Delta t) = x(t_0) + \Delta t \, f(x(t_0), t_0) \tag{24}$$

Das Euler-Verfahren VI

Für das System (16) bedeutet das

Euler-Verfahren für Newtonsche Bewegungsgleichungen

$$v_{n+1} = v_n + a_n \Delta t = v_n + a_n(x_n, t)\Delta t \tag{25}$$

$$x_{n+1} = x_n + v_n \Delta t \tag{26}$$

Wir stellen fest:

- die Geschwindigkeit am Ende des Zeitintervalls v_{n+1} wird bestimmt durch a_n, die Beschleunigung am Anfang des Intervalls
- ebenso wird x_{n+1} aus v_n berechnet

Wir werden den Algorithmus etwas variieren, sodass wir aber für $\Delta t \to 0$ dieselben DGl. erhalten.

Das Euler-Verfahren VII

Dabei werden wir nun v_{n+1} zur Berechnung von x_{n+1} benutzen:

Euler-Cromer-Verfahren (Semi-implizites Euler-Verfahren)

$$v_{n+1} = v_n + a_n \Delta t \quad \text{(wie bei Euler)} \tag{27}$$

$$x_{n+1} = x_n + v_{n+1} \Delta t \tag{28}$$

Vorteil dieser Methode:

- wie bei Euler-Verfahren nur einmalige Berechnung von x, v nötig
- besonders geeignet für oszillierende Lösungen, da Energie besser erhalten wird; nämlich:

$$\text{Euler: } E_{n+1} = E_n(1 + \Delta t^2) \tag{29}$$

$$\text{Euler-Cromer: } E_{n+1} = E_n + \cos 2(t - t_0)\Delta t^2 + \mathcal{O}(\Delta t^3) \tag{30}$$

Term $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ mittelt sich über eine Periode heraus, bleibt nur $\mathcal{O}(\Delta t^3)$.

Das Euler-Verfahren VIII

Eventuell ist es besser, die Geschwindigkeit für die Mitte des Intervalls zu berechnen:

Euler-Richardson-Verfahren (Euler-Halbschritt-Verfahren)

$$
\begin{aligned}
a_n &= F(x_n, v_n, t_n)/m && (31)\\
v_\mathrm{M} &= v_n + a_n \frac{1}{2}\Delta t && (32)\\
x_\mathrm{M} &= x_n + v_n \frac{1}{2}\Delta t && (33)\\
a_\mathrm{M} &= F\left(x_\mathrm{M}, v_\mathrm{M}, t_n + \frac{1}{2}\Delta t\right)/m && (34)\\
v_{n+1} &= v_n + a_\mathrm{M}\Delta t && (35)\\
x_{n+1} &= x_n + v_\mathrm{M}\Delta t && (36)
\end{aligned}
$$

Wir benötigen nun doppelt soviele Rechenschritte, sind aber u.U. effizienter, da wir eine größere Schrittweite wählen können als beim Euler-Verfahren.