Vorlesung 2024-01-31 Relativistische Symmetrie & Spin

nicht relativistisch

$$\underbrace{S}_{} = \underbrace{J}_{\text{Gesamt-Drehimpuls}} - \overbrace{L}^{\text{Bahndrehimpuls}} = J - \underbrace{R}_{\text{Ortsoperator}} \times \overbrace{P}^{\text{Impuls operator erzeugt Translation}}$$

$R = -\frac{K}{M}$ ← erzeugt Galileiboosts (Boosts), M – Masse

Differenz vektoriell, vertauscht mit P

$$[P, S] = 0 = [H, S] = [K, S]$$

$$[P, J] \simeq P \qquad [P, R] \simeq \mathbb{1}$$

Casimir Operator C kommutiert mit allen Erzeugenden

hier $C_1 = \vec{S}^2 = s\cdot(s+1)$

weitere Casimirs: $C_2 = H - \frac{P^2}{2M} = "U_{int}"$ – innere Energie

$C_3 = M$

sind in irreduzierbare Darstellung durch KOnstanten $\quad M = m\,\mathbb{1}$ (Masse)

erlaubte Spinquantenzahlen $\quad 0 = [G, C]$

$s = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots \qquad [G, C]\,|c, \alpha\rangle$

relativistische Lie-Algebra (= Poincare Algebra)

	J	K	P	H
J	J	K	P	0
K	K	$-\frac{J}{c^2}$	$\frac{H}{c^2}$	$-P$
P	P	$-\frac{H}{c^2}$	0	0
H	0	P	0	0

4-Vektorielle Operatoren

$$(P^\mu) = (H/c, \vec{P})$$

invariante Operatoren

$$P_\mu P^\mu = \frac{H^2}{c^2} - P^2 = M^2 c^2$$

Casimir

allgemeiner Spinoperator

$$(W^\mu) = \left(\frac{P \cdot J}{c}, \frac{H}{c^2} J + K \times P\right)$$

erzeugt

Wigner bezeichnet diese Gruppe, little group
Pauli-Lubanski Vektor

$$W_\mu W^\mu = -M^2 s(s+1)$$

Man kann alle Elementarteilchen
danach unterteilen in der Relativitätstheorie

$$W_\mu P^\mu = 0 \qquad s = 0, \tfrac{1}{2}, 1, \dots$$

irreduzible Darstellungen der Lorentz-Algebra für J und K Operatoren

siehe Übung

$A = J + iK$ - beide hermitische Operatoren

$B = J - iK$

K nicht hermitisch
weil Gruppe darunter
kompakt

zerfällt in zwei SU(2) Algebren - zwei Unterräume A, B

nur A und B sind noch
hermitisch

$[A, B] = 0$ $\quad [A_i, A_j] = 2i\,\varepsilon_{ijk} A_k$

wie Skalarprodukt $\quad [B_i, B_j] = 2i\,\varepsilon_{ijk} B_k$

2 Quantenzahlen j, j' für SU(2) Algebren

irreduzile Darstellungen abzählen

$\frac{A}{2}$ = Drehimpuls $\quad j = 0, \frac{1}{2}, 1, \ldots$

$\frac{B}{2}$ = -//- $\quad j' = 0, \frac{1}{2}, 1, \ldots$

0-Operatoren

$(j, j') = (0, 0)$ Higgs-Boson

Feld-Amplitude

$(j, j') = (0, \frac{1}{2})$ links

$(j, j') = (\frac{1}{2}, 0)$ rechts $\Big\}$ Hände

Helizität

$\Rightarrow A = J + iK \hat{=} 0 \quad K = -iJ$

$B = J - iK = \vec{\sigma}$

Pauli-Matrizen

$\Rightarrow A + B = 2J = \vec{\sigma}$

$J = \frac{\vec{\sigma}}{2}$

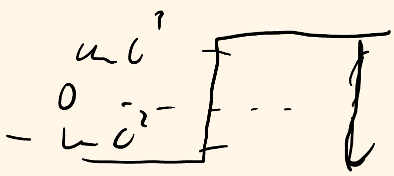
$\Rightarrow K = -iJ = -i\vec{\sigma}$

boost in $\vec{q}$ - Rapidität (Geschwindigkeit)

$\exp(-i\frac{\vec{q}\cdot\vec{k}}{c}) = \exp(-\frac{\vec{q}\cdot\vec{\sigma}}{2c})$

$\vec{q} \parallel \vec{e}_3 \quad = \begin{pmatrix} e^{-q/2c} & 0 \\ 0 & e^{q/2c} \end{pmatrix}$

boost hat nicht hermitischen Generator
Lorentz-Gruppe kompakt
--> keine endlich dimensionale unitäre Darstellung
also eher unendlich viele Teilchen können
erzeugt werden



$= 2mc^2$

erzeugt e-, e+ Paare "aus dem Nichts"
im inhhomogene Feld
(Klein Paradox)

Parität