lecture 2024-01-24

spinor (=vektor?)
Transformation = Matrix?

Spinordarstellung von Λ

Spinorwertie Funktion $\underline{\Psi}(x) \to S\,\underline{\Psi}(\Lambda^{-1} x)$

$$\begin{pmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_2(x) \end{pmatrix}$$ komplexer Spaltenvektor

allgemeines Feld
irreduzierbare Darstellung der Λ
liefert Trafo $S(\Lambda)$

Beispiel: 2-komponenten Spinor
4-komponenten Spinor (Dirac)
4-Vekotren $A_\mu(x)$

antisymmetrische Tensor $T_{\mu\nu}(x)$

symmetrische $T_{\mu\nu}(x)$

Darstellung von Verschiebungen

$$\begin{pmatrix} \vec{r}\,' = R\vec{r} + \vec{b} + \vec{v}t \\ t' = t - \tau \\ 1 \mapsto 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & \vec{v} & \vec{b} \\ 0 & 1 & -\tau \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r} \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

affine Trafo, 5×5, Galilei

affine Abbildungen
Parameter / Erzeugene der Galilei Gruppe
Kommutatoren der Galilei-Gruppe

$$\underset{R}{3} + \underset{\vec{v}}{3} + \underset{\vec{b}}{3} + \underset{\tau}{1} = 10$$

Trafo

Poisson$\{\cdot, G\}$

Generator

kommutiert nicht mit sich selbst $,\vec J$

$R\vec r = \vec r + (\vec\alpha \times \vec r)$ | $\{\vec r, (\vec r \times \vec v)\cdot\vec\alpha\}$

(Q_μ) Drehimpuls $\vec J$

Generator

DGL

$\vec G = (\vec r \times \vec v)\cdot\vec\alpha$

$\vec r + \vec v\, t$ $\qquad \vec G_2 = (\vec p t - \mu\vec r)\vec v$

"Boost" $\vec k$ $\qquad \vec J$ $\qquad$ weil verbindende Operatoren

$\vec r + \vec b$ $\qquad \vec G = \vec p \cdot \vec b$

Impuls $\vec p$ $\qquad \vec J, \vec k^*$ –"–

*projektive Darstellung

$t - \tau$ $\qquad$ G = H-Hamilton Hamiltonfunktion

Energie H

(Masse $M \sim \mathbb{1}$)

Masse M

kommutiert nur durch um Poisson Klammern

$\{x_i, p_j\} = \delta_{ij}$ $\qquad [\hat r_i, \hat p_j] = i\hbar\,\delta_{ij}\,\mathbb{1}$

klassisch Phasenraumzeit
= Poisson-Klammer

unitäre → Darstellung

QM Operator

$\vec J, \vec k$

$\vec r, \vec p, \vec k, \ldots$

$T(g g') = e^{-i\varphi(g,g')}\, T(g)\, T(g')$

↓ expandieren mit Taylor

$\mathbb{1} - i\varphi(G, G')\,\mathbb{1}$

funktioniert nicht für beliebige
Phasenraum-Fkt
Groenewold-Theorem

symplektische Struktur
kanonische Variablen

zentral erteiterte Algebra

also ein Element das zu allen
Elementen kommutiert

Kommutatoren:

von Galilei sind es insgesamt 100

J, k, P sind vektoriell $\qquad [J_i, V_j] = i\hbar\,\varepsilon_{ijk} V_k$ $\qquad 9$

H ist Skalar $\qquad [\vec J, H] = \vec 0$ $\qquad 3$

Unterschiede

	J	k	P	H
J	J	k	P	0
k	k	0	$-M\mathbb{1}$	$-P$
P	P	$+M\mathbb{1}$	0	0
H	0	P	0	0

ohne $i\hbar$

$[k_i, H] = i\hbar(-P_i)$

Casimir-Operatoren

kommutiert mit allen Operatoren