lecture 2023-11-15

invariante Untergruppe = Normalteiler
große Gruppe G zerlegt in Produkt $G = G/_Z \times Z$

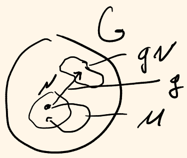
eine Gruppe ist nicht einfach
die Negation nennt man einfach

▽ $\square$ Quadrat-Symmetrie   alle Commutatoren auswählen   @

kommutative Untergruppe $U = \{ e, I \}$ (e = $\mathbb{1}$, I = $\begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$ = Inversion) △

Begriff Faktorgruppe

Sei $N \leq G$ eine Untergruppe, invariant
betrachte Nebenklasse $gN = \{ gh \mid h \in N \}$



(Trafo: gleichwertig zu g "bis auf eine N-Trafo") – meint Äquivalenzrelation

▽ Bewegung in $E(3)$ – Drehung und Transl. – bilden invariante Untergruppe $T(3)$ △

konstruiere Verknüpfung von Nebenklassen
$gN, g'N \mapsto gg'N$ bilde alle Produkte von gh und $g'h'$ elementweise

berechne $gh\, g'h'$ $gh g'h' = g g' \underbrace{g'^{-1} h g'}_{\text{konjugiertes } \in N} h' = g g' h_2 h' \subset gg'N$ ($h_2 h' \in N$)

$g, g' \in G$, $h, h' \in N$

neutrales Element $e = eN = N$ Normalteiler

Man nennt die Gruppe der $\{ gN \mid g \in G \}$ die Faktorgruppe G/N

▽ Bewegung $E(3)$ $\frac{E(3)}{T(3)}$ = Drehungen $R(3)$ △
Translationen

▽ Quadratgruppe $\begin{pmatrix} e \\ I \end{pmatrix}_{N_1}$ $\begin{pmatrix} M_x \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \\ M_y \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}_{N_2}$ $\begin{pmatrix} D \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \\ D^{-1} \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} \end{pmatrix}_{N_3}$ $\begin{pmatrix} M_{45} \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \\ M_{-45} \begin{pmatrix} & -1 \\ -1 & \end{pmatrix} \end{pmatrix}_{N_4}$ $N_2 \otimes N_3 = N_4$

Nebenklassen △

▽ QM   Operator U unitär
äquivalent bis auf globalen Phasenfaktor $\{ \mathbb{1} e^{i\vartheta} \} \simeq U(1)$ isomorph
Hilbertraum

$U \mathbb{1} e^{i\vartheta} U^{-1} = \mathbb{1} e^{i\vartheta}$ △

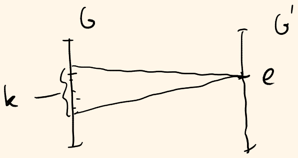
Operatoren sich nur
um einen Phasenfaktor unterscheiden
also Nebenklasse

▷ Homomorphismus $f: G \to G'$

d.h. $\forall g_1, g_2 \in G$ $\quad f(g_1 g_2) = f(g_1)\, f(g_2)$

ker f in G ist eine invariante Untergruppe $\triangleleft G$

$K = \{ g \mid f(g) = e \}$



so $g, g' \in K$

$g g'$ ist in K? $\quad e = f(gg') = f(g)\, f(g') = e \cdot e = e$ ✓

$$f(g' g g'^{-1}) = f(g') \cdot \underbrace{f(g)}_{\in K,\ = e} \cdot f(g'^{-1}) = f(g')\, e\, f(g'^{-1}) = f(g')\, f(g'^{-1}) = f(g' g'^{-1}) = f(e) = e$$

$$f: G \to G/N$$
$$g \mapsto gN$$
$$e \mapsto eN = N$$

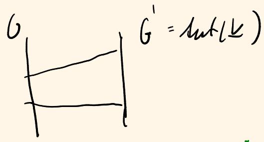
Darstellung $D: G \to \mathrm{Aut}(V)$ - Automorphismen ist Homomorphismus

$$D(g_1 g_2) = D(g_1)\, D(g_2)$$

▷ "trivial" $\quad D(g) = \mathbb{1}$ $\quad \to$ kern ist Gruppe

QM Spin 0, "Vakuum" $\quad D(g) = \mathbb{1}$

"treue" Darstellung D ist injektiv



▷

Bild ist eine Untergruppe von $\mathrm{Aut}(V)$ $\quad$ Bild $D(G) < \mathrm{Aut}(V)$