lecture 2024-01-17
welche Darstellung der Drehgruppe SO(3)?

physikalisch jede Symmetrie* wird in der QM als unitäre Darstellung realisiert
Es gilt der Satz von Wigner. kontinuierlich und ist in einer Lie Algebra

Antwort (Lie Algebra Theorie, Lie, Killing, Cartan, Weyl)

irreduzible Darstellungen
genau eine (bis auf Äquivalenz) in Dimensionen 1,2,3, ...
und zwar die "Drehimpulse"

$j = 0, \tfrac{1}{2}, 1, \dots$

$m = 0, \quad -\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}, \quad -1, 0, 1$

warum?

erinnere an die Kommutatoren von

J_1, J_2, J_3

als hermitische Operatoren
Drehung um z-Achse durch

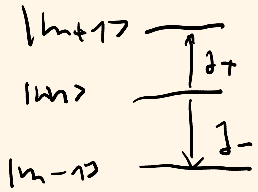
$$\underbrace{T_z(\vartheta)}_{\text{Liegruppe}} = \exp\Big(-i \frac{\vartheta}{\hbar} \underbrace{J_3}_{\text{Lie-Algebra}}\Big)$$

$\hbar$ wird weggelassen für die weitere Betrachtung

J_3 wird diagonalisiert, man nimmt eine Basis und die anderen sind dann mit dieser nicht diagonilisert
das sieht man anhand dessen das sie nicht kommutieren also Kommutator nicht null
wähle J_3 so, dss diagonale Matrix

Leiteroperatoren $\quad J_\pm = J_1 \pm i J_2 \quad$ nicht hermitisch

$$[J_3, J_+] = iJ_2 - \underbrace{ii}_{+1} J_1 = J_+$$



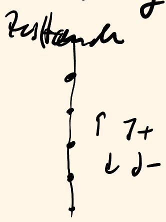
$J_3 J_+ |m\rangle = J_+ |m\rangle (m+1)$

Eigenwerte von J_3

Beschränkung der Quantenzahl

$$\vec{J}^2 = J_1^2 + \dots + J_3^2$$

$\vec{J}^2$ kommutiert mit allen J_3, J_1, J_2
also gleichzeitig mit J_3 diagonilisieren
also gleiche Basis
Seine Eigenwerte $j(j+1)$ sind invariant unter diesen Leitern $J_\pm$



Unterraum:
endlich Dimension 2j+1
aufgespannt von $|m\rangle = |-j\rangle, \dots, |+j\rangle$

irreduzible

eigentlich "reelle" SO(3)
Algebra
$\exp(-i\vartheta(\vec{n}\,\vec{J}))$

$[J_3, J_\pm] = (\pm 1) J_\pm$ kompositionen

$[J_3, J_1] = +i J_2$ Formalismus von Cartan - Sub-Algebra

$[J_3, J_2] = -i J_1$ $\quad \mathcal{C} = \mathrm{span}\{J_3, \dots\}$

alle kommutieren untereinander

Beobachtung in Spin 1/2, 3/2, ...
zwei Drehoperatoren (können der gleichen Drehung entsprechen)

$$\exp\left(-\frac{\vartheta}{2}\sigma_3\right), \quad \exp\left(-i\frac{(\vartheta + 2\pi)}{2}\sigma_3\right) = -\exp\left(-i\frac{\vartheta}{2}\sigma_3\right)$$

mehrwertige Darstellung oder wir haben eine Darstellung in der SO(2) Gruppe

Unterscheidung von Gruppen mit der selben Lie Algebra

mehrfachzusammenhängend

universelle
Überlagerungsgruppe

"Addition von Drehimpulse" = Reduktion eines Produkts
eigentlich immer gemeint ein Produkt von Darstellungen(!)
denn wirkt auf Tensorprodukte von Kets

$$J = \underset{m}{L} + \underset{s}{S}$$

$$|m,s\rangle = |m\rangle \otimes |s\rangle$$

Gruppe ist Tensorprodukt

$$J_3 |m,s\rangle = (L_3 + S_3)|m,s\rangle$$
$$= (m+s)|m,s\rangle$$

$$\exp(-i\vartheta J_3)|m,s\rangle = (\exp(-i\vartheta L_3)|m\rangle) \otimes |\exp(-i\vartheta S_3)|s\rangle)$$

warum kommutieren L und S? Eigentlich L und S dargstellt als $\vec{L} \otimes \mathbb{1}$, $\mathbb{1} \otimes \vec{S}$

$$[\vec{L} \otimes \mathbb{1}, \mathbb{1} \otimes \vec{S}] = \vec{L} \otimes \vec{S} - \vec{L} \otimes \vec{S} = 0$$

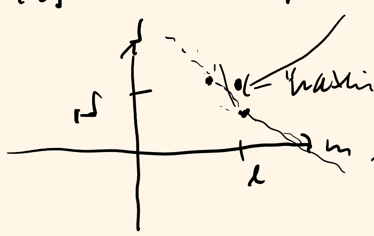
$\vec{J}^2$ Eigenwerte $j(j+1)$ mit $j = l+s, l+s-1, \dots, |l-s|$

Zerlegung der Matrizen $\exp(\dots \vec{L}) \otimes \exp(\dots \vec{S})$

$$\begin{array}{l} j = l+s \\ l+s-1 \end{array} \begin{pmatrix} \square & & & 0 \\ & \square & & \\ & & \square & \\ 0 & & & \square \end{pmatrix}$$

} Basisvektoren sind Eigenvektoren $|j, m\rangle = |l+s, m = ?\rangle$

$m = l+s \quad \rightarrow |m = l, s = s\rangle$



= triviales Element" - maximal weights

2 dim Raum

$m = l+s-1$

Jargon-Notation

L-Darstellung $\{2L+1\}$-Raum

S-Darstellung $\{2S+1\}$

$$\{2L+1\} \otimes \{2S+1\} = \{L+S\} \oplus \{L+S-1\} \oplus (\ldots) \oplus \{|L-S|\}$$

$$\{3\} \otimes \{2\} = \{4\} \oplus \{2\}$$

$l = 1$ $\quad s = 1/2$

$j = 3/2$

$$\{3\} \otimes \{3^*\} = \{1\} \oplus \{8\} \quad SU(3) \text{ Darstellung}$$

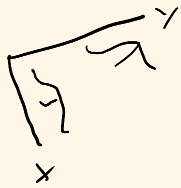
Farbe — Antifarbe — farblos „weiß" — Gluonen

Bahn und Spin, Drehimpuls und Spinoren

$S = 0$ „skalare Wellenfunktion" $\psi(\vec r) \xrightarrow[R_{n,\varphi}]{\text{Drehung}} \psi'(\vec r) = \psi(R^{-1}\vec r)$ $\quad \vec r\,' = R\,\vec r$

äquivalente Notation

$$\psi'(\vec r\,') = \psi(\vec r)$$



$S = 1/2$ „Spinor Wellenfunktion"

$$\Psi(\vec r) = \begin{pmatrix} \psi_{1/2}(\vec r) \\ \psi_{-1/2}(\vec r) \end{pmatrix} = \psi_{1/2}(\vec r)\,|\uparrow\rangle + \psi_{-1/2}(\vec r)\,|\downarrow\rangle$$

$\downarrow$ Drehung R

$$\Psi'(\vec r) = \underbrace{T^{[1/2]}_{n}(\varphi)}_{(2\times 2)}\, \Psi(R^{-1}\vec r)$$

$$\begin{pmatrix} \psi_{1/2}(R^{-1}\vec r) \\ \psi_{-1/2}(R^{-1}\vec r) \end{pmatrix}$$

$$\vec E\,'(\vec r) = (R\,\vec E)\cdot(R^{-1}\vec r)$$