Intelligente Datenanalyse und Maschinelles Lernen

Zusammenfassung: Eigenwerte und Eigenvektoren

Universität Potsdam, Institut für Informatik und Computational Science, 2019

Lena Jäger

1 Einleitung

Zwei quadratische Matrizen A und $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ sind **ähnlich** (oder auch: **konjugiert**), wenn es eine $n \times n$ Matrix $S \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gibt, so dass gilt $B = S \cdot A \cdot S^{-1}$.

A und B definieren also dieselbe lineare Abbildung, jedoch in einer anderen Basis. Man kann S als eine Basiswechselmatrix verstehen, die Vektoren von der Standardeinheitsbasis in deren Darstellung zur Basis $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ transformiert, wobei s_i die Spalten von S sind. B definiert also eine lineare Abbildung bezüglich der Standardeinheitsbasis, wohingegen A dieselbe lineare Abbildung bezüglich der von S definierten Basis durchführt. Weil Diagonalmatrizen besonders praktisch in der Handhabung sind, versuchen wir nun zu einer gegebenen Matrix A eine ähnliche Matrix B zu finden, die eine Diagonalmatrix ist, also die Gestalt

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} =$$

hat. $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ sind die Eigenwerte von A.

2 Definition

Seien V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$, λ ein Skalar $\in \mathbb{K}$ und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung.
λ ist ein **Eigenwert** von f, genau dann wenn ein Vektor $(\vec{v}) \in V$ mit $(\vec{v}) \neq \vec{0}$ existiert, so dass gilt $f(\vec{v}) = \lambda \cdot (\vec{v})$. Der Vektor $(\vec{v})$ heißt dann Eigenvektor von f zum Eigenwert λ.

Anmerkung: Wir gehen meistens von reellen Matrizen aus. Die Eigenwerte einer reellen Matrix können komplex ($\in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$) sein. Streng genommen, gehen wir also oft von dem Körper $\mathbb{C}$, anstelle $\mathbb{R}$ aus, auch wenn unsere Matrix nur reelle Einträge hat. Eine Matrix, die ausschließlich reelle Elemente enthält, hat genau dann komplexe Eigenwerte, wenn das charakteristische Polynom komplexe Nullstelle(n) hat.

Interpretiert man Vektoren $\vec{v}$ als Punkte in K^n, ist ein Eigenvektor also ein Vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ dessen Bild $f(\vec{v})$ unter der linearen Abbildung f auf der gleichen Ursprungsgeraden liegt wie $\vec{v}$, der also Element der linearen Hülle von $\vec{v}$, $< \vec{v} >$, ist.

Man spricht sowohl von Eigenwerten einer linearen Abbildung als auch von Eigenwerten einer Matrix. Die Eigenwerte einer Matrix M sind genau die Elemente $\lambda \in \mathbb{K}$, für welche ein Spaltenvektor $\vec{x}$ mit $(\vec{x}) \neq \vec{0}$ existiert, so dass gilt $M\vec{x} = \lambda\vec{x}$.

Anmerkung 1: Ein Eigenwert λ kann 0 sein, ein Eigenvektor $\vec{v}$ hingegen daf nicht der Nullvektor sein.

Anmerkung 2: Wir gehen meistens von reellen Matrizen aus. Die Eigenwerte einer reellen Matrix können komplex ($\in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$) sein. Streng genommen, gehen wir also oft von dem Körper $\mathbb{C}$, anstelle $\mathbb{R}$ aus, auch wenn unsere Matrix nur reelle Einträge hat. Eine Matrix, die ausschließlich reelle Elemente enthält, hat genau dann komplexe Eigenwerte, wenn das charakteristische Polynom komplexe Nullstelle(n) hat.

3 Eigenschaften

1. Eine $n \times n$ Matrix hat maximal n verschiedene Eigenwerte.
2. Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.
   Beweis: siehe Beutelspacher, S. 245
3. Im Fall einer symmetrischen Matrix mit reellen Einträgen sind Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten zueinander orthogonal.
4. Zu einem Eigenwert gibt es (vorausgesetzt der Körper, über dem der Vektorraum definiert ist, ist unendlich) immer undendlich viele Eigenvektoren.
5. Die verschiedenen Eigenvektoren zu einem Eigenwert können alle linear abhängig sein (dann ist die Dimension des entsprechenden Eigenraums 1), oder aber auch linear unabhängig sein (dann ist die Dimension des zugehörigen Eigenraums entsprechend größer).
6. Wenn eine $n \times n$ Matrix A n **verschiedene** Eigenwerte hat, dann ist A diagonalisierbar.
7. Alle Eigenwerte einer symmetrischen Matrix mit ausschließlich reellen Einträgen sind reel.
8. Alle Eigenwerte einer komplexen hermiteschen[1] Matrix sind reel.
9. Im Fall einer symmetrischen Matrix mit reellen Einträgen lässt sich immer eine Orthonormalbasis (eine Basis bestehend aus zueinander orthogonalen Vektoren der Länge 1) aus Eigenvektoren angeben (folgt aus Punkt 3).

4 Eigenraum

Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ mit $n < \infty$.
Seien $f : V \to V$ eine lineare Abbildung und $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von f. Dann wird der Eigenraum von f zum Eigenwert λ folgendermaßen definiert:

$$Eig(f, \lambda) := \{\vec{v} \in V | f(\vec{v}) = \lambda \cdot \vec{v}\}.$$

Das heißt, der Eigenraum von f zu einem Eigenwert λ ist die Menge aller Eigenvektoren zu diesem Eigenwert vereinigt mit dem Nullvektor.

Anmerkung: Je nach Autor wird auch von einem Eigenraum gesprochen, wenn λ zwar ein Skalar aus $\mathbb{K}$, aber kein Eigenwert von f ist. Aus obiger Definition folgt dann, dass der Eigenraum von f zu diesem Skalar nur den Nullvektor enthält. Andersherum gesagt gilt dann, dass λ genau dann ein Eigenwert von f ist wenn gilt $Eig(f, \lambda) \neq \{\vec{0}\}$.

4.1 Eigenschaften von Eigenräumen

Seien $V, \mathbb{K}, f, \lambda$ wie oben gegeben und seien A die Matrix, die der Abbildung f entspricht, und $\mathbb{I}$ die $n \times n$ Einheitsmatrix.

1. $Eig(f, \lambda)$ ist ein Unterraum von V.
   Beweis:
   Unterraumkriterien (Abgeschlossenheit unter Addition und Skalarmulitplikation) nachweisen.

[1] Hermitesche Matrix: quadratische Matrix mit komplexen Einträgen ($\mathbb{C}$), die gleich ihrer adjungierten (auch: transponiert-konjugierten) Matrix ist. Die Einträge oberhalb der Hauptdiagonale sind die Spiegelung der Einträge unterhalb der Hauptdiagonale (transponiert) und nachfolgender komplexer Konjugation (d.h. Umkehrung des Vorzeichens des Imaginärteils). Alle Einträge auf der Hauptdiagonale sind reell.

2. $Eig(f,\lambda) = kern(f - \lambda \cdot \mathbb{I}) = kern(A - \lambda \cdot \mathbb{I})$.
   Beweis:
   $Eig(f,\lambda) = \{\vec{v} \in V | f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}\} = \{\vec{v} \in V | A \cdot \vec{v} = \lambda\vec{v}\} = \{\vec{v} \in V | A \cdot \vec{v} - \lambda \cdot \vec{v} = \vec{0}\}$
   $= \{\vec{v} \in V | (A - \lambda\mathbb{I}) \cdot \vec{v} = \vec{0}\} = kern(A - \lambda\mathbb{I})$.

3. $dim(Eig(f,\lambda)) = dim(kern(A - \lambda\mathbb{I}))$.
   Beweis: Folgt direkt aus vorangehendem Punkt.

4. Seien $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s \in \mathbb{K}$ paarweise verschieden. Wenn B_i jeweils eine Basis von $Eig(f, \lambda_i)$ ist, dann ist die Vereinigung all dieser Basen $B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_s$ eine linear unabhängige Menge von Vektoren aus V.
   Beweis:
   Beutelspacher, S. 247.

5. Sei λ_i eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms χ_A einer linearen Abbildung f mit Vielfachheit k. Dann gilt $dim(Eig(f, \lambda_i)) \leq k$.

6. Die Dimension des Eigenraums von f zum Eigenwert λ_i wird als die **geometrische Vielfachheit** des Eigenwerts λ_i bezeichnet. Die geometrische Vielfachheit ist also die Anzahl an linear unabhängigen Eigenvektoren zum Eigenwert λ_i. (Für algebraische Vielfachheit siehe Abschnitt Charakteristisches Polynom.)

5 Charakteristisches Polynom

Das charakteristische Polynom einer quadratischen Matrix A ist wie folgt definiert:
$\chi_A(\lambda) = det(A - \lambda\mathbb{I})$.

Das charakteristische Polynom dient unter anderem zur analytischen Berechnung von Eigenwerten.

5.1 Eigenschaften des charakteristischen Polynoms

1. Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms einer $n \times n$ Matrix A sind deren Eigenwerte.

2. Die Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des charakteristischen Polynoms einer $n \times n$ Matrix A sind nicht notwendigerweise verschieden, da ein Eigenwert λ_i mehrfach in der Faktorisierung des charakteristischen Polynoms auftreten kann. A hat also **höchstens** n verschiedene Eigenwerte.

3. Die Vielfachheit der Nullstelle λ_i (d.h. die Anzahl der Male, die sie in der Faktorisierung des charakteristischen Polynoms auftritt) heißt die **algebraische Vielfachheit** des Eigenwerts λ_i. (Für geometrische Vielfachheit siehe Abschnitt zu Eigenraum.)

4. Ein und dieselbe lineare Abbildung kann bezüglich verschiedener Basen definiert und damit durch unterschiedliche Matrizen ausgedrückt werden. Die charakteristischen Polynome zweier Matrizen, die dieselbe linear Abbildung definieren, sind identisch (unabhängig von der Basis). Darum spricht man auch von dem charakterischen Polynom einer linearen Abbildung (nicht nur einer Matrix).