NATURVIDENSKABELIG KANDIDATEKSAMEN
VED KØBENHAVNS UNIVERSITET

INVESTERINGS- OG FINANSIERINGSTEORI

4 timers skriftlig eksamen, 15-19 mandag 28/5 2001.
Ingen hjælpemidler (lommeregner dog tilladt). Antal sider i sættet: 5.

Opgave 1

Denne opgave indeholder 4 små, uafhængige "check-up" opgaver i pensum. Du skal naturligvis begrunde dine svar, men argumentationen må gerne være kortfattet. (Hvis du alligevel er bange for at bruge for meget tid på forklaringerne, kan du overveje at regne Opgave 2 og 3 først.)

Spg. 1.a [10%]
Kommenter nedenstående udsagn:

> Binomial- og Black-Scholes-modellerne med deres såkaldt risiko-neutrale prisfastsættelsesmetode er ikke konsistente med gængs økonomisk teori, hvor agenter/investorer antages risko-averse, og hvor dagens priser derfor ikke blot er forventede (diskontererede) fremtidige udbetalinger.

Spg. 1.b [10%]
Nedenstående udtalelse indeholder påstande om amerikanske optioner. Er disse hver især rigtige, forkerte eller "ikke til at afgøre på det foreliggende grundlag" ?

> Når renten er positiv vil en amerikansk call-option på en ikke-dividende-betalende aktie aldrig blive exerciset ("udnyttet") før til udløb, og optionen har således samme værdi som den europæiske. Put/call-pariteten giver derfor at den amerikanske put-option også har samme værdi som sit europæiske modstykke.

Spg. 1.c [10%]
Nedenstående udtalelse indeholder påstande om konverterbare obligationer ("callable bonds"; dvs. af den type som de fleste realkreditobligationer er). Er disse hver især rigtige, forkerte eller "ikke til at afgøre på det foreliggende grundlag" ?

Køber man en konverterbar obligation, kan det opfattes som om man køber en (tilsvarende) inkonverterbar obligation og sælger en (amerikansk-type) call-option. Anvendelse af traditionelle/statiske varighedsmål på konverterbare obligationer er derfor problematisk og vil overvurdere varigheden.

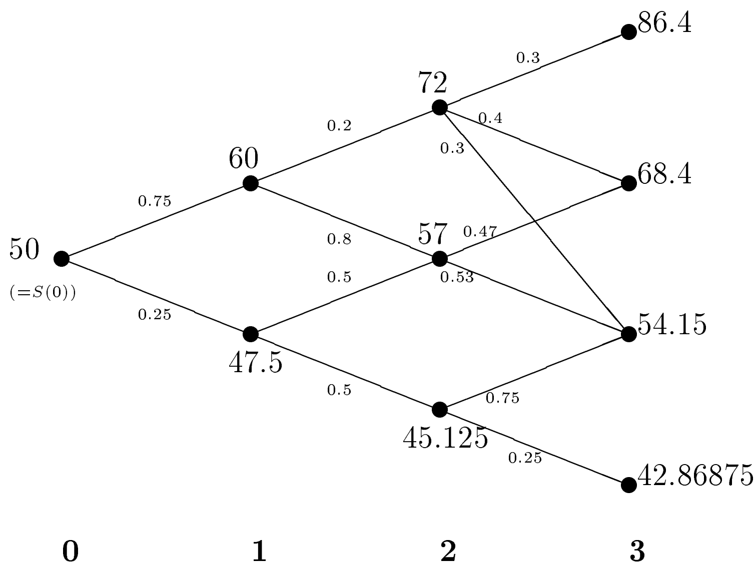
Spg. 1.d [10%]
Lad W være en standard Brownsk bevægelse ("Brownian Motion"). Vis at processen M defineret ved

$$M(t) = \exp(W(t) - t/2)$$

er en martingal. (Vink: W har uafhængige, normalfordelte tilvækster.)

Opgave 2

I denne opgave betragtes en 3-periode model for kursen, S, på en aktie, der i det betragtede tidsrum ikke udbetaler dividende. Den mulige udvikling er fastlagt ved nedenstående gitter. (Med **tidspunkter**, aktiekurser og sandsynligheder.) Desuden findes der et risikofrit aktiv (*bankbogen*) med en rente på 5% per periode.



Spg. 2.a [10%]
Er denne model arbitragefri ? Hvis ja, bestem da et ækvivalent martingalmål Q (fx ved for gitterets knuder at angive betingende springsandsynligheder). Hvis nej, angiv da en arbitrage-strategi.
Er modellen komplet ?

Spg. 2.b [10%]
Nu indføres en call-option på aktien. Denne call-option har strikekurs (eller: exercisekurs) $K = 50$ og udløbstidspunkt ("expiry") $T = 2$.
Bestem en arbitragefri pris på denne call-option (eller forklar hvorfor en sådan ikke eksisterer).
Findes der en replikerende portefølje (i aktie og bankbog) for call-optionen ?
Hvis ja, bestem da hvor mange aktier denne portefødjle indeholder på tidspunkt 0. (En perfekt replikation kræver som bekendt, at porteføljen justeres dynamisk, men beregningen ønskes kun foretaget for tidspunkt 0.)

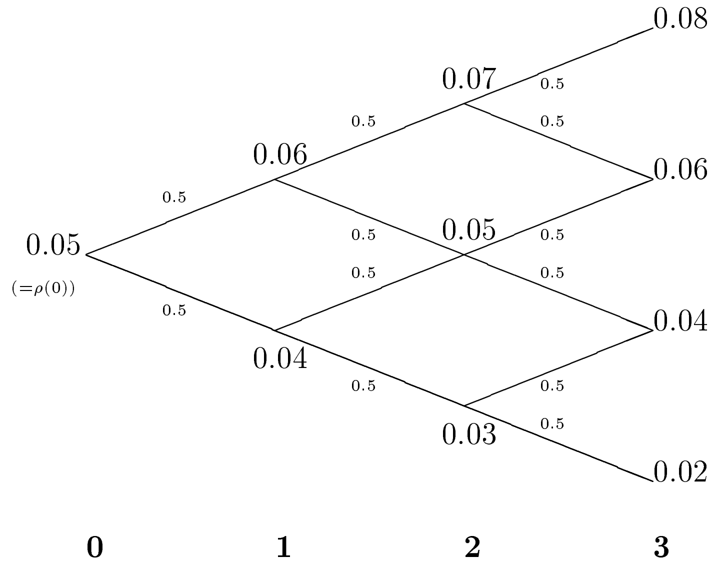
Spg. 2.c [10%]
På aktien indføres nu yderligere en såkaldt asiatisk call-option med strike $K_{asian} = 50$ og udløbstidspunkt $T_{asian} = 2$. Dette er et aktiv med flg. sti-afhægige pay-off på tid T_{asian}:

$$C_{asian}(T_{asian}) = \max\left(0, \left(\frac{1}{T_{asian}+1}\sum_{i=0}^{T_{asian}} S(i)\right) - K_{asian}\right)$$

Bestem dennes mulige arbitragefri priser. (Vink: Tegn et træ.)

Opgave 3

Betragt nedenstående gitter (med **tidspunkter**, renter og sandsynligheder) for udviklingen i den korte rente (1-periode spotrenten ρ) under et ækvivalent martingalmål Q, som anvendes til prisfastsættelse.



Spg. 3.a [10%]
Vi betragter først det, vi kan kalde *de simple tid-3 aktiver*. Det er de 4 aktiver, der hver især udbetaler 1 i en bestemt tid-3 tilstand (for $\rho(3)$) og 0 alle andre steder. Vis at de arbitrage-fri tid-0 priser på de simple tid-3 aktiver er givet ved vektoren

$$\Big(\underbrace{0.10496}_{\text{"3 gange op"}} , \underbrace{0.32094}_{\text{"2 op, 1 ned"}} , \underbrace{0.32711}_{\text{"1 op, 2 ned"}} , \underbrace{0.11113}_{\text{"3 gange ned"}} \Big).$$

Find den tilsvarende tid-3 nulkuponobligationspris ("zero-coupon bond price"; $P(0,3)$) og tid-3 nulkuponrenten.

Spg. 3.b [10%]
I ovenstående usikre verden betragtes en virksomhed. Dennes værdi på tidspunkt 3 i de forskellige tilstande er:

$$V(3) = \begin{pmatrix} 120 \\ 110 \\ 90 \\ 70 \end{pmatrix},$$

idet som før første element i vektoren svarer til "3 gange op", andet til "2 op, 1 ned" osv.
Virksomheden er finansieret dels vha. aktier ("equity") og dels vha. obligationer/gæld ("debt") af "tid-3 nulkuponobligationsstype", dvs. obligationsejerne får ikke noget før tidspunkt 3. Hovedstolen ("D") på gælden er 100, og der er ikke skatter eller fallitomkostninger. Bestem tid-0 værdien af aktier og obligationer.

Spg. 3.c [10%]
Virksomheden får nu mulighed for på tidspunkt 0 at igangsætte et nyt projekt. Projektet koster 1 at sætte igang og giver (med samme ordning som tidligere i opgaven) flg. tid-3 cash-flows

$$\pi(3) = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Hvad er projektets netto-nutidsværdi (NPV) ? Diskuter hhv. aktie- og obligationsejernes syn på projektet ved forskellige finansieringsformer.