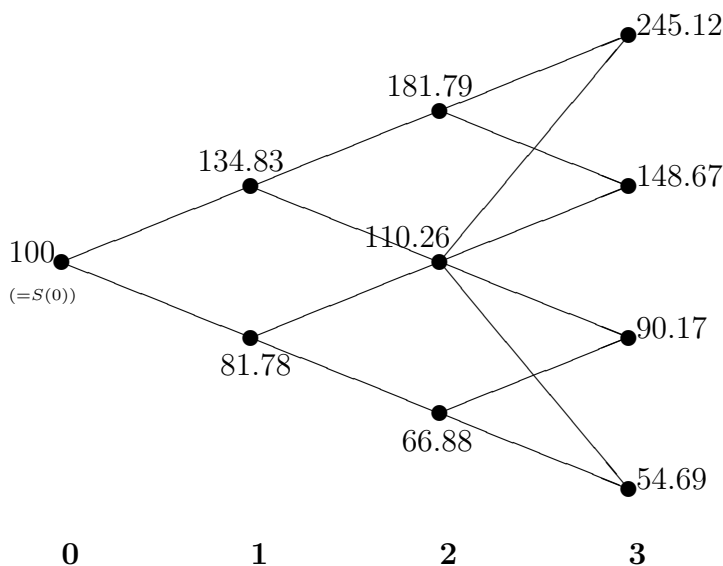


Matematisk Finansiering 1

4 timers skriftlig eksamen fredag 2/11 2018. Sættet er på 4 sider (ekskl. forside) og indeholder 3 opgaver og ialt 12 nummererede delspørgsmål, der indgår med lige vægt i bedømmelsen. Opgaverne (hvor i . bruges som decimaltegn) kan løses uafhængigt af hinanden. Beregningsmæssige resultater ønskes fuldt dokumenteret i besvarelsen. Det skal således klart fremgå, hvilke formler, der bruges, og hvorfor de bruges.

Opgave 1

Betragt en 2-periode-model for kursen på en (dividende-fri) aktie, S . Den mulige udvikling er fastlagt ved nedenstående gitter med **tidspunkter** (som vi tænker på som år) og aktiekurser. Det antages at de betingede P -sandsynligheder (dvs. P -sandsynlighederne for de enkelte grene) er *så ens, som de kan være*, dvs. de er 0.5 når der udgår to grene og 0.25 i den knude, hvor fire grene udgår. (Det formuleres sådan ikke for at forvirre læseren, men for at undgå en masse gnidrede, men ens, tal i figuren.) Renten er konstant, 0.03 (3%) per år.



Spg. 1a

Antag du står på tidspunkt 2 i den knude, hvor aktiekursen er 110.26. **Hvad** er den (betingede) P -forventede afkastrate på aktien over den næste periode? **Hvad** er afkastratens (betingede) spredning (under P)?

Spg. 1b

Vis at modellen er arbitragefri og inkomplet. Vink: Vældigt mange af en-periode-delmodellerne har samme struktur.

Spg. 1c

Beregn tid 0-forwardpriser for forwardkontrakter (på aktien) med udløb på tid 1,2 og 3; $\text{Fwd}(0, T)$ for $T = 1, 2, 3$ i ofte anvendt notation. **Hvorfor** er $\text{Fwd}(0, 3)$ entydigt bestemt?

Spg. 1d

Beregn tid 0-prisen på en europæisk call-option (på aktien) med udløb $T = 2$ og strike $K = \text{Fwd}(0, 2)$ – dvs. at optionen er *forward-at-the-money*. **Sammenlign** denne pris med prisen på den tilsvarende put-option.

Spg. 1e

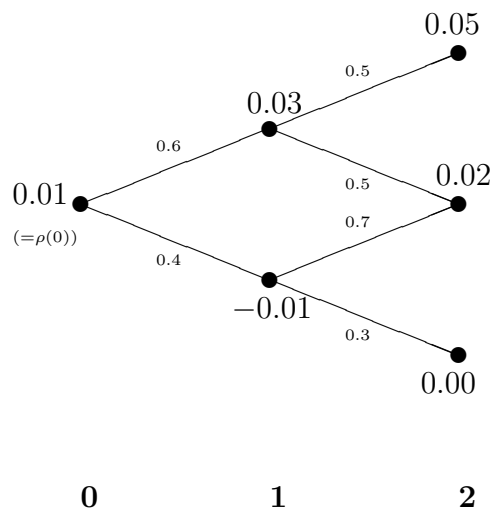
Find den replikerende (aktie,bankbog)-strategi for en af optionerne fra spg. 1.d.

Spg. 1f

Antag nu (igen), at du står på tidspunkt 2 i den knude, hvor aktiekursen er 110.26. **Beregn** det arbitrage-frie prisinterval for en call-option med strike $K = 120$ og udløb $T = 3$.

Opgave 2

Betragt nedenstående model for mulige udviklinger i den korte rente (ρ); den indeholder som sædvanlig tidspunkter, niveauer og (betingede) sandsynligheder. Sandsynlighederne antages at være risiko-neutrale, altså at afspejle et martingalmål (Q).



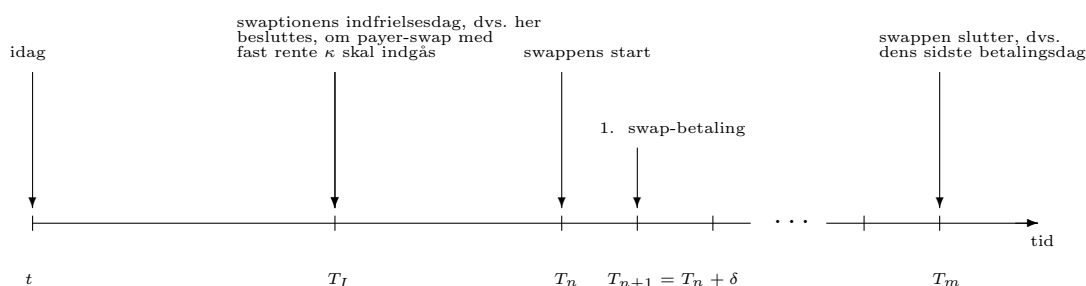
Spg. 2a

Vis at nul kuponobligationspriserne på tid 0 er $(P(0, 1); P(0, 2); P(0, 3)) = (0.9901; 0.9768; 0.9519)$.

Spg. 2b

Beregn tid 0-swap-renter.

Nu betragtes en såkaldt swaption, der – som ordet antyder – er en option på en swap-rente. Helt præcist er det en kontrakt, der på et indfrielsestidspunkt giver ret, men ikke pligt, til at indgå en payer-swap (dvs. man betaler fast rente) med fast rente κ , kaldet swaptionens strike-rente. Tidslinjen for betalinger (samt definition af notation) fremgår af figuren nedenfor:



Spg. 2c

Argumenter for at swaptionens værdi på indfrielsestidspunktet T_I (=dens *pay-off*) er

$$\delta(\omega(T_I; T_n, T_m, \delta) - \kappa)^+ \sum_{j=n+1}^m P(T_I, T_j),$$

hvor $\omega(T_I; T_n, T_m, \delta)$ er tid T_I -swaprenten for den underliggende swap, dvs.

$$\omega(T_I; T_n, T_m, \delta) = \frac{P(T_I, T_n) - P(T_I, T_m)}{\delta \sum_{j=n+1}^m P(T_I, T_j)}.$$

Vink: Husk at tid T_I -swap-renten netop er den rente på det faste ben, der giver den underliggende swap værdi 0; en kort såvel som en lang position kan derfor indgås på markedet til prisen 0. Hvad gør man på indfrielsestidspunktet når swap-renten er hhv. større end eller mindre end strike-renten? Den præcise formel for swap-renten spiller ikke nogen synderlig rolle her.

Spg. 2d

Antag $t = 0$ og betragt en swaption med $T_I = T_n = 1$, $\delta = 1$, $T_m = 3$ og $\kappa = 0.02$. **Beregn** swaptionens tid 0-pris.

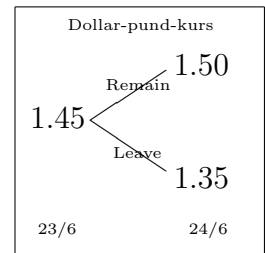
Opgave 3

På dagen for EU-afstemningen i Storbritanien 23/6 2016 har en bookmaker sat (decimal-)odds 4.80 på *Leave* and 1.25 på *Remain*.

Spg. 3a

Hvordan konstrueres en (ikke-triviel) risikofri portefølje, dvs. hvordan spiller man på en sådan måde, at uanset udfaldet af afstemningen, så får man samme tilbagebetaling? **Hvad** er prisen på denne strategi (eller: indsatserne på spillene), og **hvordan** fortolker du dette tal?

To ting viser sig at nuancere situationen fra spg. 3a. For det første påvirker udfaldet af afstemningen den britiske valutakurs. Antag specielt, at dollar-pund-kursen (forstået som det antal dollars, man skal betale for 1 pund) er beskrevet ved binomialmodellen angivet ude til højre. For det andet er bookmakerens regler sådan, at man som spiller selv – og uden at det påvirker odds – kan vælge i hvilken valuta, man vil gøre sin indsats – hvorefter evt. gevinst så udbetales i denne valuta.



Spg. 3b

Analyser og diskuter hvilke (arbitrage-)muligheder, dette åbner for spillere. Vink: Vil du helst have en Leave-gevinst udbetalt i pund eller dollars? Antag derudover, at du kan låne, som du lyster i såvel pund som dollars, begge steder til rente 0.