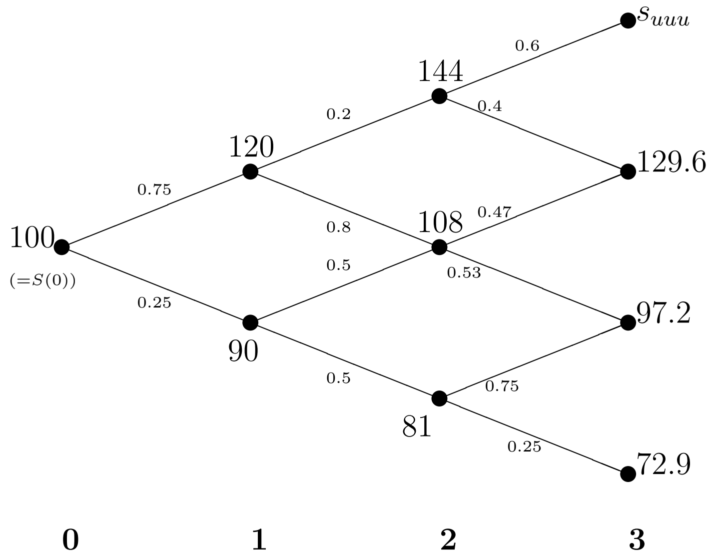
NATURVIDENSKABELIG KANDIDATEKSAMEN
VED KØBENHAVNS UNIVERSITET

INVESTERINGS- OG FINANSIERINGSTEORI

4 timers skriftlig eksamen, 9-13, tirsdag 16/6 2003.
Ingen hjælpemidler (blyant & lommeregner dog tilladt). Antal sider i sættet: 4.

Opgave 1

I denne opgave betragtes en 3-periode binomialmodel, hvor S er kursen/prisen på en aktie, der i det betragtede tidsrum ikke udbetaler dividende. Den mulige aktiekursudvikling er (næsten) fastlagt ved nedenstående gitter. (Med **tidspunkter**, aktiekurser og sandsynligheder.) Desuden findes der et risikofrit aktiv (*bankbogen*) med en rente på 5% per periode.



Spg. 1.a [10%]
For hvilke værdier af s_{uuu} er denne model arbitragefri? Er den i så fald komplet? Findes der en værdi af s_{uuu} så alle betingede martingal-springsandsynligheder er ens?

I det følgende antages at $s_{uuu} = 172.8$

Spg. 1.b [10%]
Betragt en europæisk put-option på aktien. Optionen udløber ("expires") på tid $T = 3$ og har strike-kurs (aftale-kurs, exercise-kurs) $K = 100$.
Hvad er den arbitragefri pris på denne put-option?
Hvad er den arbitragefri pris på den tilsvarende (dvs. udløb 3, strike 100) call-option?
Antag en investor er villig til såvel at købe som at sælge put-optionen til prisen 5.064. Forklar hvordan en arbitrage-portefølje kan konstrueres. (Specielt: Hvordan kan en sådan portefølje sammensættes på tid 0?)

Investoren fra spg. 1.b forsvinder nu (hvor du har ruineret ham) fra markedet igen.

Spg. 1.c [10%]
Hvad er den arbitragefri pris på den amerikanske version af put-optionen fra spg. 1.b?
Hvad er prisen (den arbitragefrie, forstås) på den amerikanske call?

Opgave 2

Spg. 2.a [10%]
Betragt et filtreret sandsynlighedsrum $(\Omega, \{\mathcal{F}_t\}_{0 \le t \le T}, P)$ (altså ganske som i noternes kap. 5) hvorpå X er en (tilpas integrabel) $\mathcal{F}_T$-målelig stokastisk variabel.
Vis at processen defineret ved $X(t) = \mathbf{E}_t(X)$ er en martingal.
Er processen defineret ved $Y(t) = \mathbf{E}_t(X^2)$ en martingal?
Er processen defineret ved $Z(t) = X^2(t)$ en martingal?

Spg. 2.b [10%]
Betragt en eksakt faktormodel for afkast med notation som i noternes kap. 10, dvs.

$$r = \mu + Bf.$$

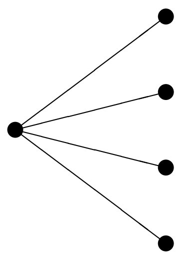
Forklar (kort), hvad der er hvad. (Deterministisk/stokastisk, (typiske) dimensioner.)
Lad r_0 være afkastraten for det risikofrie aktiv.
Hvilken betingelse skal μ og B opfylde for at modellen er arbitragefri? (Mao.: Angiv APT-restriktionen.)

Spg. 2.c [10%]
Betragt en arbitragefri deterministisk økonomi ala kap. 3 i noterne. Antag vi står på tid 0 og at der er fremtidige betalingstidspunkter 1, 2 og 3. Antag diskonteringsfaktorerne for disse er givet ved $d = (1/1.045, 1/1.05^2, 1/1.055^3) = (0.95694, 0.907023, 0.851614)$.
Betragt 3-periode hhv. stående ("bullet"), serie- ("serial")- og annuitetsobligationer alle med kuponrente på 5% (og hovedstol 100).

Hvad er tid-0 kurserne/priserne på disse obligationer? (Vink: Annuitetens tid-1 betaling er 36.72.)
Vælg en definition af varighed, du finder passende. Bestem obligationernes varigheder og kommenter deres indbyrdes størrelsesforhold.

Opgave 3

I en opgave betragtes en 1-periode model med 4 fremtidige tilstande og et perfekt kapitalmarked. Nedenstående figur angiver angiver sandsynlighederne for de 4 tilstande, p_i for $i = 1, 2, 3, 4$ (svarende til sandsynlighedsmålet P), samt deres tilhørende tilstandspriser AD_i (dvs. priserne på de simple "0 eller 1"-aktiver; Arrow-Debreu-aktiverne):



i	p_i	AD_i
1	0.15	0.3
2	0.35	0.2
3	0.35	0.2
4	0.15	0.1

Desuden betragtes en virksomhed, hvis værdi på tid 1 i de forskellige tilstande er:

$$V(1) = \begin{pmatrix} 130 \\ 110 \\ 80 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

<u>Spg. 3.a</u> [10%]
Hvordan konstrueres et risikofrit aktiv & hvad er dets afkastrate? Hvad er modellens martingalsandsynligheder (q_i svarende til sandsynlighedsmålet Q)?
Virksomheden er finansieret dels vha. aktier/egenkapital ("equity") og dels vha. obligationer/gæld ("debt"). Hovedstolen, D, på gælden er 100, og der er ikke skatter eller fallitomkostninger. Bestem tid-0 værdien af aktier og obligationer/gæld.
Hvad er den *lovede* afkastrate på gælden? (Hermed menes afkastraten *hvis* virsomheden ikke går fallit.) Hvad er den P-forventede afkastrate på gælden (dvs. med de

faktiske sandsynligheder)? Hvad er gældens Q-forventede afkastrate?

Spg. 3.b [10%]
Antag (kortvarigt) at $D = 80$. Hvad er nu

$i)$ virksomhedens værdi?

$ii)$ gældens lovede afkastrate?

$iii)$ gældens P-forventede afkastrate?

$iv)$ gældens Q-forventede afkastrate?

Kommenter forskelle & ligheder.

Det antages nu igen at $D = 100$. Spg. 3.c [10%]

Virksomheden får nu mulighed for på tidspunkt 0 at igangsætte et nyt projekt. Projektet koster 1 at sætte igang og giver (med samme ordning som tidligere i opgaven) flg. tid-1 cash-flows

$$\pi(1) = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ -10 \\ -10 \end{pmatrix}$$

Hvad er projektets netto-nutidsværdi (NPV) ? Diskuter hhv. aktie- og obligationsejernes syn på projektet ved forskellige finansieringsformer.

I det følgende ses bort fra projektet i spg. 3.c Spg. 3.c [10%]

Tilsidst skal vi se på effekten af skatter og fallitomkostninger. Antag at $\tau = 40\%$ af $V(1)$ skal betales i skat, dog således at $r_{T\&S} = 25\%$ af hovedstolen betegnes som rentebetaling og denne kan fratrækkes $V(1)$ før skattebetaling. (Dette uanset hvad obligationsejerne faktisk modtager.) Skattevæsnet får penge først og de accepterer kun D-værdier mellem 0 og 130. Antag yderligere der er faste fallitomkostninger på $\tau_{\text{fallit}} = 10$, idet "fallit" defineres som en tilstand hvor $V^{e.s.} = V(1) - \tau(V(1) - r_{T\&S}D) < D$. Hvorfor er det rimeligt?
Hvad er virksomhedens værdi (på tid 1 og 0) (forstået som værdien af $V^{e.s.}$) forskelige valg af D? Bestem tid-0 gearingsgevinsten, dvs. forskellen i vædierne af en generel og en "$D = 0$"-virksomhed. Hvilken værdi af D maksimerer tid-0 gearingsgevinsten, dvs. hvad er den optimale kapitalstruktur? (Vink: Find de kritiske D-værdier, dvs. dem hvor der er mulighed for at $V^{e.s.}$ præcis er lig D. Se/regn på, hvad der sker der. Husk også "D-endepunkterne". En tegning er en god ting.)
SVAR Spg. 3.d [10%]
Der betales $(V(1) - r_{T\&S}D) * \tau_{T\&S}$ til skattevæsnet. Tilbage til uddeling er der derfor

$V(1) - (V(1) - r_{T\&S}D) * \tau_{T\&S}$. Hvis dette ikke kan dække obligationsejerne tilgodehavende, D, (det de var blevet lovet), ja så går virksomheden fallit (advokater etc. trækkes af huse & obligationsejerne ender med at overtage virksomheden). Bemærk at fallitbetingelsen kan skrives:

$$V(1) - (V(1) - r_{T\&S}D) * \tau_{T\&S} < D \Leftrightarrow V(1) < D \underbrace{(1 - r_{T\&S}\tau_{T\&S})/(1 - \tau_{T\&S})}_{:=f=1.5}$$

"Kagen, der er at dele" på tid 1 er

$$V^{e.s.;D}(1) = V(1) - (V(1) - r_{T\&S}D) * \tau_{T\&S} - \tau_{fallit}\mathbf{1}_{V(1)<D*f}$$

(Implicit antages at skattevæsen samt advokater & revisorer kan "plukke håret af en skaldet"; ellers sku' det være diverse $(.)^+$'er rundt omkring.)
Tid-0 værdien er

$$V^{e.s.;D}(0) = \sum_i AD_i(V_i(1) - (V_i(1) - r_{T\&S}D) * \tau_{T\&S}) - \tau_{fallit} \sum_{i:V_i(1)<D*f} AD_i$$

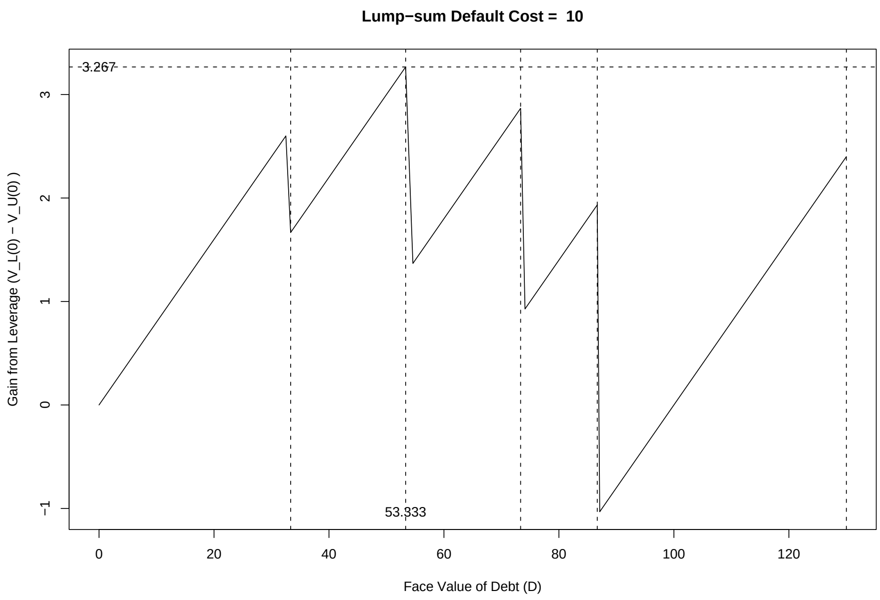
Tid-0 gearingsgevinsten er

$$\begin{aligned} GG(0) &:= V^{e.s.;D}(0) - V^{e.s.;0}(0) = (r_{T\&S}\tau_{T\&S} * (\sum_i AD_i))D - \tau_{fallit} \sum_{i:V_i(1)<D*f} AD_i \\ &= 0.08D - 10 \sum_{i:V_i(1)<1.5D} AD_i \end{aligned}$$

Dette er en stykkevis lineær (venstrekontinuert) funktion, der springer (nedad) i de kritiske punkter, dvs. hvor D er sådan at $\exists i : V_i(1) = 1.5D$, hvilket da $V(1)$ kan være 130,110, 80 eller 50 vil sige

$$D^{kritisk} = (130, 110, 80, 50)/1.5 = (86\frac{2}{3}, 73\frac{1}{3}, 53\frac{1}{3}, 33\frac{1}{3})$$

Funktionen ser sådan ud (bemærk at der kræves $D \leq 130$)



Den maksimale værdi findes ved at sammenligne funktionsværdier i de kritiske punkter *samt i højre endepunkt*, dvs. for $D = 130$. (Lidt slavearbejde men den eneste måde; godt jeg har en computer til det!) Gearingsgevinsten maksimeres i dette tilfælde for $D = 53\frac{1}{3}$. (Hvis skattevæsnet tillod D på fx. 145, så ville optimum flytte ud i højre endepkt.)