NATURVIDENSKABELIG KANDIDATEKSAMEN
VED KØBENHAVNS UNIVERSITET

INVESTERINGS- OG FINANSIERINGSTEORI

4 timers skriftlig eksamen, 15-19 mandag 28/5 2001.

`VEJLEDENDE BESVARELSE OG KOMMENTARER`

Opgave 1

`Pga. tidpresset & fordi der blev bedt om kortfattede svar, så lægges ikke meget vægt på ‘‘kunstnerisk udførelse’’ i 1.a-c.`

<u>Spg. 1.a</u> [10%]

Udsagnet er noget forfærdeligt sludder (men er desværre ikke så konstrueret som man kunne ønske!) Det er rigtigt, at betegnelsen “risko-neutral prisfastsættlse” bruges, men det antages ikke i hverken binomial- eller Black/Scholes-modellen, at agenter/investorer er risiko-neutrale. Det, der antages er, at der ikke er arbitragemuligheder. En arbitrage er en gratis gevinst, der er komplet risikofri (ihvertfald i den forstand, at vi aldrig kommer til at betale noget) Det er ”a free lunch”. Et fornuftigt prissytem bør ikke indeholde arbitragemuligheder, da selv nok så risikoaverse agenter vil efterspørge dem i uendelige mængder (bare de fortrækker mere for mindre). Det er nu “tilfældigvis” sådan, at fravær af arbitrage er ensbetydende med eksistensen ækvivalent martingalmål Q (eller: Et positivt, lineært prisfunktionale). Det er det, vi kalder “1st Fundamental Theorem of Asset Pricing”. Under dette sandsynlighedsmål kan dagens priser findes som forventede diskonterede fremtidige betalinger. Men det er forventninger under et kunstigt sandsynlighedsmål; ikke det faktiske. Binomial- og Black-Scholes-modellerne er endvidere komplette, hvilket betyder at Q er entydigt bestemt (ud fra bankbog & aktie), så indføres nye aktiver må disses diskonterede priser “idag” være martingaler mht. det allerede givne mål. Så man kan sige, at priserne kan findes “som om” agenterne var risko-neutrale (pga. et dynamisk replikationsargument; så hvad en agent er villlig til at betale for et aktiv, afhænger ikke af hans nyttefunktion) og det giver navnet, men det indbefatter altså at sandsynligheder ændres.

<u>Spg. 1.b</u> [10%]

Ja, det er korrekt at amerikanske call-optioner ikke indfries før tid når der er positiv rente & ingen dividende (jvf. kap. 6 i noterne). Og ja, så koster de det samme som de europæiske versioner. Men det er forkert, at amerikanske put-optioner altid holdes til udløb (tænk fx på at firmaet går fallit & sig at vi har “vist det med tal” i opgaver).

Amerikanske put-optioner kan derfor sagtens være mere værd end europæiske. Det fejlagtige i argumentet er, at put/call-pariteten kun holder for europæske optioner. (Som en logisk krølle: Man kan ikke forkaste udsagnets rigtighed "blot fordi det givne argument ikke holder".)

Spg. 1.c [10%]
Endelig er vi nået til et korrekt udsagn. Låntagers ret til at indfri sin restgæld kan (fx jvf. de opgaver vi har regnet) opfattes som en ret til at købe obligationerne til kurs 100. (Hvis vi altid tænker på en "obligationskurs" som værede "per 100 kr. hovedstol", så falder antallet at obligationer & optioner over tid. Man kan også opfatte det som en call på et aktiv, hvor call'en har tidsvarierende strike=resterende hovedstol.) Altså

$$\text{konverterbar} = \text{inkonverterbar - amr. call(inkonverterbar)} \tag{1}$$

Varighed, D, måler kursændringer når renten ændrer sig, dvs. noget i stil med

$$D = -\frac{(1+)\text{rente}}{\text{kurs}} \times \frac{\partial \text{kurs}}{\partial \text{rente}}$$

Hvis renten går ned, så stiger kursen på den inkonverterbare og den amerikanske call bliver mere værd (dens underliggende stiger). Så fra (1) ser vi, at den inkonverterbares kurs stiger ikke så meget som den konverterbares. (Man kan også henvise til en opgave hvor det skulle diskuteres.)

Spg. 1.d [10%]
Vi skal vise at $M(s) = \mathbf{E}_s(M(t))$ holder for all $s < t$. Så lad os gøre det:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_s(M(t)) &= \mathbf{E}_s(\exp(W(t) - t/2)) \\
&= \mathbf{E}_s\left(\exp((\underbrace{W(t) - W(s)}_{\sim N(0,t-s)\text{og uafh. af } \mathcal{F}_s} - (t-s)/2)\underbrace{\exp(W(s) - s/2)}_{=M(s)\text{og } \mathcal{F}_s-\text{målelig}}\right) \\
&= M(s)\exp(-(t-s)/2)\ \underbrace{\mathbf{E}(\exp(\text{"}N(0,(t-s))\text{"}))}_{\mathbf{E}(\exp(\text{"}N(\mu,\sigma^2)\text{"}))=\exp(\mu+\sigma^2/2)} \\
&= M(s).
\end{aligned}$$

Opgave 2

Spg. 1.a [10%]
Generelt: En eller anden form for kort og fyndig henvisning til kap. 5 i noterne er på sin plads, specielt mht. at det er nok at tjekke "for alle 1-periode modeller".

Mht. arbitragefrihed:
"Alle pånær 'op,op'-knuden"
Vi har med den samme slags model med aktie og bankbog at skaffe, hvor såvel renten ($r = 5\%$, $R = 1.05$), som de multiplikative op/ned bevægelser ($u = 1.2$, $d = 0.95$) er ens for alle tidspunkter og knuder. Vi har at den betingede springsandsynlighed q er

$$q = \frac{R-d}{u-d} = 0.4.$$

Da $0 < q < 1$, er sandsynlighedsmålet induceret af q veldefineret, ækvivalent med P, og tydeligvis det eneste, der gør den diskonterede aktiekurs til en martingal.
"op,op'-knuden"
For at tjekke arbiragefrihed skal vi finde sandsynligheder så "kurs idag = forventet diskonteret fremtidig pris". Mao. leder vi efter q_1, q_2 og $q_3 = 1 - q_1 - q_2$, der alle skal ligge i $]0;1[$, som opfylder

$$\begin{aligned} 72 = \frac{1}{1.05}\left(q_1 \times 86.4 + q_2 \times 68.4 + (1 - q_1 - q_2) \times 54.15\right) & \\ \Updownarrow & \\ 32.25q_1 + 14.25q_2 = 21.45 & \end{aligned}$$

Det system har masser af løsninger, der opfylder positivitetsbetingelserne (og da også mange, der ikke gør!). Tager man fx $q_1 = 0.5$ ser man at $q_2 = 0.3736842$ og $q_3 = 0.1263158$ gi'r et ækvivalent martingalmål.
Det er tydeligt, at der findes mere end et ækvivalent martingalmål i denne delmodel, så modellen er ikke komplet.

Summa summarum: Modellen er arbitragefri, men ikke komplet.

Spg. 2.b [10%]
Da call-optionen kun vedrører de komplette 1-periode-modeller så har den en entydig arbitragefri pris der er $R^{-2}E^Q(\text{pay-off})$, der findes ved at trævle sig baglæns gennem gitteret. Det ser sådan ud:

$$\begin{array}{ccc} & & 22 \\ & 12.381 & \\ 6.2404 & & 7 \\ & 2.6667 & \\ & & 0 \end{array},$$

så prisen er altså 6.2404.
For at replikere skal man på tid 0 købe $a(0)$ stk. aktier, hvor

$$a(0) = \frac{\Delta C}{\Delta S} = \frac{C^{op}(1) - C^{ned}(1)}{S^{op}(1) - S^{ned}(1)} = \frac{12.381 - 2.6667}{60 - 47.5} = 0.777.$$

(Stiller man det op som to ligninger med to ubekendte (# aktier & penge i banken og løser dem, er det naturligvis også helt fint.)

Spg. 1.c [10%]
På grund af sti-afhængigheden i det afledte bliver vi nødt til at løse prisningsproblemet i et træ (dvs. et gitter er ikke tilstrækkeligt).

		Asiatisk pay-off	$\frac{1}{3}\sum_0^2 S(i)$
		10.6667	60.6667
	7.3016		
		5.6667	55.6667 ,
3.1081			
		1.5	51.5
	0.5714		
		0	47.5417

så prisen er 3.1081.

Opgave 3

Spg. 3.a [10%]
Man bruger formlen

$$\text{pris}(t) = \frac{1}{1+\rho(t)} E_t^Q(\text{pris}(t+1))$$

og trævler sig for hver at de 4 simple aktiver baglæns gennem gitteret (ala Eksempel 10 i kap. 8 i noterne). Tydeligvis er

$$\begin{aligned}
\text{pris } (t=0;\text{ “3 op”}) &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \frac{1}{1.05 \times 1.06 \times 1.07} = 0.10496 \\
\text{pris } (t=0;\text{ “0 op”}) &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \frac{1}{1.05 \times 1.04 \times 1.03} = 0.11113
\end{aligned}$$

Og for hhv. "2 op/1 ned" og "1 op/2 ned" ser det talmæssigt ser det sådan ud:

$$
\begin{array}{cccc}
 & & & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 & & \begin{pmatrix} 0.467289 \\ 0 \end{pmatrix} & \\
 & \begin{pmatrix} 0.445038 \\ 0.2246182 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0.320941 \\ 0.327114 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 0.476191 \\ 0.476191 \end{pmatrix} & \\
 & \begin{pmatrix} 0.228994 \\ 0.462321 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 & & \begin{pmatrix} 0 \\ 0.485437 \end{pmatrix} & \\
 & & & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{array},
$$

så det passer med hvad man skal vise.
Vi har tydeligvis

$$P(0,3) = \sum_{i=0}^{3} \text{pris } (t=0; \text{“}i \text{ op”}) = 0.8641449,$$

og den tilhørende nulkuponrente (på diskret tilskrevet basis) er

$$y(0,3) = \left(\frac{1}{0.8641449}\right)^{1/3} - 1 = 0.049875$$

(Giver man den på kontinuert tilskrevet basis, hvor den er 0.0486716, er det såmænd også OK.)

Spg. 3.b [10%]
Sæt nu p_i = pris ($t = 0$; "$4 - i$ op").
Pay-off til aktionærene er (i de 4 tilstande) givet ved aktie-payoff $= (20, 10, 0, 0)$, så værdien af aktierne på tid 0 er

$$E = \sum_{i=1}^{4} p_i \times \text{aktie-payoff}_i = 5.30861$$

Pay-off til gældshaverne er (i de 4 tilstande) givet ved obl-payoff $= (100, 100, 90, 70)$ så værdien af gælden på tid 0 er

$$B = \sum_{i=1}^{4} p_i \times \text{obl-payoff}_i = 79.80945.$$

Bemærker (eller bruger) man at værdien af virksomheden er summen af gældens og aktiernes værdi & siger "Modigliani-Miller" er det fint.

Spg. 3.c [10%]
Projektets NPV er

$$p_1 \times 10 + p_2 \times 5 + p_3 \times 0 - p_4 \times 5 - 1 = 1.0986$$

Gennemføres projektet er ændringen i aktienes værdi $\Delta E = p_1 \times 10 + p_2 \times 5 = 2.654$ og ændringen i gældens værdi $\Delta B = -p_4 \times 5 = -0.5557$.
Så aktionærerne synes det er et godt projekt, faktisk så godt, at de gerne ville betale af egen lomme for dets gennemførelse ($\Delta E > 1$). Men det vil obligationsejerne ikke bryde sig om ($\Delta B < 0$).
(Finansiering med lavprioritetsgæld eller "nye aktier" fjener ikke det modsætningforhold.)
Hvis hovedstolen på gælden kan genforhandles, så er det, da projektet har $NPV > 0$, muligt at finde en ny hovedstol således at obligationsejerne betaler for projektet (fx; hvis aktionærerne betaler får man en tilsvarende analyse) og "alle er glade".
Obligationsejerne er villige til at betale for projektet, hvis de får en ny hovedstol, D^{ny}, der opfylder

$$\sum_{i=1}^{4} p_i \times \min(V_i(3) + \pi_i(3), D^{ny}) \geq 1 + 79.809$$

hvilket vil sige

$$(0.10496 + 0.32094) \times D^{ny} \geq 80.809 - 0.32711 \times 90 - 0.17113 \times 65 \Leftrightarrow D^{ny} \geq 103.65$$

Bemærker man blot muligheden for "genforhandlingsfinansiering" og finder (et D^{ny} større end) ovenstående kritiske niveau anses det for fuld besvarelse. Er man rigtig "fancy" bemærker man, at aktionærerne vil kunne leve med D^{ny} sålænge

$$\sum_{i=1}^{4} p_i \times \max(V_i(3) + \pi_i(3) - D^{ny}, 0) \geq 5.3086$$

hvilket vil sige

$$D^{ny} \leq 106.23.$$