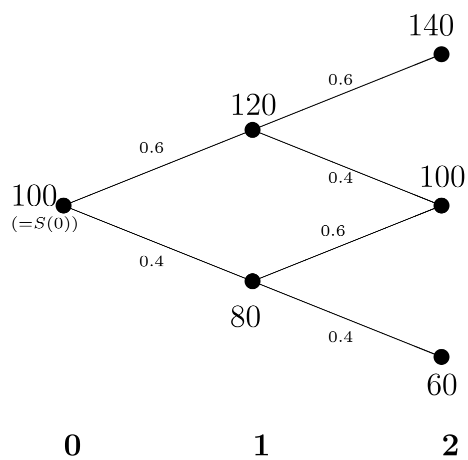
Matematisk Finansiering 1

4 timers skriftlig eksamen mandag 8/1 2018. Sættet er på 3 sider (ekskl. forside) og indeholder 3 opgaver og ialt 10 nummererede delspørgsmål, der (vejledende, ikke bindende) indgår med lige vægt i bedømmelsen. Opgaverne (hvori . bruges som decimaltegn) kan løses uafhængigt af hinanden. Beregningsmæssige resultater ønskes fuldt dokumenteret i besvarelsen. Det skal således klart fremgå, hvilke formler, der bruges, og hvorfor de bruges.

Opgave 1

Betragt en 2-periode-model for kursen på en (dividende-fri) aktie, S. Den mulige udvikling er fastlagt ved nedenstående gitter med **tidspunkter** (som vi tænker på som år), aktiekurser og sandsynligheder svarende til målet P. Renten konstant, 0.03 (3%) per år.



Spg. 1a

Beregn de P-forventede 1-periode afkastrater for aktien i de forskellige knuder. **Hvad** er afkastraternes (P-)spredninger?

Spg. 1b

Vis at modellen er arbiragefri og komplet. **Er** modellen et specialtilfælde af standardbinomialmodellen?

Spg. 1c

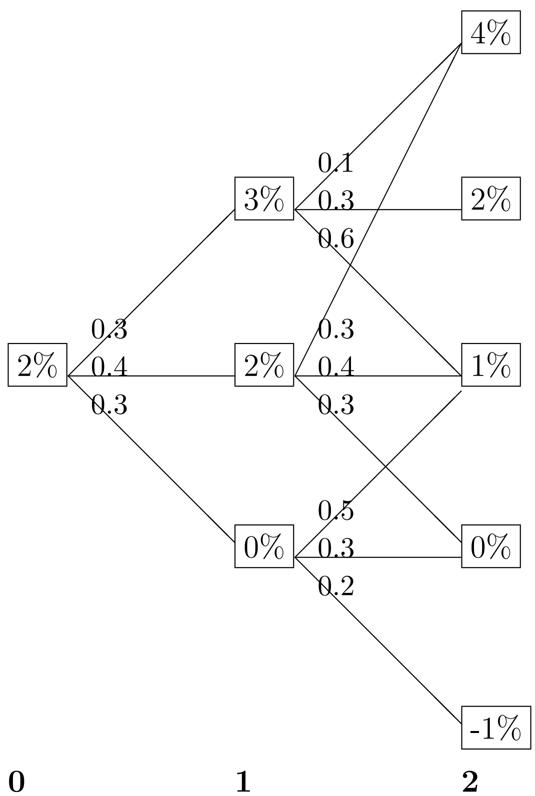
Beregn den arbitragefrie tid 0-pris på en europæisk put-option (på aktien, forståeligvis), der er *at-the-money* på tid 0 og har udløb på tid 2. **Angiv** den replikerende (aktie, bankbog)-strategi.

Spg. 1d

Beregn den arbitragefrie tid 0-pris på en amerikansk put-option, der er *at-the-money* på tid 0 og har udløb på tid 2.

Opgave 2

Betragt nedenstående gittermodel for mulige udviklinger i den korte rente, $\{\rho(t)\}_{t=0,1,2}$. Den indeholder som **tidspunkter**, renteniveauer (her angivet i %) og betingede sandsynligheder knyttet til (og derfor skrevet oven i) de forskellige grene. Sandsynlighederne antages at være risiko-neutrale, altså at afspejle et martingalmål, Q.



Spg. 2a

Vis at arbitragefrie nulkuponobligationspriser på tid 0 er givet ved

$$(P(0,1), P(0,2), P(0,3)) = (0.9804, 0.9641, 0.9528).$$

Spg. 2b

Betragt nu en 3-periode-annuitetsobligation med initial hovedstol 100. **Hvad** skal kuponrenten være for at obligationens tid 0-kurs er 100? (Dvs. at *den handler til par.*)

Spg. 2c

Betragt nu en forward-kontrakt på annuitetsobligationen fra spg. 2b, hvor forward-kontrakten udløber på tid 2. **Bestem** tid 0-forwardprisen, $\text{Fwd}(0,2)$.

Spg. 2d

En såkaldt cap-kontrakt består af en række call-optioner på renten, her betaler den specifikt $(\rho(t) - \kappa)^+$ på tid t for $t = 1, 2$, hvor konstanten κ er en strike-pris. **Hvad kan du sige** om arbitragefrie tid 0-pris(er) på en cap-kontrakt med $\kappa = 0.015$? (Et korrekt svar kan bestå af 1 tal + en kvalitativ forklaring.)

Opgave 3

De to spørgsmål i denne opgave kan besvares uafhængigt af hinanden.

Spg. 3a

Betragt en følge $\{X_t\}_{t=1}^T$ af uafhængige identisk fordelte stokastiske variable, hvor X_t kan antage værdierne -1, 0, og 1, hver med sandsynlighed $\frac{1}{3}$. Sæt $Y_t = e^{X_t - c}$, hvor c er en konstant og definer $M_0 = 1$ og $M_t = \prod_{j=1}^t Y_j = Y_1 \cdot Y_2 \cdot \ldots \cdot Y_t$ for $1 \leq t \leq T$. **Bestem** c, så M er en martingal (mht. det naturlige filter).

Spg. 3b

Forklar følgende udsagn (fra Slidesæt 2):

> Put-call pariteten viser, at en call-option svarer til en gearet position i det underliggende aktiv suppleret med en tabsforsikring.