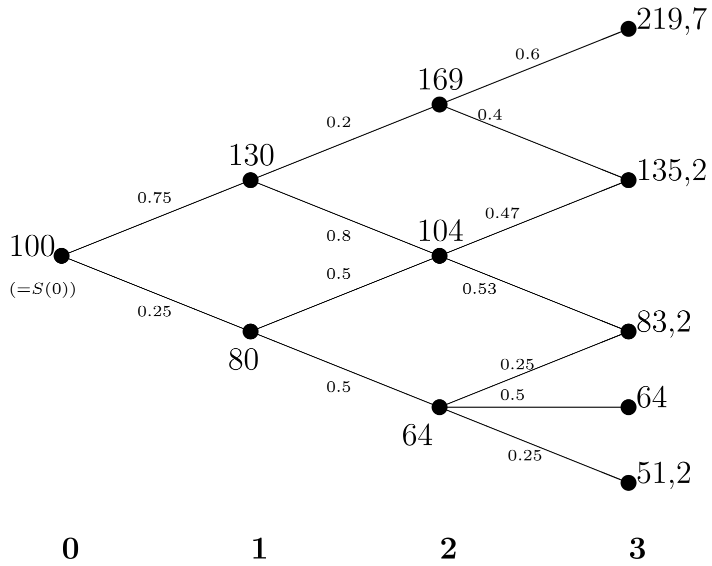
Matematisk Finansiering 1

4 timers skriftlig eksamen tirsdag 20/10 2015. Sættet er på 3 sider (ekskl. forside) og indeholder 2 opgaver og ialt 12 nummererede delspørgsmål, der (vejledende, ikke bindende) indgår med lige vægt i bedømmelsen. Opgaverne kan løses uafhængigt af hinanden. Beregningsmæssige resultater ønskes fuldt dokumenteret i besvarelsen. Det skal således klart fremgå, hvilke formler, der bruges, og hvorfor de bruges.

Opgave 1

I denne opgave betragtes en 3-periode model for kursen, S, på en aktie, der i det betragtede tidsrum ikke udbetaler dividende. Den mulige udvikling er fastlagt ved nedenstående gitter. (Med **tidspunkter**, aktiekurser og sandsynligheder.) Desuden findes der et risikofrit aktiv (*bankbogen*) med en rente på 0,025 (dvs. 2,5%) per periode.



Spg. 1a

Er modellen er arbitragefri? **Er** modellen komplet?

Spg. 1b

Nu betragtes en udløb-2, strike-100 europæisk call-option på aktien. **Beregn** den arbitragefri tid 0-pris på denne. **Angiv** den initiale sammensætning af den replikerende (aktie, bankbog)-portefølje.

Spg. 1c

Hvad er den arbiragefrie pris på en udløb-2, strike-100 europæisk put-option på aktien? **Hvad** koster den tilsvarende amerikanske put-option?

Spg. 1d

Analysér prisfastsættelse og replikation, hvis der istedet betragtes en europæisk udløb-3, strike-100 call-option.

Spg. 1e

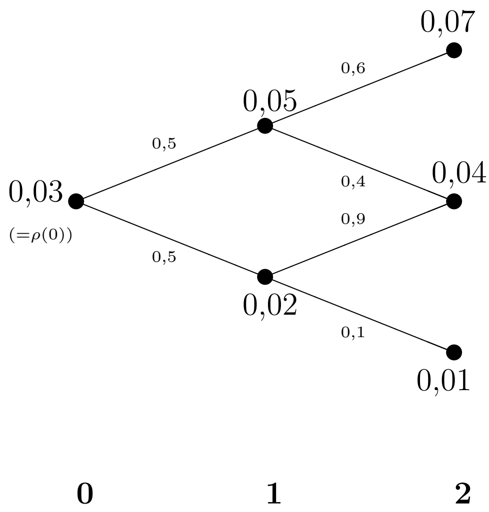
Analysér prisfastsættelse og replikation, hvis der istedet betragtes en europæisk udløb-3, strike-100 put-option. (Vink: Analysen i spg. 1d og put/call-pariteten kan med fordel kombineres.)

Spg. 1f

Analysér prisfastsættelse og replikation, hvis der istedet betragtes en europæisk udløb-3, strike-64 call-option. (Vink: Prisinterval.)

Opgave 2

Betragt nedenstående model for mulige udviklinger i den korte rente (ρ); den indeholder som sædvanlig tidspunkter, niveauer og (betingede) sandsynligheder. Sandsynlighederne antages at være risiko-neutrale, altså at afspejle et martingalmål (Q).



Spg. 2a

Bestem $\mathrm{E}^Q(\rho(t))$ for $t = 0, 1, 2$. **Er** ρ-processen en Q-martingal?

Spg. 2b

Vis at nulkuponobligationspriserne (naturligt ordnet) på tid 0 er givet ved $(0,97087; 0,93824; 0,89603)$ og **angiv** nulkupon- og forward- og swaprenter på tid 0.

Spg. 2c

Angiv amortiseringsprofilen (dvs. betalingsrækken delt op i ydelser (y_t), rentebetalinger (i_t) samt afdrag (δ_t) og resterende hovedstol (H_t)) for en 3-årig annuitetsobligation med initial hovedstol på 100 og kuponrente 0,03 (3%).

Spg. 2d

Hvad skal kuponrenten være, for at en annuitetsobligation som i spg. 2c har en tid 0-pris på 100 (dvs. "den handler til par")? (Vink: En ligning skal løses numerisk her.)

Spg. 2e

Nu betragtes en forwardkontrakt med annuiteten fra spg. 2c som underliggende aktiv. Forwardkontrakten udløber på tid 1 ("$T = 1$"i almindeligt anvendt notation). **Beregn** den initiale forwardpris, $\mathrm{Fwd}(0, T)$.

Spg. 2f

Nu betragtes en såkaldt *rente-floor*. Det er en kontrakt, der betaler $(0,035 - \rho(1))^+$ på tid 1. **Beregn** tid 0-prisen på rente-floor'en. **Angiv** hvordan rente-floor'en kan replikeres med forwardkontrakten fra spg. 2e og et andet aktiv, du finder passende. (Hvis du ikke har besvaret spg. 2e, så vælg to aktiver, du finder passende.)