FINANSIERING 1

3 timers skriftlig eksamen, kl. 10-13, onsdag 13/8 2008. Alle sædvanlige hjælpemidler (inkl. blyant) er tilladt. Sættet er på 4 sider og indeholder 8 nummererede delspørgsmål, der indgår med lige vægt i bedømmelsen.

VEJLEDENDE BESVARELSE

Opgave 1

Spg. 1a

Nulkuponobligationspriser:

$$
\begin{aligned}
P(0,1) &= \tfrac{1}{1.05} && \approx 0.9524 \\
P(0,2) &= \tfrac{0.4}{1.05\cdot 1.07} + \tfrac{0.2}{1.05^2} + \tfrac{0.4}{1.05\cdot 1.03} && \approx 0.9073 \\
P(0,3) &= \tfrac{0.4\cdot 0.75}{1.05\cdot 1.07\cdot 1.08} + \tfrac{0.4\cdot 0.25}{1.05\cdot 1.07\cdot 1.06} \\
&\quad + \tfrac{0.2\cdot 0.75}{1.05^2\cdot 1.06} + \tfrac{0.2\cdot 0.25}{1.05^2\cdot 1.04} \\
&\quad + \tfrac{0.4\cdot 0.75}{1.05\cdot 1.03\cdot 1.04} + \tfrac{0.4\cdot 0.25}{1.05\cdot 1.03\cdot 1.02} && \approx 0.8605
\end{aligned}
$$

Effektive renter:

$$
\begin{aligned}
y(0,1) &= \tfrac{1}{P(0,1)} - 1 &&= 0.05 \\
y(0,2) &= \tfrac{1}{P(0,2)^{\frac{1}{2}}} - 1 &&\approx 0.0498 \\
y(0,3) &= \tfrac{1}{P(0,3)^{\frac{1}{3}}} - 1 &&\approx 0.0513
\end{aligned}
$$

Forward-renter:

$$
\begin{aligned}
f(0,0) &= \tfrac{1}{P(0,1)} - 1 &&= 0.05 \\
f(0,1) &= \tfrac{P(0,1)}{P(0,2)} - 1 &&\approx 0.0497 \\
f(0,2) &= \tfrac{P(0,2)}{P(0,3)} - 1 &&\approx 0.0543
\end{aligned}
$$

Spg. 1b

Et 2-periode annuitetslån med hovedstol 100 og kuponrente 7% har konstant periodevis betaling

$$c = \frac{100}{\alpha_{2\rceil 7\%}} = 100\frac{0.07}{1 - 1.07^{-2}} \approx 55.3092$$

og dermed er annuitetslånets pris A_1 til tidspunkt $t = 1$

$$\begin{aligned}
A_1 &= E^Q\left(\frac{c}{1+\rho_1} + \frac{c}{(1+\rho_1)(1+\rho_2)} \,\middle|\, \mathcal{F}_1\right) \\
&= \frac{c}{1+\rho_1} + \frac{c}{1+\rho_1} E^Q\left(\frac{1}{1+\rho_2} \,\middle|\, \mathcal{F}_1\right) \\
&= \begin{cases}
\frac{55.3092}{1.07} + \frac{55.3092}{1.07}\left(0.75 \cdot \frac{1}{1.08} + 0.25 \cdot \frac{1}{1.06}\right) & \text{hvis } \rho_1 = 0.07 \\
\frac{55.3092}{1.05} + \frac{55.3092}{1.05}\left(0.75 \cdot \frac{1}{1.06} + 0.25 \cdot \frac{1}{1.04}\right) & \text{hvis } \rho_1 = 0.05 \\
\frac{55.3092}{1.03} + \frac{55.3092}{1.03}\left(0.75 \cdot \frac{1}{1.04} + 0.25 \cdot \frac{1}{1.02}\right) & \text{hvis } \rho_1 = 0.03
\end{cases} \\
&\approx \begin{cases}
99.7785 & \text{hvis } \rho_1 = 0.07 \\
102.6081 & \text{hvis } \rho_1 = 0.05 \\
105.5842 & \text{hvis } \rho_1 = 0.03
\end{cases}.
\end{aligned}$$

Prisen til $t = 0$ på en futures-kontrakt på køb af annuitetslånet til tidspunkt $t = 1$ er derfor

$$\begin{aligned}
\Phi_{0,1} &= E^Q\big(A_1 \,|\, \mathcal{F}_0\big) \\
&= 0.4 \cdot 99.7785 + 0.2 \cdot 102.6081 + 0.4 \cdot 105.5842 \\
&= 102.6667.
\end{aligned}$$

Da futures-kontrakten kun løber én periode er den ækvivalent med den tilsvarende én-periode forward-kontrakt, og dermed er forward-prisen lig futures-prisen, dvs.

$$F_{0,1} = \Phi_{0,1} = 102.6667.$$

Opgave 2

Spg. 2a

For at lette notationen sættes

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}^\top \\ \mathbf{1}^\top \end{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu} & \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.75 & 10 \\ 10 & 140 \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

Den globale minimum-varians-portefølje har da porteføljevægte

$$\mathbf{w}_{GMV} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}{c} = \frac{1}{140} \begin{bmatrix} 60 \\ 80 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.4286 \\ 0.5714 \end{bmatrix}$$

og forventet afkastrate

$$\mu_{GMV} = \frac{b}{c} = \frac{10}{140} \approx 0.0714.$$

Tilsvarende ses at minimum-varians-porteføljen med forventet afkast $\mu_{mv} = 0.08$ har porteføljevægte

$$\mathbf{w}_{mv} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu} & \mathbf{1} \end{bmatrix} A^{-1} \begin{bmatrix} 0.08 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix}.$$

Bemærkning vedrørende løsning af spg. 2b og 2c:

Spørgsmål 2b og 2c er begge formuleret indenfor rammerne af den generelle porteføljeteori, og resultaterne generaliserer umiddelbart (og med uændret argumentation) til en vilkårlig minimum-varians-portefølje $\mathbf{w}_{mv}$ med forventet afkastrate $\mu_{mv} > \mu_{GMV}$ for ethvert valg af $\boldsymbol{\mu}$ og $\boldsymbol{\Sigma}$.

I opgaveteksten betragtes imidlertid konkrete valg

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 0.10 \\ 0.05 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 0.03 & -0.01 \\ -0.01 & 0.02 \end{bmatrix}$$

af $\boldsymbol{\mu}$ og $\boldsymbol{\Sigma}$. Dermed kan man også eksplicit beregne både μ_{GMV}, μ_{mv} og μ_{zmv}, og ved at udnytte det direkte kendskab til disse størrelser, kan man besvare dele af spg. 2b og 2c på anden vis end vinkene i opgaveteksten ellers ligger op til.

Hvorvidt man vælger at benytte de generelle argumenter eller i stedet udnytter det eksplicitte kendskab til μ_{GMV}, μ_{mv} og μ_{zmv} er underordnet. Begge fremgangsmåder er at opfatte som en fuld besvarelse.

Spg. 2b

$\mu_{zmv} \neq \mu_{mv}$ *v.hj.a. generelle argumenter:*

Hvis $\mu_{zmv} = \mu_{mv}$ så har porteføljen $\tilde{\mathbf{w}} = \frac{1}{2}\mathbf{w}_{mv} + \frac{1}{2}\mathbf{w}_{zmv}$ forventet afkastrate

$$\tilde{\mu} = E\left(\tilde{\mathbf{w}}^\top r\right) = E\left(\frac{1}{2}\mathbf{w}_{mv}^\top r + \frac{1}{2}\mathbf{w}_{zmv}^\top r\right) = \frac{1}{2}\mu_{mv} + \frac{1}{2}\mu_{zmv} = \mu_{mv} \quad (= \mu_{zmv})$$

og varians

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}^2 = Var\left(\tilde{\mathbf{w}}^\top r\right) &= \frac{1}{4}Var(\mathbf{w}_{mv}^\top r) + \frac{1}{4}Var(\mathbf{w}_{zmv}^\top r) + \frac{1}{2}\underbrace{Cov(\mathbf{w}_{mv}^\top r, \mathbf{w}_{zmv}^\top r)}_{=0 \text{ per definition}} \\ &= \frac{1}{4}\sigma_{mv}^2 + \frac{1}{4}\sigma_{zmv}^2 \qquad [1]\end{aligned}$$

hvor $\sigma_{mv}^2, \sigma_{zmv}^2 > 0$ er varianserne hørende til porteføljerne $\mathbf{w}_{mv}$ og $\mathbf{w}_{zmv}$.

Såfremt $\sigma_{mv}^2 \leq \sigma_{zmv}^2$, så er $\tilde{\sigma}^2 < \sigma_{zmv}^2$ ifølge [1], og dermed er $\tilde{\mathbf{w}}$ en portefølje med samme forventede afkast som $\mathbf{w}_{zmv}$, men med en strengt mindre varians, og $\mathbf{w}_{zmv}$ kan således ikke være en minimum-varians-portefølje - MODSTRID! Tilsvarende ses at hvis $\sigma_{mv}^2 \geq \sigma_{zmv}^2$, så kan $\mathbf{w}_{mv}$ ikke være en minimum-varians-portefølje - MODSTRID! Dermed fører antagelsen $\mu_{mv} = \mu_{zmv}$ i alle tilfælde til en modstrid, og vi konkluderer derfor at $\mu_{zmv} \neq \mu_{mv}$.

$\mu_{zmv} \neq \mu_{mv}$ *ved direkte beregning:*

Den forventede afkastrate for den ortogonale portefølje $\mathbf{w}_{zmv}$ er givet som

$$\mu_{zmv} = \frac{a - b\mu_{mv}}{b - c\mu_{mv}} = \frac{0.75 - 10 \cdot 0.08}{10 - 140 \cdot 0.08} \approx 0.0417$$

og heraf følger umiddelbart at $\mu_{zmv} \neq \mu_{mv} = 0.08$.

Eksistens af α:

Da både $\mathbf{w}_{mv}$, $\mathbf{w}_{zmv}$ og $\mathbf{w}_{GMV}$ er minimum-varians-porteføljer og $\mu_{zmv} \neq \mu_{mv}$, så følger det af 2-fonds-separations-resultatet, at der findes $\alpha \in \mathbb{R}$ således at

$$\mathbf{w}_{GMV} = \alpha\mathbf{w}_{mv} + (1-\alpha)\mathbf{w}_{zmv}. \qquad (1)$$

Spg. 2c

$\mu_{zmv} < \mu_{GMV}$ v.hj.a. generelle argumenter:
Ligning (1) medfører at

$$\begin{aligned} \mu_{GMV} &= E\left(\mathbf{w}_{GMV}^\top r\right) \\ &= \alpha E\left(\mathbf{w}_{mv}^\top r\right) + (1-\alpha)E\left(\mathbf{w}_{zmv}^\top r\right) \\ &= \alpha\mu_{mv} + (1-\alpha)\mu_{zmv} \end{aligned} \tag{2}$$

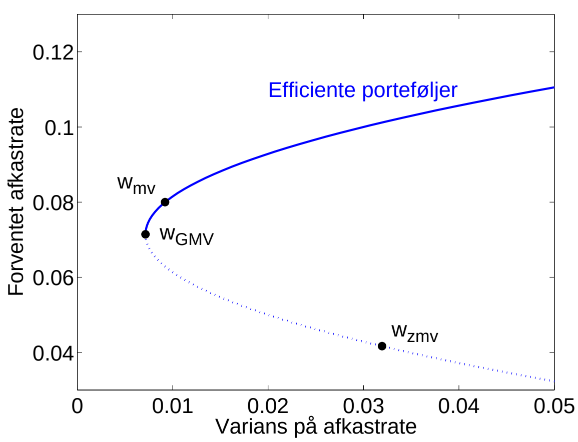
og fra spg. 2a følger at

$$\mu_{GMV} = 0.0714 \quad < \quad \mu_{mv} = 0.08.$$

Da $0 < \alpha < 1$[1] kan ligning (2) således kun være opfyldt såfremt $\mu_{zmv} < \mu_{GMV}$ (ellers bliver højresiden af (2) strengt større end μ_{GMV}).

$\mu_{zmv} < \mu_{GMV}$ ved direkte beregning:
Fra udregningerne i spg. 2a og 2b følger umiddelbart at $\mu_{zmv} = 0.0417 < \mu_{GMV} = 0.0714$.

Inefficiens af $\mathbf{w}_{zmv}$:
Da en efficient portefølje altid har forventet afkastrate, der er større end eller lig μ_{GMV} (se også nedenstående figur) og $\mu_{zmv} < \mu_{GMV}$, så kan $\mathbf{w}_{zmv}$ ikke være en efficient portefølje.



[1]Bemærk først at (1) medfører

$$Var\left(\mathbf{w}_{GMV}^\top r\right) = \alpha^2\sigma_{mv}^2 + (1-\alpha)^2\sigma_{zmv}^2 \tag{$\star$}$$

og udnyt dernæst at w_{GMV} er den globale minimum-varians-portefølje, dvs. at α per konstruktion er valgt så $Var\left(\mathbf{w}_{GMV}^\top r\right)$ er mindst mulig. Minimering af udtrykket i ($\star$) giver

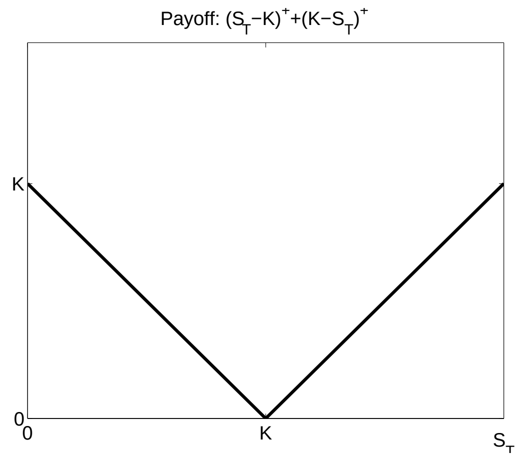
$$\alpha = \frac{\sigma_{zmv}^2}{\sigma_{mv}^2 + \sigma_{zmv}^2}$$

og heraf ses specielt at $0 < \alpha < 1$.

Opgave 3

Spg. 3a

Payoff-diagrammet for en straddle med strike K



viser, at en straddle altid giver et ikke-negativt payoff, og at payoff er større desto mere aktiekursen afviger fra strike K. En straddle med strike K vil derfor med stor sandsynlighed generere et højt payoff, hvis eksempelvis at strike-kursen K ved udstedelsen af straddlen til tidspunkt t sættes lig den nuværende kurs S_t på den underliggende aktie, og aktiekursen S_T ved exercise-tidspunktet $T > t$ samtidig forventes at afvige meget fra det nuværende niveau S_t $(= K)$.

Til forskel fra f.eks. kun at købe en call-option med strike K på aktien, så har en straddle et positivt payoff *uanset* om aktiekursen ender med at stige eller falde. En straddle tager dermed højde for den situation, hvor investorerne ikke på forhånd har præcise forventninger til om kursen vil stige eller falde, men blot regner med at den næppe vil holde sig på det nuværende niveau.

Hvis man derimod forventer, at aktiekursen ikke vil ændre sig ret meget mellem tidspunkt t og T, så kan man i stedet vælge at *sælge* en straddle. Det genererer en indtægt (=pris på straddle) til tidspunkt t og forventes kun at kræve en relativt lille udgift i formen af betaling af straddle-payoff'et $(S_T - K)^+ + (K - S_T)^+$ til tidspunkt T.

Spg. 3b

Ved at inddele i de forskellige mulige tilfælde ses at

$$(S_T + V_T - 2K)^+ = \begin{cases} 0 & \text{hvis } S_T \le K, V_T \le K \\ (S_T - K + V_T - K)^+ & \text{hvis } S_T > K, V_T \le K \\ (S_T - K + V_T - K)^+ & \text{hvis } S_T \le K, V_T > K \\ S_T - K + V_T - K & \text{hvis } S_T > K, V_T > K \end{cases}$$

$$\le \begin{cases} 0 & \text{hvis } S_T \le K, V_T \le K \\ S_T - K & \text{hvis } S_T > K, V_T \le K \\ V_T - K & \text{hvis } S_T \le K, V_T > K \\ S_T - K + V_T - K & \text{hvis } S_T > K, V_T > K \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{hvis } S_T \le K, V_T \le K \\ (S_T - K)^+ & \text{hvis } S_T > K, V_T \le K \\ (V_T - K)^+ & \text{hvis } S_T \le K, V_T > K \\ (S_T - K)^+ + (V_T - K)^+ & \text{hvis } S_T > K, V_T > K \end{cases}$$

$$= (S_T - K)^+ + (V_T - K)^+$$

og dermed er så

$$\begin{aligned} Call_{t,T}(S_t + V_t, 2K) &= E^Q\left(\frac{(S_T + V_T - 2K)^+}{R_{t,T}} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right) \\ &\le E^Q\left(\frac{(S_T - K)^+ + (V_T - K)^+}{R_{t,T}} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right) \\ &= E^Q\left(\frac{(S_T - K)^+}{R_{t,T}} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right) + E^Q\left(\frac{(V_T - K)^+}{R_{t,T}} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right) \\ &= Call_{t,T}(S_t, K) + Call_{t,T}(V_t, K) \qquad [2] \end{aligned}$$

med den sædvanlige notation, dvs. $R_{t,T}$ er den risikofri (brutto)rente mellem tidspunkt t og T og $\mathcal{F}_t$ den tilgængelige "information" til tidspunkt t.

På tilsvarende måde kan relationen for put-optionspriserne vises. Alternativt kan man bruge put-call-pariteten (idet vi har antaget at optionerne er europæiske samt at aktierne ikke udbetaler dividende) til at indse at

$$\begin{aligned} Call_{t,T}(S_t + V_t, 2K) &= Put_{t,T}(S_t + V_t, 2K) + S_t + V_t - 2KP(t,T) \\ Call_{t,T}(S_t, K) &= Put_{t,T}(S_t, K) + S_t - KP(t,T) \\ Call_{t,T}(V_t, K) &= Put_{t,T}(V_t, K) + V_t - KP(t,T) \end{aligned}$$

hvor $P(t,T)$ er prisen til tidspunkt t på en nulkuponobligation med udløb til tidspunkt T. Ved hjælp af [2] får vi således

$$\begin{aligned} & Put_{t,T}(S_t + V_t, 2K) + S_t + V_t - 2KP(t,T) \\ &= Call_{t,T}(S_t + V_t, 2K) \\ &\leq Call_{t,T}(S_t, K) + Call_{t,T}(V_t, K) \\ &= Put_{t,T}(S_t, K) + Put_{t,T}(V_t, K) + S_t + V_t - 2KP(t,T) \end{aligned}$$

der omskrives til

$$Put_{t,T}(S_t + V_t, 2K) \leq Put_{t,T}(S_t, K) + Put_{t,T}(V_t, K) \qquad [3]$$

som ønsket.

Relationerne [2] og [3] siger løst sagt, at "det er mere fordelagtigt at holde separate optioner på hver af de to underliggende aktier frem for at have én samlet option på porteføljen bestående af begge aktier". Intuitionen bag det udsagn er, at hvis eksempelvis den ene aktie klarer sig dårligt, og den tilhørende call-option derfor ikke er ret meget værd, så påvirker det ikke nødvendigvis værdien af den anden call-option, mens det i et vist omfang *vil* influere på værdien af call-optionen skrevet på porteføljen af de to aktier.

M.a.o.: hvis der eksempelvis er forventninger om en ugunstig fremtidig kursudvikling for aktie S - dvs. S_T forventes at være lav - så vil det alt andet lige medføre at optionspriserne $Call_{t,T}(S_t, K)$ og $Call_{t,T}(S_t + V_t, 2K)$ begge vil være forholdsvis lave, mens de negative kursforventninger til S ikke nødvendigvis behøver at påvirke aktien V og dermed optionsprisen $Call_{t,T}(V_t, K)$, der således godt kan være høj. Hvis S_T derimod forventes at være relativt høj, så påvirkes både $Call_{t,T}(S_t, K)$ og $Call_{t,T}(S_t + V_t, 2K)$ i positiv retning og fortsat uden nødvendigvis at influere på $Call_{t,T}(V_t, K)$, og samlet set fører det til uligheden [2].

Omvendt gælder for det put-optionerne, at positive forventninger til S medfører en relativt lav værdi af de to optioner $Put_{t,T}(S_t, K)$ og $Put_{t,T}(S_t + V_t, 2K)$, hvormod negative kursforventninger tilsvarende giver både $Put_{t,T}(S_t, K)$ og $Put_{t,T}(S_t+V_t, 2K)$ forholdsvis stor værdi, mens $Put_{t,T}(V_t, K)$ i begge tilfælde kan være stort set upåvirket. Det er samlet set udtrykt i uligheden [3].

Spg. 3c

Hvis vi lader $Straddle_{t,T}(S_t, K)$ betegne prisen til tidspunkt t på en straddle skrevet på S_t med strike K og udløb til tidspunkt T, så følger det per konstruktion af en straddle at

$$Straddle_{t,T}(S_t, K) = Call_{t,T}(S_t, K) + Put_{t,T}(S_t, K)$$

og dermed får vi v.hj.a. spg. 3b

$$\begin{aligned} Straddle_{t,T}(S_t + V_t, 2K) &= Call_{t,T}(S_t + V_t, 2K) + Put_{t,T}(S_t + V_t, 2K) \\ &\leq Call_{t,T}(S_t, K) + Call_{t,T}(V_t, K) \\ &\quad + Put_{t,T}(S_t, K) + Put_{t,T}(V_t, K) \\ &= Straddle_{t,T}(S_t, K) + Straddle_{t,T}(V_t, K). \end{aligned} \qquad [4]$$

Hvis vi derfor lader S_t og V_t betegne aktiekursen på hhv. Carlsberg og Novo Nordisk, så ser vi fra [4], at det er billigere at købe en straddle på summen af de to aktiekurser frem for at købe en straddle på hver af dem[2].

Det er derfor ikke korrekt - eller i bedste fald lettere unuanceret - når investeringsrådgiveren påstår, at de to investeringsmuligheder er "lige gode". Hvis påstanden skal retfærdiggøres kræver det i det mindste en nærmere præcisering af, hvad der menes med "lige godt", for de to investeringsmuligheder er i hvert fald ikke identiske.

[2] Vi har strengt taget ikke vist, at de to investeringsmuligheder (A) og (B) ikke godt *kan* have samme pris. Men medmindre aktiekurserne S_t og V_t opfører sig helt specielt, så vil det ikke være tilfældet. M.a.o.: for de fleste rimelige valg af fordelinger af S_T og V_T, så vil der gælde "skarp ulighed" i [4].