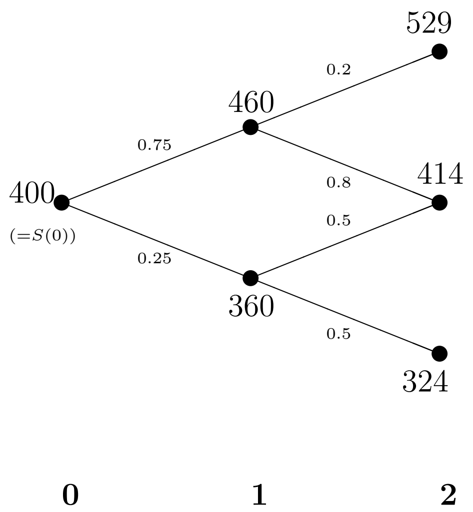
FINANSIERING 1

3 timers skriftlig eksamen, 9-12, onsdag 14/4 2010. Alle sædvanlige hjælpemidler (incl. blyant) tilladt. Sættet er på 3 sider og indeholder 8 numererede delspørgsmål, der indgår med lige vægt i bedømmelsen.

Opgave 1

Betragt en 2-periode-model for kursen, S, på en aktie, der i det betragtede tidsrum ikke udbetaler dividende. Den mulige udvikling er fastlagt ved nedenstående gitter med **tidspunkter**, aktiekurser og sandsynligheder. Desuden findes der et risikofrit aktiv (bankbogen) med en rente på 5% per periode.



Spg. 1a
Vis at modellen er abritrage-fri og komplet.

En såkaldt *boosted call* er karakteriseret ved et udøbstidspunkt (T) og en strike-kurs (K), og den har payoff

$$\frac{1}{2}\left(\frac{(S(T))^2}{K} - K\right)^+ \text{ på tid } T.$$

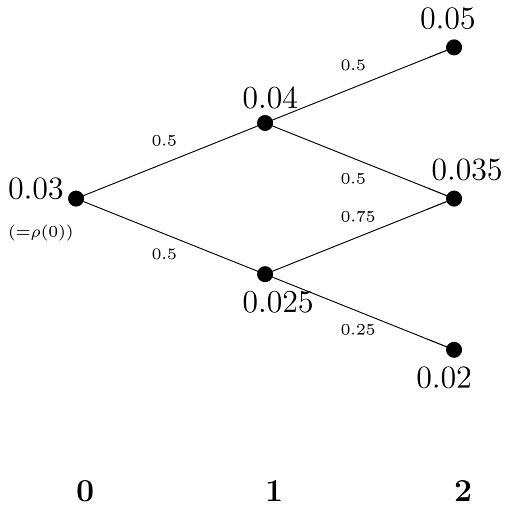
Spg. 1b
Beregn i den givne 2-periode-model den arbitrage-fri tid-0-pris på en *boosted call* med

$K = 400$ og $T = 2$.
Angiv den initiale sammensætning af den (aktie,bankbog)-portefølje, der replikerer den betragtede *boosted call*.

Spg. 1c
Vis at i en hvilkensomhelst arbitrage-fri model er prisen på en *boosted call* større end (eller lig med) prisen på en almindelig call-option med tilsvarende udløbstidspunkt og strike-kurs. (Vink: Sammenlign (tegn!) payoff-funktioner.)

Opgave 2

Betragt nedenstående model for mulige udviklinger i den korte rente (ρ); den indeholder som sædvanlig tidspunkter, niveauer og (betingede) sandsynligheder. Sandsynlighederne antages at være risko-neutrale, altså at afspejle et martingalmål.



Spg. 2a
Vis at nulkuponobligationspriserne på tidspunkt 0 er

$$(P(0,1), P(0,2), P(0,3)) = (0.9709, 0.9404, 0.9070).$$

Spg. 2b

Angiv betalingsrække, tid-0-kurs samt Fisher/Weil-varighed for et 3-periode serielån med 3% kuponrente og initial hovedstol på 100.

Spg. 2c

Et såkaldt *flydende serielån med loft* har samme afdragsprofil som et almindeligt serielån, men den resterende hovedstol forrentes til enhver tid med minimum af den gældende korte rente og et loft, κ. Eller udtrykt i `Noternes` notation

$$i_t = H_{t-1} \times \min(\rho(t-1), \kappa).$$

Beregn tid-0-kursen "flydende serielån med loft = 0.035"-varianten af lånet fra spg. 2b. (Vink: Der erindres om at

$$\text{kurs}(t-1) = \mathrm{E}^Q_{t-1}\left(\frac{\text{kurs}(t) + \text{dividende}(t)}{1+\rho(t-1)}\right),$$

hvor rollen som "dividende" her spilles "rentebetaling + afdrag".)

Opgave 3

Spg. 3a

Lad $\{X_j\}_{j=0}^T$ være en følge af uafhængige stokastiske variable (tilpasset en filtrering $\mathcal{F}$), hvorom det gælder at $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = 1/2$. Sæt $M(0) = 0$ og definer

$$M(t) = \sum_{j=1}^{t} e^{X_{j-1}} X_j \quad \text{for } 1 \le t \le T.$$

Vis at M er en martingal (mht. $\mathcal{F}$).

Spg. 3b

Betragt `Noternes` udledning af CAPM-ligningen (afsnit 9.2). **Hvor** vil du sige, der bruges noget, der kan kaldes *ligevægtsargumenter*?