NATURVIDENSKABELIG KANDIDATEKSAMEN
VED KØBENHAVNS UNIVERSITET

INVESTERINGS- OG FINANSIERINGSTEORI

4 timers skriftlig eksamen, 9-13 mandag 16/6 2002.

Opgave 1

Spg. 1.a [10%]
Det er nok at tjekke alle delmodeller. Disse er af den "sædvanlige" multiplikative form. Pånær for "den interessante" s_{uuu}-model har vi den entydige martingalssh.

$$q = \frac{R-d}{u-d} = \frac{1.05-0.9}{1.2-0.9} = 0.5.$$

De er derfor komplette & arbitragefri.
For s_{uuu}-modellen skal vi for arbitragefrihed have

$$q = \frac{R-d}{s_{uuu}/144-d} \in]0;1[\Leftrightarrow 0 < \frac{0.15}{s_{uuu}/144-0.9} < 1 \Leftrightarrow s_{uuu} \in]151.2;\infty[$$

I så fald er modellen også komplet da kun ovenstående q virker (dersom $s_{uuu} = 129.6$ kan man "split hairs" om komplethed). Med $s_{uuu} = 172.8$ er alle q'er 0.5.

Spg. 1.b [10%]
i) Da modellen er komplet har put-optionen den entydig arbitragefri tid-0 pris $R^{-3}\mathbf{E}^Q((K-S(3))^+)$, der findes ved at trævle sig baglæns gennem gitteret. Det ser sådan ud:

$$\begin{array}{cccc}
 & & & 0 \\
 & & 0 & \\
 & 0.6349 & & 0 \\
3.833 & & 1.333 & \\
 & 7.415 & & 2.8 \\
 & & 14.2381 & \\
 & & & 27.1
\end{array},$$

så tid-0 put-prisen er altså 3.833.
Call-prisen kan findes på samme måde eller vha. put/call-pariteten $C(0) - P(0) = S(0) - K/R^3$. Under alle omstændigheder er den 17.450.

Replikation med aktie og bankbog er helt standard. Put-optionens pay-off replikeres med en dynamisk strategi, der på tid 0 indeholder $a(0)$ stk. aktier, hvor

$$a(0) = \frac{\Delta P}{\Delta S} = \frac{P^{op}(1) - P^{ned}(1)}{S^{op}(1) - S^{ned}(1)} = \frac{0.6349 - 7.415}{120 - 90} = -0.2260,$$

altså i dette tilfælde en kort position. Den replikerende strategi skal koste 3.833, så ialt $3.833 + 22.60 = 26.433$ investeres på bankbogen. Ved (på tilsvarende & selvfinansierende vis) at justere porteføljen rammes put-optionens pay-off.
Da den nævnte investor vil købe put'en for 5.064, så sælger vi sådan en til ham, sælger 0.226 aktier, sætter 26.433 i banken & justerer dynamisk. Så har vi en risikofri gevinst på 5.064-3.833 = 1.23.

Spg. 1.c [10%]
Den amerikanske put prises også ved baglæns optrævling, idet man i hver knude skal tjekke om det giver mere at exercise *nu* end at vente (værdien heraf er den diskonterede forventning over de to fremtidige knuder), også sætte det maksimale ind som pris. Det ser sådan ud (idet **fed skrift** angiver knuder med indfrielse)

$$\begin{array}{cccc}
 & & & 0 \\
 & & 0 & \\
 & 0.6349 & & 0 \\
5.064 & & 1.333 & \\
 & \mathbf{10} & & \mathbf{2.8} \\
 & & \mathbf{19} & \\
 & & & \mathbf{27.1}
\end{array},$$

så prisen er altså 5.064 (den nu ruinerede spg. 1b-investor troede måske han handlede amr. optioner).
Den amr. call kan prises på samme måde. Men da aktien ikke udbetaler dividende (og renten er > 0) så ved vi godt at den aldrig indfris førtidigt og at den derfor koster det samme som den europæiske call.

Opgave 2

Spg. 2.a [10%]
Betragt $s \leq t$. Så fås ved at benytte "itererede forventninger" at

$$X(s) = \mathbf{E}_s(X) = \mathbf{E}_s(\mathbf{E}_t(X)) = \mathbf{E}_s(X(t)),$$

altså martingalegenskaben.
Ja, Y er en martingal. X^2 er også "en fast stokastisk variabel", så det er nøjagtigt sammen udregning som ovenfor. (For pedanterne: Den går godt når $\mathbf{E}(X^2) < \infty$.)

Hvis $\text{var}(X) = 0$ så er $Z(t)$ tydeligvis en MG. Men hvis $\text{var}(X) > 0$, så er Z ikke en MG. Hvis Z var en MG så skulle specielt $\mathbf{E}(Z(T)) = Z(0)$. Men

$$\mathbf{E}(Z(T)) = \mathbf{E}(\mathbf{E}_T(X)\mathbf{E}_T(X)) = \mathbf{E}(X^2) = \text{var}(X) + (\mathbf{E}(X))^2 > X^2(0) = Z(0).$$

(Siger man "konveks funktion", "Jensens ulighed" & "submartingal" på tilpas overbevisende måde, så er det også iorden.)

Spg. 2.b [10%]
r er en, "say", N-dimensional stokatisk variabel der angiver afkastrater på nogle (finansielle) aktiver. Vi tænker os disse er lette at observere.
f er en K-dimensional vektor af stokastiske variable kaldet *faktorer*.K er mindre end N, og typisk/helst meget mindre. Vi antager $\mathbf{E}(f) = 0$, og sætter $\text{cov}(f) = \Phi$. Hvad f derudover er blæser bevidst i vinden.
B er en deterministisk matrix ($N \times K$) af faktorfølsomheder. B's i'te række siger altså hvormeget & hvordan de forskellige faktorer på virker afkast nr. i.
μ er en deterministisk N-vektor, der (da $\mathbf{E}(f) = 0$) angiver aktivernes forventede afkastrater.
APT siger at for at en ekstakt faktormodel skal være arbitragefri skal der eksistere en vektor (K-dimensional) λ af såkaldte faktor-risikopræmier således at

$$\mu - r_0\mathbf{1} = B\lambda.$$

Altså en (lineær) sammenhæng mellem forventede (mer)afkast og og faktorfølsomheder (der "in turn" bestemmer afkast-varianser). Bemærk at da/når $N >> K$ så er der "langt flere ligninger end ubekendte", så der er virkelig tale om en restriktion mellem μ og B.

Spg. 2.c [15%]
Det stående lån har ingen afdrag før tilsidst, så dets betalingsrække er $c_B = (5, 5, 105)$. Dets kurs er $\sum_i d_i c_B(i) = 98.739$
Serielånet har samme afdrag i hver periode ($33\frac{1}{3}$). Rentebetalingerne er så 5, $0.05 * 66\frac{2}{3} = 3\frac{1}{3}$ og $0.05 * 33\frac{1}{3} = 1\frac{2}{3}$, og ydelsesrækken bli'r $c_S = (38\frac{1}{3}, 36\frac{2}{3}, 35)$. Dets kurs er 99.747.
Annuiteten har samme ydelse i alle perioder. Hvis de 36.72 ellers har vi derfor umiddelbart betalingsrækken. Tjek: Ved 1. ydelse falder hovedstolen til 100-(36.72-5)=68.28. 2. rentebetaling er 68.28*0.05 = 3.414, og hovedstolen reduceres til 68.28-(36.72 - 3.414) = 34.97. 3. rentebetaling er så 1.749, til rest er der 34.97-(36.72-1.749) = 0.0. Ergo pengene passer. (Alternativt, kan man sige at sum(betalinger tilbagediskonteret med kuponrenten) = hovedstolen, og da $36.72/1.05 + 36.72/1.05^2 + 36.72/1.05^3 = 100.00$, så er alt OK. At kunne huske annuitetsformelen du'r selvølgelig også.)
)
Annuitetens kurs er 99.716.

En meget passende definition af varighed er NK-rente baserede Fisher/Weil-varighed. Den er

$$D^{F/W} = \sum w_i t_i,$$

hvor $w_i = c_A(i) * d_i / d^\top c_A = (0.3523879, 0.3340094, 0.3136028)$. Derfor er annuitetens varighed 1.96. Det stående låns varighed er 2.86 og serielånets 1.93. Da varighed er et værdi-vægtet gennemsnit af betaingstiderne, har det stående lån med sin meget store slutbetaling større varighed end annuiteten. Serielånets ydelser aftager (svagt) over tid, så det vil give en (marginalt) lavere varighed end annuiteten, ihvertfald hvis rentestrukturen er flad eller (som her) voksende.

Opgave 3

Spg. 3.a [10%]
Et risikofrit aktiv laves ved at købe et af hvert AD-aktiv. Det koster 0.8. Den risikofri aflastrate er derfor $r_0 = (1 - 0.8)/0.8 = 0.25$, altså 25%.
De risikoneutrale ssh er $q_i = AD_i / \sum_j AD_j$, dvs. $q = (3/8, 1/4, 1/4, 1/8)$.
Værdien af aktierne er

$$V^E = \sum_i AD_i * \max(V_i(1) - D, 0) = 0.3 * 30 + 0.2 * 10 = 11$$

Værdien af obl. er

$$V^D = \sum_i AD_i * \min(D, V_i(1)) = (0.3 + 0.2) * 100 + 0.2 * 80 + 0.1 * 50 = 71$$

Virksomhedens tid-0 værdi er $V(0) = V^E + V^D = 11 + 71 = 82$.
Gældens lovede afkastrate er $(D - V^D)/V^D = 0.4085 \sim 40.85\%$.
Gældens P-forventede afkastrate er

$$\mu^{P;D=100} = (0.15+0.35)*0.4085+0.35*((80-71)/71)+0.15*((50-71)/71) = 0.2042 \sim 20.42\%.$$

Gældens Q-forventede afkastrate er

$$\mu^Q = (3/8 + 1/4) * 0.4085 + 1/4 * 0.1267 - 1/8 * 0.2958 = 0.25 = r_0,$$

men det er jo netop en egenskab (egenskab*en*, ku' man sige) ved Q at alle 1-periode forventede afkastrater er ens & lig den (lokalt) risikofri rente.

Spg. 3.b [10%]
Virksomhedens værdi ændres ikke (Modigliani/Miller).
Gældens Q-forventede afkastrate er pr. kontruktion stadig r_0.

Gælden er nu $V^{80} = \sum_i AD_i * \min(80, V_i(1)) = 0.7 * 80 + 0.1 * 50 = 61$ værd. Dens lovede afkastrate er $(80 - 61)/61 = 0.3115$, mens dens P-forventede afkastrate er

$$\mu^{P;D=80} = (0.15 + 0.35 + 0.35) * 0.3115 - 0.15 * 0.1803 = 0.2377.$$

Så en naiv investor vil mene at "obligationerene er blevet dårligere", men en rationel risiko-neutral investor (som vi tvinger til at investere i obl.) vil se at "obligationer er bedre".

Gældens P-forventede afkastrate er lavere en den risikofri rente. Men der opstår ikke arbitrage af den grund, da der er tilstande/tilfælde hvor gældens afkast dominerer r_0. Og det ikke "rent held", men fordi alle priser netop er fastsat så der ikke er arbitrage. Jo, det er da ganske rigigt lidt/noget underligt, at et usikkert aktiv har lavere forventet afkastrate end det risikofrie. Grunden til gældens lave afkastrate er at den "betaler meget" i tilstande der har høje AD-priser (dens værdi bli'r derfor høj & afkastet lavt). Vores økonomiske forklaring hvorfor det kan ske er, at disse er tilstande hvor det "ellers er svært at få penge/forbrug", "bad states of the world", eller mere teknisk tilstande hvor agenternes marginalnytte er høj. Afsnit 4.3 viser at q_i er proportional med en repræsentativ agents marginalnytte i tilstand i (og med p_i)).Obligationerne tilbyder derfor er vist element af "forsikring" (mod et eller andet), og det vil risikoaverse agenter være vilige til at betale (ekstra) for. (Den samme morale har vi diskuteret i et CAPM-setup ifm $\beta < 0$-aktiver.)

Så kort: Arbitrage: Nej. Underligt: Joooh. Økonomisk understøtteligt: Ja.

Spg. 3.c [10%]

Projektets NPV er (0.3*10+0.2*10-0.2*10-0.1*10) -1 = 1. Hvis projektet startes stiger aktiernes værdi 0.3*10 + 0.2 *10 + 0.2*0 + 0.1*0 = 5. Så aktionærerne vil gerne betale for projektet af egen lomme (det koster jo kun 1). Obligationernes tid-0 værdi ændres derimod med 0.3*0 + 0.2 *0 - 0.2*10 - 0.1*10 = -3, så den løsning bryder de sig ikke om.

Vi ved fra noter/opgaver, at da NPV > 0, så findes der en finansieringsmåde involverende genforhandling af hovedstolen (til $\widetilde{D}$), såldes at begge parter er tilfredse (elller ihvertfald ikke stilles ringere) og obligationsejerene betaler for projektet (tager pengene op af lommen på tid 0). Obligationsejerne er glade hvis

$$0.3 * \min(\widetilde{D}, 140) + 0.2 * \min(\widetilde{D}, 120) - 0.2 * \min(\widetilde{D}, 70) - 0.1 * (\widetilde{D}, 40) > 71 + 1,$$

idet h.s. er gældens gamle værdi + det projektet koster. Det ses let at for $\widetilde{D} > 108$ holder ovenstående ulighed. Hvis v.s. i uligheden er større en 71+1+1, dvs. hvis $\widetilde{D} > 110$, så snupper obligationsejerne al projektets NPV "og lidt til", så aktionærene vil blive dårlige stillet. Så en ny hovedstol mellem 108 og 110 & alle er glade. (Antager man, fuldt ligeså godt, at aktionærene betaler & der laves ny hovedstol er "alle er glade" intervallet 106-108.)