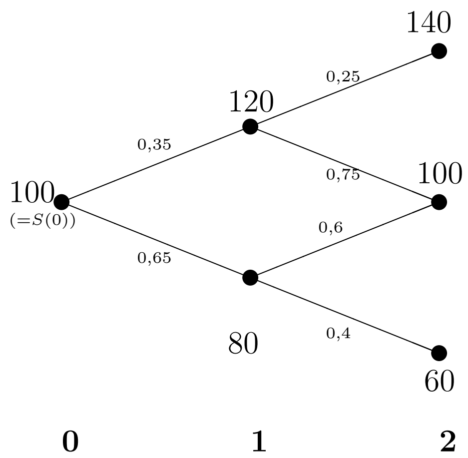
Matematisk Finansiering 1

4 timers skriftlig eksamen onssdag 16/12 2015. Sættet er på 4 sider (ekskl. forside) og indeholder 4 opgaver og ialt 12 nummererede delspørgsmål, der (vejledende, ikke bindende) indgår med lige vægt i bedømmelsen. Opgaverne kan løses uafhængigt af hinanden. Beregningsmæssige resultater ønskes fuldt dokumenteret i besvarelsen. Det skal således klart fremgå, hvilke formler, der bruges, og hvorfor de bruges.

Opgave 1

Betragt en 2-periode-model for kursen på en (dividende-fri) aktie, S. Den mulige udvikling er fastlagt ved nedenstående gitter med **tidspunkter** (som vi tænker på som år), aktiekurser og sandsynligheder svarende til målet P. Renten konstant, 0,00 (0%) per år.



Spg. 1a
Vis at modellen er arbitragefri og komplet.

Nu betragtes en udløb-2, strike-100 såkaldt digital (eller binær) option på aktien. Herved forstås en kontrakt, der betaler 1 på tid 2 hvis aktiekursen der er skarpt større end 100; payoff er med andre ord (indikatorfunktionsnotation) $\mathbf{1}_{S(2)>100}$.

Spg. 1b
Bestem tid-0 prisen på den digitale option. **Angiv** den initiale sammensætning af den replikerende (aktie, bankbog)-portefølje.

Et firma tilbyder nu den digitale option i en 'pengene tilbage'-version. Herved forstås, at hvis aktiekursen ender i samme niveau, som den begyndte, så får optionskøberen sin oprindelige investering (altså det, han betalte for optionen) tilbage.

Spg. 1c
Hvad er tid 0-prisen på 'pengene tilbage'-optionen? (Vink: Opstil en ligning, hvor den ukendte pris indgår på både højre- og venstresiden.) I en standardbinomialmodel med meget små tidsskridt, **hvad** er 'pengene tilbage'-rettigheden så værd?

Spg. 1d
Kommenter følgende udsagn:

> Da optioner har *limited downside* [dvs. der er græser for, hvor meget man kan tabe], så er deres værdi voksende som funktion af volatiliteten.

Opgave 2

For kursen på en aktie betragtes en en-periodemodel med fem tilstande, der alle er lige sandsynlige. Aktiekursen på tid 0 er 100 og på tid 1 kan aktiekursen antage værdierne 150, 130, 110, 90 og 70. Derudover findes et risikofrit aktiv med en rente på 5% (0,05).

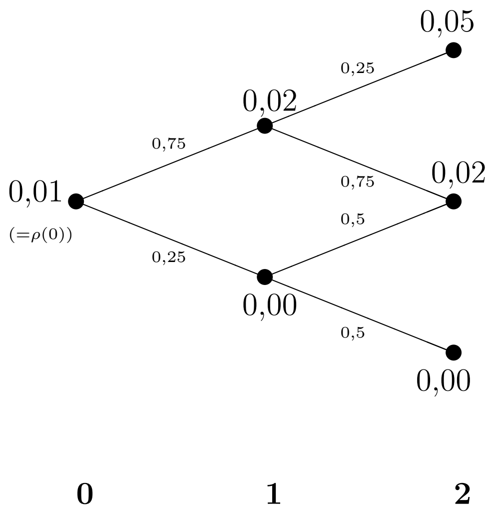
Spg. 2a
Hvad er aktiens forventede afkastrate?

Spg. 2b
Betragt en call-option (på aktien) med strike-kurs 110 (og udløb på tidspunkt 1). **Bestem** det arbitragefrie øvre grænse for tid-0-call-optionsprisen.

Spg. 2c
Bestem den arbitragefri nedre grænse for tid-0-call-optionsprisen for call-optionen fra spg. 2b. **Argumenter for** at hvis call-optionen handles til præcis denne pris, så er der arbitrage i modellen. (Bemærkning: Dette viser, at med mindre det degenererer til et enkelt punkt, så skal prisintervallet i noten "Arbitrage-free Prices and Linear Programming"retteligt være åbent i begge ender.)

Opgave 3

Betragt nedenstående model for mulige udviklinger i den korte rente (ρ); den indeholder som sædvanlig tidspunkter, niveauer og (betingede) sandsynligheder. Sandsynlighederne antages at være risiko-neutrale, altså at afspejle et martingalmål (Q).



Spg. 3a

Vis at nulkuponobligationspriserne (naturligt ordnet) på tid 0 er givet ved $(0,99010; 0,97554; 0,95374)$ og **angiv** nulkuponrenterne på tid 0.

Spg. 3b

Angiv betalingsrækken for en 3-årig annuitetsobligation med initial hovedstol på 100 og kuponrente 0,015 (1,5%). **Hvad** er obligationens tid 0-kurs?

Spg. 3c

Beregn tid 0-kursen på den konverterbare variant af annuiteten fra spg. 3b. (Ved *konverterbar* forstås, at låntager nårsomhelst han ønsker det, kan slippe ud af sine fremtidige forpligtelser ved at betale den resterende hovedstol; han kan indfri sit lån førtidigt; han har en amerikansk option.)

Opgave 4

Lad $\{X_i\}_{i=1,2,3,\ldots}$ være en (uendelig) følge af uafhængige og identisk fordelte stokastiske variable, hvor hvert X_i antager værdierne $\pm \ln 2$ (med ln menes den naturlige logaritme) hver med sandsynlighed $\frac{1}{2}$. Definer $M(0) = 1$ og

$$M(t) = \prod_{i=1}^{t} e^{X_i + c} \text{ for } t \geq 1,$$

hvor c er en konstant. (Med notationen $\prod$ menes 'produkt', fx $M(2) = e^{X_1+c}e^{X_2+c}$.)

Spg. 4a

Bestem c således at

$$\mathrm{E}_t(M(t+1)) = M(t) \text{ for alle } t \geq 0,$$

hvor betingningen er mht. X'ernes naturlige filtrering. (Hvis ikke det var fordi, vi kun har defineret martingalitet for endelige følger, så ville vi sige, at M herved blev en martingal.)

Spg. 4b

Argumenter for (ved at se på $\ln M$ og bruge regneregler for logaritmer) at med det fundne martingal-c ovenfor, da vil $M(t) \overset{t\to\infty}{\to} 0$ (*næsten sikkert* for at være sandsynlighedsteoretisk præcis). (Til dette kan/skal *store tals lov* benyttes. Den siger, at hvis $Y_1, Y_2, \ldots$ er uafhængige og identisk fordelte stokastiske variable med fælles middelværdi μ, så vil $\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} Y_i \overset{t\to\infty}{\to} \mu$ næsten sikkert.)