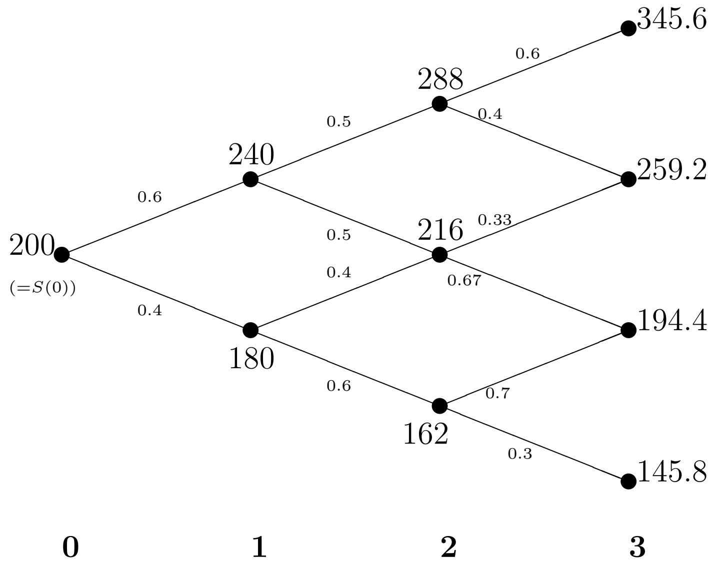
FINANSIERING 1

3 timers skriftlig eksamen, onsdag 15/8 2007. Alle sædvanlige hjælpemidler (inkl. blyant) tilladt. Sættet er på 3 sider og indeholder 7 nummererede delspørgsmål, der indgår med lige vægt i bedømmelsen.

Opgave 1: Binomialmodeller og barriere-optioner

Betragt en tre-periode-model for kursen, S, på en aktie, der i det betragtede tidsrum ikke udbetaler dividende. Den mulige udvikling er fastlagt ved nedenstående gitter med **tidspunkter**, aktiekurser og sandsynligheder. Desuden findes der et risikofrit aktiv (bankbogen) med en rente (r) på 5% per periode.



Spg. 1a

Beregn den arbitragefri tid-0-pris på en call-option med udløbstidspunkt (T) 3 og strikekurs (K) 190.

Call-optionen kan replikeres med en (dynamisk justeret) portefølje indeholdende aktie og bankbog. **Angiv** denne replikerende porteføljes sammensætning på tid 0.

Spg. 1b

En såkaldt down-and-out call-option er en kontrakt, der på et fastlagt udløbstidspunkt

T har samme pay-off som en almindelig call-option med strike K, *hvis* aktiekursen har holdt sig over barriereniveauet B i hele optionens levetid, *ellers* er payoff 0. Eller mere kompakt: Payoff $\pi^{doc}(T)$ er givet ved

$$\pi^{doc}(T) = (S(T) - K)^{+}\mathbf{1}_{\min\{S(u)|0 \leq u \leq T\} > B},$$

idet $\mathbf{1}$ betegner indikatorfunktionen.
Beregn tid-0-prisen på en down-and-out call-option med $T = 3$, $K = 190$ og $B = 165$. Vink: Tegn et træ.

Spg. 1c

Betragt en stokastisk proces fastlagt ved:

- For tid T: $\pi_1(T) = (S(T) - K)^{+}\mathbf{1}_{S(T)>B}$
- For tid $t < T$: $\pi_1(t) = \mathbf{1}_{S(t)>B}\mathbf{E}_t^Q(\pi_1(t+1)/(1+r))$

Hold fast i $T = 3$, $K = 190$ og $B = 165$. **Angiv** π_1's værdier på de forskellige knuder i gitteret.
Agumenter for at det ikke er nogen tilfældighed at $\pi_1(0) = \pi^{doc}(0)$.
Forklar hvorfor dette (sammenlignet med træet fra spg. 1b) er en effektiv måde at beregne prisen på down-and-out call-optionen.

Opgave 2: Call-optioner og CAPM

Betragt en-periode modellen for optionsprisfastsættelse gennemgået i kap. 4 i `Noterne`. Med notationen anvendt der (og en implicit antaglelse om at $C_0 > 0$), definerer vi

$$\begin{aligned} \mu_S &= \frac{puS + (1-p)dS}{S} \quad \text{og} \\ \mu_C &= \frac{pC_u + (1-p)C_d}{C_0}, \end{aligned}$$

dvs. $\mu_S - R$ og $\mu_C - R$ er de forventede merafkastrater på henholdsvis aktien og call-optionen.

Spg. 2a

Vis at

$$\mu_C - R = \frac{S}{C_0}a(\mu_S - R),$$

hvor (som i `Noterne`) $a = (C_u - C_d)/((u-d)S)$.
Vink: Vis først at

$$\begin{aligned} auS - C_u &= (aS - C_0)R, \\ adS - C_d &= (aS - C_0)R, \end{aligned}$$

og gang så med p og $1-p$ læg sammen.

Spg. 2b
Antag at aktiens forventede merafkastrate er fastlagt ved en CAPM-relation

$$\mu_S - R = \beta_{S,M}(\mu_M - R),$$

hvor M refererer til en ikke nærmere specificeret markedsportefølje.
Hvordan ser CAPM-relationen for call-optionen ud; **hvad** er dens β?
Hvordan ligger de to β'er (altså aktiens og call-optionens) i forhold til hinanden?
Vink: Da $C_0 = aS + b$, så kan størrelsesforholdet aS/C_0 kan vurderes ud fra fortegnet på $b = (uC_d - dC_u)/((u-d)R)$.

Opgave 3: Call-optioner og konveksitet

I denne opgave betragtes call-optioner på en aktie uden dividende. Disse call-optioner er identiske pånær deres strikekurs; $C(K)$ betegner prisen for en strike-K call-option.

Spg. 3a
Vis følgende relationer:

i) Hvis $K_2 > K_1$, så er $C(K_1) \geq C(K_2)$.

ii) Hvis $K_2 > K_1$ og renten er positiv, så er $K_2 - K_1 \geq C(K_1) - C(K_2)$.

Vink: Til ulighederne ovenfor knytter sig på naturlig vis payoff-funktionerne $f_i(x) = (x-K_1)^+ - (x-K_2)^+$ og $f_{ii}(x) = K_2 - K_1 - (x-K_1)^+ + (x-K_2)^+$. Vis (fx med omhyggelige tegninger) at begge er positive, og brug at arbitragefri priser er (Q-)forventede diskonterede værdier.

Spg. 3b
Vis at call-priser er konvekse i strike, dvs. at for $K_3 > K_2 > K_1$ gælder

$$C(K_2) \leq \frac{K_3 - K_2}{K_3 - K_1} C(K_1) + \frac{K_2 - K_1}{K_3 - K_1} C(K_3).$$

Vink: Tegn igen den payoff-funktion, der naturligt defineres af uligheden ovenfor.