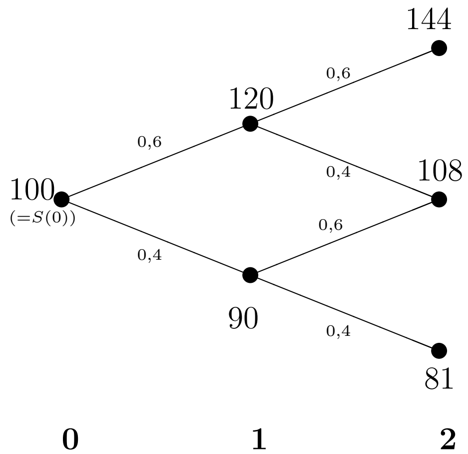
Matematisk Finansiering 1

4 timers skriftlig eksamen onsdag 17/12 2014. Sættet er på 4 sider (ekskl. forside) og indeholder 4 opgaver og ialt 13 nummererede delspørgsmål, der (vejledende, ikke bindende) indgår med lige vægt i bedømmelsen. Opgaverne kan løses uafhængigt af hinanden. Beregningsmæssige resultater ønskes fuldt dokumenteret i besvarelsen. Det skal således klart fremgå, hvilke formler, der bruges, og hvorfor de bruges.

Opgave 1

Betragt en 2-periode-model for kursen på en (dividende-fri) aktie, S. Den mulige udvikling er fastlagt ved nedenstående gitter med tidspunkter (som vi tænker på som år), aktiekurser og (betingede) sandsynligheder svarende til målet P. Renten konstant, 0,05 (5%) per år.



Spg. 1a
Bestem for alle relevante knuder den P-forventede merafkastrate på aktien ift. bankbogen.

Spg. 1b
Vis at modellen er arbitragefri og komplet.

Betragt en såkaldt asiatisk option. Det er en kontrakt, der på tid 2 betaler

$$\left(\frac{1}{3}\sum_{t=0}^{2} S(t) - 95\right)^{+}.$$

Spg. 1c
Beregn den arbitragefri tid 0-pris på den asiatiske option.

Spg. 1d
Hvordan kan den asiatiske option replikeres?

Opgave 2

I denne opgave betragtes en 1-periode-model for priserne for to (dividende-frie) aktier. De har begge tid 0-pris 100, og deres tid 1-priser (abstrakt refereret til som $S_1(1)$ og $S_2(1)$) er givet ved nedenstående matrix, hvor (som sædvanlig) rækker svarer til aktier og søjler til tilstande:

$$D = \begin{pmatrix} 140 & 120 & 100 & 90 & 80 \\ 120 & 90 & 140 & 90 & 90 \end{pmatrix}$$

Alle tilstande er lige (P-)sandsynlige og i modellen findes yderligere et risikofrit aktiv med en afkastrate på 0,01 (1%).

Spg. 2a
Beregn korrelationen (under P) mellem de to aktiers afkastrater.

Spg. 2b
Vis at modellen er arbitragefri, men ikke komplet.

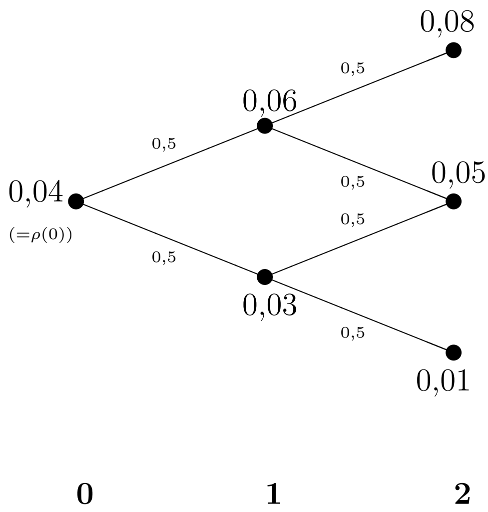
Nu betragtes en såkaldt Margrabe-option. Dette er et aktiv, der på tid 1 betaler

$$(S_1(1) - S_2(1))^+ .$$

Spg. 2c
Angiv intervallet af arbitragefrie tid 0-priser for Margrabe-optionen.

Opgave 3

Betragt nedenstående model for mulige udviklinger i den korte rente (ρ); den indeholder som sædvanlig tidspunkter, niveauer og (betingede) sandsynligheder. Sandsynlighederne antages at være risiko-neutrale, altså at afspejle et martingalmål (Q).



Spg. 3a

Vis at nulkuponobligationspriserne (naturligt ordnet) på tid 0 er givet ved $(0,96154; 0,92032; 0,87930)$ og **angiv** nulkuponrenterne på tid 0.

Spg. 3b

Angiv betalingsrækken for en 3-årig annuitetsobligation med initial hovedstol på 100 og kuponrente 0,04 (4%). **Hvad** er dens tid 0-kurs? (Der mindes om annuitetsformlen, $y = Hc/(1-(1+c)^{-\tau})$, der knytter ydelse y, initial hovedstol H, kuponrente c og løbetid τ sammen.)

Spg. 3c

Beregn tid 0-kursen på den konverterbare variant af annuiteten fra spg. 3b. (Ved *konverterbar* forstås, at låntager nårsomhelst han ønsker det, kan slippe ud af sine fremtidige forpligtelser ved at betale den resterende hovedstol; han kan indfri sit lån førtidigt; han har en amerikansk option.)

Spg. 3d

Betragt futures- og forwardkontrakter med udløb på tid 2 og med den inkonverterbare annuitet fra spg. 3b som underliggende. **Beregn** futures- og forwardpriserne for tid 0. **Kommenter** forskelle og ligheder.

Opgave 4

De to delspørgsmål i denne opgave er uafhængige.

Spg. 4a

Lad $X_0, X_1, \ldots, X_T$ være uafhængige, identisk fordelte stokastiske variable med middelværdi μ og varians $\sigma^2 > 0$. Sæt $Y_0 = 0$, lad a være en konstant, sæt $Y_t = X_{t-1}(X_t - a)$ for $t = 1, \ldots, T$ og $M(t) = \sum_{j=0}^{t} Y_j$ for $t = 0, \ldots, T$.
Kan du vælge a, så M er en martingal (mht. X'ernes naturlige filtrering)?
Ændrer dit svar sig, hvis Y'erne istedet var defineret ved $Y_t = X_{t-1}X_t - a$?

Spg. 4b

Kommenter følgende tre udsagn; specielt: Er de sande, falske eller "ikke til at afgøre på det foreliggende grundlag"?

- *En invers rentestruktur implicerer arbitragemuligheder.*
- *Negative nulkuponrenter implicerer arbitragemuligheder.*
- *Det er umuligt at lave arbitrage i et inkomplet marked.*