FINANSIERING 1

3 timers skriftlig eksamen, fredag 26/8 2022. Alle sædvanlige hjælpemidler (inkl. blyant) tilladt. Sættet er på 3 sider og indeholder 10 nummererede delspørgsmål, der indgår med lige vægt i bedømmelsen. Der anvendes , (komma) til at angive decimalpunkter. (Og om nødvendigt semikolon-separation i vektorer for at undgå forvirring.)

Opgave 1

I denne opgave betragtes en 2-periode-model (med tidsskridt af længde 1) for kursen $(S(t))$ på en aktie, der er givet ved dette gitter:

		131,24
	118,00	102,40
100,00	80,00	56,00
0	1	2

Renten pr. periode i modellen er $r = -0,01$ (dvs. -1%).

Spg. 1a
Vis at modellen er arbitragefri og komplet.

Spg. 1b
Betragt en europæisk udløb 2-put-option på aktien med strikekurs 100. **Hvad** er den arbitragefrie tid 0-pris på denne put-option? **Beregn** den replikerende (aktie, bankbog)-portefølje for put-optionen.

Spg. 1c
Beregn prisen på den amerikanske version af put-optionen fra spg. 1b. **Forklar** hvorfor den er den samme som den europæiske put-optionspris.

Spg. 1d
Betragt europæiske udløb 2-put-optioner på aktien med strikekurser hhv. 110 og 90. **Hvad** er de arbitragefrie tid 0-priser på de to put-optioner? Gennemsnittet af de to put-optionspriser er større end put-optionsprisen fra spg. 1b. **Forklar** hvorfor.

Spg. 1e
Ved *standardbinomialmodellen* (med tidsskridt af længde 1 og givet $S(0)$ og r) forstås (i denne opgave) en model, hvor $S_{t+1} = S_t \exp(\pm\sigma)$, hvor σ kaldes for modellens volatilitetsparameter. For en givet observeret europæisk put-optionspris definerer vi optionens *implicitte volatilitet* som den værdi af σ, der gør, at prisen i standardbinomialmodellen er lig med den observerede optionspris. (Konceptuelt præcis som for Black-Scholes-modellen.)

Beregn den implicitte volatilitet for put-optionen fra spg. 1b. **Forklar** hvorfor denne er forskellige fra de implicitte volatiliteter for put-optionerne fra spg. 1d.

Opgave 2

Betragt en porteføljevalgsmodel med tre usikre aktiver (*aktier*, numereret 1, 2 og 3), hvis afkastrater har forventede værdier (μ) og kovarianser ($\mathbf{\Sigma}$) givet ved:

$$\mu = \begin{bmatrix} 0,04 \\ 0,05 \\ 0,08 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 0,0100 & 0,0030 & 0,0200 \\ 0,0030 & 0,0225 & 0,0060 \\ 0,0200 & 0,0060 & 0,1600 \end{bmatrix}.$$

Modellen antages i første omgang ikke at indeholde et risikofrit aktiv.

Det kan frit benyttes at

$$\mathbf{A} = [\mu\ \mathbf{1}]^\top \mathbf{\Sigma}^{-1} [\mu\ \mathbf{1}] = \begin{bmatrix} 0,2269 & 5,2315 \\ 5,2315 & 131,0185 \end{bmatrix}$$

og

$$\Sigma^{-1}[\mu\ \mathbf{1}]A^{-1} = \begin{bmatrix} -44,426 & 2,590 \\ 25,902 & -0,787 \\ 18,525 & -0,803 \end{bmatrix}.$$

<u>Spg. 2a</u>
Betragt porteføljen givet ved $x_{1/3} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})^\top$. **Beregn** $x_{1/3}$-porteføljens afkastrates middelværdi ($\mu_{1/3}$), afkastratens spredning ($\sigma_{1/3}$), samt afkastratens korrelation med aktie 2's afkastrate.

<u>Spg. 2b</u>
Betragt følgende optimeringsproblem:

$$\max_{x \in \mathbb{R}^3} x^\top \mu \text{ under bibetingelserne } x^\top \mathbf{1} = 1 \text{ og } x^\top \Sigma x \le \sigma^2_{1/3}.$$

Forklar den finansielle fortolkning af optimeringsproblemet.
Verificer at den optimale værdi af kriteriefuntionen i optimeringsproblemet er 0,05898. **Hvilken** x-vektor svarer dette til?

<u>Spg. 2c</u>
Modellen udvides nu med et riskofrit aktiv med en rente på $r_0 = 0,02$ (dvs. 2%).
Angiv tangentporteføljen.
Antag at tangentporteføljen ar markedsporteføljen. **Verificer** at CAPM-ligningen holder for $x_{1/3}$-porteføljen.

Opgave 3

Betragt et marked, hvor de kontinuert tilskrevne nulkuponrenter $y(0;\tau)$ på tid 0 (dvs. funktionen $\tau \mapsto -\frac{\ln P(0,\tau)}{\tau}$, hvor $P(s,t)$ er tid s-prisen på en udløb t-nulkuponobligation) er af den såkaldte Nelson-Siegel form

$$y(0;\tau) = a_0 + (a_1 + a_2)\frac{1 - e^{-\tau/a_3}}{\tau/a_3} - a_2 e^{-\tau/a_3},$$

hvor vi antager at $(a_0; a_1; a_2; a_3) = (0,04; -0.01; 0,12; 4)$ og løbetid τ måles i år.

Spg. 3a

Verificer at $\sum_{j=1}^{10} P(0,i) = 7,0196$. (Den størrelse kaldes en annuitetsfaktor eller *the present value of a basis point.*)

Skitser nulkupon- og forward-rentekurver for helårlige løbetider rmellem 1 og 10 år. **For hvilken** løbetid er forwardrenten maksimal?

Spg. 3b

Betragt nu en 10-årig annuitetsobligation med kuponrente på 6%.

Hvad er obligationens effektive rente?

Hvad er obligationens Macauley-varighed?

Hvad er obli gationens Fisher/Weil-varighed? **Hvorfor** er denne ikke helt den samme som Macauley-varigheden?

Hvad er den effektive rente på en 10-årig annuitetsobligation med kuponrente på 7%? **Forklar** hvorfor dette tal er det samme som for 6%-annuiteten.