NATURVIDENSKABELIG KANDIDATEKSAMEN
VED KØBENHAVNS UNIVERSITET

INVESTERINGS- OG FINANSIERINGSTEORI

4 timers skriftlig eksamen, mandag 1/6 2004.

Opgave 1

Spg. 1.a [10]
Modellen er arbitragefri, hvis der findes et ækvivalent martingalmål Q,

$$S(t) = \frac{1}{R}\mathbf{E}_t^Q(S(t+1)) \text{ for alle } t \text{ og } \omega,$$

hvor her $R = 1$, de renten er 0. Vi ved at "det er nok at tjekke alle delmodeller", og (eller: fordi) vi kan udtrykke Q vha. betingede (eller: lokale) martingal(spring)sandsynligheder, q_i. Martingalsandsynligheder i alle delmodeller med andre ord.
Det er her tydeligt, at $q_i = 1/2$ fastlægger et martingalmål. Og det er ligeså tydeligt det eneste, så modellen er også komplet.
(Hvis man bruger "$q = (R-d)/(u-d)$"-formlen giver det naturligvis samme resultat, men man skal huske at gøre opmærksom på, at alle delmodellerne *ikke* er af samme form; u'erne og d'erne er forskellige. Men q'erne er alligevel ens og 1/2. Mere ond er opgavestilleren trods alt ikke.)

Spg. 1.b [10]
Den arbitragefri prisproces for call-optionen er bestemt ved $\text{Call}(t; T, K) = R^{-(T-t)}\mathbf{E}_t^Q((S(3)-K)^+)$. Den findes/repræsenteres lettest ved at trævle sig baglæns gennem gitteret. Det ser sådan ud:

$$\begin{array}{cccc}
\text{tid } 0 & \text{tid } 1 & \text{tid } 2 & \text{tid } 3 \\
 & & & 30 \\
 & & 20 & \\
 & 12.5 & & 10 \\
7.5 & & 5 & \\
 & 2.5 & & 0 \\
 & & 0 & \\
 & & & 0
\end{array},$$

Replikation med aktie og bankbog er helt standard. Call-optionens pay-off replikeres med en dynamisk strategi, der på tid 0 indeholder $a(0)$ stk. aktier, hvor

$$a(0) = \frac{\Delta\text{Call}}{\Delta S} = \frac{\text{Call}^{op}(1) - \text{Call}^{ned}(1)}{S^{op}(1) - S^{ned}(1)} = \frac{12.5 - 2.5}{110 - 90} = 0.5$$

Den replikerende strategi koster 7.5, så der skal lånes 42.5 i banken (for 0.5 stk. aktier koster 50). Ved (på tilsvarende og selvfinansierende vis) at justere porteføljen rammes call-optionens pay-off.

Spg. 1.c [10]
Den sammensatte option prises let når vi har call'en prisproces. Vi trævler baglæns fra tid 2:

$$\begin{array}{ccc} \text{tid } 0 & \text{tid } 1 & \text{tid } 2 \\ & & 18 \\ & 10.5 & \\ 6 & & 3 \\ & 1.5 & \\ & & 0 \end{array},$$

så tid-0-prisen er 6.
For at igangsætte replikation med call og aktie, skal man på tid-0 købe a stk. call og b stk. aktier på sådan vis at replikationsligningerne er opfyldt:

$$\begin{aligned} a \times 12.5 + b \times 110 &= 10.5 \\ a \times 2.5 + b \times 90 &= 1.5 \end{aligned}$$

Disse ligninger løses: $(a, b) = (0.91764, -0.088235)$. (Og nej, $a \neq (\text{Compound}^u - \text{Compound}^d)/(\text{Call}^u - \text{Call}^d)$; man får ikke den sædvanlige Δ-løsning, da det andet hedgeaktivs pris også er tilstandsafhængig.)
"Pengene passer" naturligvis, denne portefølje koster 6 = den sammensatte options pris. Man kan også bemæke at beholdningen af den underliggende call er tæt på 1, og aktie beholdningen tæt på 0. Så den almindelige calloption er et i en eller anden forstand naturligt hedgeinstrument for den sammensatte option.

Opgave 2

Spg. 2.a [10]
Man bruger formlen

$$P(t, T_i) = \frac{1}{1 + \rho(t)} \mathbf{E}^Q(P(t+1, T_i))$$

til at trævle sig baglæns som i Eksempel 10 i kap. 8 i noterne. Talmæssigt ser det sådan ud:

$$
\begin{array}{cccc}
 & & & \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \\
 & & \begin{pmatrix} 1 \\ 0.93896 \end{pmatrix} & \\
 & \begin{pmatrix} 1 \\ 0.943396 \\ 0.892145 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 \\ 0.952381 \\ 0.907112 \\ 0.864063 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 \\ 0.952381 \end{pmatrix} & \\
 & \begin{pmatrix} 1 \\ 0.961539 \\ 0.922387 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \\
 & & \begin{pmatrix} 1 \\ 0.9661836 \end{pmatrix} & \\
 & & & \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}
\end{array}
,
$$

så søjlen længst til venstre angiver nulkuponobligationspriserne tid 0.

Spg. 2.b [10]
Notation: H_t er den på tid-t resterende hovedstol (evt. benævnt restgælden), y_t er tid-t ydelsen, i_t rentebetalingen og δ_t afdraget. Disse størrelser er forbundet via ligningerne:

$$
\begin{aligned}
i_t &= c \times H_{t-1} \text{ hvor } c \text{ er kuponrenten} \\
\delta_t &= H_{t-1} - H_t \\
y_t &= i_t + \delta_t
\end{aligned}
$$

En annuitet er karakteriseret ved at have samme ydelse i alle perioder, samt ved randbetingelsen $H_T = 0$, hvor T er lånets sidste betalingsdag. Og det passer altsammen nydeligt i den angivne tabel. Tid-0-kursen på annuiteten er

$$36.72 \times \sum_{i=1}^{3} P(0,i) = 100.01$$

(Den er ikke eksakt lig med 100, men om man kan se det på tallet afhænger af hvor heftigt man afrunder.)

Spg. 2.c [10]
Vinket skrevet ud i symboler bliver til

$$V(t) = \frac{1}{1+\rho_t} \mathbf{E}_t^Q \left(V(t+1) + (H_t - H_{t+1}) + \rho_t H_t \right)$$

Det er klart at $V(T) = 0 = H_T$, da der der jo ikke flere betalinger tilbage. (Induktions)antages $V(t+1) = H_{t+1}$ fås

$$V(t) = \frac{1}{1+\rho_t}\mathbf{E}_t^Q(H_{t+1} + (H_t - H_{t+1}) + \rho_t H_t) = \frac{1}{1+\rho_t}\mathbf{E}_t^Q((1+\rho_t)H_t) = H_t.$$

Når man tænker lidt over det, så det ikke underligt at variablet forrentede lån har "kurs = par". Det svarer jo til at man igen og igen låner beløb kortfristet til markedsrenten og så hele tiden (udover ens afdrag) afregner de påløbne renter. Eller sagt anderledes: Hvis betalingen på lånet er høj, så bli'r den også diskonteret hårdt. Og vice versa. I noterne vises resultatet for stående lån, men det gælder altså generelt.

Spg. 2.d [10]
Betalingerne for lånet med loft

$$\begin{array}{cccc}
\text{tid 0} & \text{tid 1} & \text{tid 2} & \\
 & & 105 & \\
 & 5 & & \\
 & & 105 & \\
 & & & . \\
 & & 104 & \\
 & 5 & & \\
 & & 104 &
\end{array}$$

Ved igen at bruge martingalprisningsreglen: Pris idag = Q-forventet diskonteret værdi af pris imorgen + dividender imorgen kan vi regne lånets intiale pris ud:

$$\begin{array}{cccc}
\text{tid 0} & \text{tid 1} & \text{tid 2} & \\
 & & (0,105) & \\
 & (\frac{105}{1.06}, 5) & & \\
 & & (0,105) & \\
\left(\underbrace{\frac{1}{1.05}\left(\frac{1}{2}\times(\frac{105}{1.06}+5)+\frac{1}{2}\times(\frac{104}{1.04}+5)\right)}_{=99.5508}, 0\right) & & & . \\
 & & (0,104) & \\
 & (\frac{104}{1.04}, 5) & & \\
 & & (0,104) &
\end{array}$$

På hver knude angives en vektor hvis 1. koordinat er vædien af fremtidige betalinger (en diskontetet forventning), og hvis 2. koordinat er knudens dividende-betaling.
Som en ganske rigtigt bemærker, så er dette en "legetøjsudgave" af Totalkredits såkaldte BoligX-lån.

Opgave 3

Spg. 3.a [10]
Vi sætter

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

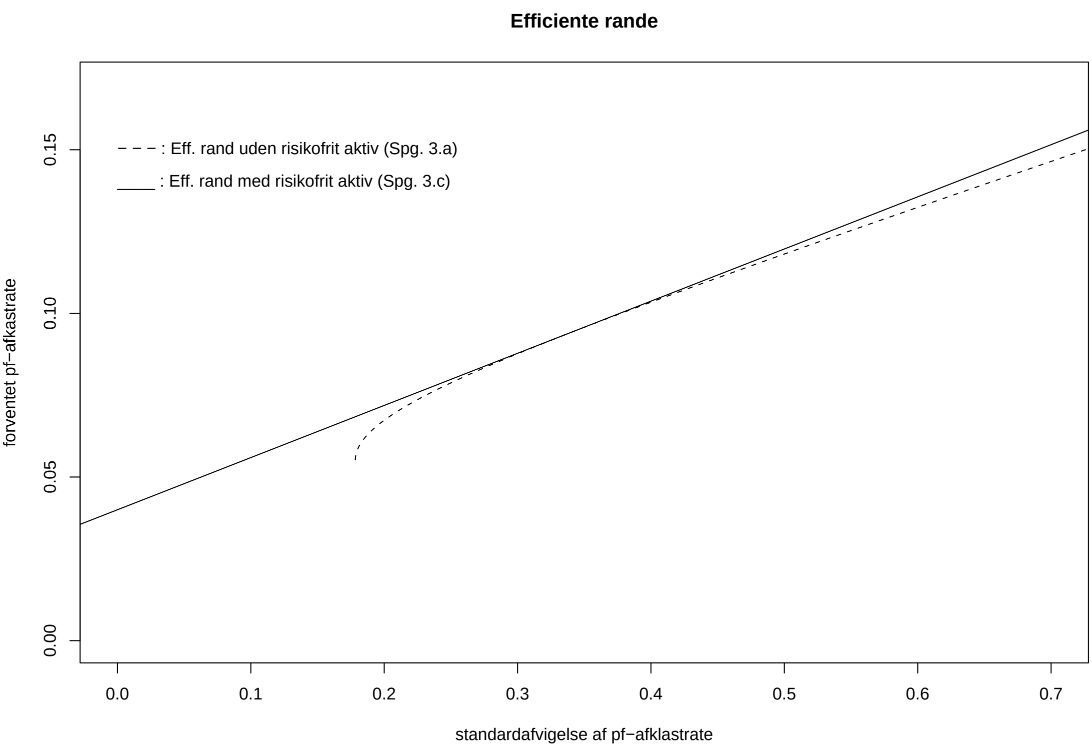
Den kritiske rand er bestemt ved

$$\sigma_P^2 = \begin{pmatrix} r_P \\ 1 \end{pmatrix}^\top \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} r_P \\ 1 \end{pmatrix} \frac{a - 2br_P + cr_P^2}{ac - b^2} = 0.1990 - 6.0637 \times r_P + 54.98 \times r_P^2$$

og porteføljevægtene er givet ved

$$x_P = \mathbf{\Sigma}^{-1}[\mu\ \mathbf{1}]\mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} r_P \\ 1 \end{pmatrix}$$

Den globale minimum-varians portefølje har en forventet afkastrate på $b/c = 0.05514$ og en varians på $1/c = 0.031811$, og således en standardafvigelse på $\sqrt{0.031811} = 0.1784$.
De efficiente porteføljer er de minimum-varians porteføljer, hvis forventede afkastrate ligger over afkastraten på den globale minimum-varians portefølje.
I figuren kan man se den efficiente rand tegnet i (standardafvigelse, forventet afkast)-rummet (hvor der er en hyperbel).



Spg. 3.b [5]

Forventet afkastrate og standardafvigelse (når vi omdefinerer x_G til en søjlevektor, hvis vi er meget pedantiske) er $\mu_G = \mu^\top x_G = 0.06$ og $\sigma_G = \sqrt{x_G^\top \Sigma x_G} = 0.1936$. Den efficiente portefølje med forventet afkastrate 0.06 har en standardafvigelse på 0.1820. Så nej, x_G er ikke efficient.

Spg. 3.c [5]

Tangentporteføljen er den minimum-varians portefølje (efter inklusion at det risikofrie aktiv), der har fuld investering i usikre aktiver ($\mathbf{1}^\top x_{TG} = 1$).
Grafisk kan den findes ved at man betragter den "gamle" kritiske rand i (σ, μ)-rummet. Man finder nu den rette linie, der går igennem punktet $(0, r_0)$ og som tangerer den kritiske rand. Tangentpunktet svarer til tangentporteføjen.
Figuren illustrerer. Den efficiente rand med risikofrit aktiv (også kaldet "capital market line") er en ret linie i (σ, μ)-rummet (men ikke i (σ^2, μ)-rummet).
Når man skal sandsynliggøre at den forventede afkastrate på tangentporteføljen er 0.0933 så er en præcis tegning er rimelig måde.
Hvis man kan huske noterens formel $\mu_{TG} = r_0 + (\mu - r_0)^\top \Sigma^{-1}(\mu - r_0)/\mathbf{1}^\top \Sigma^{-1}(\mu - r_0)$ er der point for det (og fuldt, hvis man regner tallet ud!)
En lettere måde er at bruge tangent-karaterisationen og vise at hældningen på tangenten for den efficiente rand i pkt. Det er mest praktisk at arbejde i (r_P, σ_P)-rummet, hvor udsagnet bliver at

$$\frac{d}{dr_P}\sqrt{\frac{2 - 2br_P + cr_P^2}{ac - b^2}} = \frac{\sqrt{\frac{2-2br_P+cr_P^2}{ac-b^2}}}{r_P - r_0} \text{ når } r_P = 0.0933.$$

Venstresiden udregnes til

$$\frac{r_P - b}{\sqrt{2 - 2br_P + cr_P^2}\sqrt{ac - b^2}},$$

hvorefter rigtighed ses ved indsættelse.
En elegant måde at vise det på er at huske at tangentporteføljen er den med maksimal Sharpe-ratio. For de gl. efficiente pf ser Sharperatioen sådan ud:

$$SR = \frac{r_P - r_0}{\sqrt{(a - 2br_p + cr_P^2)/(ac - b^2)}} = \sqrt{ac - b^2}\frac{r_P - r_0}{\sqrt{a - 2br_P + cr_P^2}}$$

så

$$\frac{dSR}{dr_P} = (...)(a - 2br_P + cr_P^2 - (r_P - r_0)(cr_P - b))$$

Indsættes $r_P = 0.0933$ se man man at førsteordensbetingelsen er opfyldt, $dSR/dr_P = 0$. (Man bør egl. argumentere for at det så er det globale maksimum, man har fundet, men ...)

En helt femte måde, der dukkede op, da jeg rettede besvarelser: Find den påståede tangentporteføljes afkastrates varians og kovarians med alle enkeltaktivene(s afkastrater). Sæt ind og se at CAPM-ligningen holder.

<u>Spg. 3.d</u> [10]
(Det turde være åbenlyst, at man skal begrunde sit svar.)
Første udsagn er sandt: Enhver konveks kombination af efficiente porteføljer er efficient. Det står som Proposition 30 i noterne. Det er "2-fondsseparationspropositionen", så hvis man skriver det ord, så er der point for at være "in the right ballpark", også selvom svaret "Ja, på grund af 2-fondseparation." er ikke helt fyldestgørende. 2-fondseparation siger, at ved at danne affine kombinationer af to forskellige(men iøvrigt arbitrære) minimumvariansporteføljer, kan man generere enhver minimumvariansportefølje.
"Semantics aside" så er udsagnet nemt at vise fra ligningen, der karakteriserer de optimale porteføljevægte. Det klarer også det lille problem, at Proposition 30 strengt taget kun siger noget om 2 aktiver. Hvis $y = \sum \alpha_i x_i$, hvor x_i er en efficient portefølje med forventet afkastrate r_i, så er

$$y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{\Sigma}^{-1}[\mu\ \mathbf{1}]\mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} r_i \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{\Sigma}^{-1}[\mu\ \mathbf{1}]\mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} r_\alpha \\ 1 \end{pmatrix},$$

idet vi bruger at $\sum \alpha_i = 1$, og sætter $r_\alpha = \sum \alpha_i r_i$. Det viser, at y er en minimumvariansportefølje. Da x_i'erne er efficiente er $r_i \geq r_{gmv}$, og så $\sum \alpha_i r_i \geq \sum \alpha_i r_{gmv} = r_{gmv}$, da α_i'erne er positive og har sum 1. Porteføljen y er derfor efficient.
Udregningen ovenfor og Proposition 30 har ikke noget risikofrit aktiv. Men det er faktisk endnu nemmere at se, at en konveks kombination af to porteføljer på CML igen ligger på CML.
Andet udsagn er falsk: Der findes konvekse kombinationer af inefficiente porteføljer, der er efficiente. Selvfølgelig gør der det. Alle porteføljer (specielt de efficiente) laves jo ud fra enkeltaktiverne, der (som regel) er inefficiente. ("Konveksiteten" kunne man evt. bekymre sig om, for hva' nu hvis der slet ikke findes efficiente porteføljer med positive vægte i enkeltaktiverne? Men det gør der. (I en model med n uafhængige aktiver har den globale minumvariansportefølje $1/n$ i hver.) Og iøvrigt ku' man bare omdefinere "enkeltaktiver" via en skalering.)
Men det er rigtigt, at konvekse kombinationer af inefficiente porteføljer *typisk* er inefficiente. Rummet af porteføljer er et $(n-1)$-dimensionalt affint rum, rummet af efficiente porteføljer er en 1-dimensional konveks mængde. (Jeg forstår derfor godt, hvad I mener, når I skriver, at "det er ikke til at afgøre", men logisk set er det forkert, da udsagnet starter *Enhver ....*)