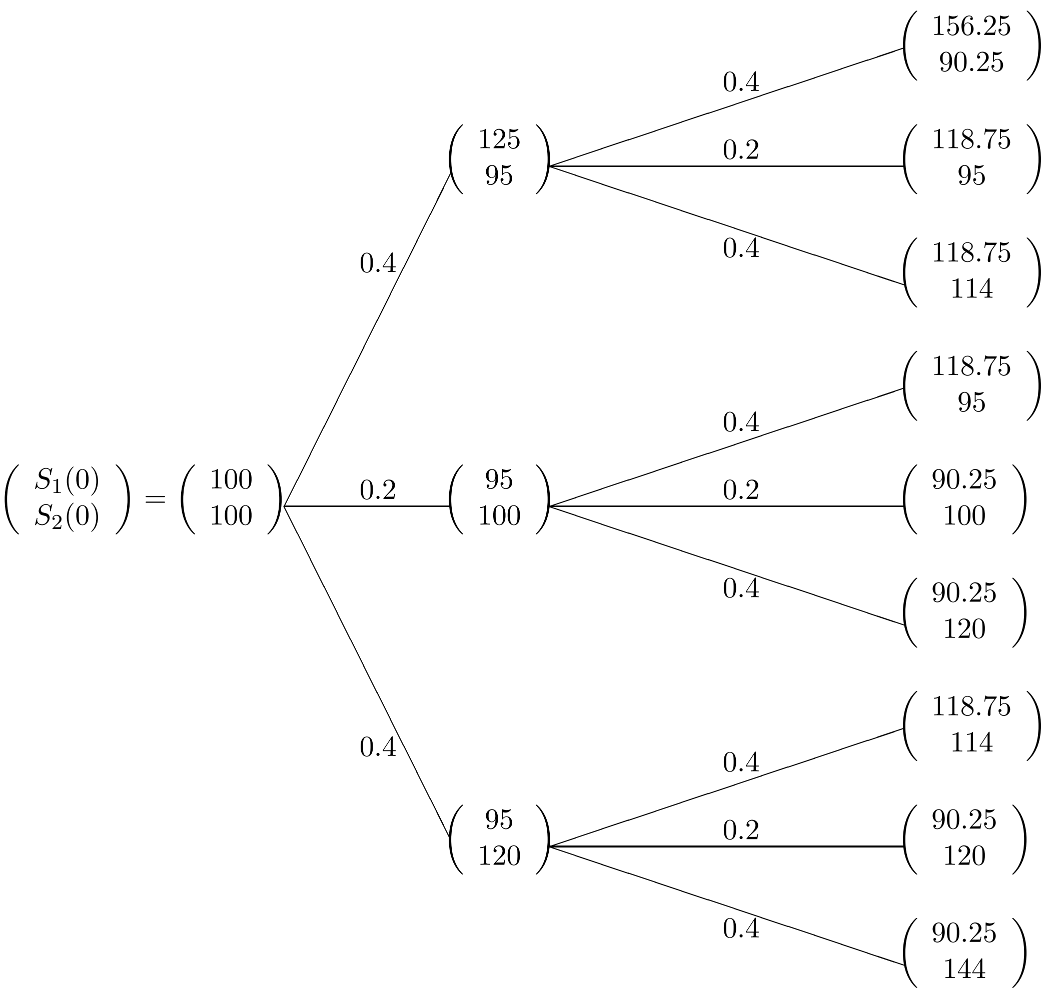
FINANSIERING 1

3 timers skriftlig eksamen, 9-12, onsdag 1/4 2009. Alle sædvanlige hjælpemidler (incl. blyant) tilladt. Sættet er på 4 sider og indeholder 10 nummererede delspørgsmål, der indgår med lige vægt i bedømmelsen.

Opgave 1

Betragt en 2-periode-model for kurserne på to aktier, nummer 1 og 2 eller S_1 og S_2, der i det betragtede tidsrum ikke udbetaler dividende. De mulige udviklinger er fastlagt ved nedenstående træ med aktiekurser og betingede P-sandsynligheder. Desuden findes der et risikofrit aktiv (bankbogen) med en rente på 0.05 (altså 5%) per periode.



Spg. 1a

Vis at vektoren af 1.-periode-aktieafkastrater (under P) har middelværdi

$$\mu = \begin{bmatrix} 0.07 \\ 0.06 \end{bmatrix}$$

og kovariansmatrix

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 0.0216 & -0.0132 \\ -0.0132 & 0.0134 \end{bmatrix}.$$

Spg. 1b

Vis at (2-periode-)modellen er er arbitrage-fri og komplet. Vink: $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Der indføres nu en såkaldt bytte-option. Det en kontrakt, der på tidspunkt 2 giver ret men ikke pligt til at bytte (1 enhed af) aktie 1 for (1 enhed af) aktie 2.

Spg. 1c

Argumenter for, at bytte-optionens værdi på tidspunkt 2, dvs. dens pay-off, er $(S_2(2) - S_1(2))^+$ og bestem dens arbitrage-fri tid-0 pris.

Spg. 1d

Beregn sammensætningen på tidspunkt 0 af den portefølje, eller handelsstrategi, der replikerer bytte-optionen.

Opgave 2

Betragt en porteføljevalgsmodel med 2 usikre aktiver (*aktier*, nummereret 1 og 2), hvis afkastrater har middelværdier (μ) og kovarianser ($\mathbf{\Sigma}$) givet ved:

$$\mu = \begin{bmatrix} 0.07 \\ 0.06 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 0.0216 & -0.0132 \\ -0.0132 & 0.0134 \end{bmatrix}.$$

I modellen er der yderligere et risikofrit aktiv med afkastraten 0.05 (altså 5%).

Spg. 2a

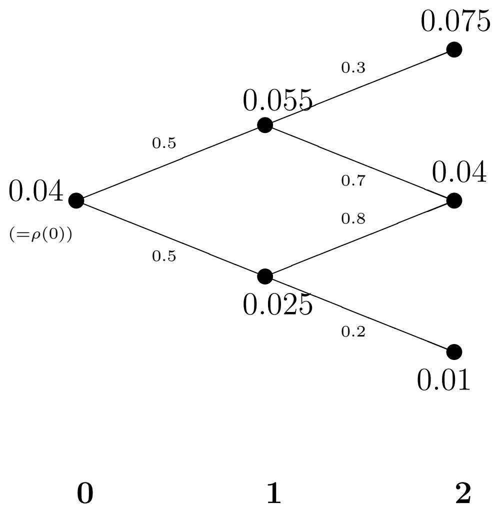
Bestem tangentporteføljens sammensætning og angiv — på den/de måde(r), du finder passende — den efficiente rand, *the capital market line*. Vink: Det kan være nyttigt at vide at $\mathbf{\Sigma}^{-1}(\mu - 0.05 \times \mathbf{1}) = (3.4722, 4.1667)^\top$.

Spg. 2b

Undersøg og kommenter om CAPM-relationen holder for aktie 1 når en portefølje, der har lige vægte i aktie 1, aktie 2 og det risikofrie aktiv (altså $w = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$) bruges som referenceportefølje, eller "kandidat til markedsportefølje" eller kort og godt "på højresiden".

Opgave 3

Betragt nedenstående model for mulige udviklinger i den korte rente ρ; den indeholder som sædvanlig tidspunkter, niveauer og (betingede) sandsynligheder. Sandsynlighederne antages at være risko-neutrale, altså at afspejle et martingalmål Q.



Spg. 3a

Vis at den arbitrage-fri tid-0 pris på en 3-årig annuitetsobligation med kuponrente 0.04 (altså 4%) og initial hovedstol 100 er 99.96.

Spg. 3b

Beregn — med en definition, du finder passende — varigheden på annuitetsobligationen fra spg. 3a.

Spg. 3c

Betragt en forward-(eller termins)kontrakt på annuitetsobligationen fra spg. 3a og 3b. Antag at denne forwardkontrakt udløber på tidspunkt 2. Beregn dens tid-0 forwardpris, altså $F(0,2)$ med `Noternes` notation.

Spg. 3d

Definer processen y ved $y(t) = (\rho(t) - 0.04)^2$. Bestem $E^Q(y(t))$ for $t = 0, 1, 2$, og angiv om y er en Q-martingal.