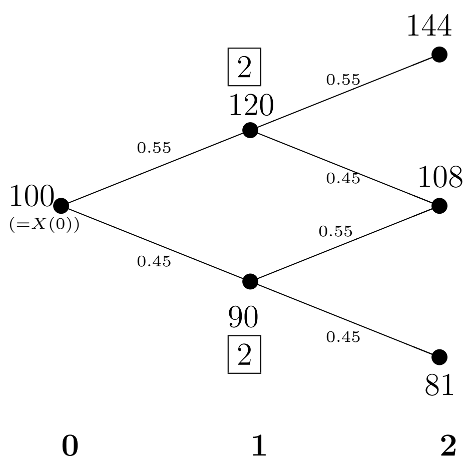
Matematisk Finansiering 1

4 timers skriftlig eksamen tirsdag 10/1 2017. Sættet er på 4 sider (ekskl. forside) og indeholder 3 opgaver og ialt 15 nummererede delspørgsmål, der (vejledende, ikke bindende) indgår med lige vægt i bedømmelsen. Opgaverne (hvori . bruges som decimaltegn) kan løses uafhængigt af hinanden. Beregningsmæssige resultater ønskes fuldt dokumenteret i besvarelsen. Det skal således klart fremgå, hvilke formler, der bruges, og hvorfor de bruges.

Opgave 1

Betragt en 2-periode-model for kursen, X, på en aktie. Den mulige udvikling er fastlagt ved nedenstående gitter med **tidspunkter**, aktiekurser, $\boxed{\text{dividender}}$ og sandsynligheder svarende til målet P. Desuden findes der et risikofrit aktiv (bankbogen) med en konstant rente, r, på 5% per periode.



For en en selvfinansierende handelsstrategi ϕ (som defineret i afsnit 5.2 i Lando, Nielsen og Poulsen-noterne, hvis notation vi også bruger) mellem 0 og T, kalder vi V^ϕ defineret ved $V^\phi(t) = \phi(t) \cdot S(t)$ for strategiens *værdiproces*. Det følger (ønskes ikke bevist) fra lokal-karakterisationen at den diskonterede værdiproces for en selvfinansierende handelsstrategi, $\{V^\phi(t)/R_{0,t}\}_{t=0}^T$ er en Q-martingal, hvor Q som sædvanlig betegner et martingalmål. Den annualiserede forventede afkastrate over horisonten T defineres ved

$$\left(\mathrm{E}\left(\frac{V^\phi(T)}{V^\phi(0)}\right)\right)^{\frac{1}{T}} - 1.$$

Afhængigt af sammenhængen kan forventningen E være under forskellige sandsynlighedsmål. Dette indikeres som sædvanligt med toptegn; E^P, E^Q.

Spg. 1a

En investor køber 1 enhed af aktien på tid 0 og sælger den igen på tid 1. **Hvad** er den P-forventede annualiserede forventede afkastrate på denne strategi?

Spg. 1b
En investor køber 1 enhed af aktien på tid 0 og holder den indtil tid 2, hvor han sælger den. Tid 1-dividendebetalingen investeres på bankbogen, og trækkes ud herfra på tid 2. **Hvad** er den P-forventede annualiserede forventede afkastrate på denne strategi?

Spg. 1c
En investor køber 1 enhed af aktien på tid 0 og holder den indtil tid 2, hvor han sælger den. Tid 1-dividendebetalingen (gen)investeres i aktien, og også denne position likvideres på tid 2. **Hvad** er den P-forventede annualiserede forventede afkastrate på denne strategi?

Spg. 1d
Lad formelt aktiekursen X spille rollen som V^ϕ ovenfor. **Hvad** er

$$\left(\mathrm{E}\left(\frac{X(2)}{X(0)}\right)\right)^{\frac{1}{2}} - 1?$$

Hvordan forholder dette tal sig til svarene på spg. 2b og 2c?

Spg. 1e
Vis at hvis vi istedet ser på Q-forventede afkastrater, så ændrer svarene til spg. 1a-c sig alle til r, altså alle de forventede afkastrater er lig med den risikofrie rente.

Opgave 2

I modelrammen fra opgave 1, betragt da en såkaldt Y-kontrakt, der på tid $T = 2$ har denne pay-off-struktur, der afhænger af aktiekursen, $X(T)$:

- Hvis $X(T) \leq 100$, så modtager investor (eller: ejeren) 100.
- Hvis $100 < X(T) \leq 120$, så modtager investor $0.75 \times X(T) + 25$.
- Hvis $X(T) > 120$, så modtager investor 115.

Spg. 2a
Vis at Y-kontrakten kan skrives som en portefølje af nulkuponobligationer og call-optioner.

Spg. 2b
Vis at modellen er arbitrage-fri og komplet. **Beregn** den arbitrage-fri tid-0-pris på Y-kontrakten.

Spg. 2c
Hvad er den initiale sammensætning af den (aktie, bankbog)-handelsstrategi, der replikerer Y-kontrakten?

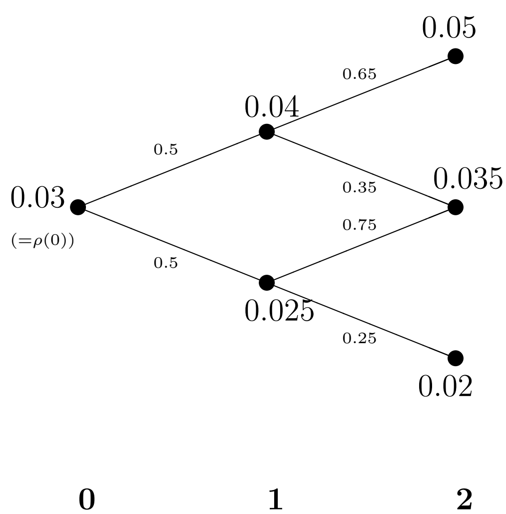
Spg. 2d
En stor bank markedsfører Y-kontrakten ovenfor som et investeringsprodukt på følgende måde:

> *Play the stock market without any risk! If you invest £100 with us you may earn up to 15%. And if the stock market falls you get your money back.*

(Dette er baseret på en virkelig hændelse, så jeg har så nogenlunde beholdt den originale engelske ordlyd.)
Kommenter. Overvej specielt: Er det en god forretning for investor? Hvor mange vildledende informationer kan du finde i det relativt korte citat?

Opgave 3

Betragt nedenstående model for mulige udviklinger i den korte rente (ρ); den indeholder som sædvanlig tidspunkter, niveauer og (betingede) sandsynligheder. Sandsynlighederne antages at være risiko-neutrale, altså at afspejle et martingalmål.



Spg. 3a
Bestem $\mathrm{E}^Q(\rho(t))$ for $t = 0, 1, 2$. **Er** ρ-processen en Q-martingal?

Spg. 3b
Vis at nulkuponobligationspriserne på tidspunkt 0 er

$$(P(0,1), P(0,2), P(0,3)) = (0.9709, 0.9404, 0.9061)$$

og **angiv** relevante nulkupon- og forwardrenter for tid 0.

Spg. 3c

Angiv amortiseringsprofil og tid 0-kurs for et 3-periode serielån med 3% kuponrente og initial hovedstol på 100. (Et serielån er karakteriseret ved at have samme afdrag i hver periode.)

Spg. 3d

Hvad skal kuponrenten på serielånet fra spg. 3c være for tid 0-kursen er 100 ("par")?

Spg. 3e

Nu indføres et såkaldt *flydende serielån*. Det har samme afdragsprofil som serielånet fra spg. 2c, men den resterende hovedstol forrentes til enhver tid med den gældende korte rente. Udtrykt i Lando, Nielsen og P-noternes notation (H for hovedstol), så er tid t-rentebetalingen givet ved

$$i_t = H_{t-1} \times \rho(t-1).$$

Hvad er tid 0-kursen på det flydende serielån?

Spg. 3f

Som om det ikke var nok, så indføres nu et *flydende serielån med loft*. Igen har det har samme afdragsprofil som serielånet fra spg. 2c, men den resterende hovedstol forrentes til enhver tid med minimum af den gældende korte rente og et loft, κ. Eller udtrykt i i L, N & P-noternes notation

$$i_t = H_{t-1} \times \min(\rho(t-1), \kappa).$$

Beregn tid-0-kursen det flydende serielån med loft.