FINANSIERING 1

3 timers skriftlig eksamen, kl. 9-12, onsdag 9/4 2008. Alle sædvanlige hjælpemidler (inkl. blyant) er tilladt. Sættet er på 4 sider og indeholder 8 nummererede delspørgsmål, der indgår med lige vægt i bedømmelsen.

VEJLEDENDE BESVARELSE

Opgave 1

Spg. 1a

Nulkuponobligationspriser:

$$\begin{aligned}
P(0,1) &= \tfrac{1}{1.04} && \approx 0.9615 \\
P(0,2) &= \tfrac{0.5}{1.04 \cdot 1.06} + \tfrac{0.5}{1.04 \cdot 1.03} && \approx 0.9203 \\
P(0,3) &= \tfrac{0.5 \cdot 0.8}{1.04 \cdot 1.06 \cdot 1.08} + \tfrac{0.5 \cdot 0.2}{1.04 \cdot 1.06 \cdot 1.06} \\
&\quad + \tfrac{0.5 \cdot 0.4}{1.04 \cdot 1.03 \cdot 1.06} + \tfrac{0.5 \cdot 0.3}{1.04 \cdot 1.03 \cdot 1.04} + \tfrac{0.5 \cdot 0.3}{1.04 \cdot 1.03 \cdot 1.02} && \approx 0.8696
\end{aligned}$$

Effektive renter:

$$\begin{aligned}
y(0,1) &= \tfrac{1}{P(0,1)} - 1 && = 0.04 \\
y(0,2) &= \tfrac{1}{P(0,2)^{\frac{1}{2}}} - 1 && \approx 0.0424 \\
y(0,3) &= \tfrac{1}{P(0,3)^{\frac{1}{3}}} - 1 && \approx 0.0477
\end{aligned}$$

Forward-renter:

$$\begin{aligned}
f(0,0) &= \tfrac{1}{P(0,1)} - 1 && = 0.04 \\
f(0,1) &= \tfrac{P(0,1)}{P(0,2)} - 1 && \approx 0.0448 \\
f(0,2) &= \tfrac{P(0,2)}{P(0,3)} - 1 && \approx 0.0583
\end{aligned}$$

Spg. 1b

Nulkuponobligationen med udløb til tidspunkt $t = 3$ har pris $S_t = P(t,3)$ til tidspunkt $t = 0, \dots, 3$. Dermed er prisen til $t = 0$ på en 1-periode forward-kontrakt med nulkuponobligationen som underliggende aktiv

$$F_{0,1} = \frac{S_0}{P(0,1)} = \frac{P(0,3)}{P(0,1)} \approx 0.9044.$$

Forward-prisen kan ved hjælp af forward-renterne udtrykkes som

$$F_{0,1} = \frac{P(0,2)}{P(0,1)} \cdot \frac{P(0,3)}{P(0,2)} = \frac{1}{1+f(0,1)} \cdot \frac{1}{1+f(0,2)}$$

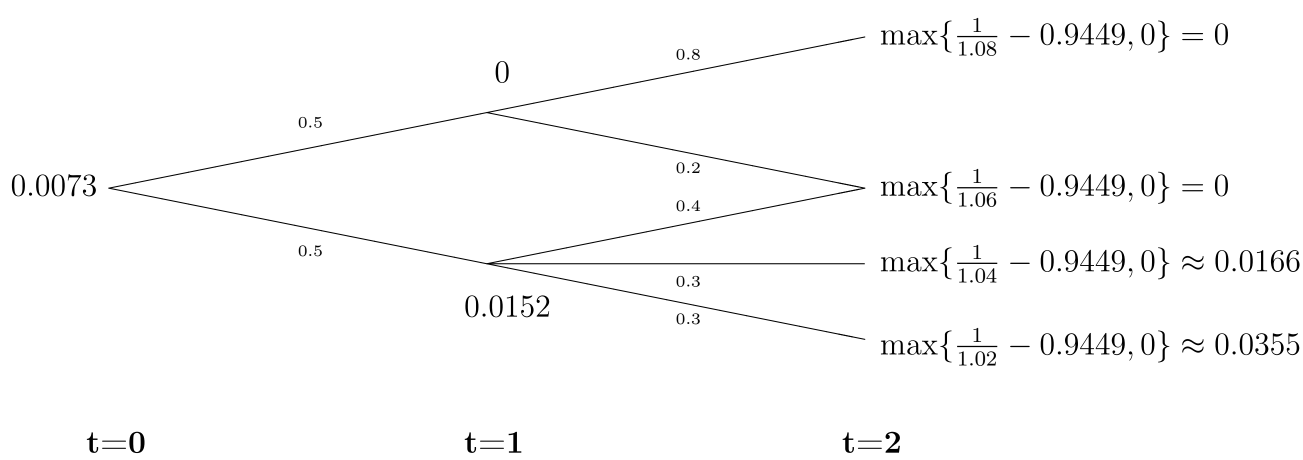
og intuitionen er følgende: Fordi forward-kontrakten med udløb til tidspunkt $t = 1$ har en nulkuponobligation med udløb til tidspunkt $t = 3$ som underliggende aktiv, så svarer køb af forward-kontrakten reelt til, at man (til tidspunkt $t = 0$) investerer risikofrit mellem tidspunkt $t = 1$ og $t = 3$. Forward-renten $f(0,1)$ er per konstruktion den risikofri rente (til $t = 0$) for investering mellem $t = 1$ og $t = 2$, mens $f(0,2)$ tilsvarende er den risikofri rente (stadig til $t = 0$) for investering mellem $t = 2$ og $t = 3$, så i fravær af arbitrage må forrentning af en (risikofri) investering i forward-kontrakten svare til forrentning med forwardrenterne $f(0,1)$ og $f(0,2)$.

Spg. 1c

Nulkuponobligationen med udløb til tidspunkt $t = 3$ har (som ovenfor) pris $S_t = P(t,3)$ til tidspunkt $t = 0, \dots, 3$. Dermed er prisen til $t = 0$ på en 2-periode forward-kontrakt med nulkuponobligationen som underliggende aktiv

$$F_{0,2} = \frac{S_0}{P(0,2)} = \frac{P(0,3)}{P(0,2)} \approx 0.9449.$$

Prisen på en europæisk call-option med udløb til $t = 2$ og strike $K = F_{0,2}$ skrevet på nulkuponobligationen udstedt til $t = 0$ og med udløb til $t = 3$ er:



Prisen på den tilsvarende amerikanske call-option er også 0.0073, fordi det underliggende aktiv (nulkuponobligationen) ikke betaler dividender og vi samtidig har strengt positive renter.

At købe en forward-kontrakt til prisen $F_{0,2}$ svarer til at købe en europæisk call-option og samtidig sælge en europæisk put-option begge med strike $K = F_{0,2}$. Da forward-kontrakten per definition har værdi 0 ved indgåelse, må priser på europæiske put- og call-optioner med strike $K = F_{0,2}$ derfor være identiske for at undgå arbitrage. Prisen på den europæiske put-option med udløb til $t = 2$ og strike $K = F_{0,2}$ er derfor 0.0073.

Alternativt kan man argumentere direkte ved hjælp af put-call-pariteten, som vi kan bruge fordi det underliggende aktiv (nulkuponobligationen) ikke betaler dividender

$$Call - Put = S_0 - KP(0,2) \qquad \Leftrightarrow \qquad Put = Call - S_0 + KP(0,2).$$

Ved at indsætte prisen $S_0 = P(0,3)$ på det underliggende aktiv og $K = F_{0,2} = \frac{P(0,3)}{P(0,2)}$ ses at

$$Put = Call - P(0,3) + \frac{P(0,3)}{P(0,2)}P(0,2) = Call = 0.0073.$$

Opgave 2

Spg. 2a
Put-call-pariteten har i Black-Scholes-modellen formen

$$Call(V_t, D, T-t, r, \sigma) - Put(V_t, D, T-t, r, \sigma) = V_t - De^{-r(T-t)} \qquad [1]$$

og call-optionsprisen er givet som

$$Call(V_t, D, T-t, r, \sigma) = V_t\Phi\big(d_1\big) - De^{-r(T-t)}\Phi\big(d_1 - \sigma\sqrt{T-t}\big) \qquad [2]$$

og dermed er værdien af de udstedte obligationer til $t \leq T$

$$\begin{aligned} B_t &= De^{-r(T-t)} - Put(V_t, D, T-t, r, \sigma) \\ &\overset{\text{iflg. [1]}}{=} V_t - Call(V_t, D, T-t, r, \sigma) \\ &\overset{\text{iflg. [2]}}{=} V_t - V_t\Phi\big(d_1\big) + De^{-r(T-t)}\Phi\big(d_1 - \sigma\sqrt{T-t}\big). \qquad [3] \end{aligned}$$

Spg. 2b
Idet $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ ses at

$$\begin{aligned} \varphi\big(d_1 - \sigma\sqrt{T-t}\big) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(d_1^2 + \sigma^2(T-t) - 2d_1\sigma\sqrt{T-t}\right)\right) \\ &= \varphi(d_1)\exp\left(-\frac{\sigma^2(T-t)}{2} + d_1\sigma\sqrt{T-t}\right) \\ &= \varphi(d_1)\exp\left(-\frac{\sigma^2(T-t)}{2} + \log\frac{V_t}{D} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right) \\ &= \varphi(d_1)\frac{V_t}{D}e^{r(T-t)} \end{aligned}$$

der omskrives til

$$V_t\varphi(d_1) = De^{-r(T-t)}\varphi(d_1 - \sigma\sqrt{T-t}). \qquad (1)$$

Ved differentiation af udtrykket [3] for B_t følger nu (idet $\Phi'(x) = \varphi(x)$) at

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_t}{\partial \sigma} &= -V_t\varphi(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} + De^{-r(T-t)}\varphi\big(d_1 - \sigma\sqrt{T-t}\big)\left(\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - \sqrt{T-t}\right) \\ &\overset{\text{iflg. (1)}}{=} -V_t\varphi(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} + V_t\varphi(d_1)\left(\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - \sqrt{T-t}\right) \\ &= -V_t\varphi(d_1)\sqrt{T-t}. \end{aligned}$$

Spg. 2c
Ifølge

$$\frac{\partial B_t}{\partial \sigma} = -V_t \varphi(d_1)\sqrt{T-t} \; < \; 0 \tag{2}$$

har obligationsejerne på intet tidspunkt interesse i at øge σ, fordi det altid vil medføre en lavere markedsværdi B_t af deres tilgodehavende.

Intuitionen er, at fordi værdien B_T af obligationerne ved udløb er givet som

$$B_T = \min\{D, V_T\},$$

så er det alene fordelingen af V_T på intervallet $[0, D]$, der har betydning for obligationsejerne. En højere volatilitet σ vil alt andet lige flytte mere sandsynlighedsmasse "ud i halerne" af fordelingen af V_T, og dermed både øge sandsynligheden for at få relativt små værdier af V_T, men samtidig også øge sandsynligheden for at få relativt store værdier af V_T. Øget sandsynlighed for små værdier af V_T vil betyde større sandsynlighed for (store) tab til obligationsejerne, mens den modsatrettede effekt i form af større sandsynlighed for store værdier af V_T alene vil betyde mere værdi til virksomhedsejerne. Obligationsejerne er derfor <u>ikke</u> interesserede i at øge volatiliteten.

Man kunne måske forestille sig at såfremt $V_t < D$, dvs. at aktivernes værdi i dag (til tid t) er lavere end hovedstolen på den udstedte gæld, så kunne obligationsejerne være indstillet på at øge volatiliteten i håbet om at øge sandsynligheden for ikke at lide tab (altså øge sandsynligheden for $V_T \geq D$). Ifølge ligning (2) er det imidlertid ikke tilfældet, og argumentet er som før at øget σ også vil betyde øget sandsynlighed for at lide endnu større tab, end de i dag har udsigt til.

Man kan kort opsummere obligationsejernes situation ved at sige, at de har "full downside risk" men "limited upside potential" og derfor altid vil foretrække lavest mulig volatilitet σ.

Opgave 3

Ved at indgå som den part i en renteswap, der betaler det flydende ben, dvs. den variable rente, påtager man sig en risiko relateret til den fremtidige (og dermed usikre) udvikling i renten, og det er det, der menes med at "forøge sin renterisiko". I tilfælde af et relativt højt renteniveau vil det faste ben i en renteswap også alt andet lige være relativt højt. Ved indgåelse af en renteswap som betaler af det flydende ben og i en situation med højt renteniveau, vil et efterfølgende rentefald derfor betyde, at man skal betale en lav variabel rente men fortsat modtage det høje faste ben. På denne måde kan det være fordelagtigt at handle renteswaps i tilfælde af efterfølgende rentefald.

Nutidsværdien af fremtidige forpligtelser vokser i tilfælde af et rentefald, fordi rentefaldet (alt andet lige) øger værdien af fremtidige betalinger, i.e. det beløb der skal investeres (risikofrit) i dag for at generere en given fremtidig betaling er større nu end før rentefaldet ("fremtidig indkomst bliver relativt mere værd"). Alternativt kan man argumentere direkte ud fra definitionen af nutidsværdi af en (deterministisk) betalingsrække $\mathbf{c} = (c_t)_{t=1,\dots,T}$

$$PV(\mathbf{c}, r) = \sum_{t=1}^{T} \frac{c_t}{(1+r)^t}$$

således at hvis renten r falder, så vokser nutidsværdien idet

$$\frac{\partial}{\partial r} PV(\mathbf{c}, r) = -\frac{1}{1+r} \sum_{t=1}^{T} \frac{-tc_t}{(1+r)^t} < 0$$

($c_t \geq 0$ fordi vi ser på fremtidige <u>forpligtelser</u>).

Da (Macaulay-)varigheden $D(\mathbf{c}, r)$ opfylder at

$$\frac{\partial}{\partial r} PV(\mathbf{c}, r) = -\frac{D(\mathbf{c}, r)}{1+r} PV(\mathbf{c}, r)$$

så er varigheden et udtryk for nutidsværdiens følsomhed overfor ændringer i renten, eller rettere et udtryk for den relative ændring i nutidsværdien som følge af en renteændring. Man kan også tænke på varigheden $D(\mathbf{c}, r)$ som et udtryk for "den gennemsnitlige løbetid/tilbagebetalingstid" på betalingsrækken $\mathbf{c}$, således at højere varighed er ensbetydende med længere tilbagebetalingshorisont og dermed også (alt andet lige) større følsomhed overfor ændringer i renten.

Opgave 4

(i) For ethvert $t \geq 0$ er W_t normalfordelt og dermed er specielt $EW_t^2 < \infty$ og derfor også $E|M_t| \leq EW_t^2 + t < \infty$.

(ii) Betragt $0 \leq s \leq t$ og bemærk at fordi $(W_t)_{t\geq 0}$ har uafhængige tilvækster, så er $W_t - W_s$ uafhængig af $\mathcal{F}_s$, og dermed er også $(W_t - W_s)^2$ uafhængig af $\mathcal{F}_s$.

Vi har således (idet $W_t^2 = ((W_t - W_s) + W_s)^2)$)

$$\begin{aligned}
E\big(M_t \,\big|\, \mathcal{F}_s\big) &= E\left(W_t^2 - t \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right) \\
&= E\left((W_t - W_s)^2 + W_s^2 + 2(W_t - W_s)W_s \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right) - t \\
&= E\left((W_t - W_s)^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right) + W_s^2 + 2W_s E\left(W_t - W_s \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right) - t \\
&\quad \text{(fordi } W_s \text{ er } \mathcal{F}_s\text{−målelig)} \\
&= E(W_t - W_s)^2 + W_s^2 + 2W_s E(W_t - W_s) - t \\
&\quad \text{(fordi } W_t - W_s \text{ og } (W_t - W_s)^2 \text{ er uafhængige af } \mathcal{F}_s).
\end{aligned}$$

Per definition af den Brownske bevægelse er $W_t - W_s \sim N(0, t - s)$ og dermed

$$E(W_t - W_s) = 0 \qquad\qquad E(W_t - W_s)^2 = t - s$$

som ved indsættelse i ovenstående giver

$$E\big(M_t \,\big|\, \mathcal{F}_s\big) = t - s + W_s^2 - t = W_s^2 - s = M_s$$

som ønsket.