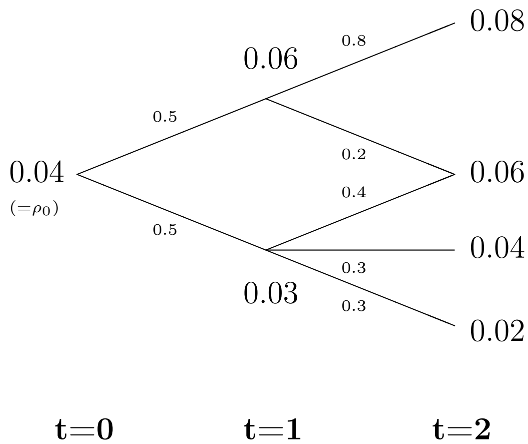
FINANSIERING 1

3 timers skriftlig eksamen, kl. 9-12, onsdag 9/4 2008. Alle sædvanlige hjælpemidler (inkl. blyant) er tilladt. Sættet er på 4 sider og indeholder 8 nummererede delspørgsmål, der indgår med lige vægt i bedømmelsen.

Opgave 1

Betragt nedenstående gitter (med **tidspunkter** og sandsynligheder) for udviklingen i den korte rente (1-periode spotrenten) ρ_t under et ækvivalent martingalmål Q:



Vi lader i det følgende $P(s,t)$ betegne den arbitragefri pris til tidspunkt s på en nulkuponobligation med udløb til tidspunkt t.

Spg. 1a
Vis at de arbitragefri nulkuponobligationspriser til tidspunkt $t = 0$ er

$$\big(P(0,1),\ P(0,2),\ P(0,3)\big) = (0.9615,\ 0.9203,\ 0.8696).$$

Bestem de tilhørende effektive renter $y(0,t)$ for $t = 1, 2, 3$.
Bestem forward-renterne $f(0,t)$ for $t = 0, 1, 2$.

Spg. 1b

Angiv prisen $F_{0,1}$ til tidspunkt $t = 0$ på en forward-kontrakt på køb af en 2-periode nulkuponobligation til tidspunkt $t = 1$ (dvs. til prisen $P(1, 3)$).
Udtryk forward-prisen $F_{0,1}$ ved hjælp af forward-renterne $f(0, t)$ fra spg. 1a.
Forklar intuitionen bag sammenhængen mellem $F_{0,1}$ og forward-renterne.

Spg. 1c

Angiv prisen $F_{0,2}$ til tidspunkt $t = 0$ på en forward-kontrakt på køb af en 1-periode nulkuponobligation til tidspunkt $t = 2$ (dvs. til prisen $P(2, 3)$).
Angiv prisen til tidspunkt $t = 0$ på en europæisk call-option med udløb til tidspunkt $t = 2$ og strike $K = F_{0,2}$ skrevet på nulkuponobligationen udstedt til tidspunkt $t = 0$ og med udløb til tidspunkt $t = 3$.
Hvad er prisen på den tilsvarende amerikanske call-option?
Forklar hvordan man ud fra ovenstående - og uden yderligere beregning - kan finde prisen på den tilsvarende europæiske put-option.

Opgave 2

Betragt en virksomhed, hvis aktiver til tidspunkt t har en samlet markedsværdi på V_t, og som til tidspunkt $t = 0$ udsteder obligationer med en samlet hovedstol på D og fælles løbetid T. Obligationerne er stående lån uden kuponbetalinger, så køberne af obligationerne modtager kun betaling til tidspunkt T og modtager kun fuld betaling i det tilfælde, hvor aktivernes værdi V_T er højere end hovedstolen D på den udstedte gæld. Den samlede værdi til tidspunkt T af alle obligationer er derfor givet som

$$B_T = \min\{D, V_T\}.$$

Antag i det følgende, at vi kan bruge Black-Scholes-modellen til at beregne obligationernes samlede værdi, der til tidspunkt $t \leq T$ er givet som

$$B_t = De^{-r(T-t)} - Put(V_t, D, T-t, r, \sigma)$$

hvor $Put(V_t, D, T-t, r, \sigma)$ er prisen til tidspunkt t på en europæisk put-option med strike D og løbetid $T - t$ skrevet på aktivernes værdi V_t, σ er volatiliteten på V_t og r er den risikofri rente.

Spg. 2a

Vis at værdien til tidspunkt $t \leq T$ af de udstedte obligationer er givet som

$$B_t = V_t - V_t\Phi\big(d_1\big) + De^{-r(T-t)}\Phi\big(d_1 - \sigma\sqrt{T-t}\big)$$

hvor

$$d_1 = \frac{\log \frac{V_t}{D} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

(Vink: Put-call-pariteten)

Spg. 2b

Vis at

$$V_t\varphi(d_1) = De^{-r(T-t)}\varphi(d_1 - \sigma\sqrt{T-t}) \tag{1}$$

hvor $\varphi(x) = \Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ er tæthedsfunktionen for standardnormalfordelingen.
(Vink: Skriv om på $\varphi(d_1 - \sigma\sqrt{T-t})$)
Vis dernæst ved brug af (1) at

$$\frac{\partial B_t}{\partial \sigma} = -V_t\varphi(d_1)\sqrt{T-t}. \tag{2}$$

(Vink: Saml faktorer der involverer $\frac{\partial d_1}{\partial \sigma}$)

Spg. 2c

Da variansen på V_T er en voksende funktion af volatiliteten σ, kan man fortolke σ som et mål for usikkerheden omkring aktivernes fremtidige værdi. Man kan desuden tænke på σ som en variabel, hvis værdi helt eller delvist fastsættes af virksomhedens ejere.
Forklar med udgangspunkt i ligning (2) obligationsejernes holdning til et eventuelt ønske fra virksomhedsejerne om at øge virksomhedens risiko (dvs. øge σ).
(Vink: Der kan gives argumenter både for og imod. Alligevel fastlægger ligning (2) en entydig holdning hos obligationsejerne. Overvej hvorfor.)

Opgave 3

Adskillige danske pensionskasser investerer som en del af deres samlede portefølje i forskellige typer afledte aktiver.

Man kunne i august 2005 læse følgende i dagbladet Børsen:

> *Renteswaps er en blandt mange måder for en pensionskasse at forøge sin renterisiko for at sikre, at værdien af formuen stiger, når også nutidsværdien af fremtidige forpligtelser stiger som følge af rentefald.*

Spg. 3a

Forklar hvad der menes med, at man kan forøge sin renterisiko ved at handle renteswaps, samt hvordan det kan være fordelagtigt i tilfælde af et efterfølgende rentefald.
(Vink: Hvilket "ben" i swap'en skal man betale for at få de ønskede effekter?)
Forklar kort hvorfor nutidsværdien af fremtidige forpligtelser stiger som følge af et rentefald.
(Vink: Tag f.eks. udgangspunkt i definitionen af nutidsværdi for en deterministisk betalingsrække).
Forklar kort hvilken rolle begrebet varighed spiller i denne forbindelse.

Opgave 4

Betragt en standard Brownsk bevægelse $(W_t)_{t\geq 0}$ defineret på et sandsynlighedsfelt $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ og definer filtreringen $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ ved

$$\mathcal{F}_t = \sigma\big((W_s)_{0\leq s\leq t}\big) \qquad t \geq 0.$$

Spg. 4a

Vis at processen

$$M_t = W_t^2 - t \qquad t \geq 0$$

er en martingal mht. $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, dvs. gør rede for at

(i) $E|M_t| < \infty$ for ethvert $t \geq 0$.
(Vink: Det er ikke nødvendigt med eksplicitte beregninger. En henvisning til en passende egenskab ved den Brownske bevægelse er nok)

(ii) $E(M_t \,|\, \mathcal{F}_s) = M_s$ for ethvert $0 \leq s \leq t$.
(Vink: $(W_t)_{t\geq 0}$ har uafhængige og normalfordelte tilvækster)