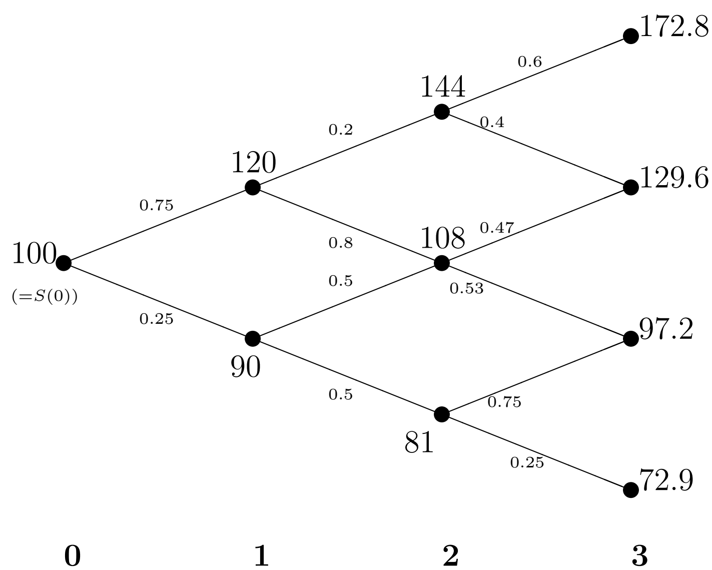
Matematisk Finansiering 1

4 timers skriftlig eksamen onsdag 9/11 2016. Sættet er på 4 sider (ekskl. forside) og indeholder 4 opgaver og ialt 13 nummererede delspørgsmål, der (vejledende, ikke bindende) indgår med lige vægt i bedømmelsen. Opgaverne (hvori . bruges som decimaltegn) kan løses uafhængigt af hinanden. Beregningsmæssige resultater ønskes fuldt dokumenteret i besvarelsen. Det skal således klart fremgå, hvilke formler, der bruges, og hvorfor de bruges.

Opgave 1

Betragt en 3-periode-model for kursen på en (dividende-fri) aktie, S. Den mulige udvikling er fastlagt ved nedenstående gitter med **tidspunkter** (som vi tænker på som år), aktiekurser og sandsynligheder svarende til målet P. Renten konstant, 0.05 (5%) per år.



Spg. 1a

Vis at dette er et specialtilfælde af standardbinomialmodellen, **og at** modellen er arbitragefri og komplet.

Spg. 1b

Bestem tid-0 priser på europæiske strike-110, udløb-3 call- og put-optioner på aktien.

Spg. 1c

Angiv hvordan den replikerende (aktie, bankbog)-portefølje for call-optionen fra spg. 1b konstrueres.

Spg. 1d

Hvad er tid-0 priserne på de amerikanske varianter af optionerne fra spg. 1b?

Spg. 1e

Nu betragtes en såkaldt *realized variance*-kontrakt, som er en kontrakt, der på tid 3 betaler

$$RV(3) := \frac{1}{3}\sum_{t=1}^{3}(\xi(t))^2,$$

hvor ξ'erne er de kvadrerede afkastrater, dvs. $\xi(t) := (S(t) - S(t-1))/S(t-1)$. **Beregn** tid 0-prisen på realized variance-kontrakten. Vink: Vis og brug at ξ'erne er identisk fordelte.

Opgave 2

Betragt igen modellen fra opgave 1 og den europæiske (udløb-3, strike-110)-call-option.

Spg. 2a

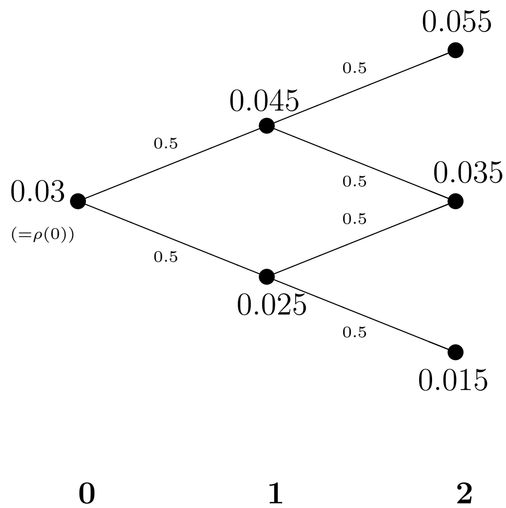
Antag at det kun er muligt at handle på tid 0 og 3. **Angiv** det arbitragefri interval for call-optionens tid 0-pris.

Spg. 2b

Antag istedet det er muligt at handle på tid 0, 1 og 3, men altså stadig ikke på tid 2. **Forklar** hvordan du så ville kunne beregne et arbitragefrit prisinterval. (Beregningen ønskes af tidshensyn ikke foretaget.) **Hvad** kan du sige om prisintervallets endepunkter i forhold til beregningerne i spg. 1b og 2a?

Opgave 3

Betragt nedenstående model for mulige udviklinger i den korte rente (ρ); den indeholder som sædvanlig tidspunkter, niveauer og (betingede) sandsynligheder. Sandsynlighederne antages at være risiko-neutrale, altså at afspejle et martingalmål (Q).



Spg. 3a

Vis at nulkuponobligationspriserne (naturligt ordnet) på tid 0 er givet ved $(0.9709; 0.9381; 0.9067)$.

Spg. 3b

Angiv amotiseringsprofilen for en 3-årig annuitetsobligation med initial hovedstol på 100 og kuponrente 0.03 (3%); ved *amortiseringsprofil* forstås, at ydelse (y_t), rentebetaling r_t, afdrag (a_t) og resterende hovedstol (H_t) angives for alle relevante tidspunkter. **Hvad** er obligationens tid 0-kurs?

Spg. 3c

Betragt nu en forwardkontrakt, der har annuitetsobligationen fra spg. 3b som underliggende aktiv. Forwardkontrakten udløber på tid 1. **Angiv** tid 0-forwardprisen.

Spg. 3d

Nu indføres en såkaldt *flydende annuitet*. Herved forstås en obligation, der har samme afdragsprofil som obligationen fra spg. 3b, men for hvilken tid t-rentebetalingen er $\rho_{t-1}H_{t-1}$, hvor ρ er den korte rente og H er den resterende hovedstol for obligationen fra spg. 3b. **Vis** at den flydende annuitets kurs altid er lig med den resterende hovedstol, mao. at den handler til par. (Dette kan gøres *med bogstaver* ved induktion baglæns, eller i en snæver vendning med tal.)

Opgave 4

De to spg. i denne opgave kan besvares uafhængigt af hinanden.

Spg. 4a
Lad X være en stokastisk variabel på et endeligt, filtreret sandsynlighedsrum, altså standard set-up'et fra kapitel 5 i Lando, Nielsen og Poulsen-noterne.

- Sæt $M_1(t) = \mathrm{E}_t(X)$ for $0 \leq t \leq T$. **Er** M_1 en martingal?
- Sæt $M_2(t) = (M_1(t))^2$ for $0 \leq t \leq T$. **Er** M_2 en martingal?
- Sæt $M_3(t) = \mathrm{E}_t(X^2)$ for $0 \leq t \leq T$. **Er** M_3 en martingal?

Spg. 4b
Kort før EU-afstemningen 23/6 2016 gav (bookmaker-)markedet (decimal-)odds 5 på *Leave*, dvs. på at Storbritanien stemte for at forlade EU, altså Brexit.

- **Argumenter for** at når rentediskontering ignoreres, så viser dette, at den risiko-neutrale sandsynlighed for *Leave* var $\frac{1}{5}$.
- **Hvordan** tror du, den faktiske sandsynlighed forholdt sig til den risiko-neutrale? Vink: Proposition 7 i Lando Nielsen og Poulsen-noterne og dennes fortolkning kan benyttes – og der er ikke entydigt rigtigt kvantitativt svar.