FINANSIERING 1

3 timers skriftlig eksamen, fredag 24/6 2022. Alle sædvanlige hjælpemidler (inkl. blyant) tilladt. Sættet er på 3 sider og indeholder 10 nummererede delspørgsmål, der indgår med lige vægt i bedømmelsen. Der anvendes , (komma) til at angive decimalpunkter.

Opgave 1

I denne opgave betragtes en 2-periode-model (med tidsskridt af længde 1) for kursen $(S(t))$ på en aktie, der er givet ved dette gitter:

		134,428
	115,498	100,000
100,000	87,311	76,922
0	1	2

Renten pr. periode i modellen er $r = 0,015$ (dvs. 1,5%).

Spg. 1a
Vis at modellen er arbitragefri og komplet.

Spg. 1b
Betragt en europæisk udløb 2-call-option på aktien med strikekurs $K = 101,5$. **Vis at** $K = E^Q(S(1)) = (1+r)S(0)$. **Hvad** er den arbitragefrie tid 0-pris på denne call-option? **Beregn** den replikerende (aktie, bankbog)-portefølje for call-optionen.

Spg. 1c
Betragt nu en udløb-2 forward starting-call-option. Det er et aktiv, der betaler $(S(2) - S(1))^+$ på tid 2, dvs. striken sættes, så optionen altid er at-the-money på tid 1. **Beregn** den arbitragefrie tid 0-pris på forward starting-call-optionen. (Vink: Tegn et træ.)

Spg. 1d
Prisen på forward starting-cell-optionen fra spg. 1c er lavere end prisen på call-optionen fra spg. 1b. **Forklar** hvorfor. (Vink: Husk at call-optionspriser generelt vokser med variansen på det underliggende aktiv.)

Opgave 2

Betragt en porteføljevalgsmodel med tre usikre aktiver (*aktier*, nummereret 1, 2 og 3), hvis afkastrater har forventede værdier (μ) og kovarianser ($\mathbf{\Sigma}$) givet ved:

$$\mu = \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0,05 \\ 0.09 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 0,0025 & 0,002 & 0,002 \\ 0,002 & 0,04 & 0,064 \\ 0,002 & 0,064 & 0,16 \end{bmatrix}.$$

Modellen antages i første omgang ikke at indeholde et risikofrit aktiv.

Det kan frit benyttes at

$$\mathbf{A} = [\mu \ \mathbf{1}]^\top \mathbf{\Sigma}^{-1}[\mu \ \mathbf{1}] = \begin{bmatrix} 0,1963 & 8,1360 \\ 8,1360 & 401,3158 \end{bmatrix}$$

og

$$\Sigma^{-1}[\mu \ \mathbf{1}]A^{-1} = \begin{bmatrix} -17,442 & 1,337 \\ 5,523 & -0,090 \\ 11,919 & -0,247 \end{bmatrix}.$$

Spg. 2a

Angiv vægtene, x_{mv}, for den minimum-varians-portefølje, der har forventet afkastrate $\mu_{mv} = 0,05$. **Vis at** x_{mv}'s 0-beta-portefølje har forventet afkastrate $\mu_{zmv} = 0,01765$. **Verificer** (med tal) at 0-beta-versionen af CAPM (Proposition 5 i noterne) holder med aktie 1 på venstresiden og x_{mv} som referenceportefølje på højresiden.

Spg. 2b

Modellen udvides nu med et riskofrit aktiv med en rente på $r_0 = \mu_{zmv}$.
Vis at x_{mv} er tangentporteføljen. Vink: Ideelt set ønskes et teoretisk bevis, men man kan jo altid starte med en numerisk verifikation (som kræver numerisk matrixregning).
Hvad er den højest muligt opnåelige Sharpe-ratio? (Vink: Benyt resultatet fra første del af dette spørgsmål – også selvom du ikke har bevist det.)

Opgave 3

Betragt nedenstående model for mulige udviklinger i den korte rente (ρ). Den indeholder som sædvanlig tidspunkter, niveauer og (betingede) sandsynligheder. Sandsynlighederne antages at være risiko-neutrale, altså at afspejle et martingalmål (Q).

	A	B	C	D	E	F
1	**Rentegitteret**					
2	Niveauer (rho(t))				Betingede Q-ssh.	
3			0,12			
4		0,08	0,1			0,6
5	0,05	0,03	0		0,7	0,5
6	**0**	**1**	**2**		**0->1**	**1->2**
7						

Spg. 3a
Vis at at nulkuponobligationspriser (naturligt ordnet) på tid 0 er givet ved $(0,9524; 0,8947; 0,8199)$. **Beregn** tid 0-nulkuponrenter.

Spg. 3b
Betragt en 3-periode-annuitetsobligation med hovedstol 100 og kuponrente 0,05 (dvs. 5%). **Hvad** er ydelsen (y^A), obligationens tid 0-kurs ($A(0)$) og dens effektive rente? En låntager sælger obligationer af denne type således at hendes tid 0-provenu er 1.000.000 (en million – kr. fx). **Hvad** er hendes årlige ydelse på lånet?

Spg. 3c
Vi betragter nu forward- og futureskontrakter med udløb på tid 2 og med annuitetsobligationen fra spg. 3b som underliggende aktiv. **Beregn** tid 0-forwardprisen ($\mathrm{Fwd}(0;2)$) og tid 0-futuresprisen ($\mathrm{Fut}(0;2)$).

Spg. 3d
Vi betragter nu en variant af annuitetsobligationen fra spg. 3b: Et såkaldt trappelån. (Eller et *teaser loan*.) Herved menes et lån med ydelser givet ved

$$y_t^{TR} = y^A + a + (t-1)b \text{ for } t = 1, 2, 3,$$

hvor y^A er ydelsen på annuitetsobligationen fra spg. 3b. **Verficer at** hvis $a = -18,36$ og $b = 19,32$ da er flg. to betingelser er opfyldt:

- Trappelånets 1.-årsydelse er det halve af annuitetslånets fra spg. 3b's ydelse, $y_1^{TR} = y^A/2$
- Tid 0-kursen på trappelånet er den samme som for annuitetslånet fra spg. 3b.

Sammenlign og kommenter ydelsesprofilerne for 3b- og 3d-lånene. **Beregn** 3d-obligationens effektive rente og **kommenter** forskellen ift. spg. 3b-obligationens effektive rente.