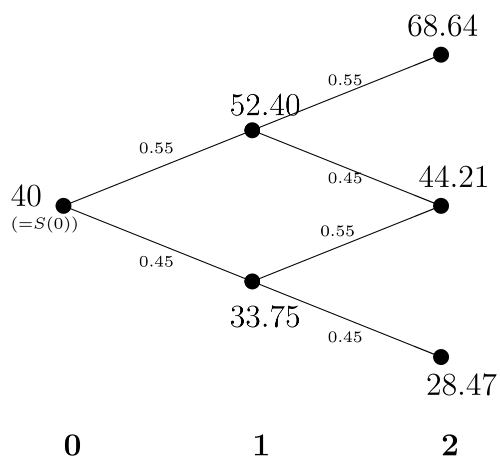
Matematisk Finansiering 1

4 timers skriftlig eksamen tirsdag 31/10 2017. Sættet er på 3 sider (ekskl. forside) og indeholder 3 opgaver og ialt 10 nummererede delspørgsmål, der (vejledende, ikke bindende) indgår med lige vægt i bedømmelsen. Opgaverne (hvori . bruges som decimaltegn) kan løses uafhængigt af hinanden. Beregningsmæssige resultater ønskes fuldt dokumenteret i besvarelsen. Det skal således klart fremgå, hvilke formler, der bruges, og hvorfor de bruges.

Opgave 1

Betragt en 2-periode-model for kursen på en (dividende-fri) aktie, S. Den mulige udvikling er fastlagt ved nedenstående gitter med **tidspunkter** (som vi tænker på som år), aktiekurser og sandsynligheder svarende til målet P. Renten konstant, 0.03 (3%) per år.



Spg. 1a
Vis at dette er et specialtilfælde af standardbinomialmodellen, **og at** modellen er arbitragefri og komplet.

Spg. 1b
Bestem tid-0 priser på *at-the-money* europæiske udløb-2 call- og put-optioner på aktien.

Spg. 1c
Nu betragtes en såkaldt *logstock*-kontrakt, som er en kontrakt, der på tid 2 betaler

$$\pi^{\ln}(2) := \ln(S(2)/S(0)).$$

Bestem den arbitragefri tid 0-pris på logstock-kontrakten og **angiv**, hvordan den replikeres med aktien og bankbogen.

Spg. 1d

Antag nu, at der er transaktionsomkostninger forbundet med aktiehandel. Mere specifikt: Hver gang man handler aktier for x kr., så skal man (oven i) betale $0.01x$ kr. i handelsomkostninger; dvs. proportionale omkostninger på 1%. Det antages stadig omkostningsfrit at benytte bankbogen. **Angiv** (i et træ) omkostningerne for den replikerende strategi fra spg. 1c. **Beregn** de Q-forventede diskonterede omkostninger og **diskuter**, hvor meningsfyldt dette tal egentlig er.

Opgave 2

I denne opgave betragtes en 1-periode-, 6-tilstandsmodel for en bestemt akties pris og dividendebetalinger. Aktiens tid 0-pris er 100, mens tid 1-priser og dividender er givet ved

$$\begin{pmatrix} S(1) \\ \delta(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 140 & 120 & 100 & 100 & 90 & 80 \\ 4 & 3 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Alle tilstande er lige (P-)sandsynlige. I modellen findes yderligere et risikofrit aktiv med en afkastrate på $r = 0.01$ (1%).

Spg. 2a

Antag at man på tid 0 køber 1 enhed af aktien. **Hvad** er den P-forventede afkastrate for den strategi? Hvad er afkastratens (P-)spredning?

Vi kalder $\delta(1)/S(0)$ for aktiens dividenderate. **Hvad** er den forventede dividenderate? **Hvad** er korrelationen mellem strategiens afkastrate og aktiens dividenderate?

Spg. 2b

Betragt nu et nyt aktiv hvis tid 1-betaling er aktiens dividende; $x = \delta(1)$ med ofte anvendt notation. I samme notation har, vi at en række i D-matricen udgøres af $S(1) + \delta(1)$. **Bestem** det arbitragefri interval af tid 0-priser for dette aktiv.

Der introduceres nu en forward-kontrakt på aktien. Antag at forwardprisen er $\mathrm{Fwd}(0,1) = 98$.

Spg. 2c

Forekommer dette dig som en *plausibel* forwardpris? Vink: Det er mere argumentationen/analysen end selve svaret (der nok er "ja"), der er vigtig. Man kan tage udgangspunkt i hjælpespg.: Hvad kunne man sige, hvis $\delta(1)$ var deterministisk?

Spg. 2d

Besvar spg. 2b igen i tilfældet, hvor forward-kontrakten handles på tid 0. **Kommenter** dine resultater.

Vink: $D = \begin{pmatrix} S(1) + \delta(1) \\ 1 + r \\ S(1) - \mathrm{Fwd}(0,1) \end{pmatrix}$ – med rækkerne forstået som vektorer på passende vis.

Opgave 3

Spg. 3a

Forklar hvorfor et konverterbart lån (fra låntagers synspunkt) kan ses som en kort position i en inkonverterbar obligation kombineret med en lang position i en amerikansk call-option.

Spg. 3b

Kommenter følgende udsagn:

> Vi ved, at når renten er positiv, så skal vi ikke indfri amerikanske optioner. Det er kun inden for de allerseneste år, at negative renter har været i spil. De mange konverteringer af realkreditlån (*konverteringsbølger*), vi historisk har set, er derfor irrationelle.