Matematisk Finansiering 1

4 timers skriftlig eksamen mandag 1/11 2021. Sættet er på 3 sider (uden forside) og indeholder 3 opgaver og ialt 10 nummererede delspørgsmål, der indgår med lige vægt i bedømmelsen. Opgaverne kan løses uafhængigt af hinanden. Beregningsmæssige resultater ønskes fuldt dokumenteret i besvarelsen. Det skal således klart fremgå, hvilke formler, der bruges, og hvorfor de bruges.

Opgave 1

I denne opgave betragtes en 2-periode-model (med tidsskridt af længde 1) for kursen $(S(t))$ på en aktie, der er givet ved dette gitter (hvor , (komma) er decimaltegn):

		159,019
	126,568	100,000
100,000	78,248	60,438
0	**1**	**2**

Renten pr. periode i modellen er $r = 0,02$ (dvs. 2%).

Spg. 1a
Vis modellen er arbitragefri og komplet.

Spg. 1b
Betragt europæiske udløb 2-call-optioner på aktien med strikekurser hhv. 95 og 105. **Hvad** er de arbitragefrie tid 0-priser på de to optioner? **Beregn** den replikerende (aktie, bankbog)-portefølje for en af optionerne.

Spg. 1c
En asiatisk call-option på aktien har følgende pay-off på tid 2:

$$X(2) = \left(\left(\frac{1}{3} \sum_{t=0}^{2} S(t) \right) - K \right)^{+}.$$

Beregn den arbitragefrie pris på den asiatiske call-option med strike $K = 105$. Den er lavere end prisen for den tilsvarende europæiske call-option fra spg. 1b. **Er** det overraskende?

Ved *standardbinomialmodellen* (med tidsskridt af længde 1 og givet $S(0)$ og r) forstås (i denne opgave) en model, hvor $S_{t+1} = S_t \exp(\pm\sigma)$, hvor σ kaldes for modellens volatilitetsparameter. For en givet observeret europæisk call-optionspris definerer vi optionens *implicitte volatilitet* som den værdi af σ, der gør, at prisen i standardbinomialmodellen er lig med den observerede optionspris. (Konceptuelt præcis som for Black-Scholes-modellen.)

Spg. 1d
Beregn de implicitte volatiliteter for de to call-optionspriser fra spg. 1b. **Er** modellen givet i starten af denne opgave et specialtilfælde af standardbinomialmodellen?

Opgave 2

I denne opgave betragtes en 1-periode-model for prisen (D) og dividende-betalingen (δ) for en bestemt aktie. Dens tid 0-pris er 100, mens tid 1-pris og dividende i modellens 5 tid 1-tilstande er givet ved (igen: , er decimaltegn)

$$D = \begin{pmatrix} 150; & 130; & 110; & 90; & 70 \end{pmatrix}$$

og

$$\delta = \begin{pmatrix} 4,75; & 3,99; & 3,31; & 2,71; & 2,19 \end{pmatrix}.$$

Der findes desuden et risikofrit aktiv i modellen; det har rente $r = 0,05$, dvs. 5%.

Spg. 2a
Betragt et aktiv, der på tid 1 udbetaler δ. **Angiv** intervallet af arbitragefrie tid 0-priser for dette aktiv.

Spg. 2b
Dividende-vektoren ovenfor er konstrueret med formlen $\delta = a + bD + cD^2$ med $a = 1$, $b = 0,01$ og $c = 0,0001$. Antag istedet at $a = 1$, $b = 0,02$ og $c = 0$. **Angiv** intervallet af arbitragefrie tid 0-priser for aktivet, der udbetaler δ, og **kommenter** resultatet.

Opgave 3

Betragt nedenstående model for mulige udviklinger i den korte rente (ρ). Den indeholder som sædvanlig tidspunkter, niveauer og (betingede) sandsynligheder. Sandsynlighederne antages at være risiko-neutrale, altså at afspejle et martingalmål (Q).

Niveauer (rho(t))				Betingede Q-ssh.	
		0,11			
	0,08	0,07			0,5
0,05	0,02	0,01		0,7	0,4
0	**1**	**2**		**0->1**	**1->2**

Spg. 3a

Vis at nulkuponobligationspriser (naturligt ordnet) på tid 0 er givet ved $(0,9524; 0,8974; 0,8376)$. Betragt en 2-periode-annuitetsobligation med hovedstol 100. **Hvad** skal kuponrenten være for, at obligationen har kurs 100 på tid 0 (*handler til par*)?

Vi betragter nu variationer af annuitetsobligationen fra spg. 3a.

Spg. 3b

Variabelt forrentet annuitet. Herved forstås en betalingsrække, hvor afdragene er som for annuiteten fra spg. 3a, men rentebetalingerne er bestemt ud fra den korte (markeds)rente, specifikt $i_t = \rho(t-1)H_{t-1}$ med notation fra noternes kaiptel 2. **Eftervis** at tid 0-kursen på denne obligation er 100 og **angiv** kurser og betalinger for alle relevante tidspunkter og tilstande. (Tegn et træ.)

Spg. 3c

Konverterbar annuitet. **Beregn** tid 0-kursen på denne obligation. Antag at, hvis lånet indfris, så omlægges gælden til en inkonverterbar annuitet (med udløb på tid 2) og kuponrente lig markedsrenten på konverteringstidspunktet, $\rho(t)$. **Angiv** betalinger for alle relevante tidspunkter og tilstande. (Igen: Tegn et træ.)

Spg. 3d

En andelsboligforening står for at skulle optage et lån (med provenu 100) på tid 0 og kan vælge mellem de tre lånetyper fra spg. 3a-c. **Diskuter** fordele og ulemper ved de forskellige lånetyper. (Stikord: 1.-årsydelse, forventede betalinger, risiko, horisont.)