Matematisk Finansiering 1

4 timers skriftlig eksamen onsdag 2/11 2022. Sættet er på 3 sider (ekskl. forside) og indeholder 3 opgaver og ialt 10 nummererede delspørgsmål, der indgår med lige vægt i bedømmelsen. Opgaverne (hvori , (komma) bruges som decimaltegn) kan løses uafhængigt af hinanden. Beregningsmæssige resultater ønskes fuldt dokumenteret i besvarelsen. Det skal således klart fremgå, hvilke formler, der bruges, og hvorfor de bruges.

Opgave 1

I denne opgave betragtes en 3-periode-variant (med tidsskridt af længde 1) af standardbinomialmodellen; $S_{t+1} = S_t \exp(\alpha \pm \sigma)$ beskriver prisen på en dividende-fri aktie og op/ned-bevægelser er lige P-sandsynlige. Mere specifikt ser aktiegitteret således ud:

			261,17
		189,65	158,41
	137,71	115,03	96,08
100,00	83,53	69,77	58,27
0	**1**	**2**	**3**

<u>Spg. 1a</u>
Hvad er α og σ? **Beregn** $E^P(S_2)$ og $\sqrt{\text{var}^P(S_2)}$.

Antag i det følgende $r = 0,04$ (dvs. renten er 4% pr. periode).

<u>Spg. 1b</u>
Beregn arbitragefri tid 0-priser på europæiske put-optioner med hhv. $(T = 3, K = 100)$, $(T = 3, K = 90)$ og $(T = 2, K = 100)$, hvor T er udløb og K er strike. Vink: Den første pris er 10,463; den sidste er 10,820.

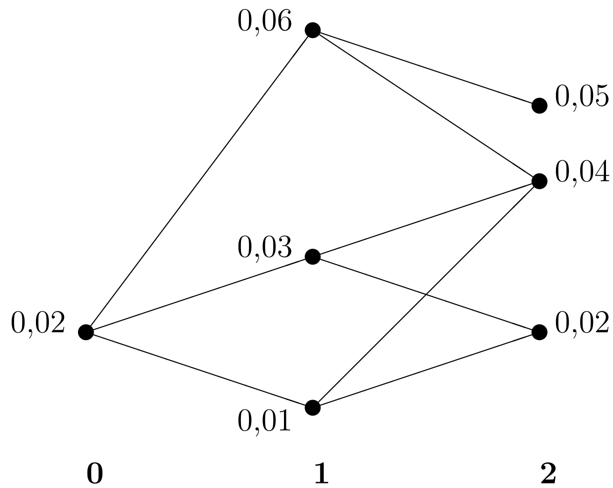
<u>Spg. 1c</u>
Bestem den (akrie,bankbog)-portefølje, der replikerer den europæiske $(T = 3, K = 100)$-put-option.

<u>Spg. 1d</u>
Beregn prisen på den amerikanske $(T = 3, K = 100)$-put-option og **angiv** den optimale indfrielsesstrategi.

<u>Spg. 1e</u>
Antag at dynamisk handel ikke er mulig, kun handel på tid 0, men at den europæiske $(T = 3, K = 100)$-putoption stadig der kan handles til prisen 10,463 . **Hvad** er det arbitragefri prisinterval for den europæiske $(T = 3, K = 90)$-put-option? (Husk at det 3-periode-risiikofrie aktiv har slutbetaling $(1 + r)^3$.) **Hvorfor** har den europæiske $(T = 2, K = 100)$-putoption stadig den entydige arbitragefrie pris 10,820?

Opgave 2

Betragt nedenstående model for mulige udviklinger i den korte rente. Den indeholder tidspunkter og niveauer. Alle grene, der udgår fra en givet knude, antages at være lige sandsynlige (dvs. $\frac{1}{3}$ for tid 0-knuden og $\frac{1}{2}$ for hver af tid 1-knuderne.). Det antages yderligere, at disse (betingede) sandsynligheder er risiko-neutrale, altså at de afspejler/svarer til et martingalmål (Q).



Spg. 2a

Vis at nulkuponobligationspriser (naturligt ordnet) på tid 0 er givet ved (0,9804; 0,9491; 0,9173). **Er** modellen komplet?

Spg. 3b

Betragt en 3-periode-annuitetsobligation med hovedstol 100. **Hvad** skal kuponrenten være for, at obligationen har kurs 100 på tid 0 (*handler til par*)?

Spg. 2c

Beregn udløb 2-forward- og futurespriser på annuitetsobligationen fra spg. 2b på tid 0 – altså hhv. Fwd(0; 2) og Fut(0; 2).

Opgave 3

I den opgave betragtes en sportbegivenhed med kun to mulige udfald; kald dem A og B. En bookmaker har sat (decimal-)odds hhv. x_A og x_B på de to udfald. Oddsene er sat i dag, udfaldet afgøres i morgen. Det er muligt at låne til fra i dag til i morgen; for hver 1 kr. betaler man $(1 + r)$ kr. tilbage.

Spg. 3a

Vis at markedet er arbitragefrit hvis og kun hvis

$$\frac{1}{x_A} + \frac{1}{x_B} = \frac{1}{1 + r}.$$

Spg. 3b

Antag $r = 0$. **Hvorfor** er det en rimelig antagelse?

Antag $x_A = x_B = 2,1$. **Hvordan** konstrueres en arbitrage?

Antag $x_A = x_B = 1,9$. **Hvordan** konstrueres en arbitrage? **Hvorfor** vil denne konstruktion være vanskelig i praksis?