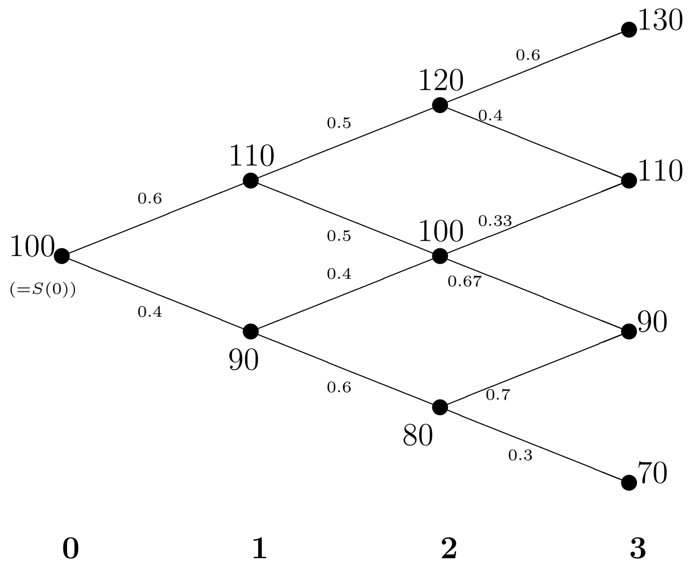
NATURVIDENSKABELIG KANDIDATEKSAMEN
VED KØBENHAVNS UNIVERSITET

INVESTERINGS- OG FINANSIERINGSTEORI

4 timers skriftlig eksamen, 10-14, tirsdag 1/6 2004.
Ingen hjælpemidler (blyant & lommeregner dog tilladt). Antal sider i sættet: 5.

Opgave 1

I denne opgave betragtes en 3-periode binomialmodel, hvor S er kursen/prisen på en aktie, der i det betragtede tidsrum ikke udbetaler dividende. Den mulige aktiekursudvikling er fastlagt ved nedenstående gitter. (Med **tidspunkter**, aktiekurser og sandsynligheder.) Desuden findes der et risikofrit aktiv (*bankbogen*) med en rente på 0% (*nul*%) per periode.



Spg. 1.a [10%]
Vis at modellen er arbitragefri og komplet og find det ækvivalente martingalmål Q (fx ved at bestemme alle de betingede martingal-springsandsynligheder; q'erne).

Spg. 1.b [10%]
Betragt en europæisk call-option på aktien. Optionen udløber på tid $T = 3$ og har

strike-kurs (aftale-kurs, exercise-kurs) $K = 100$.
Hvad er den arbitragefri prisproces, som vi jo kunne betegne med $\text{Call}(t; T, K)$, for denne call-option?
Call-optionen kan som bekendt replikeres (eller "hedges", hvis man vender fortegnene) med en portefølje, der (kun) indeholder aktien og bankbogen. Hvormange stk. aktier er der på tid 0 i denne portefølje?

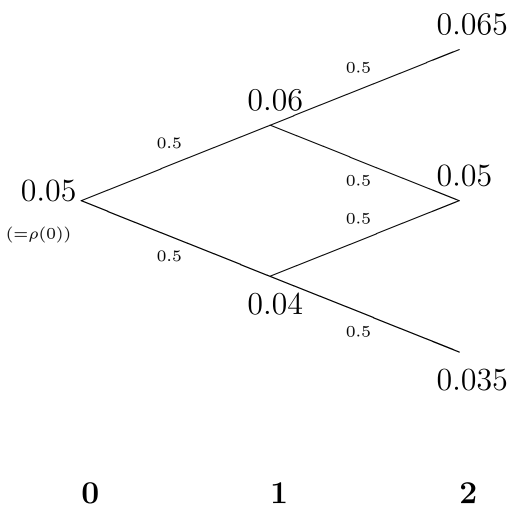
Spg. 1.c [10%]
Der indføres nu endnu et aktiv i modellen: En såkaldt sammensat (eng.: compound) option. Det er kort sagt en option på en option. Mere specifikt er den sammensatte (call,call-)option karakteriseret ved to udløbstidspunkter, T_S og T_U (S for sammensat og U underliggende), og to strikekurser, K_S og K_U, og et tid-T_S pay-off, der er

$$\text{Compound}(T_S) = \left(\text{Call}(T_S; T_U, K_U) - K_S\right)^+ ,$$

idet notationen fra Spg. 1.b anvendes.
Hvis $T_S = 2$, $T_U = 3$, $K_S = 2$ og $K_U = 100$, hvad er så tid-0-prisen på den sammensatte option?
Forklar hvordan en sammensat option replikeres vha. dens underliggende call-option (altså udløb-T_U, strike-K_U call'en) og aktien. (Tid-0 tal er tilstrækkeligt.)

Opgave 2

Betragt nedenstående gitter (med **tidspunkter**, renter og sandsynligheder) for udviklingen i den korte rente (1-periode spotrenten ρ) under et ækvivalent martingalmål Q:



Spg. 2.a [10 %]
Vis at tid-0-nulkuponobligationspriserne ("zero-coupon bond prices") for forskellige udløbstider er givet ved

$$(P(0,0), P(0,1), P(0,2), P(0,3)) = (1, 0.9523, 0.9071, 0.8641).$$

Spg. 2.b [10%]
Nu betragtes et 3-årigt annuitetslån (eller en annuitetsobligation, eller simplethen en annuitet) med kuponrente på 5% og initial hovedstol 100. Lånets tilbagebetalingsprofil er givet ved følgende tabel/amortiseringsplan:

	0	1	2	3
y_t		36.72	36.72	36.72
H_t	100	68.28	34.97	0
δ_t		31.72	33.31	34.97
i_t		5	3.41	1.74

Forklar den anvendte notation. (Relevante ord: Ydelse, afdrag, rente, (resterende) hovedstol.) Begrund at planen er korrekt. Bestem tid-0-kursen på annuitetsobligationen.

Spg. 2.c [10 %]
Vi indfører nu en såkaldt variabelt forrentet annuitet. Det er et lån, der har samme afdragsprofil (og derfor samme resterende hovedstol) som den fast forrentede annuitet fra Spg. 2.b, men rentebetalingen på tid t er

$$\widetilde{i}_t = \rho_{t-1} \times H_{t-1},$$

hvor ρ er den korte rente. (Ja, der skal stå t på venstresiden og $t-1$ på højresiden.) Lad $V(t)$ betegne tid-t-værdien af den variabelt forrentede annuitets betalingsrække. (Priser eller værdier forstås som altid som "efter dividende".) Vis at denne værdi altid er lig med hovedstolen, dvs.

$$V(t) = H_t \text{ for alle } t.$$

Vejledning: Et "tal-bevis" – dvs. konkrete udregninger med ρ-specifikationen fra Spg. 2.a – er acceptabelt. Men et "bogstav-bevis" er faktisk nemmere og et vink hertil er: Vores martingalprisfastsættelsesregel siger at

$$\text{pris}(t) = \frac{1}{1+\rho_t} \mathbf{E}_t^Q \left(\text{pris}(t+1) + \text{dividendeudbetaling}(t+1) \right).$$

For en obligation er dividendeudbetalingen lig ydelsen, altså rente plus afdrag (og sidstnævnte er lig ændringen i hovedstol). Formuler dette med symboler, og "argumenter baglæns" fra obligationens sidste betalingstidspunkt.

Hvis du ikke synes, du bruger annuitetsegenskaben til noget, så har du ganske ret. Resultatet gælder for enhver deterministisk afdragsprofil.

Spg. 2.d [10 %]
I dette spørgsmål betragtes variabelt forrentede lån med loft. Vi tænker os en afdragsprofil givet (ved en række hovedstole, H_t'er), og antager at lånets tid-t-rentebetaling er

$$\widehat{i_t} = \min(\rho_{t-1}, \omega) \times H_{t-1}.$$

Låntager er altså garanteret højest at skulle betale en rente på ω, der kaldes loftet. For at lette beregningerne i dette spørgsmål betragtes nu et 2-periode stående lån. Altså: $H_0 = H_1 = 100$, $H_2 = H_3 = 0$ og glem alt om annuiteten fra Spg. 2.b-c.
Vis at tid-0-kursen på et variabelt forrentet stående lån med 5%-loft, dvs. $\omega = 0.05$, er 99.55.
Vink: Der er stiafhængighed for tid-2 betalingen. Så tegn et rente-træ for tid 0, 1 og 2, og bestem lånets betalinger i de forskellige knuder.

Opgave 3

Betragt en porteføljevalgsmodel med 3 usikre aktiver (*aktier*, numereret 1, 2 og 3), hvis afkastrater har forventede værdier (μ) og kovarianser ($\mathbf{\Sigma}$) givet ved:

$$\mu = \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.07 \\ 0.10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 0.04 & 0.01 & 0.03 \\ 0.01 & 0.09 & 0.04 \\ 0.03 & 0.04 & 0.16 \end{bmatrix}.$$

I første omgang antages modellen ikke at have et risikofrit aktiv.

Spg. 3.a [10%]
Bestem den efficiente rand ("the efficient frontier") og vægtene for porteføljerne på denne, de (middelværdi/varians-)efficiente porteføljer. Illustrer grafisk.
Det kan være nyttigt at kende disse to matricer:

$$\mathbf{A} = [\mu\ \mathbf{1}]^\top \mathbf{\Sigma}^{-1} [\mu\ \mathbf{1}] = \begin{bmatrix} 0.11378 & 1.7335 \\ 1.7335 & 31.4351 \end{bmatrix}$$

og

$$\mathbf{\Sigma}^{-1} [\mu\ \mathbf{1}] \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -21.912 & 1.9402 \\ 3.1872 & 0.09960 \\ 18.725 & -1.0398 \end{bmatrix}.$$

(Hvis du ikke kan huske, hvad de matricer skal bruges til, så kan du stadig lave en tegning og svare nogenlunde fornuftigt på opgavens følgende spørgsmål.)

Spg. 3.b [5%]
Betragt en portefølje givet ved vægtene $x_G = (1/2, 1/2, 0)$. Find dens forventede afkastrate og afkastratens varians og standardafvigelse. Er x_G efficient?

Spg. 3.c [5%]
Antag der indføres et risikofrit aktiv med en afkastrate på 0.04 (dvs. 4%).
Forklar og illustrer grafisk, hvad tangentporteføljen er.
Det oplyses, at den forventede afkastrate på tangentporteføljen er 0.0933. Den gode besvarelse illustrerer, at det er plausibelt. (Det er der 3-4 forskellige måder at gøre på.)

Spg. 3.d [10%]
Er nedenstående udsagn sande eller falske? (Eller kanske noget helt andet, fx "ikke til at afgøre på det foreliggende grundlag", eller meningsløse.)

- Enhver konveks kombination af to eller flere efficiente porteføjler er efficient.
- Enhver konveks kombination af to eller flere inefficiente porteføjler er inefficient.

(En konveks kombination af vektorerne $x_1, \ldots, x_n$ er som bekendt en vektor af formen $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, hvor α_i'erne er positive relle tal, hvis sum er 1.)