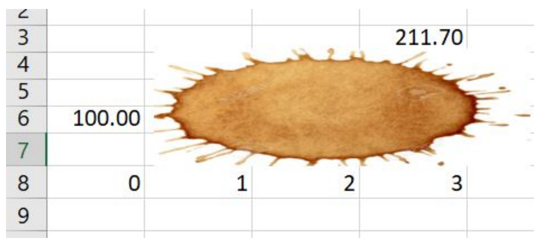
Matematisk Finansiering 1

4 timers skriftlig eksamen tirsdag 27/10 2020. Sættet er på 3 sider (ekskl. forside) og indeholder 4 opgaver og ialt 10 nummererede delspørgsmål, der indgår med lige vægt i bedømmelsen. Opgaverne (hvori . bruges som decimaltegn) kan løses uafhængigt af hinanden. Beregningsmæssige resultater ønskes fuldt dokumenteret i besvarelsen. Det skal således klart fremgå, hvilke formler, der bruges, og hvorfor de bruges.

Opgave 1

I denne opgave betragtes en 3-periode-variant (med tidsskridt af længde 1) af standardbinomialmodellen; $S_{t+1} = S_t \exp(\pm\sigma)$ beskriver prisen (i kr.) på en dividende-fri aktie. Modellen er specificeret ved nedenstående gitter – hvori der uheldigvis er blevet spildt kaffe på regnearket!



Spg. 1a

Hvad er σ (volatiliteten) i modellen, der delvis er skjult bag kaffepletten? (En talværdi, man kan slutte sig til ud fra ovenstående informationer.) **Hvordan** ser det fulde aktiegitter ud? (Kan du ikke svare på det spørgsmål, så brug en plausibel σ-værdi i det følgende.)

Spg. 1b

Hvad skal der gælde om den (konstante, diskret tilskrevne) risikofrie 1-periode rente, r, for at den betragtede model er (i) arbitragefri, (ii) komplet? **Forekommer** det empirisk/praktisk rimeligt?

Antag i det følgende $r = 0.02$ (dvs. renten er 2% pr. periode).

Spg. 1c

Betragt en udløb 3-futures-kontrakt med aktien som underliggende aktiv. **Beregn** tid 0-futuresprisen, Fut_0 (notation fra slides) eller Φ_0 (notation fra noterne). **Angiv** futures-kontraktens betalinger på tid 1 og tid 2. (Sidstnævnte er stiafhængig.)

Spg. 1d

Betragt (europæiske) udløb 3-call- og -put-optioner (på aktien) med strike $K = \text{Fut}(0;3)$. (Brug en anden fornuftig strike-værdi, hvis du ikke har kunnet regne foregående spørgsmål.) **Beregn** tid 0-priserne på disse to optioner. **Angiv** den initiale sammensætning af den (futures-kontrakt, risikofrit aktiv)-strategi, der replikerer call-optionen.

Opgave 2

I denne opgave betragtes en 1-periode-model for priserne for to (dividende-frie) aktier. De har begge tid 0-pris 100, og deres tid 1-priser (abstrakt refereret til som $S_1(1)$ og $S_2(1)$) er givet ved nedenstående matrice, hvor (som sædvanlig) rækker svarer til aktier og søjler til tilstande:

$$D = \begin{pmatrix} 120 & 120 & 60 & 90 & 100 \\ 130 & 170 & 140 & 90 & 90 \end{pmatrix}$$

De 5 tilstande har (P-)sandsynligheder (naturligt ordnet) givet ved $p = (0.28, 0.14, 0.21, 0.30, 0.07)$. Der findes derudover et risikofrit aktiv i modellen; dette har renten 0.02 (dvs. 2%).

Spg. 2a

Beregn korrelationen (under P) mellem de to aktiers afkastrater. (Husk at ikke alle tilstande er lige sandsynlige.)

Nu betragtes en såkaldt spread-option . Det er et aktiv, der på tid 1 betaler

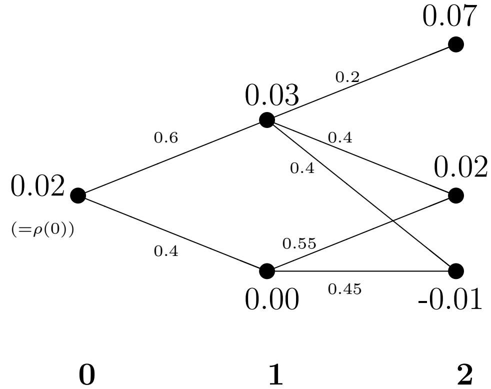
$$\left(\sqrt{S_1(1)S_2(1)} - 100\right)^+.$$

Spg. 2b

Angiv intervallet af arbitragefrie tid 0-priser for spread-optionen.

Opgave 3

Betragt nedenstående model for mulige udviklinger i den korte rente (ρ); den indeholder som sædvanlig tidspunkter, niveauer og (betingede) sandsynligheder. Sandsynlighederne antages at være risiko-neutrale, altså at afspejle et martingalmål (Q).



Spg. 3a
Vis at nulkuponobligationspriser (naturligt ordnet) på tid 0 er givet ved $(0.9804; 0.9633; 0.9512)$. **Er** modellen komplet?

Spg. 3b
Betragt en 3-periode-annuitetsobligation med hovedstol 100. **Hvad** skal kuponrenten være for, at obligationen har kurs 100 på tid 0 (*handler til par*)?

Spg. 3c
(Benyt de risiko-neutrale sandsynligheder fra modelspecifikationen i begyndelsen af opgaven til at beregne priser i dette spørgsmål — uanset komplethed eller ej.) **For hvilke** kuponrenter vil konverterbare (*callable*) 3-periode-annuitetsobligationer handle til par på tid 0?

Opgave 4

Spg. 4a
I noternes kapitel 5 (nederst side 101 i den seneste version når dette skrives – det kan senere have ændret sig en smule) kan man læse følgende definition af replikation i fler-periode-modeller:

Definition 29. *(Replication) We say that we can replicate an adapted process X if there exists a trading strategy ϕ such that $\delta_t^\phi = X_t$ for all $t \geq 1$.*

Forklar hvorfor vi ikke kræver, at ϕ skal være selv-finansierende. **Forklar** hvorfor vi kun kræver $\delta_t^\phi = X_t$ for $t \geq 1$, ikke for $t = 0$.