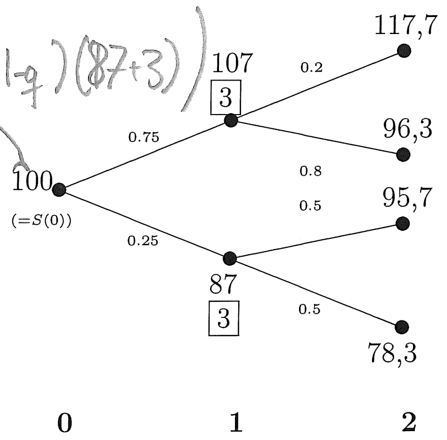
FINANSIERING 1

3 timers skriftlig eksamen, 9-12 fredag 2/9 2011. Alle sædvanlige hjælpemidler (incl. blyant) tilladt. Sættet er på 2 sider og indeholder 8 numererede delspørgsmål, der indgår med lige vægt i bedømmelsen.

Opgave 1

Betragt en 2-periode-model for kursen, S, på en aktie. Den mulige udvikling er fastlagt ved nedenstående gitter med **tidspunkter**, aktiekurser, $\boxed{\text{dividender}}$ og sandsynligheder. Desuden findes der et risikofrit aktiv (bankbogen) med en rente på 2% per periode.

$100 = \frac{1}{1{,}02} E^q\left(q(107+3) + (1-q)(87+3)\right) \Rightarrow q = 0{,}6$ ✓



$q = \frac{1{,}02-0{,}9}{1{,}1-0{,}9} = 0{,}6 \in]0;1[$ ✓

$q = \frac{1{,}02-0{,}9}{1{,}1-0{,}9} = 0{,}6 \in]0;1[$ ✓

Spg. 1a
Vis at modellen er abritrage-fri og komplet.

Spg. 1b
Bestem den arbitrage-fri forward-pris for en forward-kontrakt med udløb på tidspunkt 2 og aktien som underliggende. $FWD(0,T) = E^q(S(2)) = 100{,}98$

Spg. 1c
Beregn den arbitrage-fri tid-0-pris på henholdsvis en europæisk og en amerikansk put-option (på aktien) med udløb på tidspunkt 2 og strike-kurs 96.

Spg. 1d
Angiv den initiale sammensætning af den (forward, bankbog)-portefølje, der replikerer den europæiske put-option fra spg. 1c, idet "forward" refererer til forward-kontrakten fra spg. 1b.

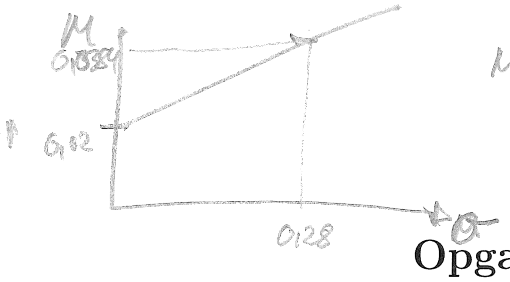
Værdi af FWD i 1-op knude: $E^q_{1op}\left(\frac{S(2)-100{,}98}{1{,}02}\right) = 8$

1-ned — : $E^q_{1,ned}\left(\frac{S(2)-100{,}98}{1{,}02}\right) = -12$

Replikér

$\left.\begin{array}{l} a \cdot 8 + 1{,}02b = 0 \\ a \cdot (-12) + 1{,}02b = 7{,}11 \end{array}\right\} \Rightarrow a = \frac{-7{,}11}{20} = -0{,}356$

$b = 2{,}79$



$\mu = 0,02 + \frac{0,0184}{0,287} \times \sigma$

Opgave 2

Betragt en porteføljevalgsmodel med 2 usikre aktiver (*aktier*, numereret 1 og 2), hvis afkastrater har forventede værdier (μ) og kovarianser ($\mathbf{\Sigma}$) givet ved:

$$\mu = \begin{bmatrix} 0,03 \\ 0,045 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 0,04 & 0,048 \\ 0,048 & 0,16 \end{bmatrix}.$$

I modellen findes yderligere et riskofrit aktiv med en rente på 0,02 (dvs. 2%).

$\mu^e_{TG} = 0,0184 \quad w_{TG} = (0,435 \quad 0,565) \quad \sigma_{TG} = 0,287$

Spg. 2a
Bestem tangentporteføljen og **angiv** (på en måde, du finder passende) den efficiente rand.
(Det kan være nyttigt at vide, at $\mathbf{\Sigma}^{-1}(\mu - 0,02 \times \mathbf{1}) = (0,09766 \;\; 0,12695)^\top$.)

Spg. 2b
Antag at tangentporteføljen er markedsporteføljen. **Verificer at** CAPM-ligningen holder for aktie 1. **Holder den også** for aktie 2?

JA

LHS $0,03 - 0,02 = 0,01$ RHS $\beta = \frac{(1,0)\Sigma w_{TG}}{0,287^2} (0,0184) = 0,0100$

Opgave 3

Spg. 3a
Hvad forstås ved implicit volatilitet ("implied volatility")?

$C^{obs} = C^{B/S}(\ldots, \sigma_{IMP})$

Spg. 3b
Lad $\{X_j\}_{j=0}^T$ være en følge af uafhængige standard-normalfordelte stokastiske variable, $X_j \sim N(0, 1)$, og lad $\mathcal{F}$ være X'ernes naturlige filtrering. Sæt $N_1(0) = N_2(0) = N_3(0) = 0$ og definer

$$N_1(t) = \sum_{j=1}^{t} X_j^2, \quad N_2(t) = \sum_{j=1}^{t} X_{j-1}X_j \text{ og } N_3(t) = \sum_{j=1}^{t} X_j^3 \text{ for } 1 \leq t \leq T.$$

Analyser N-processernes martingal-egenskaber (mht. $\mathcal{F}$, forståeligvis).

N_1 er ikke MG, N_2 og N_3 er MG.