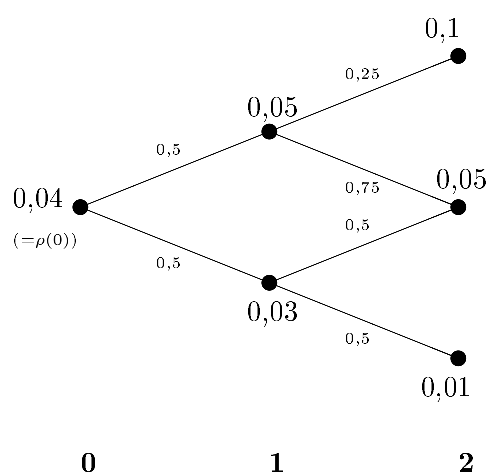
FINANSIERING 1

3 timers skriftlig eksamen, fredag 24/6 2016. Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt. Sættet er på 3 sider og indeholder 9 delspørgsmål, der indgår med lige vægt i bedømmelsen.

Opgave 1

Betragt nedenstående model for mulige udviklinger i den korte rente (ρ); den indeholder som sædvanlig tidspunkter, niveauer og (betingede) sandsynligheder. Sandsynlighederne antages at være risiko-neutrale, altså at afspejle et martingalmål (Q).



1.a **Vis** at nulkuponobligationspriserne på tid 0 er givet ved

$$\big(P(0,1); P(0,2); P(0,3)\big) = (0,96154; 0,92464; 0,88446)$$

Og **angiv** nulkupon- og forwardrenter på tid 0.

1.b Betragt nu en call option på nulkupon obligationen der betaler $(P(2,3) - 0.93)^+$ på tidspunkt 2. **Beregn** tid-0 prisen på denne option

1.c Lad nu $call_0^{zcb}$ betegne tid-0 prisen på en generel call option på en nulkupon obligation med betaling på tidspunkt t på $(P(t,T) - K)^+$. Lad tilsvarende put_0^{zcb} være tid-0 prisen på en put option med betaling $(K - P(t,T))^+$ på tidspunkt t. Bevis følgende udsagn:

$$P(0,T) - KP(0,t) = call_0^{zcb} - put_0^{zcb}.$$

1.d Antag nu at prisen for en put option der betaler $(0.93 - P(2,3))^+$ på tidspunkt 2 er 0,01 kr. Brug den udledte relation fra det forrige spørgsmål til at konstruere en arbitrage strategi bestående af put'en, call'en (fra 1b), samt to passende nulkuponobligationer. Angiv om – og hvor meget – du køber og sælger af hvert aktiv. Argumenter for at strategien er en arbitrage ved at beregne alle mulige cash-flows for strategien på hhv tid $0, 1, 2$ og 3.

1.e Betragt en stående (bullet) obligation med initiel hovedstol F, kupon rente R og udløb på tidspunkt T. Antag obligationen har betalinger på tidspunkter $1, \dots, T$. Prisen for denne obligation på tid-t betegnes $P^b(t,T)$. Lad $call_0^b$ og put_0^b være tid-0 call og put priser på kontrakter der betaler hhv. $(P^b(t,T) - K)^+$ og $(K - P^b(t,T))^+$ på tid t. Vis:

$$P^b(0,T) - FR\sum_{i=1}^{t} P(0,i) - KP(0,t) = call_0^b - put_0^b$$

Opgave 2

Antag vi har to aktier X og Y, hvor der gælder om deres afkastrater:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_X \\ r_Y \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \mathbb{E}[\mathbf{r}] = \begin{bmatrix} 0,09 \\ 0,12 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \mathrm{Var}[\mathbf{r}] = \begin{bmatrix} 0,03 & 0,035 \\ 0,035 & 0,06 \end{bmatrix}$$

Vi får yderligere at vide at de to aktier er en del af en større økonomi, hvor markedsporteføljen har forventet afkast på 10% dvs $\mu_M = 0,1$. Den risikofri rente er $r_0 = 0,01$. Du får yderligere at vide at de to aktier har følgende beta værdier (mht markedsporteføljen):

$$\beta_X = 0,6; \quad \beta_Y = 1,1$$

2.a Holder CAPM i dette marked? Begrund dit svar.

2.b Antag du arbejder i *Low Risk*-afdelingen i en kapitalfond og alle dine positioner må maksimalt have 10% standardafvigelse og ingen markedsrisiko ($\beta = 0$). Din chef øjner en 'fed' investeringsmulighed. Hun har observeret at Y har et højere forventet afkast end X og derfor siger hun: konstruer en portefølje P bestående af X, Y samt det risikofri aktiv hvor du 1) er lang (har positiv porteføljevægt) i Y og kort (har negativ porteføljevægt) i X og 2) Ingen systematisk risiko har (dvs $\beta_P = 0$) samt 3) at standardafvigelsen på porteføljens afkastrate er $\sigma_P = 0,1$. Beregn porteføljens vægte i X, Y og det risikofri aktiv samt dens forventede afkastrate, μ_P på denne portefølje. Er dette en god investering? Begrund dit svar.

2.c Foreslå en portefølje som opfylder krav nr. 2) og 3) men ikke nødvendigvis krav nr. 1) fra forrige spørgsmål, som du mener vil være en bedre investering. Beregn den forventede afkastrate på denne portefølje.

Opgave 3

Lad $\{Q\}_{j=1}^{T}$ være en tilpasset (til $\mathcal{F}$) følge af uafhængige 'forskudt-ikke-central-chi-i-anden' fordelte stokastiske variable.[1], dvs $Q_j \sim \chi_k^2(c, \lambda), \forall j = 1, \dots, T$. Sæt $M(0) = 0$ og definer

$$M(t) = \sum_{i=1}^{t} Q_i, \quad \forall t = 1, \dots, T$$

Under hvilke antagelser for parametrene c, k og λ er M en martingale (Mht $\mathcal{F}$)?

[1] Lad $X_i, \dots, X_k$ være uafhængige og $X_i \sim N(\mu_i, 1), \forall i$. Da siges at $Q \sim \chi_k^2(c, \lambda)$ hvis $Q = c + \sum_{i=1}^{k} X_i^2$ og $\lambda = \sum_{i=1}^{k} \mu_i^2$. c kaldes *forskydningen*, k kaldes *frihedsgraderne* og λ kaldes *ikke-centralitetsparameteren*