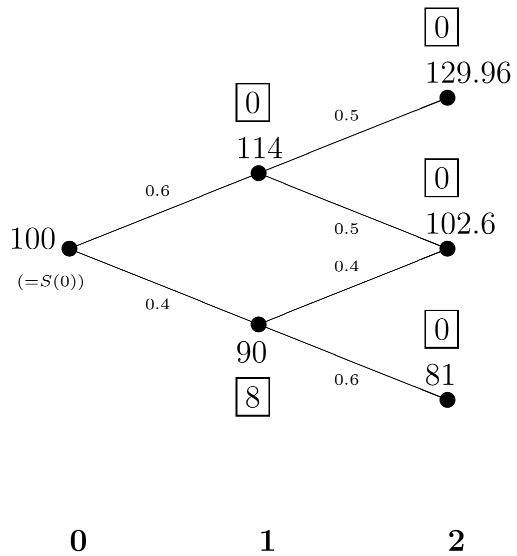
NATURVIDENSKABELIG KANDIDATEKSAMEN
VED KØBENHAVNS UNIVERSITET

INVESTERINGS- OG FINANSIERINGSTEORI

4 timers skriftlig eksamen, 10-14, mandag 6/6 2005.
Ingen hjælpemidler (blyant og lommeregner dog tilladt). Antal sider i sættet: 4.

Opgave 1

I denne opgave betragtes en 2-periode binomialmodel, hvor S er kursen/prisen på en aktie. Den mulige aktiekursudvikling er fastlagt ved nedenstående gitter med **tidspunkter**, aktiekurser, dividendebetalinger (der også kan kaldes udbyttebetalinger) og sandsynligheder. Desuden findes der et risikofrit aktiv (*bankbogen*) med en (diskret tilskrevet) rente på 2% per periode.



Spg. 1.a [10%]
Vis at modellen er arbitragefri og komplet og find det ækvivalente martingalmål Q (fx ved at bestemme alle de betingede martingal-springsandsynligheder; q'erne).

Spg. 1.b [10%]
Betragt en europæisk call-option på aktien. Optionen udløber på tid $T = 2$ og har

strike-kurs (aftale-kurs, exercise-kurs) $K = 85$.
i) Hvad er den arbitragefri prisproces for denne call-option?
Call-optionen kan som bekendt replikeres (eller "hedges", hvis man vender fortegnene) med en portefølje, der (kun) indeholder aktien og bankbogen.
ii) Hvor mange stk. aktier er der på tid 0 i denne portefølje?

Spg. 1.c [10%]
i) Bestem tid-0 prisen på den amerikanske version af call-optionen fra spg. 1.b.
ii) Hvordan forholder den sig til den europæiske options pris?
iii) Hvornår (dvs. i hvilke knuder) *exercises* den amerikanske option?

Spg. 1.d [10%]
i) Vis at tid-0 futuresprisen på en udløb-2 futures-kontrakt med aktien som underliggende, $\mathrm{Fut}(0;2)$, er 97.92.
ii) Bestem tid-0 forwardprisen på en udløb-2 forward-kontrakt med aktien som underliggende.
iii) Forklar kort hvordan priser og betalinger for aktien (ofte kaldet *spot* i denne sammenhæng), forward-kontrakter og futures-kontrakter hænger sammen.

Opgave 2

Spg. 2.a [10%]
Betragt en arbitrage-fri model med en aktie (med positiv prisproces S), en bankbog (med konstant, positiv, kontinuert tilskrevet rente r) og en call-option (med positiv strike-kurs K og udløb på tid T).
Vis at hvis aktien ikke udbetaler dividende mellem 0 og T, så gælder flg. uligheder for udløb-T call-optionsprisen C

$$S(0) \geq C(0) \geq (S(0) - e^{-rT}K)^+.$$

Vink: Opskriv det generelle udtryk for den arbitrage-fri pris og lav (simple) vurderinger. 2. ulighed vises lettest ved at kombinere to separate vurderinger.

Spg. 2.b [10%]
Som et specialtilælde af spg. 2.a betragt nu Black/Scholes-modellen, dvs.

$$S(t) = S(0)\exp(\alpha t + \sigma W^P(t)),$$

hvor W^P er en Brownsk bevægelse (under et sandsynlighedsmål P).
i) Vis at processen defineret ved $e^{-rt}S(t)$ er en (P-)martingal præcis når $\alpha = (r - \sigma^2/2)$.

ii) Betragt nu *digital-option*, dvs. et aktiv, der på tid T betaler 1 hvis $S(T)$ er større end K, og 0 ellers. Symbolsk kompakt skrevet er pay-off altså $\mathbf{1}_{S(T)\geq K}$. Vis at arbitrage-fri pris (på tid 0) på digital-optionen er

$$\text{Digital}(0) = e^{-rT}\Phi\left(\frac{\ln(S(0)/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right),$$

hvor Φ som sædvanlig er fordelingsfunktionen for standardnormalfordelingen.

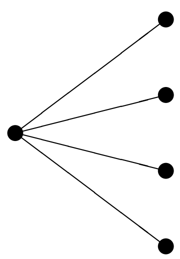
<u>Spg. 2.c</u> [10%]
I Black/Scholes-modellen er call-optionsprisen som bekendt givet ved

$$\begin{aligned} C(S(0), T, r, K, \sigma) &= S(0)\Phi\left(\frac{\ln(S(0)/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\ &\quad - Ke^{-rT}\Phi\left(\frac{\ln(S(0)/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right). \end{aligned}$$

Forklar hvad den implicitte volatilitet (baseret på Black/Scholes-modellen) for en call-option er. (Vi kunne fx sige, du observerede prisen C^{obs} på markedet.) Den gode besvarelse forholder sig til ting som definition, eksistens/entydighed, finansiel fortolkning og opførsel.
Ifm. entydighed kan det (uden bevis; et sådant er en eksersits i at differentiere) benyttes at $\frac{\partial C}{\partial \sigma} > 0$.

Opgave 3

I denne opgave betragtes en 1-periode model med 4 fremtidige tilstande og et komplet kapitalmarked. Nedenstående figur angiver sandsynlighederne for de 4 tilstande, p_i for $i = 1, 2, 3, 4$ (svarende til sandsynlighedsmålet P), samt deres tilhørende tilstandspriser AD_i (dvs. priserne på de simple "0 eller 1"-aktiver; Arrow-Debreu-aktiverne):



i	p_i	AD_i
1	0.20	0.3
2	0.30	0.2
3	0.30	0.2
4	0.20	0.2

Desuden betragtes en virksomhed, hvis værdi på tid, også kaldet *værdien af aktiverne*, i de forskellige tilstande er:

$$V(1) = \begin{pmatrix} 110 \\ 100 \\ 80 \\ 40 \end{pmatrix}.$$

<u>Spg. 3.a</u> [10%]
Virksomheden er finansieret dels vha. aktier ("equity", egenkapital) og dels vha. gæld ("debt", som vi kan tænke på virksomhedsobligationer eller bankens tilgodehavende). Hovedstolen, D, på gælden er 90, og der er ikke skatter eller fallitomkostninger.
i) Bestem tid-0 værdien af aktier og gæld.
ii) Hvordan hænger værdien af aktier og gæld (og deres sum, som vi kunne kalde værdien af virksomheden) sammen med værdien af aktiverne, og hvordan afhænger disse størrelser af gældens hovedstol D (eller mere indbydende formuleret: *af virksomhedens kapitalstruktur*)?

<u>Spg. 3.b</u> [10%]
Forklar (kvalitativt) hvordan skatter og fallitomkostninger kan påvirke analysen fra spg. 3.a ii). Kom specielt ind på, hvordan det herved kan give (ikke-triviel) mening at snakke om *optimal* kapitalstruktur.

<u>Spg. 3.c</u> [10%]
Der opstår nu mulighed for at investere i et projekt med betalingerne $(22, 20, 16, 8)$ (dvs. 22 i tilstand 1 osv.) som koster 13 at igangsætte.
i) Hvad er projektets nettonutidvædi (NPV)?
ii) *Du* investerer i projektet. Hvad er den forventede afkastrate og hvorledes forholder denne sig til den risikofrie rente (altså afkastraten på et (konstrueret) riskofrit aktiv)?
iii) Virksomheden overvejer at investere i projektet. Kommenter kort aktionærers og gældsejeres syn på projektet.