Ad eksamen april 2007, opgave 2, spg. 2c

Her er to forslag til, hvorledes man kan argumentere for, hvordan det angivne udtryk for $V^{KA}(t)$ fremkommer.

Intuitivt

Til tidspunkt t har låntager - efter at have betalt ydelsen til tidspunkt t - to muligheder:

- Han kan konvertere obligationen (dvs. tilbagebetale sin restgæld), og i så fald er obligationens værdi lig restgælden $H(t)$.
- Han kan lade obligationen løbe videre. Per definition af det ækvivalente martingalmål Q er værdien af obligationen ved ikke at konvertere (jf. `LaPo` s. 64)

$$E_t^Q \left(\frac{V^{KA}(t+1) + y}{1 + \rho(t)} \right).$$

Låntager opnår således den *mindst* mulige værdi af sit udestående lån (=den konverterbare obligation) ved at vælge den af de to muligheder, der giver den laveste værdi, dvs.

$$V^{KA}(t) = \min \left\{ H(t),\ E_t^Q \left(\frac{V^{KA}(t+1) + y}{1 + \rho(t)} \right) \right\}.$$

Formelt

Man kan tænke på låntagers konverterbare obligation (KA: Konverterbar Annuitet) som en portefølje bestående af en inkonverterbar obligation (INK) og en amerikansk call-option (AMR) med tidsvarierende strike $H(t)$ skrevet på den inkonverterbare annuitet. Låntager har således solgt en inkonverterbar obligation og samtidig købt en amerikansk call-option, dvs.

$$V^{KA}(t) = V^{INK}(t) - \pi^{AMR}(t).$$

Værdien af den inkonverterbare obligation er (per definition af det ækvivalente martingalmål Q)

$$V^{INK}(t) = E_t^Q \left(\frac{V^{INK}(t+1) + y}{1 + \rho(t)} \right)$$

og værdien af den amerikanske call-option er tilsvarende

$$\pi^{AMR}(t) = \max \left\{ V^{INK}(t) - H(t),\ E_t^Q \left(\frac{\pi^{AMR}(t+1)}{1 + \rho(t)} \right) \right\}.$$

Værdien af den konverterbare obligation er derfor

$$
\begin{aligned}
&V^{KA}(t) \\
&= V^{INK}(t) - \pi^{AMR}(t) \\
&= V^{INK}(t) - \max\left\{V^{INK}(t) - H(t),\ E_t^Q\left(\frac{\pi^{AMR}(t+1)}{1+\rho(t)}\right)\right\} \\
&= V^{INK}(t) + \min\left\{-V^{INK}(t) + H(t),\ -E_t^Q\left(\frac{\pi^{AMR}(t+1)}{1+\rho(t)}\right)\right\} \\
&= \min\left\{V^{INK}(t) - V^{INK}(t) + H(t),\ V^{INK}(t) - E_t^Q\left(\frac{\pi^{AMR}(t+1)}{1+\rho(t)}\right)\right\} \\
&= \min\left\{H(t),\ E_t^Q\left(\frac{V^{INK}(t+1)+y}{1+\rho(t)}\right) - E_t^Q\left(\frac{\pi^{AMR}(t+1)}{1+\rho(t)}\right)\right\} \\
&= \min\left\{H(t),\ E_t^Q\left(\frac{V^{INK}(t+1) - \pi^{AMR}(t+1) + y}{1+\rho(t)}\right)\right\} \\
&= \min\left\{H(t),\ E_t^Q\left(\frac{V^{KA}(t+1)+y}{1+\rho(t)}\right)\right\}.
\end{aligned}
$$

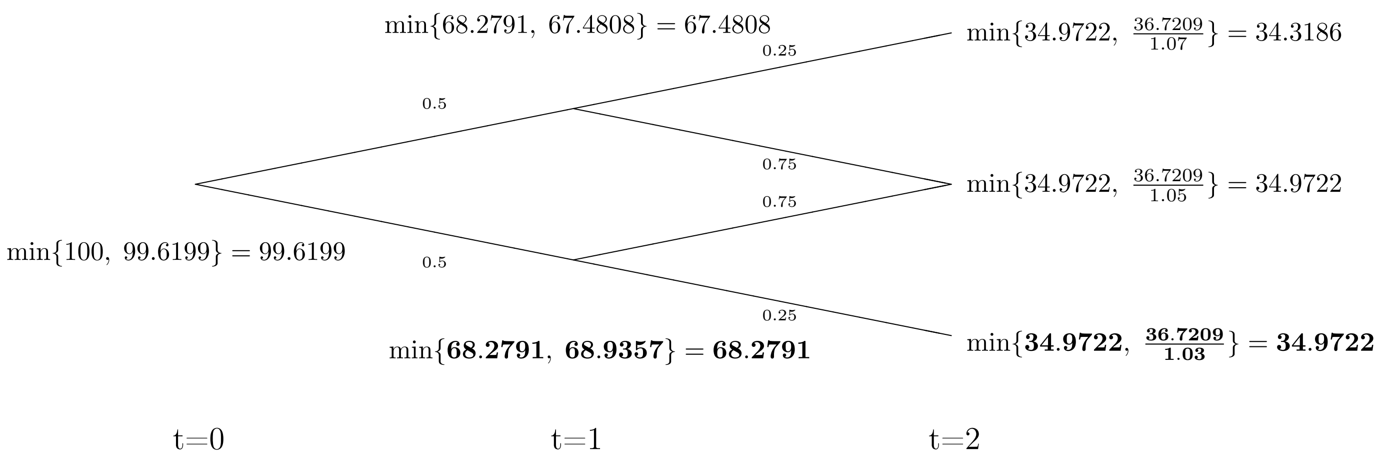
Den inkonverterbare obligation har ydelse $y = 36.7209$ og til tidspunkt t afdrag $\delta_t = \frac{100}{\alpha_{3\rceil 5\%}}\left(1 - 0.05\alpha_{3-t+1\rceil 5\%}\right)$ på hovedstolen (se `LaPo` s. 20), dvs.

δ_1	31.7209
δ_2	33.3069
δ_3	34.9722

og restgælden $H(t)$ bliver dermed

$H(1)$	68.2791
$H(2)$	34.9722
$H(3)$	0

Heraf følger så værdien af den konverterbare annuitet som



hvor der konverteres i knuder med **fed** skrift[1], og hvor vi i beregningerne til $t = 0, 1$ har brugt at

$$\frac{0.5 \cdot 67.4808 + 0.5 \cdot 68.2791 + 36.7209}{1.05} \approx 99.6199$$
$$\frac{0.25 \cdot 34.3186 + 0.75 \cdot 34.9722 + 36.7209}{1.06} \approx 67.4808$$
$$\frac{0.75 \cdot 34.9722 + 0.25 \cdot 34.9722 + 36.7209}{1.04} \approx 68.9357.$$

[1] Bemærk: Det er ligegyldigt om der konverteres i den midterste knude til $t = 2$ eller ej - kuponrenten er jo lig den risikofri rente.