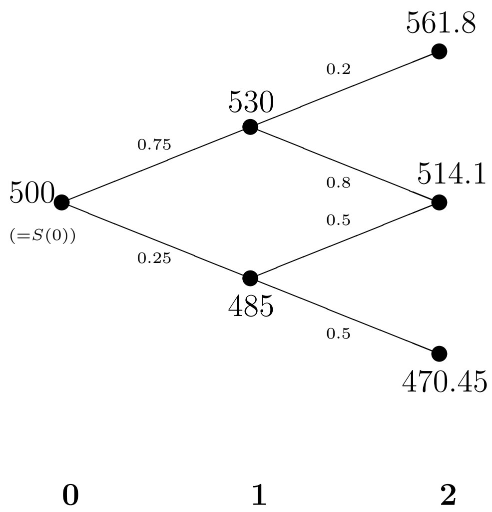
FINANSIERING 1

3 timers skriftlig eksamen, 9-12, onsdag 5/4 2006. Alle sædvanlige hjælpemidler (incl. blyant) tilladt. Sættet er på 4 sider og indeholder 7 delopgaver, der indgår med lige vægt i bedømmelsen.

Opgave 1

Betragt en 2-periode model for kursen, S, på en aktie, der i det betragtede tidsrum ikke udbetaler dividende. Den mulige udvikling er fastlagt ved nedenstående gitter. (Med **tidspunkter**, aktiekurser og sandsynligheder.) Desuden findes der et risikofrit aktiv (*bankbogen*) med en rente på 1% per periode.



1.a

Vis at modellen er arbitragefri og komplet.

En *digital*-option, er en kontrakt, der på udløbstidpunktet T udbetaler 1 kr. præcis hvis aktiekursen er højere end strikekursen K, dvs. dens pay-off er

$$\mathbf{1}_{S(T)\geq K}.$$

Bestem den arbitragefri tid-0 pris på en digital-option med $K = 500$ og $T = 2$.

1.b

Nu betragtes en digital barriere-option. Dette er en kontrakt, der udbetaler 1 kr. på tid

T præcis, hvis aktiens kurs har været større end strikekursen K i *hele* optionens levetid, dvs. dens pay-off er

$$\mathbf{1}_{\min_{u\in[0;T]}\{S(u)\}\geq K}.$$

Bestem prisen på en digital barriere-option med $K = 500$ og $T = 2$.
Forklar hvordan den digitale barriere-option kan replikeres med aktien og den almindelige digital-option fra 1.a. (Der ønskes kun foretaget tid-0 beregninger.)

Opgave 2

Betragt en porteføljevalgsmodel med 2 usikre aktiver (*aktier*, numereret 1 og 2), hvis afkastrater har forventede værdier (μ) og kovarianser ($\mathbf{\Sigma}$) givet ved:

$$\mu = \begin{bmatrix} 0.04 \\ 0.07 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.01 \\ 0.01 & 0.04 \end{bmatrix}.$$

I modellen er der yderligere et risikofrit aktiv med afkastrate $r_0 = 0.01$.

<u>2.a</u>
Hvad er korrelationen mellem to aktiers afkastrater?
Bestem den efficiente rand (*capital market line*) og porteføljevægtene for tangentporteføljen.
Vink: Det kan være nyttigt at vide at $\mathbf{\Sigma}^{-1}(\mu - r_0\mathbf{1}) = (2,1)^\top$.

<u>2.b</u>
Antag tangentporteføljen er markedsporteføljen. og betragt en porteføjle, x, med lige vægt i aktie 1, aktie 2 og det risikofrie aktiv.
Hvad er x-porteføljens *Sharpe-ratio*. Er x-porteføljen efficient?
Hvad er x-porteføljens β(beta)-værdi? Vis at CAPM-relationen holder for x-porteføljen.
Er du overrasket?

Opgave 3

Betragt et filtreret sandsynlighedrum $(\Omega, \{\mathcal{F}_t\}, \mathcal{F}, P)$, hvorpå X er en stokastisk variabel. For et givet t kan man nu have lyst til at finde

$$Z_t = \arg \min_{Z:\mathcal{F}_t-\text{målelig}} \mathbf{E}((X-Z)^2),$$

altså den $\mathcal{F}_t$-målelige stokastiske variabel Z_t, der ligger tættest på X (i “kvadratisk middel” forstand). Sådan et Z_t kan fortolkes som vores bedste bud på X givet informationen på tid t. I denne opgave skal det vises at minimeringsproblemet løses af den betingede middelværdi, altså $Z_t = \mathbf{E}(X|\mathcal{F}_t)$.

3.a

Vis at for enhver $\mathcal{F}_t$-målelig stokastisk variabel Z gælder at

$$\mathbf{E}(Z(X - \mathbf{E}(X|\mathcal{F}_t))) = 0.$$

Vink: Itererede forventninger.

Lad (stadig) Z være en vilkårlig $\mathcal{F}_t$-målelig stokastisk variabel. Skriv

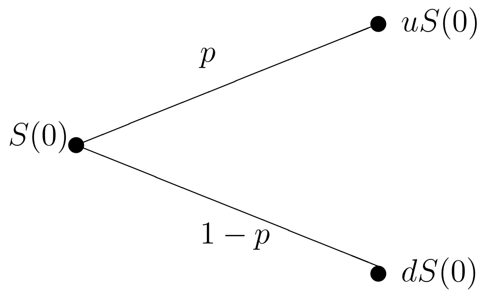
$$X - Z = (X - \mathbf{E}(X|\mathcal{F}_t)) + (\mathbf{E}(X|\mathcal{F}_t) - Z).$$

Kvadrer dette, tag middelværdi og vis, at minimeringsproblemet præcis løses af den betingede middelværdi, altså $Z_t = \mathbf{E}(X|\mathcal{F}_t)$.

Vink: Du får tre led; et afhænger tydeligvis ikke af Z, et er 0 og det er til at se, hvordan det sidste led gøres mindst muligt.

Opgave 4

I denne opgave betragtes en en-periode model med to tilstande.



Der er desuden et risikofrit aktiv med pris 1 på tid 0 og R på tid 1. Vi ved, at når $u > R > d$, så kan den (entydige) arbitragefri pris på en call-option kan skrives som

$$\text{call}(0) = \mathbf{E}^q \left(\frac{\text{call}(1)}{R} \right), \tag{1}$$

hvor der tages middelværdi med sandsynlighedsparameteren $q = (R-d)/(u-d)$.

<u>4.a</u>
Vis at vi alternativt kan skrive

$$\text{call}(0) = S(0)\mathbf{E}^{q'} \left(\frac{\text{call}(1)}{S(1)} \right), \tag{2}$$

hvor $\mathbf{E}^{q'}$ indikerer, at der tages middelværdi med sandsynlighedsparameteren $q' = (uq)/R$. Vink: Vis at højresiden i ligning (2) kan skrives som

$$\frac{q'}{u} \times \text{call}^{up} + \frac{1-q'}{d} \times \text{call}^{down}$$

og regn videre på det.

<u>4.b</u>
Ser man på ligning (1), ville man *umiddelbart* tro at call-prisen falder, hvis renten stiger; der diskonteres hårdere. Vis at dette *ikke* er tilfældet, men at vi tværtimod har

$$\frac{\partial \text{call}(0)}{\partial R} \geq 0.$$

Vink: Vis at $\text{call}^{up}/u \geq \text{call}^{down}/d$ og brug vinket ovenfor.