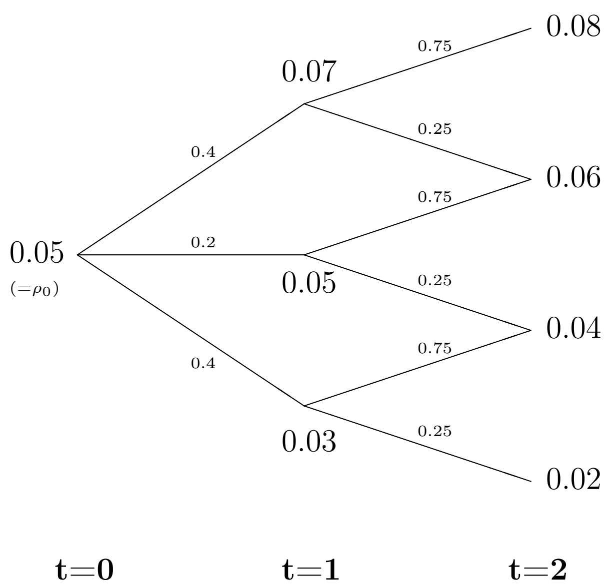
FINANSIERING 1

3 timers skriftlig eksamen, kl. 10-13, onsdag 13/8 2008. Alle sædvanlige hjælpemidler (inkl. blyant) er tilladt. Sættet er på 4 sider og indeholder 8 nummererede delspørgsmål, der indgår med lige vægt i bedømmelsen.

Opgave 1

Betragt nedenstående gitter (med **tidspunkter** og sandsynligheder) for udviklingen i den korte rente (1-periode spotrenten) ρ_t under et ækvivalent martingalmål Q:



Vi lader i det følgende $P(s,t)$ betegne den arbitragefri pris til tidspunkt s på en nulkuponobligation med udløb til tidspunkt t.

Spg. 1a

Vis at de arbitragefri nulkuponobligationspriser til tidspunkt $t = 0$ er

$$\big(P(0,1),\ P(0,2),\ P(0,3)\big) = (0.9524,\ 0.9073,\ 0.8605).$$

Bestem de tilhørende effektive renter $y(0,t)$ for $t = 1, 2, 3$.
Bestem forward-renterne $f(0,t)$ for $t = 0, 1, 2$.

Spg. 1b

Betragt nu et 2-periode annuitetslån med hovedstol 100 og kuponrente 7%, der løber fra tidspunkt $t = 1$ til $t = 3$ (dvs. lånet afdrages til de to tidspunkter $t = 2, 3$).
Angiv annuitetslånets betalingsrække samt lånets tre mulige priser til tidspunkt $t = 1$ (afhængig af værdien af ρ_1).
Angiv prisen $\Phi_{0,1}$ til tidspunkt $t = 0$ på en futures-kontrakt på køb af annuitetslånet til tidspunkt $t = 1$.
Hvad er prisen $F_{0,1}$ til tidspunkt $t = 0$ på den tilsvarende forward-kontrakt?

Opgave 2

Betragt en model for middelværdi/varians-optimalt porteføljevalg med to risikofyldte aktiver og ikke noget risikofrit aktiv. Middelværdi og kovarians på de risikofyldte aktivers afkastrater r er givet ved

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 0.10 \\ 0.05 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 0.03 & -0.01 \\ -0.01 & 0.02 \end{bmatrix}.$$

Spg. 2a

Bestem porteføljevægte $\mathbf{w}_{GMV}$ og forventet afkastrate μ_{GMV} for den globale minimum-varians-portefølje.
(Vink: Udnyt evt. at $\boldsymbol{\Sigma}^{-1} = \begin{bmatrix} 40 & 20 \\ 20 & 60 \end{bmatrix}$ og $A := \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}^\top \\ \mathbf{1}^\top \end{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu} & \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.75 & 10 \\ 10 & 140 \end{bmatrix}$)
Bestem porteføljevægte $\mathbf{w}_{mv}$ for minimum-varians-porteføljen med forventet afkastrate $\mu_{mv} = 0.08$.
(Vink: Udnyt evt. at $A^{-1} = \begin{bmatrix} 28 & -2 \\ -2 & 0.15 \end{bmatrix}$)

Spg. 2b

Gør rede for at $\mu_{zmv} \neq \mu_{mv}$, hvor μ_{zmv} er forventet afkastrate for den minimum-varians-portefølje $\mathbf{w}_{zmv}$, der er ortogonal med $\mathbf{w}_{mv}$ fra spg. 2a.
(Vink: Betragt porteføljen $\tilde{\mathbf{w}} = \frac{1}{2}\mathbf{w}_{mv} + \frac{1}{2}\mathbf{w}_{zmv}$ og vis at $\mu_{zmv} = \mu_{mv}$ fører til en modstrid ved at se på $Var(\tilde{\mathbf{w}}^\top r)$. Det er ikke nødvendigt først at beregne $\mathbf{w}_{zmv}$)
Gør rede for at der findes $\alpha \in \mathbb{R}$, således at

$$\mathbf{w}_{GMV} = \alpha \mathbf{w}_{mv} + (1 - \alpha)\mathbf{w}_{zmv}. \tag{1}$$

(Vink: 2-fonds-separation)

Spg. 2c

Vis at $\mu_{zmv} < \mu_{GMV}$, idet det oplyses at α i ligning (1) opfylder $0 < \alpha < 1$.
(Vink: Det følger fra spg. 2a at $\mu_{mv} > \mu_{GMV}$)
Afgør om $\mathbf{w}_{zmv}$ er en efficient portefølje.

Opgave 3

Adskillige danske banker tilbyder investeringsrådgivning i forbindelse med handel med optioner på danske og udenlandske aktier.

Man kunne i november 2005 læse følgende i dagbladet Børsen:

> *En strategi for en investor, der er enig med os i, at der er stor sandsynlighed for, at aktien vil udvise store udsving, men ikke nødvendigvis er sikker på, i hvilken retning pilen peger, er at købe en såkaldt straddle.*

En straddle med strike kurs K skrevet på en ikke-dividende betalende aktie er en portefølje bestående af en europæisk call-option og en europæisk put-option på aktien, begge med strike kurs K. Hvis aktiekursen ved udløbstidspunktet T er S_T, har en straddle således et payoff på

$$(S_T - K)^+ + (K - S_T)^+.$$

Spg. 3a

Forklar hvad der menes med, at det kan være attraktivt at købe en straddle, hvis man forventer store udsving i aktiekursen, men ikke ved i hvilken retning.
(Vink: Tegn payoff som funktion af S_T)
Forklar hvordan man kan udnytte en straddle, hvis man i stedet forventer *små* udsving i aktiekursen.

Vi lader i det følgende $Call_{t,T}(S_t, K)$ hhv. $Put_{t,T}(S_t, K)$ betegne prisen til tidspunkt t på en europæisk call- hhv. put-option med strike kurs K og udløb til tidspunkt T skrevet på aktien med kurs S_t til tidspunkt t.

Spg. 3b

Gør rede for at der for to ikke-dividende betalende aktier med aktiekurser S_t og V_t gælder at

$$Call_{t,T}(S_t + V_t, 2K) \leq Call_{t,T}(S_t, K) + Call_{t,T}(V_t, K)$$
$$Put_{t,T}(S_t + V_t, 2K) \leq Put_{t,T}(S_t, K) + Put_{t,T}(V_t, K).$$

(Vink: Vis f.eks. for call-optionerne at $(S_T + V_T - 2K)^+ \leq (S_T - K)^+ + (V_T - K)^+$ og udnyt så, at arbitragefri priser er $Q-$forventede diskonterede værdier)
Forklar intuitionen bag resultatet.
(Vink: Se på tilfældet hvor den ene aktiekurs er meget lav og den anden meget høj. Hvad betyder det for værdien af de tre call- hhv. put-optioner?)

Spg. 3c
En investor overvejer følgende to investeringsmuligheder:

(A) *enten* en straddle med strike kurs 200 skrevet på summen af aktiekurserne for hhv. Carlsberg og Novo Nordisk

(B) *eller* en straddle på Carlsberg med strike kurs 100 *og* en straddle på Novo Nordisk ligeledes med strike kurs 100.

Alle straddles har samme udløbstidspunkt og ingen af de to aktier antages at udbetale dividende. Investoren har af sin investeringsrådgiver fået at vide, at de to investeringsmuligheder er akkurat lige gode.
Kommenter.
(Vink: Udnyt resultatet fra spg. 3b)