$$t_0 = -\sqrt{3}/3 = -0.577350 \text{ e } t_1 = \sqrt{3}/3 = 0.577350$$

$$A_0 = A_1 = 1.$$

Então,

$$I \approx 5[A_0 g(t_0) + A_1 g(t_1)] = 5[e^{-5 + 5\sqrt{3}/3} + e^{-5 - 5\sqrt{3}/3}] =$$

$$= 5\,[e^{-2.113249} + e^{-7.886751}] = 0.606102.$$

Sabemos que com seis casas decimais,

$$\int_0^{10} e^{-x}\, dx = 0.999955.$$

Assim, o verdadeiro erro, com seis casas decimais, é

$$|\text{erro}| = |0.999955 - 0.606102| = 0.393853$$

Para que $|E_{TR}| \leqslant 0.393853$, na regra dos Trapézios, seria necessário tabelar f(x) em, no mínimo, 16 pontos ($m \geqslant 15$).

E, para a regra 1/3 de Simpson, $|E_{SR}| \leqslant 0.393853$, implica $m \geqslant 8$ e seria necessário portanto, tabelar a função em 9 pontos.

EXERCÍCIOS

1. Calcule as integrais a seguir pela regra dos Trapézios e pela de Simpson, usando quatro e seis divisões de [a, b].

   Compare os resultados:

   a) $\int_1^2 e^x\, dx$

b) $\int_1^4 \sqrt{x}\, dx$

c) $\int_2^{14} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

2. Usando as integrais do exercício anterior com quantas divisões do intervalo, no mínimo, podemos esperar obter erros menores que 10^{-5}?

3. Calcule o valor aproximado de $\int_0^{0.6} \frac{dx}{1+x}$ com três casas decimais de precisão usando

   a) Simpson

   b) Trapézios.

4. Em que sentido a regra de Simpson é melhor do que a regra dos Trapézios?

5. Qual o erro máximo cometido na aproximação de $\int_0^4 (3x^3 - 3x + 1)dx$ pela regra de Simpson com quatro subintervalos?

   Calcule por Trapézios e compare os resultados.

6. Determinar h, a distância entre x_i e x_{i+1}, para que se possa avaliar $\int_0^{\pi/2} \cos(x)dx$ com erro inferior a $\varepsilon = 10^{-3}$ pela regra de Simpson.

7. Use a regra 1/3 de Simpson para integrar a função abaixo entre 0 e 2 com o menor esforço computacional possível (menor número de divisões e maior precisão). Justifique. Trabalhe com três casas decimais.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ (x+2)^3 & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

8. A regra dos Retângulos repetida é obtida quando aproximamos f(x), em cada subintervalo, por um polinômio de interpolação de grau zero. Encontre a regra dos Retângulos bem como a expressão do erro, fazendo:

17. Considere a integral:

$$I = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx.$$

a) Estime I pela regra de Simpson usando h = 0.25.

b) Estime I por Quadratura Gaussiana com 2 pontos.

c) Sabendo que o valor exato de I (usando 5 casas decimais) é 0.74682, pede-se:

c1) compare as estimativas obtidas em (*a*) e (*b*);

c2) quantos pontos seriam necessários para que a regra dos Trapézios obtivesse a mesma precisão que a estimativa obtida para I em (*b*)?

11. $y(t) = ab^t$. Além do teste de alinhamento ser razoável para esta função, a outra possibilidade apresenta problemas. Verifique.

13. Para j = 0, $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx$.

Para $j \geq 1$, $a_j = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(jx)\, dx$.

Para $j \geq 1$, $b_i = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, \text{sen}(jx)\, dx$.

CAPÍTULO 7

1. *a*)

n	4	6
Trapézios	4.6950759	4.6815792
Simpson	4.670873	4.6707894

b)

n	4	6
Trapézios	4.6550925	4.6614884
Simpson	4.6662207	4.6665612

c)

n	4	6
Trapézios	4.7683868	4.7077771
Simpson	4.6763744	4.6614894

2\. *a*)

n	(a)	(b)	(c)
Trapézios	249	238	1382
Simpson	10	20	80

3\. $\varepsilon \leqslant 5 \times 10^{-4}$.

a) 0.4700171.

b) 0.4702288.

5\. Erro por Simpson: Zero

$I_s = 172$

Por Trapézios, com 5 pontos, $I_{TR} = 184$ ($|E_{TR}| \leqslant 24$)

6\. $h < 0.580819$.

7\. $I_s = 44.0833...$ com erro zero.

10\. $m \geqslant 8$.

11\. *b*) $I_{TR} = 2.086$.

12\. $w_0 = w_2 = 4/3$

$w_1 = -2/3$.

13\. 4.227527 (Trapézios no primeiro intervalo e o restante por 1/3 Simpson).

14 *a*) Trapézios: 6.203.

Simpson: 6.208.

b) Trapézios: 0.55509.

Simpson: 0.55515.

15. $I_s = 0.69315$.

$\ln(2) = 0.693147$.

16. $I_s = 0.785392$.

$\pi/4 \simeq 0.785398$.

17. *a*) $Is = 0.746855$

b) $I_{QG} = 0.746594$

c2) $m = 27$ (se usarmos $M_2 \leq 2$)

CAPÍTULO 8

1. $y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} y_n'\right)$

3. *a*) e *c*)

h	Euler Aperfeiçoado	Euler
0.5	−3	−5
0.25	−3	−1.75
0.125	−3	−2.375
0.1	−2.999995	−2.499994

6. $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_n + f_{n+1})$.

8.

h	Euler	Euler Aperfeiçoado	R. Kutta 4ª ordem
0.2	2.047879	1.906264	1.909298
0.1	1.979347	1.90854	1.909297
0.05	1.944512	1.909108	1.909298
0.025	1.926953	1.909251	1.909298