EXERCÍCIOS

1. Converta os seguintes números decimais para sua forma binária:

   $x = 37$ $\qquad$ $y = 2345$ $\qquad$ $z = 0.1217$

2. Converta os seguintes números binários para sua forma decimal:

   $x = (101101)_2$ $\qquad$ $y = (110101011)_2$

   $z = (0.1101)_2$ $\qquad$ $w = (0.111111101)_2$

3. Seja um sistema de aritmética de ponto flutuante de quatro dígitos, base decimal e com acumulador de precisão dupla. Dados os números:

   $x = 0.7237 \times 10^4$ $\quad$ $y = 0.2145 \times 10^{-3}$ $\quad$ e $\quad$ $z = 0.2585 \times 10^1$

   efetue as seguintes operações e obtenha o erro relativo no resultado, supondo que x, y e z estão exatamente representados:

   a) $x + y + z$ $\qquad$ *d*) $(xy)/z$

   b) $x - y - z$ $\qquad$ *e*) $x(y/z)$

   c) x/y

4. Supondo que x é representado num computador por $\bar{x}$, onde $\bar{x}$ é obtido por arredondamento, obtenha os limites superiores para os erros relativos de $u = 2\bar{x}$ e $w = \bar{x} + \bar{x}$.

5. Idem para $u = 3\bar{x}$ e $w = \bar{x} + \bar{x} + \bar{x}$.

6. Sejam $\bar{x}$ e $\bar{y}$ as representações de x e y obtidas por arredondamento em um computador. Deduza expressões de limitante de erro para mostrar que o limitante do erro relativo de $u = 3\,\bar{x}\,\bar{y}$ é menor que o de $v = (\bar{x} + \bar{x} + \bar{x})\,\bar{y}$.

7. Verifique de alguma forma que, se r_F tem representação finita na base 2 com k dígitos, ou seja, $r_F = (0.\,d_1 d_2 \ldots d_k)_2$, então sua representação na base 10 é também finita com k dígitos.

a) $\begin{cases} 1.12a + 6b = 1.3 \\ 2.21a + 12b = 2.6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 1.12a + 6b = 1.3 \\ 2.24a + 12b = 3\,. \end{cases}$

19. Justifique se for verdadeira ou dê contra-exemplo se for falsa a afirmação:

    "Dada uma matriz A, $n \times n$, sua fatoração LU, obtida com estratégia de pivoteamento parcial, é tal que todos os elementos da matriz L têm módulo menor ou igual a 1".

20. O vetor p que armazena a informação sobre as permutações realizadas durante a fatoração LU pode ser construído como $p(k) = i$, se na etapa k a linha i da matriz $A^{(k-1)}$ for escolhida como a linha pivotal. Desta forma, o vetor terá dimensão $(n-1) \times 1$. Para o Exemplo 7, teríamos $p = (3, 3)^T$; a dimensão de p é $(n-1) \times 1$, uma vez que são realizados $(n-1)$ etapas. Esta forma para o vetor p é mais eficiente em implementações computacionais porque na fase da resolução dos sistemas triangulares o vetor Pb pode ser armazenado sobre o vetor b original.

    Reescreva o algoritmo para a resolução de $Ax = b$ através da fatoração LU com estratégia de pivoteamento parcial, usando o vetor p conforme descrito acima.

21. Prove que se B é matriz $m \times n$, $m \geqslant n$ com posto completo, então a matriz $C = B^TB$ é simétrica, definida positiva.

22. Em cada caso:

    a) verifique se o critério de Sassenfeld é satisfeito;

    b) resolva por Gauss-Seidel, se possível:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}$$

e

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

23. *a*) Usando o critério de Sassenfeld, verifique para que valores positivos de k se tem garantia de que o método de Gauss-Seidel vai gerar uma seqüência convergente para a solução do sistema:

$$\begin{cases} kx_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ kx_1 + 6x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 3 \end{cases}$$

b) Escolha o menor valor inteiro e positivo para k e faça duas iterações do método de Gauss- Seidel para o sistema obtido.

c) Comente o erro cometido no item (*b*).

24. *a*) Considere o sistema linear

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Verifique, usando eliminação gaussiana, que este sistema não tem solução. Qual será o comportamento do método de Gauss-Seidel?

b) Através de um sistema 2×2, dê uma interpretação geométrica do que ocorre com Gauss-Seidel quando o sistema não tem solução e quando existem infinitas soluções.

25. *a*) Aplique analítica e graficamente os métodos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel no sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = -3 \\ 3x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

b) Repita o item (*a*) para o sistema obtido permutando as equações.

c) Analise seus resultados.