2. O problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' = -20y \\ y(0) = 1, \text{ tem por única solução exata } y(x) = e^{-20x}. \end{cases}$$

*a*) Verifique a afirmação acima.

*b*) Verifique que qualquer método de Runge-Kutta de 2ª ordem, quando aplicado a este problema, nos fornece

$y_{n+1} = (1 - 20h + 200h^2)^{n+1}, \ n = 0, 1, 2, \dots .$

3. Dado o PVI abaixo, considere h = 0.5, 0.25, 0.125 e 0.1.

$$\begin{cases} y' = 4 - 2x \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

*a*) Encontre uma aproximação para y(5) usando o método de Euler Aperfeiçoado, para cada h.

*b*) Compare seus resultados com a solução exata dada por $y(x) = -x^2 + 4x + 2$. Justifique.

*c*) Você espera o mesmo resultado do item (*b*) usando o método de Euler? Justifique.

4. *a*) Verifique que fazendo m = 1 e p = 1, nos métodos (3) do texto, obtemos o método $y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf_n$ com erro $\frac{h^3}{3} y'''(\xi)$.

*b*) Em termos de esforço computacional, como você o compara com o método de Euler?

*c*) E quanto à precisão?

5. Considere os métodos (3) do texto. Faça m = 3 e p = 3 e deduza o método bem como a expressão do erro.

6. *a*) Deduza o método implícito para resolver o PVI:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0, \quad \text{do tipo } y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x))\, dx \quad \text{onde} \end{cases}$$

usamos a regra dos Trapézios para calcular a integral acima.

*b*) Encontre a expressão do erro cometido.

*c*) Compare com o método de Euler, em termos de erros.

7. *a*) Considerando o seguinte PVI:

$$\begin{cases} y' = 0.04y \\ y(0) = 1000 \end{cases}$$

e supondo conhecidos $y_1$ e $y_2$, verifique que o método (2) do texto nos fornece $y_{n+1}$ explicitamente para $n \geqslant 2$.

*b*) Como você explica o resultado acima sendo (2) um método implícito?

8. Use vários métodos e vários valores de h para encontrar y(2) sendo dado o PVI:

$$\begin{cases} y' = \cos x + 1 \\ y(0) = -1\,. \end{cases}$$

9. Dado o PVI $y' = -\dfrac{x}{y}$, $y(0) = 20$, deseja-se encontrar aproximação para y(16). Resolva por

*a*) Runge-Kutta de 2ª ordem, h = 2.

*b*) Runge-Kutta de 4ª ordem, h = 4.

*c*) O par previsor-corretor do texto.

*d*) Comente seus resultados.

15. $I_s = 0.69315.$

    $\ln(2) = 0.693147.$

16. $I_s = 0.785392.$

    $\pi/4 \simeq 0.785398.$

17. *a*) $Is = 0.746855$

    *b*) $I_{QG} = 0.746594$

    *c2*) m = 27 (se usarmos $M_2 \leqslant 2$)

# CAPÍTULO 8

1. $y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} y'_n\right)$

3. *a*) e *c*)

| h | Euler Aperfeiçoado | Euler |
|---|---|---|
| 0.5 | –3 | –5 |
| 0.25 | –3 | –1.75 |
| 0.125 | –3 | –2.375 |
| 0.1 | –2.999995 | –2.499994 |

6. $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_n + f_{n+1}).$

8.

| h | Euler | Euler Aperfeiçoado | R. Kutta 4ª ordem |
|---|---|---|---|
| 0.2 | 2.047879 | 1.906264 | 1.909298 |
| 0.1 | 1.979347 | 1.90854 | 1.909297 |
| 0.05 | 1.944512 | 1.909108 | 1.909298 |
| 0.025 | 1.926953 | 1.909251 | 1.909298 |

9. *a*) (Euler Aperfeiçoado) h = 2 $\Rightarrow$ y(16) $\approx$ 12.00999.

   *b*) h = 4 $\Rightarrow$ y(16) $\approx$ 11.998.

   *c*) $\begin{cases} h = 2 \Rightarrow y(16) \approx 11.99199. \\ h = 4 \Rightarrow y(16) \approx 11.94514. \end{cases}$

10. h = 0.2 y(1.6) $\approx$ 2.7.

    h = 0.1 y(1.6) $\approx$ 2.8242597.

11. h = 0.1, y(5) = −2.5

    h = 0.125, y(5) = −2.3750

    h = 0.25, y(5) = −1.75

    h = 0.5, y(5) = −0.5

14.

| h | Euler | Euler Aperfeiçoado | R. Kutta 4ª ordem |
|---|---|---|---|
| 0.2 | 2.7 | 2.971514 | 3.019671 |
| 0.1 | 2.85455 | 3.006242 | 3.019977 |
| 0.05 | 2.928572 | 3.016337 | 3.019999 |
| 0.025 | 2.973171 | 3.019055 | 3.020001 |

15. Euler: y(1) $\simeq$ 4.488320.

    Runge-Kutta de 4ª ordem: y(1) $\simeq$ 4.718251.

    y(1) = 4.718282.

16. *a*) e *b*) y(0.2) = y(0.25) = … = 1.00