Tavlenoter

Nondeterministiske endelige automater

Mette Thomsen Pedersen

7. februar 2013

Indhold

1 Indledning

Denne forelæsning handler om

- Definition af NFA'er.
- Accept.
- NFA'er og DFA'er er ækvivalente. - Enhver NFA N kan konverteres til en DFA M.
- De regulære sprog er lukket under U, $\circ$ og $*$.

2 Definition af NFA'er.

Eksempel

Lad L_1 være et sprog. Så er

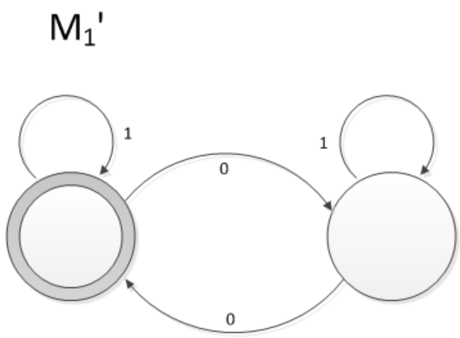
$L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ indeholder et lige antal 0'er eller have præcis to forekomster af 1$\}$

Et eksempel på hvad sproget accepterer kan ses herunder:

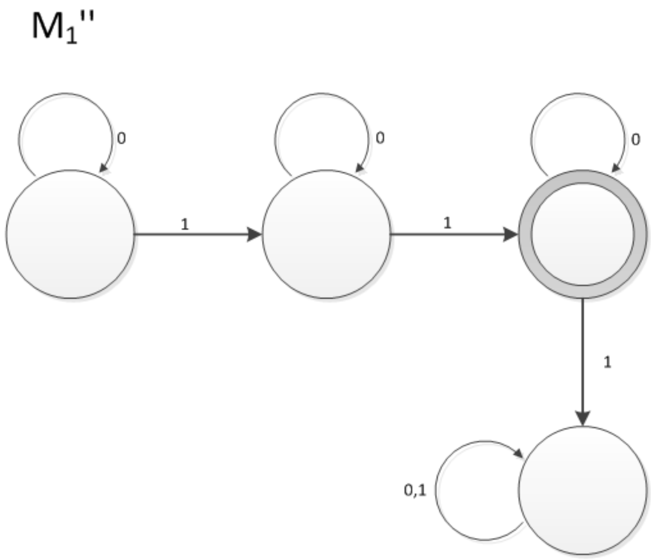
$$0011 \in L_1, 000111 \notin L_1$$

Lad så

$L_1 = L_1' \cup L_1''$
$L_1' = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ har et lige antal 0'er}\} L_1'' = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ har præcis to 1'ere}\}$



Figur 1: M_1' er en DFA.

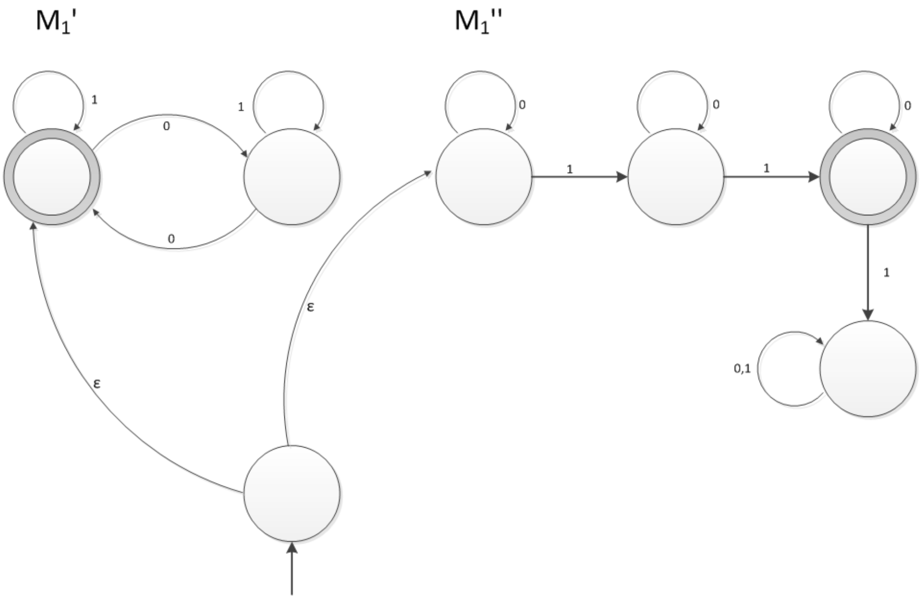


Figur 2: M_1'' er en DFA.

På Figur 1 og 2 kan ses de DFA'er der genkender L_1' og L_1''.

Figur 3 viser tanken bag forsøget på at skabe en automat, der kan genkende $L_1' \cup L_2''$. Den resulterende automat er ikke en DFA, for den har transitioner mærket med ε.

Automaten er derimod en *nondeterministisk endelig automat*.



Figur 3: Dette er ikke en DFA – men den kan genkende $L(M_1') \cup L(M_1'')$.

Definition 1. En NFA er en 5-tupel

$$(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

hvor

- Q er en endelig mængde af tilstande
- Σ er alfabetet
- q_0 er starttilstanden og $q_0 \in Q$
- δ er overføringsfunktionen
- F er mængden af accepterede tilstande og $F \subseteq Q$

Lad $\Sigma_\varepsilon = \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ så er

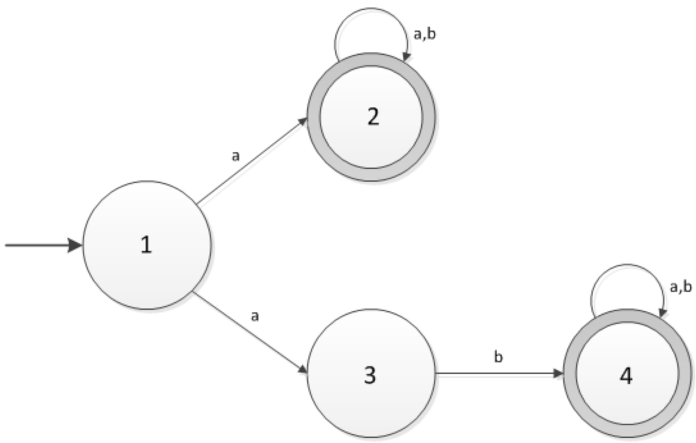
$$\delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \to \wp(Q)$$

3 NFA'er og DFA'er er ækvivalente

Eksempel 1. Betragt sproget

$$L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ starter med } a \text{ eller starter med } ab\}$$

Dette sprog kan genkendes med NFA'en i Figur 4. Bemærk at denne automatisk udviser nondeterminisme i og med at der fra nogle tilstande er mere end én transition med samme tegn og fra andre ikke nogen.



Figur 4: En NFA der genkender L_2.

I denne automat har vi

$$\begin{aligned} Q &= \{1,2,3,4\} \\ \Sigma &= \{a,b\} \\ q_0 &= 1 \\ F &= \{2,4\} \end{aligned}$$

δ er givet ved Tabel 1.

	1	2	3	4
a	2,3	2	Ø	4
b	Ø	2	4	4
c	Ø	Ø	Ø	Ø

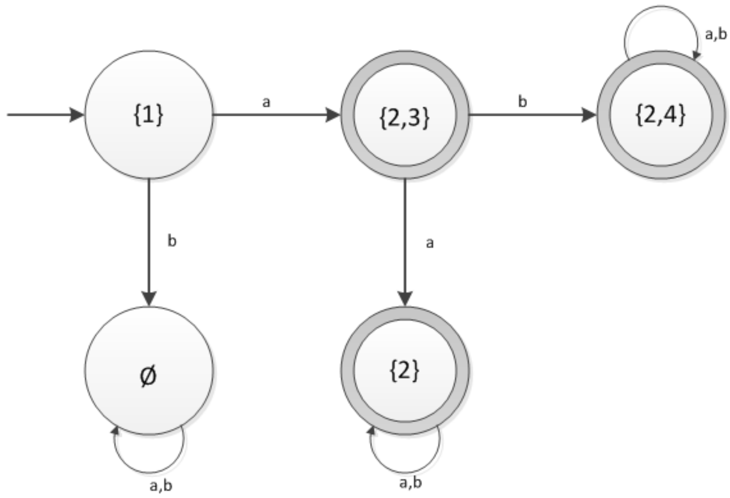
Tabel 1: Overføringsfunktionen for NFA i Figur 4.

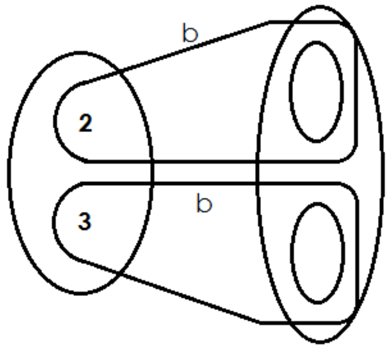
Definition 2. Lad $N = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ være en NFA. Lad $w \in a_1, ..., a_k \in \Sigma^*$ w bliver accepteret af N hvis $w = b_1 \dots b_n$, hvor $b_i \in \Sigma_\varepsilon (1 \leq i \leq n)$, så N ved at læse b'erne kan ende i en accepttilstand.

Dvs. der findes en følge af tilstande $r_0, ..., r_n$ så

- $r_0 = q_0$
- $r_{i+1} \in \delta(r_i, b_i)$ for alle $0 \leq i < n$
- $r_n \in F$

Eksempel 2. På Figur 5 ses den DFA der er lavet ud fra Figur 4. Princippet er at man fra den starttilstand man nu er i, ved et givent inçç put ser hvad man kan nå til derfra med dette input. I dette eksempel undersøger man hvor man kan komme hen fra tilstand 2 og 3 med et input b.





Figur 5: DFA lavet ud fra figur 4.

Sætning 1. *For enhver NFA N findes der en ækvivalent DFA M.*

Bevis: Lad $N = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$. Vi laver en DFA $M = (Q_1, \Sigma, q_1, \delta_1, F_1)$

Vi lader $Q_1 = \mathcal{P}(Q)$, dvs. de nye tilstande i Q_1 er delmængder af de gamle tilstande fra Q.

Først betragt en N *uden* ε-transitioner. I dette tilfælde har vi

$$\begin{aligned} q_1 &= \{q_0\} \\ F_1 &= \{R \in \mathcal{P}(Q) \mid R \cap F \neq \emptyset\} \\ \delta_1(R, x) &= \bigcup_{r \in R} \delta(r, x) \end{aligned}$$

Accepttilstandene i den nye automat er således de mængder af gamle tilstande, som indeholder mindst én gammel accepttilstande. Dette skyldes at en streng ville blive accepteret af N hvis der fandtes mindst én måde at læse strengen på således at automaten endte i en accepttilstand.

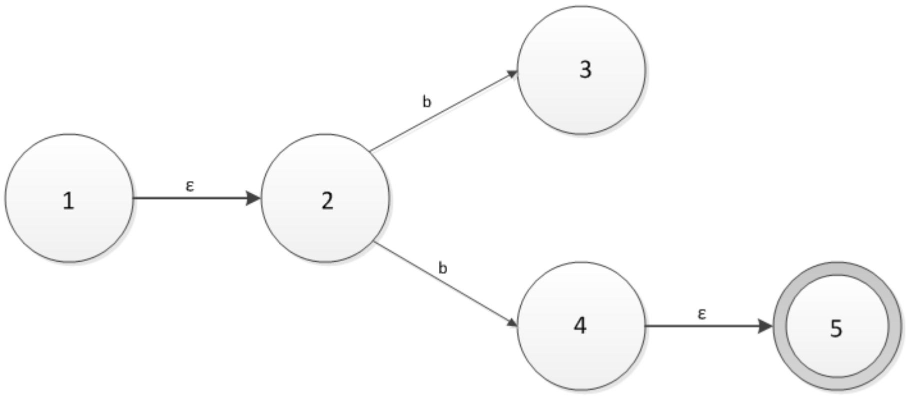
For en NFA med ε-transitioner indfører vi ε-aflukning. Lad $R \in \wp(Q)$. Så definerer vi

$$E(r) = \{r \in Q \mid r \text{ kan nås fra en tilstand i } R \text{ med 0 eller flere } \varepsilon\text{-transitioner}\}$$

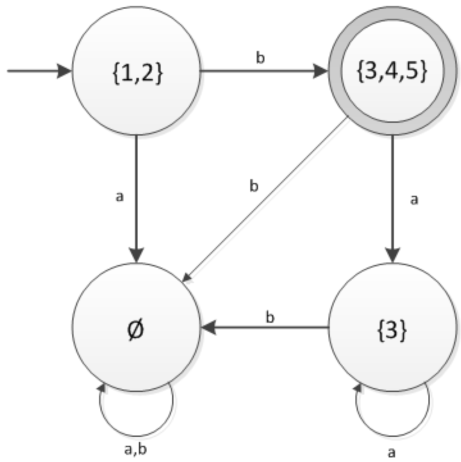
$$\begin{aligned} q_1 &= E(\{q_0\}) \\ \delta(R, x) &= E(\bigcup_{r \in R} \delta(r, x)) \end{aligned}$$

□

$\bigcup$ betyder her en *itereret* foreningsmængde; sammenlign med sumtegnet $\sum_{1 \leq i \leq k} x_i$ der betegner summen $x_1 + \ldots + x_k$.



Figur 6: En NFA N



Figur 7: Den ækvivalente DFA M (se Figur 6).

Eksempel 3. På Figur 6 kan ses NFA'en N. På Figur 7 kan ses den konstruerede DFA M ud fra den oprindelige automat på Figur 6.

Generelt kan vi risikere at der i den konstruerede DFA kan være 2^k tilstande, hvis der i den oprindelige NFA var k tilstande.

4 De regulære sprog er lukket under $\cup$, $\circ$ og $*$.

De *regulære operationer* er defineret som

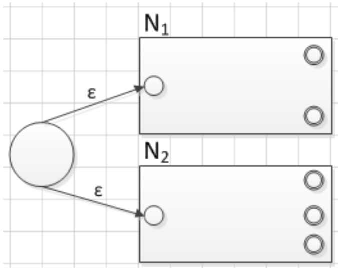
$$\begin{aligned}
L_1 \cup L_2 &= \{x \mid x \in L_1 \vee x \in L_2\} \\
L_1 \circ L_2 &= \{x \mid \exists u \in L_1, \exists v \in L_2, x = uv\} \\
L^* &= \{x \mid x = w_1 \dots w_k, k \geq 0, w_i \in L \text{ for } 1 \leq i \leq k\}
\end{aligned}$$

Vi kan nu vise at at de regulære sprog er lukket under de regulære operationer.

Sætning 2. *Hvis L_1 og L_2 er regulære sprog, så er $L_1 \cup L_2$ regulært.*

Bevis: Da L_1 og L_2 er regulære, findes der en NFA N_1 så $L(N_1) = L_1$ og en NFA N_2 så $L(N_2) = L_2$.

Lav en ny NFA N_12 så $L(N_12) = L(N_1) \cup L(N_2)$. N_1 kan ses på Figur 8.



Figur 8: NFA der genkender $L(N_1) \cup L(N_2)$

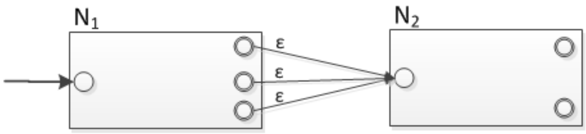
□

Sætning 3. *Hvis L_1, L_2 er regulære sprog så er $L_1 \circ L_2$ regulært.*

Bevis: Da L_1 er regulært, findes der en NFA N_1 så $L(N_1) = L_1$

Da L_2 er regulært, findes en NFA N_2 så $L(N_2) = L_2$

Vi laver en NFA N_12 så $L(N_12) = L_1 \circ L_2 = L(N_1) \circ L(N_2)$



Figur 9: NFA der genkender $L(N_1) \circ L(N_2)$

Ideen er at forbinde N_1's accepttilstande med ε-transitioner til N_2's starttilstand – *kun* N_2's accepttilstande skal forblive accepttilstande!

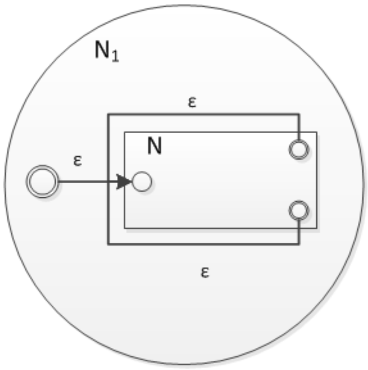
N_1 kan ses på Figur 9.

□

Sætning 4. *Hvis L er regulært, så er L^* regulært.*

Bevis: Da L er regulært, er der en NFA N så $L(N) = L$. Lav en NFA N_1 så $L(N_1) = L(N)^*$.

N_1 kan ses på Figur 10. □

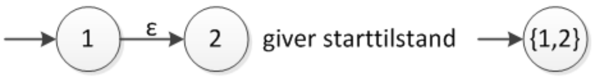


Figur 10: NFA der genkender $L(N)^*$.

5 GYSER! - "En finit kombination af et sæt af finale stadier"

5.1 Mange glemmer/misforstår ε-transitioner!

Mange glemmer at man skal konstruere ε-aflukningen, når man konverterer en NFA til en DFA. Især glemmer mange, at den nye starttilstand er ε-aflukningen af den gamle.



Figur 11: Den nye starttilstand er ε-aflukningen af starttilstanden i den oprindelige NFA.

Et eksempel på dette kan ses på Figur 11.

5.2 "Alle kombinationer"

En del studerende holder af at bruge pseudo-terminologi. "Alle kombinationer" er en tom upræcis betegnelse som nogle desværre bruger. Denne upræcise betegnelse kan blandt andet blive brugt om følgende udtryk.

$$\mathcal{P}(Q), \Sigma^* \text{ og } A \times B$$

Lad være med det! Der er præcis terminologi! Desuden hedder det ikke stadier men *tilstande*! (Det engelske ord for "stadie" er *stage*!)