

Teoremas y demostraciones

Matemática estructural y lógica
ISIS-1104

Teorema:

$$p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$$

Contrapositiva

Teorema:

$$p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$$

Demostración:

Contrapositiva

Teorema:

$$p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$$

Demostración:

$$\begin{aligned} p \Rightarrow q &\equiv \neg p \vee q && \text{(definición } \Rightarrow \text{)} \\ &\equiv q \vee \neg p && \text{(conmutatividad)} \\ &\equiv \neg \neg q \vee \neg p && \text{(doble negación)} \\ &\equiv \neg q \Rightarrow \neg p && \text{(definición } \Rightarrow \text{)} \end{aligned}$$

Contrapositiva: caso de uso

Contrapositiva: caso de uso

Demuestre que

$$(p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow s) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow s)$$

Contrapositiva: caso de uso

Demuestre que

$$(p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow s) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow s)$$

Demostración:

Contrapositiva: caso de uso

Demuestre que

$$(p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow s) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow s)$$

Demostración:

- Usando contrapositiva con $p \Rightarrow q$

$$\frac{(p \Rightarrow q)}{\neg q \Rightarrow \neg p} \quad (1)$$

Contrapositiva: caso de uso

Demuestre que

$$(p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow s) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow s)$$

Demostración:

- Usando contrapositiva con $p \Rightarrow q$

$$\frac{(p \Rightarrow q)}{\neg q \Rightarrow \neg p} \quad (1)$$

- Usando silogismo hipotético entre (1) y $\neg p \Rightarrow r$

$$\frac{(\neg q \Rightarrow \neg p) \wedge (\neg p \Rightarrow r)}{\neg q \Rightarrow r} \quad (2)$$

Contrapositiva: caso de uso

Demuestre que

$$(p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow s) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow s)$$

Demostración:

- Usando contrapositiva con $p \Rightarrow q$

$$\frac{(p \Rightarrow q)}{\neg q \Rightarrow \neg p} \quad (1)$$

- Usando silogismo hipotético entre (1) y $\neg p \Rightarrow r$

$$\frac{(\neg q \Rightarrow \neg p) \wedge (\neg p \Rightarrow r)}{\neg q \Rightarrow r} \quad (2)$$

- Usando silogismo hipotético entre (2) y $r \Rightarrow s$

$$\frac{(\neg q \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow s)}{\neg q \Rightarrow s}$$

Contrapositiva: ejercicio

Contrapositiva: ejercicio

Demuestre que

$$(p \Rightarrow \neg q) \wedge (r \Rightarrow q) \wedge r \Rightarrow \neg p$$

Moviendo hipótesis

Teorema:

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv p \wedge q \Rightarrow r$$

Moviendo hipótesis

Teorema:

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv p \wedge q \Rightarrow r$$

Demostración:

Teorema:

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv p \wedge q \Rightarrow r$$

Demostración:

$$\begin{aligned} p \wedge q \Rightarrow r &\equiv \neg(p \wedge q) \vee r && \text{(definición } \Rightarrow \text{)} \\ &\equiv \neg p \vee \neg q \vee r && \text{(De Morgan)} \\ &\equiv \neg p \vee (q \Rightarrow r) && \text{(definición } \Rightarrow \text{)} \\ &\equiv p \Rightarrow (q \Rightarrow r) && \text{(definición } \Rightarrow \text{)} \end{aligned}$$

Moviendo hipótesis: caso de uso

Moviendo hipótesis: caso de uso

Demuestre que

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

Moviendo hipótesis: caso de uso

Demuestre que

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

Demostración:

Moviendo hipótesis: caso de uso

Demuestre que

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

Demostración:

- Moviendo hipótesis

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge p \Rightarrow r$$

Moviendo hipótesis: caso de uso

Demuestre que

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

Demostración:

- Moviendo hipótesis

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge p \Rightarrow r$$

- Usando Modus ponens

$$\frac{(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge p \Rightarrow r}{q \wedge (q \Rightarrow r)}$$

Moviendo hipótesis: caso de uso

Demuestre que

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

Demostración:

- Moviendo hipótesis

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge p \Rightarrow r$$

- Usando Modus ponens

$$\frac{(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge p \Rightarrow r}{q \wedge (q \Rightarrow r)}$$

- Usando Modus ponens

$$\frac{q \wedge (q \Rightarrow r)}{r}$$

Moviendo hipótesis: ejercicio

Moviendo hipótesis: ejercicio

Demuestre que

$$((p \Rightarrow q) \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$$

Doble implicación

Teorema:

$$(p \equiv q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

Doble implicación

Teorema:

$$(p \equiv q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

Demostración:

Doble implicación

Teorema:

$$(p \equiv q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

Demostración:

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	$p \equiv q$
<i>True</i>	<i>True</i>	<i>True</i>	<i>True</i>	<i>True</i>	<i>True</i>
<i>True</i>	<i>False</i>	<i>False</i>	<i>True</i>	<i>False</i>	<i>False</i>
<i>False</i>	<i>True</i>	<i>True</i>	<i>False</i>	<i>False</i>	<i>False</i>
<i>False</i>	<i>False</i>	<i>True</i>	<i>True</i>	<i>True</i>	<i>True</i>

Doble implicación: caso de uso

Doble implicación: caso de uso

Demuestre que $p \wedge (p \equiv q) \Rightarrow q$

Doble implicación: caso de uso

Demuestre que $p \wedge (p \equiv q) \Rightarrow q$

Demostración:

Doble implicación: caso de uso

Demuestre que $p \wedge (p \equiv q) \Rightarrow q$

Demostración:

- Usando doble implicación

$$\frac{p \wedge (p \equiv q)}{p \wedge (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)} \quad (1)$$

Doble implicación: caso de uso

Demuestre que $p \wedge (p \equiv q) \Rightarrow q$

Demostración:

- Usando doble implicación

$$\frac{p \wedge (p \equiv q)}{p \wedge (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)} \quad (1)$$

- Usando simplificación en (1)

$$\frac{p \wedge (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)}{p \wedge (p \Rightarrow q)} \quad (2)$$

Doble implicación: caso de uso

Demuestre que $p \wedge (p \equiv q) \Rightarrow q$

Demostración:

- Usando doble implicación

$$\frac{p \wedge (p \equiv q)}{p \wedge (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)} \quad (1)$$

- Usando simplificación en (1)

$$\frac{p \wedge (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)}{p \wedge (p \Rightarrow q)} \quad (2)$$

- Usando Modus Ponens en (2)

$$\frac{p \wedge (p \Rightarrow q)}{q}$$

Doble implicación: ejercicio

Doble implicación: ejercicio

Demuestre que

$$(\neg p \equiv q) \equiv (p \equiv \neg q)$$