

Demostraciones en la lógica proposicional

Matemática estructural y lógica
ISIS-1104

Nombres, nombres everywhere

- Un **axioma** es una proposición que se **asume** cierta.

Nombres, nombres everywhere

- Un **axioma** es una proposición que se **asume** cierta.
- Un **teorema** es una proposición que se **demuestra**.

Nombres, nombres everywhere

- Un **axioma** es una proposición que se **asume** cierta.
- Un **teorema** es una proposición que se **demuestra**.
- Un **lema** es un teorema **chiquito**.

Nombres, nombres everywhere

- Un **axioma** es una proposición que se **asume** cierta.
- Un **teorema** es una proposición que se **demuestra**.
- Un **lema** es un teorema **chiquito**.
- Una **demostración** es una **derivación**.

Axiomas... y eso para qué?

Axiomas... y eso para qué?

Los axiomas que vamos a ver acá son equivalencias

$$LHS \equiv RHS$$

Axiomas... y eso para qué?

Los axiomas que vamos a ver acá son equivalencias

$$LHS \equiv RHS$$

y se utilizan de la siguiente forma:

Siempre que vea *LHS* lo puedo reemplazar por *RHS*

Siempre que vea *RHS* lo puedo reemplazar por *LHS*

Axiomas... y eso para qué?

Los axiomas que vamos a ver acá son equivalencias

$$LHS \equiv RHS$$

y se utilizan de la siguiente forma:

Siempre que vea *LHS* lo puedo reemplazar por *RHS*

Siempre que vea *RHS* lo puedo reemplazar por *LHS*

Es decir, son como **reglas de inferencia** pero **bidireccionales**.

Axiomas de la lógica proposicional

Axiomas de la lógica proposicional

- Conmutatividad

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

Axiomas de la lógica proposicional

- Conmutatividad

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

- Asociatividad

$$(p \vee q) \vee r \equiv q \vee (p \vee r)$$

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv q \wedge (p \wedge r)$$

Axiomas de la lógica proposicional

- Conmutatividad

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

- Asociatividad

$$(p \vee q) \vee r \equiv q \vee (p \vee r)$$

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv q \wedge (p \wedge r)$$

- Absorción

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p$$

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

Axiomas de la lógica proposicional

Axiomas de la lógica proposicional

- Distribución

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

Axiomas de la lógica proposicional

- Distribución

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

- Todo o nada

$$p \wedge \neg p \equiv \textit{False}$$

$$p \vee \neg p \equiv \textit{True}$$

Axiomas de la lógica proposicional

- Distribución

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

- Todo o nada

$$p \wedge \neg p \equiv \textit{False}$$

$$p \vee \neg p \equiv \textit{True}$$

- Identidad

$$p \vee \textit{False} \equiv p$$

$$p \wedge \textit{True} \equiv p$$

Axiomas de la lógica proposicional

Axiomas de la lógica proposicional

- Piso, techo

$$p \wedge \textit{False} \equiv \textit{False}$$

$$p \vee \textit{True} \equiv \textit{True}$$

Axiomas de la lógica proposicional

- Piso, techo

$$p \wedge \text{False} \equiv \text{False}$$

$$p \vee \text{True} \equiv \text{True}$$

- Idempotencia

$$p \wedge p \equiv p$$

$$p \vee p \equiv p$$

Axiomas de la lógica proposicional

- Piso, techo

$$p \wedge \text{False} \equiv \text{False}$$

$$p \vee \text{True} \equiv \text{True}$$

- Idempotencia

$$p \wedge p \equiv p$$

$$p \vee p \equiv p$$

- Doble negación

$$\neg\neg p \equiv p$$

Axiomas de la lógica proposicional

- Leyes de De Morgan

$$\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$$

$$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$$

Es tan fácil como mover un montón de símbolos



Cómo hacer demostraciones

The Definitive Guide

O RLY?

Christian Poveda

Ejemplo: Probando una equivalencia

Ejemplo: Probando una equivalencia

Demuestre que $p \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$

Ejemplo: Probando una equivalencia

Demuestre que $p \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$

Demostración:

Ejemplo: Probando una equivalencia

Demuestre que $p \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$

Demostración:

Tenemos dos opciones

Ejemplo: Probando una equivalencia

Demuestre que $p \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$

Demostración:

Tenemos dos opciones

- Partiendo de p usar axiomas hasta llegar a $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$.

Ejemplo: Probando una equivalencia

Demuestre que $p \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$

Demostración:

Tenemos dos opciones

- Partiendo de p usar axiomas hasta llegar a $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$.
- Partiendo de $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$ usar axiomas hasta llegar a p .

Ejemplo: Probando una equivalencia

Demuestre que $p \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$

Demostración:

Tenemos dos opciones

- Partiendo de p usar axiomas hasta llegar a $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$.
- Partiendo de $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$ usar axiomas hasta llegar a p .

Usualmente la segunda es más fácil.

Ejemplo: Probando una equivalencia

Ejemplo: Probando una equivalencia

- Partimos de

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$$

Ejemplo: Probando una equivalencia

- Partimos de

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$$

- Usando distribución

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \equiv p \vee (q \wedge \neg q)$$

Ejemplo: Probando una equivalencia

- Partimos de

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$$

- Usando distribución

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \equiv p \vee (q \wedge \neg q)$$

- Usando todo o nada

$$p \vee (q \wedge \neg q) \equiv p \vee \textit{False}$$

Ejemplo: Probando una equivalencia

- Partimos de

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$$

- Usando distribución

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \equiv p \vee (q \wedge \neg q)$$

- Usando todo o nada

$$p \vee (q \wedge \neg q) \equiv p \vee \textit{False}$$

- Usando identidad

$$p \vee \textit{False} \equiv p$$

Ejemplo: Probando una equivalencia

- Partimos de

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$$

- Usando distribución

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \equiv p \vee (q \wedge \neg q)$$

- Usando todo o nada

$$p \vee (q \wedge \neg q) \equiv p \vee \textit{False}$$

- Usando identidad

$$p \vee \textit{False} \equiv p$$

- Luego concluimos que

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \equiv p$$

Ejemplo: Probando una equivalencia

Ejemplo: Probando una equivalencia

- Otra forma de escribir esta prueba es

$$\begin{aligned}(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) &\equiv p \vee (q \wedge \neg q) && \text{(distribución)} \\ &\equiv p \vee \textit{False} && \text{(todo o nada)} \\ &\equiv p && \text{(identidad)}\end{aligned}$$

Ejemplo: Probando una equivalencia

- Otra forma de escribir esta prueba es

$$\begin{aligned}(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) &\equiv p \vee (q \wedge \neg q) && \text{(distribución)} \\ &\equiv p \vee \textit{False} && \text{(todo o nada)} \\ &\equiv p && \text{(identidad)}\end{aligned}$$

- Tras bastidores simplemente estamos mostrando que $p \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$ es **verdadera** sin importar que valores puedan llegar a tomar p y q .

Ejemplo: Probando una equivalencia

- Otra forma de escribir esta prueba es

$$\begin{aligned}(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) &\equiv p \vee (q \wedge \neg q) && \text{(distribución)} \\ &\equiv p \vee \textit{False} && \text{(todo o nada)} \\ &\equiv p && \text{(identidad)}\end{aligned}$$

- Tras bastidores simplemente estamos mostrando que $p \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$ es **verdadera** sin importar que valores puedan llegar a tomar p y q .
- Cuando una proposición es verdadera **siempre**, decimos que es una **tautología**.

Ejercicio: Probando otra equivalencia

Ejercicio: Probando otra equivalencia

- Ahora ustedes demuestren que $\neg q \vee (p \wedge q) \equiv \neg q \vee p$

...que pasa cuando me piden probar algo que no es una equivalencia?

- Pedir una demostración de p es lo mismo que pedir una demostración de que p es una **tautología**.

- Pedir una demostración de p es lo mismo que pedir una demostración de que p es una **tautología**.
- En otras palabras, basta mostrar que a partir de p puedo llegar a *True*.

$$p \equiv \text{True}$$

Ejemplo

Demuestre que $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$

Ejemplo

Demuestre que $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$

Demostración:

$$\begin{aligned} p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q &\equiv p \wedge (\neg p \vee q) \Rightarrow q && \text{(def. } \Rightarrow \text{)} \\ &\equiv (p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q) \Rightarrow q && \text{(distribución)} \\ &\equiv \textit{False} \vee (p \wedge q) \Rightarrow q && \text{(todo o nada)} \\ &\equiv (p \wedge q) \Rightarrow q && \text{(identidad)} \\ &\equiv \neg(p \wedge q) \vee q && \text{(def. } \Rightarrow \text{)} \\ &\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee q && \text{(De Morgan)} \\ &\equiv \neg p \vee (\neg q \vee q) && \text{(asociatividad)} \\ &\equiv \neg p \vee \textit{True} && \text{(todo o nada)} \\ &\equiv \textit{True} && \text{(piso, techo)} \end{aligned}$$

Ejercicio

- Ahora ustedes demuestren que $p \wedge q \Rightarrow p$