Sistemas formales

Matemática estructural y lógica

ISIS-1104

¿Para qué?

¿Para qué?

Para razonar sobre la correctitud de las cosas

¿Para qué?

Para razonar sobre la correctitud de las cosas

```
int public signo(int x) {
    if (x #= 0) {
        return 1
    } else {
        return -1;
    }
}
```

¿Para qué?

Para razonar sobre la correctitud de las cosas

```
int public signo(int x) {
    if (x #= 0) {
        return 1
    } else {
        return -1;
    }
}
```

¿Qué está mal con este código?

Lenguajes formales

Ejemplo: El lenguaje de los decimales

Ejemplo: El lenguaje de los decimales

- Cosas que son decimales
    - 1.46
    - 32.04
    - 1234.0

Ejemplo: El lenguaje de los decimales

- Cosas que son decimales
  - 1.46
  - 32.04
  - 1234.0
- Cosas que **no** son decimales:
  - 12341
  - 132.432.23
  - .123

Ejemplo: El lenguaje de los decimales

Ejemplo: El lenguaje de los decimales

- Un decimal es un número, seguido por un punto, seguido por otro número.

$$\texttt{decimal} \rightarrow \texttt{numero . numero}$$

Ejemplo: El lenguaje de los decimales

- Un decimal es un número, seguido por un punto, seguido por otro número.

$$\texttt{decimal} \rightarrow \texttt{numero . numero}$$

- A su vez, un número puede ser, o un dígito

$$\texttt{numero} \rightarrow \texttt{digito}$$

Ejemplo: El lenguaje de los decimales

- Un decimal es un número, seguido por un punto, seguido por otro número.

$$\texttt{decimal} \rightarrow \texttt{numero . numero}$$

- A su vez, un número puede ser, o un dígito

$$\texttt{numero} \rightarrow \texttt{digito}$$

- O un dígito seguido de otro número

$$\texttt{numero} \rightarrow \texttt{digito numero}$$

Ejemplo: El lenguaje de los decimales

- Un decimal es un número, seguido por un punto, seguido por otro número.

$$\texttt{decimal} \rightarrow \texttt{numero}\ \textbf{.}\ \texttt{numero}$$

- A su vez, un número puede ser, o un dígito

$$\texttt{numero} \rightarrow \texttt{digito}$$

- O un dígito seguido de otro número

$$\texttt{numero} \rightarrow \texttt{digito}\ \texttt{numero}$$

- Finalmente, un dígito es un caracter entre 0 y 9

$$\texttt{digito} \rightarrow \textbf{0} \mid \textbf{1} \mid \textbf{2} \mid \textbf{3} \mid \textbf{4} \mid \textbf{5} \mid \textbf{6} \mid \textbf{7} \mid \textbf{8} \mid \textbf{9}$$

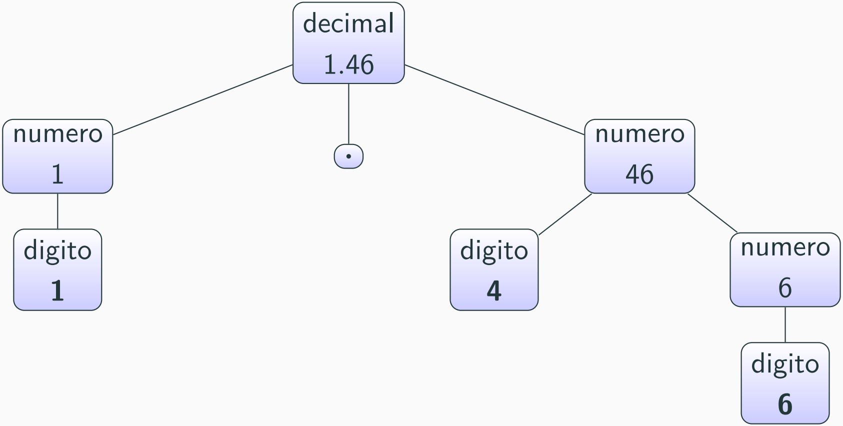
Ejemplo: El lenguaje de los decimales

Ejemplo: El lenguaje de los decimales

¿Es 1.46 un decimal?

Ejemplo: El lenguaje de los decimales

¿Es 1.46 un decimal?



Ejemplo: El lenguaje de los decimales

Ejemplo: El lenguaje de los decimales

Ahora ustedes ¿Es 32.5.1 un decimal?

Ejemplo: El lenguaje de los decimales

Ejemplo: El lenguaje de los decimales

- $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, .\}$ son los **símbolos terminales**.

Ejemplo: El lenguaje de los decimales

- $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, .\}$ son los **símbolos terminales**.
- $\{\texttt{decimal}, \texttt{numero}, \texttt{digito}\}$ son los **símbolos auxiliares**.

Ejemplo: El lenguaje de los decimales

- $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, .\}$ son los **símbolos terminales**.
- $\{\mathtt{decimal}, \mathtt{numero}, \mathtt{digito}\}$ son los **símbolos auxiliares**.
- `decimal` es el **símbolo inicial**.

Ejemplo: El lenguaje de los decimales

- $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, .\}$ son los **símbolos terminales**.
- $\{\texttt{decimal}, \texttt{numero}, \texttt{digito}\}$ son los **símbolos auxiliares**.
- `decimal` es el **símbolo inicial**.
- Y estas son **producciones**:

$$
\begin{aligned}
\texttt{decimal} &\rightarrow \texttt{numero}\ \textbf{.}\ \texttt{numero} \\
\texttt{numero} &\rightarrow \texttt{digito} \\
\texttt{numero} &\rightarrow \texttt{digito}\ \texttt{numero} \\
\texttt{digito} &\rightarrow \mathbf{0} \mid \mathbf{1} \mid \mathbf{2} \mid \mathbf{3} \mid \mathbf{4} \mid \mathbf{5} \mid \mathbf{6} \mid \mathbf{7} \mid \mathbf{8} \mid \mathbf{9}
\end{aligned}
$$

Ejemplo: El lenguaje de los decimales

- $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, .\}$ son los **símbolos terminales**.
- $\{\texttt{decimal}, \texttt{numero}, \texttt{digito}\}$ son los **símbolos auxiliares**.
- `decimal` es el **símbolo inicial**.
- Y estas son **producciones**:

$$\begin{aligned} \texttt{decimal} &\rightarrow \texttt{numero}\ \textbf{.}\ \texttt{numero} \\ \texttt{numero} &\rightarrow \texttt{digito} \\ \texttt{numero} &\rightarrow \texttt{digito}\ \texttt{numero} \\ \texttt{digito} &\rightarrow \mathbf{0} \mid \mathbf{1} \mid \mathbf{2} \mid \mathbf{3} \mid \mathbf{4} \mid \mathbf{5} \mid \mathbf{6} \mid \mathbf{7} \mid \mathbf{8} \mid \mathbf{9} \end{aligned}$$

- Este conjunto de conceptos conforman una **forma normal**.

Definiciones

Definiciones

- Un lenguaje formal esta constituido por:

Definiciones

- Un lenguaje formal esta constituido por:
  - Una colección de *simbolos*, el **alfabeto** (usualmente denotado por A).

Definiciones

- Un lenguaje formal esta constituido por:
  - Una colección de *simbolos*, el **alfabeto** (usualmente denotado por A).
  - Una serie de reglas que nos indican como combinar simbolos (usualmente una *forma normal*), la **sintaxis**.

Definiciones

- Un lenguaje formal esta constituido por:
  - Una colección de *simbolos*, el **alfabeto** (usualmente denotado por A).
  - Una serie de reglas que nos indican como combinar simbolos (usualmente una *forma normal*), la **sintaxis**.
- Una sucesión de símbolos del alfabeto es una **fórmula**.

Definiciones

- Un lenguaje formal esta constituido por:
  - Una colección de *simbolos*, el **alfabeto** (usualmente denotado por A).
  - Una serie de reglas que nos indican como combinar simbolos (usualmente una *forma normal*), la **sintaxis**.
- Una sucesión de símbolos del alfabeto es una **fórmula**.
- Una fórmula que sigue la **sintaxis** es una **fórmula bien formada**.

Semántica

Ejemplo: Los números naturales

Ejemplo: Los números naturales

- El alfabeto:

$$A = \{zero, succ, (,)\}$$

Ejemplo: Los números naturales

- El alfabeto:

$$A = \{zero, succ, (,)\}$$

- La sintaxis:

$$\texttt{natural} \rightarrow \boldsymbol{zero} \mid \boldsymbol{succ}(\texttt{natural})$$

Ejemplo: Los números naturales

- El alfabeto:

$$A = \{zero, succ, (,)\}$$

- La sintaxis:

$$\texttt{natural} \rightarrow \boldsymbol{zero} \mid \boldsymbol{succ}(\texttt{natural})$$

- Algunas fbf:

Ejemplo: Los números naturales

- El alfabeto:

$$A = \{zero, succ, (,)\}$$

- La sintaxis:

$$\texttt{natural} \rightarrow \boldsymbol{zero} \mid \boldsymbol{succ}(\texttt{natural})$$

- Algunas fbf:
  - *zero*

Ejemplo: Los números naturales

- El alfabeto:

$$A = \{zero, succ, (,)\}$$

- La sintaxis:

$$\texttt{natural} \rightarrow \boldsymbol{zero} \mid \boldsymbol{succ}(\texttt{natural})$$

- Algunas fbf:
  - *zero*
  - $succ(zero)$

Ejemplo: Los números naturales

- El alfabeto:

$$A = \{zero, succ, (,)\}$$

- La sintaxis:

$$\texttt{natural} \rightarrow \boldsymbol{zero} \mid \boldsymbol{succ}(\texttt{natural})$$

- Algunas fbf:
  - *zero*
  - $succ(zero)$
  - $succ(succ(zero))$

Ejemplo: Los números naturales

- El alfabeto:

$$A = \{zero, succ, (,)\}$$

- La sintaxis:

$$\texttt{natural} \rightarrow \boldsymbol{zero} \mid \boldsymbol{succ}(\texttt{natural})$$

- Algunas fbf:
  - *zero*
  - $succ(zero)$
  - $succ(succ(zero))$
  - ...

Ejemplo: Los números naturales

Ejemplo: Los números naturales

- Sabemos que *zero* representa al número 0.

$$I(zero) = 0$$

Ejemplo: Los números naturales

- Sabemos que *zero* representa al número 0.

$$I(zero) = 0$$

- Sabemos que $succ(zero)$ representa al siguiente número, 1.

$$I(succ(zero)) = 1$$

Ejemplo: Los números naturales

- Sabemos que *zero* representa al número 0.

$$I(zero) = 0$$

- Sabemos que *succ*(*zero*) representa al siguiente número, 1.

$$I(succ(zero)) = 1$$

- Sabemos que *succ* `natural` representa al sucesor de `natural`.

$$I(succ(\texttt{natural})) = 1 + I(\texttt{natural})$$

Ejemplo: Los números naturales

- Sabemos que *zero* representa al número 0.

$$I(zero) = 0$$

- Sabemos que $succ(zero)$ representa al siguiente número, 1.

$$I(succ(zero)) = 1$$

- Sabemos que *succ* `natural` representa al sucesor de `natural`.

$$I(succ(\texttt{natural})) = 1 + I(\texttt{natural})$$

- Esto es una **semántica** para este lenguaje, le dá un significado.

Ejercicio: Los números binarios

Ejercicio: Los números binarios

Escriba una semántica para el siguiente lenguaje

Ejercicio: Los números binarios

Escriba una semántica para el siguiente lenguaje

- El alfabeto:

$$A = \{0, 1\}$$

- La sintaxis:

$$\texttt{binario} \rightarrow \texttt{digito}$$

$$\texttt{binario} \rightarrow \texttt{digito}\ \texttt{binario}$$

$$\texttt{digito} \rightarrow \mathbf{0} \mid \mathbf{1}$$

Ejercicio: Los números binarios

Escriba una semántica para el siguiente lenguaje

- El alfabeto:

$$A = \{0, 1\}$$

- La sintaxis:

$$\texttt{binario} \rightarrow \texttt{digito}$$

$$\texttt{binario} \rightarrow \texttt{digito}\ \texttt{binario}$$

$$\texttt{digito} \rightarrow \mathbf{0} \mid \mathbf{1}$$

Para que se pueda interpretar como números, es decir:

$$I(110) = 6$$

Aparato deductivo

Ejemplo: Los naturales con la suma

Ejemplo: Los naturales con la suma

- El alfabeto:

$$A = \{zero, succ, (,), plus\}$$

Ejemplo: Los naturales con la suma

- El alfabeto:

$$A = \{zero, succ, (,), plus\}$$

- La sintaxis:

$$\texttt{nat\_sum} \rightarrow \texttt{natural}$$

$$\texttt{nat\_sum} \rightarrow \texttt{natural}\ \boldsymbol{plus}\ \texttt{nat\_sum}$$

$$\texttt{natural} \rightarrow \boldsymbol{zero} \mid \boldsymbol{succ}(\texttt{natural})$$

Ejemplo: Los naturales con la suma

- El alfabeto:

$$A = \{zero, succ, (,), plus\}$$

- La sintaxis:

$$\texttt{nat\_sum} \rightarrow \texttt{natural}$$

$$\texttt{nat\_sum} \rightarrow \texttt{natural}\ \boldsymbol{plus}\ \texttt{nat\_sum}$$

$$\texttt{natural} \rightarrow \boldsymbol{zero} \mid \boldsymbol{succ}(\texttt{natural})$$

- Algunas fórmulas bien formadas:

Ejemplo: Los naturales con la suma

- El alfabeto:

$$A = \{zero, succ, (,), plus\}$$

- La sintaxis:

$$\texttt{nat\_sum} \to \texttt{natural}$$

$$\texttt{nat\_sum} \to \texttt{natural}\ \boldsymbol{plus}\ \texttt{nat\_sum}$$

$$\texttt{natural} \to \boldsymbol{zero} \mid \boldsymbol{succ}(\texttt{natural})$$

- Algunas fórmulas bien formadas:
  - $succ(succ(zero))$

Ejemplo: Los naturales con la suma

- El alfabeto:

$$A = \{zero, succ, (,), plus\}$$

- La sintaxis:

$$\texttt{nat\_sum} \rightarrow \texttt{natural}$$

$$\texttt{nat\_sum} \rightarrow \texttt{natural}\ \boldsymbol{plus}\ \texttt{nat\_sum}$$

$$\texttt{natural} \rightarrow \boldsymbol{zero} \mid \boldsymbol{succ}(\texttt{natural})$$

- Algunas fórmulas bien formadas:
  - *succ*(*succ*(*zero*))
  - *succ*(*zero*) *plus zero*

Ejemplo: Los naturales con la suma

- El alfabeto:

$$A = \{zero, succ, (,), plus\}$$

- La sintaxis:

$$\begin{aligned}
\texttt{nat_sum} &\rightarrow \texttt{natural} \\
\texttt{nat_sum} &\rightarrow \texttt{natural}\ \boldsymbol{plus}\ \texttt{nat_sum} \\
\texttt{natural} &\rightarrow \boldsymbol{zero} \mid \boldsymbol{succ}(\texttt{natural})
\end{aligned}$$

- Algunas fórmulas bien formadas:
  - *succ*(*succ*(*zero*))
  - *succ*(*zero*) *plus zero*
  - *zero plus succ*(*zero*) *plus succ*(*succ*(*zero*))

Ejemplo: Los naturales con la suma

Ejemplo: Los naturales con la suma

¿Cómo transformar cualquier suma de naturales a un natural puro?

Ejemplo: Los naturales con la suma

¿Cómo transformar cualquier suma de naturales a un natural puro?

$$succ(succ(zero)) \; plus \; succ(zero) \rightsquigarrow succ(succ(succ(zero)))$$

Ejemplo: Los naturales con la suma

¿Cómo transformar cualquier suma de naturales a un natural puro?

$$\mathit{succ}(\mathit{succ}(\mathit{zero}))\ \mathit{plus}\ \mathit{succ}(\mathit{zero}) \rightsquigarrow \mathit{succ}(\mathit{succ}(\mathit{succ}(\mathit{zero})))$$

Con dos **reglas de inferencia**:

Ejemplo: Los naturales con la suma

¿Cómo transformar cualquier suma de naturales a un natural puro?

$$succ(succ(zero))\ plus\ succ(zero) \rightsquigarrow succ(succ(succ(zero)))$$

Con dos **reglas de inferencia**:

- Sumar cero no cambia nada

$$\frac{zero\ plus\ x}{x}$$

Ejemplo: Los naturales con la suma

¿Cómo transformar cualquier suma de naturales a un natural puro?

$$succ(succ(zero)) \ plus \ succ(zero) \rightsquigarrow succ(succ(succ(zero)))$$

Con dos **reglas de inferencia**:

- Sumar cero no cambia nada

$$\frac{zero \ plus \ x}{x}$$

- Mover uno a la derecha

$$\frac{succ(x) \ plus \ y}{x \ plus \ succ(y)}$$

Ejemplo: Los naturales con la suma

Ejemplo: Los naturales con la suma

- Partiendo de

$$succ(succ(zero))\ plus\ succ(zero)$$

Ejemplo: Los naturales con la suma

- Partiendo de

$$succ(succ(zero))\ plus\ succ(zero)$$

- Podemos mover uno a la derecha

$$succ(zero)\ plus\ succ(succ(zero))$$

Ejemplo: Los naturales con la suma

- Partiendo de

$$succ(succ(zero))\ plus\ succ(zero)$$

- Podemos mover uno a la derecha

$$succ(zero)\ plus\ succ(succ(zero))$$

- *Rinse and repeat*

$$zero\ plus\ succ(succ(succ(zero)))$$

Ejemplo: Los naturales con la suma

- Partiendo de

$$succ(succ(zero))\ plus\ succ(zero)$$

- Podemos mover uno a la derecha

$$succ(zero)\ plus\ succ(succ(zero))$$

- *Rinse and repeat*

$$zero\ plus\ succ(succ(succ(zero)))$$

- Sumar cero no cambia nada

$$succ(succ(succ(zero)))$$

Ejemplo: Los naturales con la suma

Ejemplo: Los naturales con la suma

Ahora ustedes transformen

$$succ(zero)\ plus\ succ(succ(zero))$$

En conclusión. . .

En conclusión. . .

- Un **lenguaje formal** es un conjunto de *simbolos* con una *sintaxis*.

En conclusión...

- Un **lenguaje formal** es un conjunto de *simbolos* con una *sintaxis*.
- Un **aparato deductivo** permite transformar las *fórmulas* de un **lenguaje** usando *reglas de inferencia*, este proceso se conoce como **derivación**.

En conclusión. . .

- Un **lenguaje formal** es un conjunto de *simbolos* con una *sintaxis*.
- Un **aparato deductivo** permite transformar las *fórmulas* de un **lenguaje** usando *reglas de inferencia*, este proceso se conoce como **derivación**.
- Cuando un **lenguaje formal** cuenta con un **aparato deductivo**, este pasa a ser un **sistema formal**.

Lógica como sistema formal

Lógica como sistema formal

Lógica como sistema formal

- El alfabeto:

$$A = \{\neg, \wedge, \vee, (,), p, q, r, s, ...\}$$

Lógica como sistema formal

- El alfabeto:

$$A = \{\neg, \wedge, \vee, (,), p, q, r, s, ...\}$$

- La sintaxis:

$$\begin{aligned}
\texttt{sentence} &\rightarrow \texttt{atomic_sentence} \mid \texttt{complex_sentence} \\
\texttt{atomic_sentence} &\rightarrow \boldsymbol{\mathit{True}} \mid \boldsymbol{\mathit{False}} \mid \boldsymbol{p} \mid \boldsymbol{q} \mid \boldsymbol{r} \mid \boldsymbol{s} \mid ... \\
\texttt{complex_sentence} &\rightarrow \texttt{unary_op sentence} \\
\texttt{complex_sentence} &\rightarrow (\texttt{sentence binary_op sentence}) \\
\texttt{unary_op} &\rightarrow \neg \\
\texttt{binary_op} &\rightarrow \wedge \mid \vee
\end{aligned}$$