Teoría de conjuntos

Matemática estructural y lógica

ISIS-1104

Reglas

- Un conjunto es una colección de elementos no repetidos.
- Dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos.
- Un conjunto puede pertenecer a otro conjunto.
- Ningún conjunto pertenece a si mismo.

¿Cómo denotar conjuntos?

Notación extensional: Simplemente escribimos todos los elementos dentro de llaves

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{2, 4, 6, 8, 10, ...\}$$

Notación intensional: Escribimos algun predicado que los elementos del conjunto deben cumplir

$$A = \{x : \text{int} \mid x \geq 0 \land x < 5\}$$

$$B = \{x : \text{int} \mid x > 0 \land x \text{ es par}\}$$

Pertenencia

Para afirmar que un elemento x pertenece al conjunto A, escribimos el predicado

$$x \in A \quad \text{o} \quad x : A$$

Para negar pertenencia escribimos

$$\neg(x \in A) \quad \text{o} \quad x \notin A$$

Dado que la notación intensional es de la forma

$$\{x \mid P(x)\}$$

Es natural afirmar que

$$(y \in \{x \mid P(x)\}) \equiv P(y)$$

Igualdad y contenencia

Podemos definir la igualdad de conjuntos utilizando pertenencia

$$(A = B) \equiv (\forall x \mid: x \in A \equiv x \in B)$$

También podemos definir la contenencia de conjuntos

$$(A \subseteq B) \equiv (\forall x \mid: x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Teorema: $(A = B) \equiv (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$

El universo y el vacío

Conjunto vacío: Lo denotamos con el simbolo $\varnothing$, es el conjunto que no tiene elementos

$$(\forall x \mid : x \notin \varnothing)$$

Conjunto universo: Lo denotamos con la letra $\mathcal{U}$, es el conjunto que contiene "todos" los elementos

$$(\forall x \mid x \neq \mathcal{U} : x \in \mathcal{U})$$

Teorema: Para cualquier conjunto A se tiene que

$$\varnothing \subseteq A$$

$$A \subseteq \mathcal{U} \quad (\text{cuando } A \neq \mathcal{U})$$

Operaciones entre conjuntos

Definimos las siguientes operaciones

- Unión de conjuntos

$$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

- Intersección de conjuntos

$$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

- Complemento de un conjunto

$$A^c = \{x \mid \neg(x \in A)\}$$

- Producto cartesiano de conjuntos

$$A \times B = \{(x, y) \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

Operaciones entre conjuntos

O equivalentemente

- Unión de conjuntos

$$(x \in A \cup B) \equiv (x \in A) \vee (x \in B)$$

- Intersección de conjuntos

$$(x \in A \cap B) \equiv (x \in A) \wedge (x \in B)$$

- Complemento de un conjunto

$$(x \in A^c) \equiv \neg(x \in A)$$

- Producto cartesiano de conjuntos

$$((x, y) \in A \times B) \equiv (x \in A) \wedge (x \in B)$$

Teoría de conjuntos y lógica

En teoría de conjuntos son válidos los siguientes teoremas

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cap A^C = \varnothing$$

$$A \cap \mathcal{U} = A$$

$$A \cap \varnothing = \varnothing$$

$$A \cap A = A$$

$$(A^C)^C = A$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Teoría de conjuntos y lógica

Porque en realidad son los mísmos axiomas de lógica proposicional

$$
\begin{aligned}
p \wedge q &\equiv q \wedge p \\
p \wedge (q \wedge r) &\equiv (p \wedge q) \wedge r \\
p \wedge (p \vee q) &\equiv p \\
p \wedge (q \vee r) &\equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\
p \wedge \neg p &\equiv \mathit{False} \\
p \wedge \mathit{True} &\equiv p \\
p \wedge \mathit{False} &\equiv \mathit{False} \\
p \wedge p &\equiv p \\
\neg\neg p &\equiv p \\
\neg(p \wedge q) &\equiv \neg p \vee \neg q
\end{aligned}
$$

Un ejemplo

Demostremos que para cualquier conjunto A se tiene que

$$A \cap A^C = \varnothing$$

Por definición de igualdad

$$(\forall x \,|\!: (x \in A \cap A^c) \equiv (x \in \varnothing))$$

Por $\forall$-eliminación

$$(x \in A \cap A^c) \equiv (x \in \varnothing)$$

Entonces partímos de $x \in A \cap A^c$ e intentamos llegar a $x \in \varnothing$

Un ejemplo

Por definición de $\cap$

$$(x \in A \cap A^c) \equiv (x \in A) \wedge (x \in A^c)$$

Por definición de complemento

$$(x \in A) \wedge (x \in A^c) \equiv (x \in A) \wedge \neg(x \in A)$$

Por **Piso**

$$(x \in A) \wedge \neg(x \in A) \equiv \mathit{False}$$

Sin embargo, por definición de vacío tenemos que $\neg(x \in \varnothing)$, o equivalentemente

$$\mathit{False} \equiv (x \in \varnothing)$$

Luego

$$(x \in A \cap A^c) \equiv (x \in \varnothing)$$

Ahora ustedes

Demuestren que para cualquier conjunto A

$$A \cup \varnothing = A$$

¿Por qué esto funciona?

Nuestras demostraciones consistieron en mostrar que

$$A \cap A^c = \varnothing \text{ se podía convertir a } (x \in A) \wedge \neg(x \in A) \equiv \mathit{False}$$

$$A \cup \varnothing = A \text{ se podía convertir a } (x \in A) \vee \mathit{False} \equiv (x \in A)$$

Esto **siempre** puede hacerse para cualquier afirmación sobre conjuntos y se conoce con el nombre de **teorema de representación**.

El teorema de representación

No tenemos el lenguaje adecuado para describir este teorema con exactitud, pero su enunciado sería algo así:

Cualquier afirmación sobre conjuntos puede transformarse a un predicado sustituyendo

- "$\cap$" por "$\wedge$"
- "$\cup$" por "$\wedge$"
- "c" por "$\neg$"
- "$=$" por "$\equiv$"
- "$\varnothing$" por "$False$"
- "$\mathcal{U}$" por "$True$"
- Cada conjunto "A" por el predicado "$x \in A$"

Un ejemplo: De Morgan para conjuntos

Teorema:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

Demostración: Usando el teorema de representación

$$\neg((x \in A) \vee (x \in B)) \equiv \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B)$$

Lo cual es trivial de demostrar usando De Morgan para proposiciones.

Ahora ustedes

Teorema:

$$A \cap (A \cup B) = A$$