Cálculo de predicados

Matemática estructural y lógica

ISIS-1104

Axiomas de la lógica de predicados

Axiomas de la lógica de predicados

Trueque:

$$(\forall x \mid R : P) \equiv (\forall x \mid : R \Rightarrow P)$$

Axiomas de la lógica de predicados

Trueque:

$$(\forall x \mid R : P) \equiv (\forall x \mid : R \Rightarrow P)$$

En otras palabras

"Para todo x tal que R se tiene P"
es lo mismo que
"Para todo x se tiene que si R entonces P"

Axiomas de la lógica de predicados

Axiomas de la lógica de predicados

Distributividad entre $\vee$ y $\forall$:
Si P no depende de x

$$P \vee (\forall x \mid R : Q) \equiv (\forall x \mid R : P \vee Q)$$

Axiomas de la lógica de predicados

Axiomas de la lógica de predicados

Ley de De Morgan generalizada:

$$\neg(\exists x \mid Q : R) \equiv (\forall x \mid Q : \neg R)$$

Axiomas de la lógica de predicados

Ley de De Morgan generalizada:

$$\neg(\exists x \mid Q : R) \equiv (\forall x \mid Q : \neg R)$$

En otras palabras

"Negar la existencia de un x que cumple R
es lo mismo que
"Afirmar que para todo x se cumple que $\neg R$"

Axiomas de la lógica de predicados

Ley de De Morgan generalizada:

$$\neg(\exists x \mid Q : R) \equiv (\forall x \mid Q : \neg R)$$

En otras palabras

"Negar la existencia de un x que cumple R

es lo mismo que

"Afirmar que para todo x se cumple que $\neg R$"

Es mas útil escribir éste axioma como

$$(\exists x \mid Q : R) \equiv \neg(\forall x \mid Q : \neg R)$$

Una demostración en lógica de predicados

Una demostración en lógica de predicados

Teorema:

$$(\forall x \mid R : true) \equiv true$$

Una demostración en lógica de predicados

Teorema:

$$(\forall x \mid R : \mathit{true}) \equiv \mathit{true}$$

Demostración:

Una demostración en lógica de predicados

Teorema:

$$(\forall x \mid R : \mathit{true}) \equiv \mathit{true}$$

Demostración:

Por idempotencia $\mathit{true} \equiv \mathit{true} \vee \mathit{true}$, luego

$$(\forall x \mid R : \mathit{true}) \equiv (\forall x \mid R : \mathit{true} \vee \mathit{true})$$

Una demostración en lógica de predicados

Teorema:

$$(\forall x \mid R : \mathit{true}) \equiv \mathit{true}$$

Demostración:

Por idempotencia $\mathit{true} \equiv \mathit{true} \vee \mathit{true}$, luego

$$(\forall x \mid R : \mathit{true}) \equiv (\forall x \mid R : \mathit{true} \vee \mathit{true})$$

Usando distribución entre $\vee$ y $\forall$

$$(\forall x \mid R : \mathit{true} \vee \mathit{true}) \equiv \mathit{true} \vee (\forall x \mid R : \mathit{true})$$

Una demostración en lógica de predicados

Teorema:

$$(\forall x \mid R : \mathit{true}) \equiv \mathit{true}$$

Demostración:

Por idempotencia $\mathit{true} \equiv \mathit{true} \vee \mathit{true}$, luego

$$(\forall x \mid R : \mathit{true}) \equiv (\forall x \mid R : \mathit{true} \vee \mathit{true})$$

Usando distribución entre $\vee$ y $\forall$

$$(\forall x \mid R : \mathit{true} \vee \mathit{true}) \equiv \mathit{true} \vee (\forall x \mid R : \mathit{true})$$

Usando techo

$$\mathit{true} \vee (\forall x \mid R : \mathit{true}) \equiv \mathit{true}$$

Otra demostración en lógica de predicados

Otra demostración en lógica de predicados

Teorema (Trueque para $\exists$):

$$(\exists x \mid R : P) \equiv (\exists x \mid : R \wedge P)$$

Otra demostración en lógica de predicados

Teorema (Trueque para $\exists$):

$$(\exists x \mid R : P) \equiv (\exists x \mid : R \wedge P)$$

Demostración:

Otra demostración en lógica de predicados

Teorema (Trueque para $\exists$):

$$(\exists x \mid R : P) \equiv (\exists x \mid : R \wedge P)$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
(\exists x \mid R : P) &\equiv \neg(\forall x \mid R : \neg P) && \text{(De Morgan gen.)}\\
&\equiv \neg(\forall x \mid : R \Rightarrow \neg P) && \text{(trueque para } \forall\text{)}\\
&\equiv \neg(\forall x \mid : \neg R \vee \neg P) && \text{(definición } \Rightarrow\text{)}\\
&\equiv \neg(\forall x \mid : \neg(R \wedge P)) && \text{(De Morgan)}\\
&\equiv (\exists x \mid : R \wedge P) && \text{(De Morgan gen.)}
\end{aligned}$$

Ahora ustedes

Ahora ustedes

Teorema (Distribución entre $\wedge$ y $\exists$):

Si P no depende de x:

$$P \wedge (\exists x \mid R : Q) \equiv (\exists x \mid : P \wedge Q)$$

Ahora ustedes

Ahora ustedes

Teorema:

$$(\exists x \mid R : \mathit{false}) \equiv \mathit{false}$$

Ahora ustedes

Ahora ustedes

Teorema:

Si P no depende de x:

$$Q \wedge (\exists x \mid: P) \equiv (\exists x \mid P : Q)$$