Relaciones entre conjuntos

Matemática estructural y lógica

ISIS-1104

¿Qué es una relación?

- Si A y B son conjuntos, definimos el conjunto de relaciones entre A y B como:

$$A \leftrightarrow B = \mathcal{P}(A \times B)$$

- Es decir, todo elemento de $A \leftrightarrow B$ es un subconjunto de $A \times B$.
- Decimos que R es una relación entre A y B si $R \in A \leftrightarrow B$.

¿Qué es una relación?

- Si $R \in A \leftrightarrow B$, sabemos que R debe estar conformado por algunos elementos de $A \times B$.
- Es decir, R es un conjunto de parejas ordenadas de A y B.
- En ese orden de ideas, introducimos la siguiente notación

$$aRb \equiv (a, b) \in R$$

- Usualmente aRb se lee "a está relacionado con b por R".

Un par de ejemplos

Sea $R \in \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ la relación definida por el siguiente enunciado:

$$aRb \equiv \text{"}a\text{" es igual a el valor absoluto de "}b\text{"}$$

¿Qué elementos de $\mathbb{Z}$ están relacionados por R?

Sea $S \in \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ la relación definida por el siguiente enunciado:

$$aSb \equiv \; a - b \text{ es par}$$

¿Qué elementos de $\mathbb{Z}$ están relacionados por R?

Algunas definiciones

Si $R \in A \leftrightarrow B$:

- A es el dominio de R.
- B es el codominio de R.
- $\mathrm{dom}(R) = \{a : A \mid (\exists b : B \mid: aRb)\}$ es el dominio de definición de R
- $\mathrm{ran}(R) = \{b : B \mid (\exists a : A \mid: aRb)\}$ es el rango de R
- $R^T = \{(b, a) : (B \times A) \mid aRb\}$ es la inversa (o transpuesta) de R

¿Cuáles son los dominios, codomonios, dominios de definición, rangos e inversas de nuestros ejemplos?

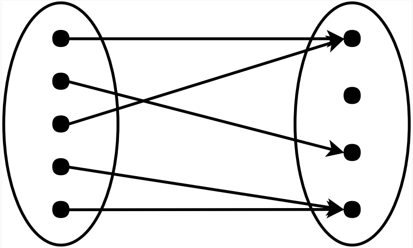
Tipos de relaciones: Total

Decimos que $R \in A \leftrightarrow B$ es total si

$$(\forall a : A \mid: (\exists b : B \mid: aRb))$$

Equivalentemente, podemos decir que R es total si

$$\mathrm{dom}(R) = A$$



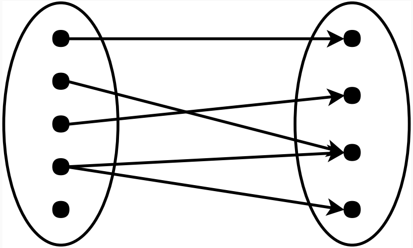
Tipos de relaciones: Sobreyectiva

Decimos que $R \in A \leftrightarrow B$ es sobreyectiva si

$$(\forall b : B \mid : (\exists a : A \mid : aRb))$$

Equivalentemente, podemos decir que R es sobreyectiva si

$$\mathrm{ran}(R) = B$$



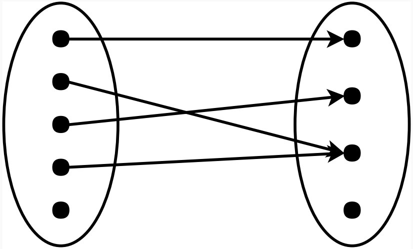
Tipos de relaciones: Función

Decimos que $R \in A \leftrightarrow B$ es función si

$$(\forall a : A \mid aRb_1 \wedge aRb_2 : b_1 = b_2)$$

Equivalentemente, podemos decir que

$$R \text{ es función} \equiv R^T \text{ es inyectiva}$$



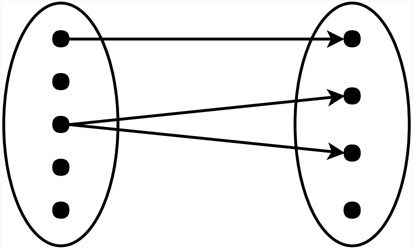
Tipos de relaciones: Inyectiva

Decimos que $R \in A \leftrightarrow B$ es inyectiva si

$$(\forall b : B \mid a_1 R b \wedge a_2 R b : a_1 = a_2)$$

Equivalentemente, podemos decir que

$$R \text{ es inyectiva} \equiv R^T \text{ es función}$$



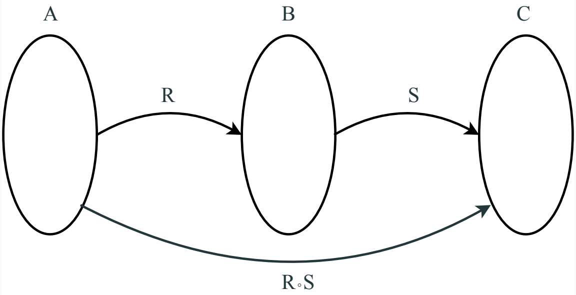
Tipos de relaciones: Función total y Biyección

- Decimos que $R \in A \leftrightarrow B$ es función total si es función y es total
- Decimos que $R \in A \leftrightarrow B$ es biyectiva si es función, inyectiva y sobreyectiva.
- R es biyectiva $\equiv$ R^T es biyectiva

Composición de relaciones: Definición

Si tenemos $R \in A \leftrightarrow B$ y $S \in B \leftrightarrow C$ podemos **componerlas** para obtener una nueva relación

$$a(R \circ S)c \equiv (\exists b : B \mid: aRb \wedge bSc)$$



Composición de relaciones: Asociatividad

Si $R \in A \leftrightarrow B$, $S \in B \leftrightarrow C$ y $T \in C \leftrightarrow D$, entonces

$$R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$$

Demostración:

Queremos ver que si $a \in A$, $d \in D$

$$a(R \circ (S \circ T))d \equiv a((R \circ S) \circ T)d$$

Por definición de $\circ$

$$a(R \circ (S \circ T))d \equiv (\exists b : B \mid: aRb \wedge b(S \circ T)d)$$

Por definición de $\circ$

$$(\exists b : B \mid: aRb \wedge b(S \circ T)d) \equiv (\exists b : B \mid: aRb \wedge (\exists c : C \mid: bSc \wedge cTd))$$

Composición de relaciones: Asociatividad

Por anidamiento

$$(\exists b \,|\!: aRb \wedge (\exists c \,|\!: bSc \wedge cTd)) \equiv (\exists b, c \,|\!: aRb \wedge bSc \wedge cTd)$$

Por anidamiento

$$(\exists b, c \,|\!: aRb \wedge bSc \wedge cTd) \equiv (\exists c \,|\!: (\exists b \,|\!: aRb \wedge bSc) \wedge cTd)$$

Por definición de $\circ$

$$(\exists c \,|\!: (\exists b \,|\!: aRb \wedge bSc) \wedge cTd) \equiv (\exists c \,|\!: a(R \circ S)c \wedge cTd)$$

Por definición de $\circ$

$$(\exists c \,|\!: a(R \circ S)c \wedge cTd) \equiv a((R \circ S) \circ T)d$$

Composición de relaciones: Distribución

Si $R \in A \leftrightarrow B$, $S \in B \leftrightarrow C$ y $T \in B \leftrightarrow C$, entonces

$$R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$$

Demostración: Para ustedes

Relaciones dentro de un mismo conjunto

Si $R \in A \leftrightarrow A$ decimos que:

- R es reflexiva si $(\forall a : A \mid : aRa)$
- R es irreflexiva si $(\forall a : A \mid : \neg aRa)$
- R es simétrica si $(\forall a, b : A \mid aRb : bRa)$
- R es asimétrica si $(\forall a, b : A \mid aRb : \neg bRa)$
- R es antisimetrica si $(\forall a, b : A \mid aRb \wedge bRa : a = b)$
- R es transitiva si $(\forall a, b, c : A \mid aRb \wedge bRc : aRc)$

Definiciones alternativas

Definimos la relación identidad $I \in A \leftrightarrow A$ como

$$I = \{(a, a) \mid a \in A\}$$

Si $R \in A \leftrightarrow A$ decimos que:

- R es reflexiva si $I \subseteq R$
- R es irreflexiva si $I \cap R = \varnothing$
- R es simétrica si $R = R^T$
- R es asimetrica si $R \cap R^T = \varnothing$
- R es antisimétrica si $R \cap R^T \subseteq I$
- R es transitiva si $R \circ R \subset R$

Demostremos que

$$(\forall a : A \mid: aRa) \equiv (I \subseteq R)$$

Demostración:
Por definición de $\subseteq$

$$(I \subseteq R) \equiv (\forall a, b \mid: (a, b) \in I \Rightarrow (a, b) \in R)$$

Por notación de relación

$$(\forall a, b \mid: (a, b) \in I \Rightarrow a, b \in R) \equiv (\forall a, b \mid: aIb \Rightarrow aRb)$$

Por definición de identidad

$$(\forall a, b \mid: aIb \Rightarrow aRb) \equiv (\forall a, b \mid: (a = b) \Rightarrow aRb)$$

Definiciones alternativas

Por anidamiento

$$(\forall a, b \mid: (a = b) \Rightarrow aRb) \equiv (\forall a \mid: (\forall b \mid: ((a = b) \Rightarrow aRb)))$$

Por trueque

$$(\forall a \mid: (\forall b \mid: (a = b) \Rightarrow aRb)) \equiv (\forall a \mid: (\forall b \mid (a = b) : aRb))$$

Por regla de un punto

$$(\forall a \mid: (\forall b \mid (a = b) : aRb)) \equiv (\forall A \mid: aRa)$$

Definiciones alternativas

Ahora ustedes demuestren que

$$(\forall a : A \mid : \neg aRa) \equiv (I \cap R = \varnothing)$$

Relaciones de equivalencia: Definición

Sea $R \in A \leftrightarrow A$, decimos que R es una **relación de equivalencia** si R es reflexiva, simétrica y transitiva.

Ejemplos:

- $R : LL104 \leftrightarrow LL104$ definida como

$$aRb \equiv \text{los códigos de } a \text{ y } b \text{ terminan en el mismo número}$$

- $S : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ definida como

$$aSb \equiv (a - b) \text{ es multiplo de 3}$$

- $T : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ definida como

$$aTb \equiv a \text{ y } b \text{ son primos}$$

Relaciones de equivalencia: Clases

Sea $R \in A \leftrightarrow A$ una relación de equivalencia y $a \in A$. Definimos la clase de equivalencia de a como:

$$[a]_R = \{b \in A \mid aRb\}$$

En otras palabras, la clase de a es el conjunto de todos los elementos que se relacionan con a.

¿Cuáles y cuántas son las clases de equivalencia de los ejemplos anteriores?

Relaciones de orden parcial: Definición

Sea $R \in A \leftrightarrow A$, decimos que R es un **orden parcial** si es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Ejemplos:

- $\leq : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$
- $\subseteq : \mathcal{U} \leftrightarrow \mathcal{U}$
- $R : LL104 \leftrightarrow LL104$ definida como

$$aRb \equiv \text{el último número del código de } a \text{ es} \leq \text{que el de } b$$

Relaciones de orden estricto: Definición

Sea $R \in A \leftrightarrow A$, decimos que R es un **orden estricto** si es irreflexiva y transitiva.

Ejemplos:

- $<: \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$
- $R : LL104 \leftrightarrow LL104$ definida como

$$aRb \equiv \text{el último número del código de } a \text{ es menor que el de } b$$