Lógica de predicados

Matemática estructural y lógica

ISIS-1104

¿Por qué las proposiciones no bastan?

Si tenemos el siguiente enunciado

Toda la comida italiana es deliciosa.
La pizza es comida italiana
Luego la pizza es deliciosa

La lógica proposicional es insuficiente para expresar casos particulares y generalizaciones.

Predicados

Un predicado sobre T es una función $T \to Bool$.

T puede ser cualquier conjunto (tipo) de elementos. Por ejemplo:

- si $k : Int$, $P(k) = k > 0$
- si $s : Persona$, $esAdulto(s) = s$ es un adulto.

Como son funciones, los predicados no tienen un valor de verdad definido hasta que se evalúan en algún $t : T$.

Predicados

Los predicados pueden combinarse usando las operaciones lógicas que ya conocemos.

Por ejemplo si tenemos los predicados

$$esAdulto(k) = k \text{ es un adulto}$$

$$sabeConducir(k) = k \text{ sabe conducir}$$

Podemos definir un nuevo predicado

$$esAdulto(k) \wedge \neg sabeConducir(k)$$

Predicados

Todos los axiomas y reglas de inferencia de lógica proposicional siguen siendo válidos.

Por ejemplo

- $P(x) \land P(x) \equiv P(x)$
- $P(x) \Rightarrow Q(y) \equiv \neg P(x) \lor Q(y)$
- $\neg(P(x) \lor Q(x)) \equiv \neg P(x) \land \neg Q(x)$
- $P(x) \land (P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow Q(x)$

Sin embargo hay que ser cuidadosos con las variables de los predicados

$$P(x) \Rightarrow Q(y) \not\equiv P(y) \Rightarrow Q(x)$$

Constantes

En ocasiones, queremos hacer referencia a algún elemento de T, para esto usamos constantes.

Por ejemplo si tenemos el tipo *Animal* y el predicado

$$esGato(k) = k \text{ es un gato}$$

podemos definir una constante $garfield : Animal$ y escribir

$$esGato(garfield)$$

para afirmar que la constante *garfield* cumple el predicado *esGato*

Cuantificador universal

Si tenemos el cuantificador

$$(\wedge x : T \mid P(x) : Q(x))$$

Con P y Q predicados sobre T, podemos darle la interpretación

Paras todos los x tales que $P(x)$, se cumple $Q(x)$.

Usualmente cambiamos el símbolo $\wedge$

$$(\forall x : T \mid P(x) : Q(x))$$

Por ejemplo

$$(\forall x : \mathit{Animal} \mid \mathit{esGato}(x) : \mathit{tieneBigotes}(x))$$

$$(\forall x : \mathit{Animal} \mid \mathit{esGato}(x) : \mathit{sabeVolar}(x))$$

Cuantificador existencial

Si tenemos el cuantificador

$$(\vee x : T \mid P(x) : Q(x))$$

Con P y Q predicados sobre T, podemos darle la interpretación

Existen x tales que $P(x)$, para los cuales se cumple $Q(x)$.

Usualmente cambiamos el símbolo $\wedge$

$$(\exists x : T \mid P(x) : Q(x))$$

Por ejemplo

$$(\exists x : Animal \mid esGato(x) : comeLasagna(x))$$

$$(\exists x : Animal \mid esGato(x) : esPerro(x))$$

De vuelta a la pizza

Si tomamos C como el tipo de la comida. Y $\mathit{pizza} : C$ como una constante.

Toda la comida italiana es deliciosa.
La pizza es comida italiana.
Luego la pizza es deliciosa.

Puede escribirse como

$$\frac{(\forall c : C \mid \mathit{esItaliana}(c) : \mathit{esDeliciosa}(c)),\ \ \mathit{esItaliana}(\mathit{pizza})}{\mathit{esDeliciosa}(\mathit{pizza})}$$

Variables acotadas

Es necesario distinguir que variables están libres y cuales están acotadas en éste nuevo lenguaje.

Por ejemplo:

- x es libre en $x > 5$.
- x es libre en $esGato(x)$.
- n está acotada en $(\exists n : Int \mid esPar(n) : n > 0)$.
- k es libre en $(\forall n : Int \mid esPrimo(n) : n < k)$.

Entonces

- x está ligada si es la variable sobre la que estoy cuantificando.
- x es libre si no estoy cuantificando sobre ella.

Variables acotadas

Si x es libre en una expresión, decimos que depende de x.

- $esGato(a)$ depende de a.
- $(\exists n : Int \mid: n > k)$ depende de k.
- $(\exists n : Int \mid: n > 0)$ no depende de n.

Cuando una cuantificación depende de alguna variable podemos usarla como una proposición

$$Q(k) = (\exists n : Int \mid: k = 2n)$$

entonces

$$(\forall z : Int \mid esPar(z) : Q(z))$$

es lo mismo que

$$(\forall z : Int \mid esPar(z) : (\exists n : Int \mid: z = 2n))$$

Ahora ustedes

- es x libre en

$$x + 1 = 5$$

- son a y b libres en

$$(\exists a : \mathit{Animal} \mid \mathit{esGato}(n) : \mathit{sonAmigos}(a, b))$$

- son x, y, z libres en

$$(\forall z : \mathit{Int} \mid z > 0 : (\exists y : \mathit{Int} \mid y > 0 : x^2 + y^2 = z^2))$$