

# Teoremas y demostraciones

---

Matemática estructural y lógica  
ISIS-1104



**Teorema:**

$$p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$$

# Contrapositiva

**Teorema:**

$$p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$$

**Demostración:**

# Contrapositiva

**Teorema:**

$$p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$$

**Demostración:**

$$\begin{aligned} p \Rightarrow q &\equiv \neg p \vee q && \text{(definición } \Rightarrow \text{)} \\ &\equiv q \vee \neg p && \text{(conmutatividad)} \\ &\equiv \neg \neg q \vee \neg p && \text{(doble negación)} \\ &\equiv \neg q \Rightarrow \neg p && \text{(definición } \Rightarrow \text{)} \end{aligned}$$

## Contrapositiva: caso de uso

## Contrapositiva: caso de uso

Demuestre que

$$(p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow s) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow s)$$

## Contrapositiva: caso de uso

Demuestre que

$$(p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow s) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow s)$$

**Demostración:**



## Contrapositiva: caso de uso

Demuestre que

$$(p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow s) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow s)$$

**Demostración:**

- Usando contrapositiva con  $p \Rightarrow q$

$$\frac{(p \Rightarrow q)}{\neg q \Rightarrow \neg p} \quad (1)$$

## Contrapositiva: caso de uso

Demuestre que

$$(p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow s) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow s)$$

**Demostración:**

- Usando contrapositiva con  $p \Rightarrow q$

$$\frac{(p \Rightarrow q)}{\neg q \Rightarrow \neg p} \quad (1)$$

- Usando silogismo hipotético entre (1) y  $\neg p \Rightarrow r$

$$\frac{(\neg q \Rightarrow \neg p) \wedge (\neg p \Rightarrow r)}{\neg q \Rightarrow r} \quad (2)$$

## Contrapositiva: caso de uso

Demuestre que

$$(p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow s) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow s)$$

**Demostración:**

- Usando contrapositiva con  $p \Rightarrow q$

$$\frac{(p \Rightarrow q)}{\neg q \Rightarrow \neg p} \quad (1)$$

- Usando silogismo hipotético entre (1) y  $\neg p \Rightarrow r$

$$\frac{(\neg q \Rightarrow \neg p) \wedge (\neg p \Rightarrow r)}{\neg q \Rightarrow r} \quad (2)$$

- Usando silogismo hipotético entre (2) y  $r \Rightarrow s$

$$\frac{(\neg q \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow s)}{\neg q \Rightarrow s}$$

## Contrapositiva: ejercicio

## Contrapositiva: ejercicio

Demuestre que

$$(p \Rightarrow \neg q) \wedge (r \Rightarrow q) \wedge r \Rightarrow \neg p$$

## Moviendo hipótesis

**Teorema:**

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv p \wedge q \Rightarrow r$$

# Moviendo hipótesis

**Teorema:**

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv p \wedge q \Rightarrow r$$

**Demostración:**



**Teorema:**

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv p \wedge q \Rightarrow r$$

**Demostración:**

$$\begin{aligned} p \wedge q \Rightarrow r &\equiv \neg(p \wedge q) \vee r && \text{(definición } \Rightarrow \text{)} \\ &\equiv \neg p \vee \neg q \vee r && \text{(De Morgan)} \\ &\equiv \neg p \vee (q \Rightarrow r) && \text{(definición } \Rightarrow \text{)} \\ &\equiv p \Rightarrow (q \Rightarrow r) && \text{(definición } \Rightarrow \text{)} \end{aligned}$$

## Moviendo hipótesis: caso de uso

## Moviendo hipótesis: caso de uso

Demuestre que

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

## Moviendo hipótesis: caso de uso

Demuestre que

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

**Demostración:**

## Moviendo hipótesis: caso de uso

Demuestre que

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

**Demostración:**

- Moviendo hipótesis

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge p \Rightarrow r$$

# Moviendo hipótesis: caso de uso

Demuestre que

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

**Demostración:**

- Moviendo hipótesis

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge p \Rightarrow r$$

- Usando Modus ponens

$$\frac{(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge p \Rightarrow r}{q \wedge (q \Rightarrow r)}$$

# Moviendo hipótesis: caso de uso

Demuestre que

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

## Demostración:

- Moviendo hipótesis

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge p \Rightarrow r$$

- Usando Modus ponens

$$\frac{(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge p \Rightarrow r}{q \wedge (q \Rightarrow r)}$$

- Usando Modus ponens

$$\frac{q \wedge (q \Rightarrow r)}{r}$$

## Moviendo hipótesis: ejercicio



## Moviendo hipótesis: ejercicio

Demuestre que

$$((p \Rightarrow q) \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$$

# Doble implicación

**Teorema:**

$$(p \equiv q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

# Doble implicación

**Teorema:**

$$(p \equiv q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

**Demostración:**

# Doble implicación

**Teorema:**

$$(p \equiv q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

**Demostración:**

$p$	$q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	$p \equiv q$
<i>True</i>	<i>True</i>	<i>True</i>	<i>True</i>	<i>True</i>	<i>True</i>
<i>True</i>	<i>False</i>	<i>False</i>	<i>True</i>	<i>False</i>	<i>False</i>
<i>False</i>	<i>True</i>	<i>True</i>	<i>False</i>	<i>False</i>	<i>False</i>
<i>False</i>	<i>False</i>	<i>True</i>	<i>True</i>	<i>True</i>	<i>True</i>

## Doble implicación: caso de uso

## Doble implicación: caso de uso

Demuestre que  $p \wedge (p \equiv q) \Rightarrow q$

## Doble implicación: caso de uso

Demuestre que  $p \wedge (p \equiv q) \Rightarrow q$

**Demostración:**



## Doble implicación: caso de uso

Demuestre que  $p \wedge (p \equiv q) \Rightarrow q$

### Demostración:

- Usando doble implicación

$$\frac{p \wedge (p \equiv q)}{p \wedge (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)} \quad (1)$$

## Doble implicación: caso de uso

Demuestre que  $p \wedge (p \equiv q) \Rightarrow q$

### Demostración:

- Usando doble implicación

$$\frac{p \wedge (p \equiv q)}{p \wedge (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)} \quad (1)$$

- Usando simplificación en (1)

$$\frac{p \wedge (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)}{p \wedge (p \Rightarrow q)} \quad (2)$$

## Doble implicación: caso de uso

Demuestre que  $p \wedge (p \equiv q) \Rightarrow q$

### Demostración:

- Usando doble implicación

$$\frac{p \wedge (p \equiv q)}{p \wedge (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)} \quad (1)$$

- Usando simplificación en (1)

$$\frac{p \wedge (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)}{p \wedge (p \Rightarrow q)} \quad (2)$$

- Usando Modus Ponens en (2)

$$\frac{p \wedge (p \Rightarrow q)}{q}$$

## Doble implicación: ejercicio

## Doble implicación: ejercicio

Demuestre que

$$(\neg p \equiv q) \equiv (p \equiv \neg p)$$