

Cálculo de predicados

Matemática estructural y lógica

ISIS-1104

Trueque:

$$(\forall x \mid R : P) \equiv (\forall x \mid : R \Rightarrow P)$$

En otras palabras

"Para todo x tal que R se tiene P "

es lo mismo que

"Para todo x se tiene que si R entonces P "

Distributividad entre \vee y \forall :

Si P no depende de x

$$P \vee (\forall x \mid R : Q) \equiv (\forall x \mid R : P \vee Q)$$

Ley de De Morgan generalizada:

$$\neg(\exists x \mid Q : R) \equiv (\forall x \mid Q : \neg R)$$

En otras palabras

*"Negar la existencia de un x que cumple R
es lo mismo que
"Afirmar que para todo x se cumple que $\neg R$ "*

Es mas útil escribir esta regla como

$$(\exists x \mid Q : R) \equiv \neg(\forall x \mid Q : \neg R)$$

Una demostración en lógica de predicados

Teorema:

$$(\forall x \mid R : \text{true}) \equiv \text{true}$$

Demostración:

Por idempotencia $\text{true} \equiv \text{true} \vee \text{true}$, luego

$$(\forall x \mid R : \text{true}) \equiv (\forall x \mid R : \text{true} \vee \text{true})$$

Usando distribución entre \vee y \forall

$$(\forall x \mid R : \text{true} \vee \text{true}) \equiv \text{true} \vee (\forall x \mid R : \text{true})$$

Usando techo

$$\text{true} \vee (\forall x \mid R : \text{true}) \equiv \text{true}$$

Otra demostración en lógica de predicados

Teorema (Trueque para \exists):

$$(\exists x \mid R : P) \equiv (\exists x \mid : R \wedge P)$$

Demostración:

$(\exists x \mid R : P) \equiv \neg(\forall x \mid R : \neg P)$	(De Morgan gen.)
$\equiv \neg(\forall x \mid : R \Rightarrow \neg P)$	(trueque para \forall)
$\equiv \neg(\forall x \mid : \neg R \vee \neg P)$	(definición \Rightarrow)
$\equiv \neg(\forall x \mid : \neg(R \wedge P))$	(De Morgan)
$\equiv (\exists x \mid : R \wedge P)$	(De Morgan gen.)

Teorema (Distribución entre \wedge y \exists):

Si P no depende de x :

$$P \wedge (\exists x \mid R : Q) \equiv (\exists x \mid : P \wedge Q)$$

Teorema:

$$(\exists x \mid R : \text{false}) \equiv \text{false}$$