

Sistemas formales

Matemática estructural y lógica
ISIS-1104

¿Para qué?

¿Para qué?

Para razonar sobre la correctitud de las cosas

¿Para qué?

Para razonar sobre la correctitud de las cosas

```
int public signo(int x) {  
    if (x != 0) {  
        return 1  
    } else {  
        return -1;  
    }  
}
```

¿Para qué?

Para razonar sobre la correctitud de las cosas

```
int public signo(int x) {  
    if (x != 0) {  
        return 1  
    } else {  
        return -1;  
    }  
}
```

¿Qué está mal con este código?

Lenguajes formales

Ejemplo: El lenguaje de los decimales

Ejemplo: El lenguaje de los decimales

- Cosas que son decimales
 - 1.46
 - 32.04
 - 1234.0

Ejemplo: El lenguaje de los decimales

- Cosas que son decimales
 - 1.46
 - 32.04
 - 1234.0
- Cosas que **no** son decimales:
 - 12341
 - 132.432.23
 - .123

Ejemplo: El lenguaje de los decimales

Ejemplo: El lenguaje de los decimales

- Un decimal es un número, seguido por un punto, seguido por otro número.

`decimal` \rightarrow `numero . numero`

Ejemplo: El lenguaje de los decimales

- Un decimal es un número, seguido por un punto, seguido por otro número.

`decimal` \rightarrow `numero . numero`

- A su vez, un número puede ser, o un dígito

`numero` \rightarrow `digito`

Ejemplo: El lenguaje de los decimales

- Un decimal es un número, seguido por un punto, seguido por otro número.

$\text{decimal} \rightarrow \text{numero} . \text{numero}$

- A su vez, un número puede ser, o un dígito

$\text{numero} \rightarrow \text{digito}$

- O un dígito seguido de otro número

$\text{numero} \rightarrow \text{digito numero}$

Ejemplo: El lenguaje de los decimales

- Un decimal es un número, seguido por un punto, seguido por otro número.

$\text{decimal} \rightarrow \text{numero} . \text{numero}$

- A su vez, un número puede ser, o un dígito

$\text{numero} \rightarrow \text{digito}$

- O un dígito seguido de otro número

$\text{numero} \rightarrow \text{digito numero}$

- Finalmente, un dígito es un caracter entre 0 y 9

$\text{digito} \rightarrow 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9$

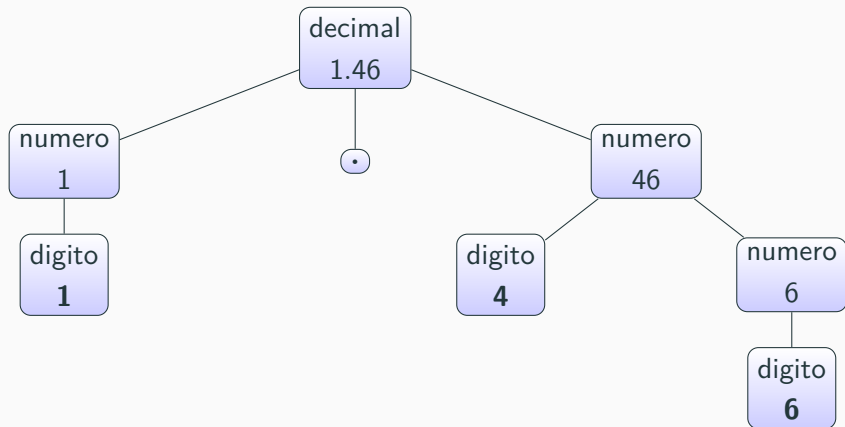
Ejemplo: El lenguaje de los decimales

Ejemplo: El lenguaje de los decimales

¿Es 1.46 un decimal?

Ejemplo: El lenguaje de los decimales

¿Es 1.46 un decimal?



Ejemplo: El lenguaje de los decimales

Ejemplo: El lenguaje de los decimales

Ahora ustedes ¿Es 32.5.1 un decimal?

Ejemplo: El lenguaje de los decimales

Ejemplo: El lenguaje de los decimales

- $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, .\}$ son los **símbolos terminales**.

Ejemplo: El lenguaje de los decimales

- $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, .\}$ son los **símbolos terminales**.
- $\{\text{decimal}, \text{numero}, \text{digito}\}$ son los **símbolos auxiliares**.

Ejemplo: El lenguaje de los decimales

- $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, .\}$ son los **símbolos terminales**.
- $\{\text{decimal}, \text{numero}, \text{digito}\}$ son los **símbolos auxiliares**.
- decimal es el **símbolo inicial**.

Ejemplo: El lenguaje de los decimales

- $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, .\}$ son los **símbolos terminales**.
- $\{\text{decimal}, \text{numero}, \text{digito}\}$ son los **símbolos auxiliares**.
- decimal es el **símbolo inicial**.
- Y estas son **producciones**:

`decimal` \rightarrow `numero . numero`

`numero` \rightarrow `digito`

`numero` \rightarrow `digito numero`

`digito` \rightarrow **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9**

Ejemplo: El lenguaje de los decimales

- $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, .\}$ son los **símbolos terminales**.
- $\{\text{decimal}, \text{numero}, \text{digito}\}$ son los **símbolos auxiliares**.
- decimal es el **símbolo inicial**.
- Y estas son **producciones**:

decimal \rightarrow numero . numero

numero \rightarrow digito

numero \rightarrow digito numero

digito \rightarrow 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9

- Este conjunto de conceptos conforman una **forma normal**.

- Un lenguaje formal esta constituido por:

- Un lenguaje formal esta constituido por:
 - Una colección de *simbolos*, el **alfabeto** (usualmente denotado por A).

- Un lenguaje formal esta constituido por:
 - Una colección de *simbolos*, el **alfabeto** (usualmente denotado por A).
 - Una serie de reglas que nos indican como combinar simbolos (usualmente una *forma normal*), la **sintaxis**.

- Un lenguaje formal esta constituido por:
 - Una colección de *simbolos*, el **alfabeto** (usualmente denotado por A).
 - Una serie de reglas que nos indican como combinar simbolos (usualmente una *forma normal*), la **sintaxis**.
- Una sucesión de símbolos del alfabeto es una **fórmula**.

- Un lenguaje formal esta constituido por:
 - Una colección de *simbolos*, el **alfabeto** (usualmente denotado por A).
 - Una serie de reglas que nos indican como combinar simbolos (usualmente una *forma normal*), la **sintaxis**.
- Una sucesión de símbolos del alfabeto es una **fórmula**.
- Una fórmula que sigue la **sintaxis** es una **fórmula bien formada**.

Semántica

Ejemplo: Los números naturales

Ejemplo: Los números naturales

- El alfabeto:

$$A = \{zero, succ, (,)\}$$

Ejemplo: Los números naturales

- El alfabeto:

$$A = \{zero, succ, (,)\}$$

- La sintaxis:

$$\text{natural} \rightarrow \text{zero} \mid \text{succ}(\text{natural})$$

Ejemplo: Los números naturales

- El alfabeto:

$$A = \{zero, succ, (,)\}$$

- La sintaxis:

$$\text{natural} \rightarrow \textbf{zero} \mid \textbf{succ}(\text{natural})$$

- Algunas fbf:

Ejemplo: Los números naturales

- El alfabeto:

$$A = \{zero, succ, (,)\}$$

- La sintaxis:

$$\text{natural} \rightarrow \textbf{zero} \mid \textbf{succ}(\text{natural})$$

- Algunas fbf:

- *zero*

Ejemplo: Los números naturales

- El alfabeto:

$$A = \{zero, succ, (,)\}$$

- La sintaxis:

$$\text{natural} \rightarrow \text{zero} \mid \text{succ}(\text{natural})$$

- Algunas fbf:
 - *zero*
 - *succ(zero)*

Ejemplo: Los números naturales

- El alfabeto:

$$A = \{zero, succ, (,)\}$$

- La sintaxis:

$$\text{natural} \rightarrow \text{zero} \mid \text{succ}(\text{natural})$$

- Algunas fbf:
 - *zero*
 - *succ(zero)*
 - *succ(succ(zero))*

Ejemplo: Los números naturales

- El alfabeto:

$$A = \{zero, succ, (,)\}$$

- La sintaxis:

$$\text{natural} \rightarrow \text{zero} \mid \text{succ}(\text{natural})$$

- Algunas fbf:

- *zero*
- *succ(zero)*
- *succ(succ(zero))*
- ...

Ejemplo: Los números naturales

Ejemplo: Los números naturales

- Sabemos que *zero* representa al número 0.

$$I(\text{zero}) = 0$$

Ejemplo: Los números naturales

- Sabemos que *zero* representa al número 0.

$$I(\text{zero}) = 0$$

- Sabemos que *succ(zero)* representa al siguiente número, 1.

$$I(\text{succ}(\text{zero})) = 1$$

Ejemplo: Los números naturales

- Sabemos que *zero* representa al número 0.

$$I(\text{zero}) = 0$$

- Sabemos que *succ(zero)* representa al siguiente número, 1.

$$I(\text{succ}(\text{zero})) = 1$$

- Sabemos que *succ natural* representa al sucesor de *natural*.

$$I(\text{succ}(\text{natural})) = 1 + I(\text{natural})$$

Ejemplo: Los números naturales

- Sabemos que *zero* representa al número 0.

$$I(\text{zero}) = 0$$

- Sabemos que *succ(zero)* representa al siguiente número, 1.

$$I(\text{succ}(\text{zero})) = 1$$

- Sabemos que *succ natural* representa al sucesor de *natural*.

$$I(\text{succ}(\text{natural})) = 1 + I(\text{natural})$$

- Esto es una **semántica** para este lenguaje, le dá un significado.

Ejercicio: Los números binarios

Ejercicio: Los números binarios

Escriba una semántica para el siguiente lenguaje

Ejercicio: Los números binarios

Escriba una semántica para el siguiente lenguaje

- El alfabeto:

$$A = \{0, 1\}$$

- La sintaxis:

`binario` \rightarrow `digito`

`binario` \rightarrow `binario digito`

`digito` \rightarrow **0** | **1**

Ejercicio: Los números binarios

Escriba una semántica para el siguiente lenguaje

- El alfabeto:

$$A = \{0, 1\}$$

- La sintaxis:

binario \rightarrow digito

binario \rightarrow binario digito

digito $\rightarrow 0 \mid 1$

Para que se pueda interpretar como números, es decir:

$$I(110) = 6$$

Aparato deductivo

Ejemplo: Los naturales con la suma

Ejemplo: Los naturales con la suma

- El alfabeto:

$$A = \{zero, succ, (,), plus\}$$

Ejemplo: Los naturales con la suma

- El alfabeto:

$$A = \{\text{zero}, \text{succ}, (,), \text{plus}\}$$

- La sintaxis:

`nat_sum` \rightarrow `natural`

`nat_sum` \rightarrow `natural` ***plus*** `nat_sum`

`natural` \rightarrow ***zero*** | ***succ***(`natural`)

Ejemplo: Los naturales con la suma

- El alfabeto:

$$A = \{zero, succ, (,), plus\}$$

- La sintaxis:

`nat_sum` \rightarrow `natural`

`nat_sum` \rightarrow `natural` ***plus*** `nat_sum`

`natural` \rightarrow ***zero*** | ***succ***(`natural`)

- Algunas fórmulas bien formadas:

Ejemplo: Los naturales con la suma

- El alfabeto:

$$A = \{zero, succ, (,), plus\}$$

- La sintaxis:

`nat_sum` \rightarrow `natural`

`nat_sum` \rightarrow `natural` ***plus*** `nat_sum`

`natural` \rightarrow ***zero*** | ***succ***(`natural`)

- Algunas fórmulas bien formadas:
 - `succ(succ(zero))`

Ejemplo: Los naturales con la suma

- El alfabeto:

$$A = \{zero, succ, (,), plus\}$$

- La sintaxis:

`nat_sum` \rightarrow `natural`

`nat_sum` \rightarrow `natural` ***plus*** `nat_sum`

`natural` \rightarrow ***zero*** | ***succ***(`natural`)

- Algunas fórmulas bien formadas:

- `succ(succ(zero))`
- `succ(zero) plus zero`

Ejemplo: Los naturales con la suma

- El alfabeto:

$$A = \{zero, succ, (,), plus\}$$

- La sintaxis:

`nat_sum` \rightarrow `natural`

`nat_sum` \rightarrow `natural` ***plus*** `nat_sum`

`natural` \rightarrow ***zero*** | ***succ***(`natural`)

- Algunas fórmulas bien formadas:

- `succ(succ(zero))`
- `succ(zero) plus zero`
- `zero plus succ(zero) plus succ(succ(zero))`

Ejemplo: Los naturales con la suma

Ejemplo: Los naturales con la suma

¿Cómo transformar cualquier suma de naturales a un natural puro?

Ejemplo: Los naturales con la suma

¿Cómo transformar cualquier suma de naturales a un natural puro?

$$\text{succ}(\text{succ}(\text{zero})) \text{ plus } \text{succ}(\text{zero}) \rightsquigarrow \text{succ}(\text{succ}(\text{succ}(\text{zero})))$$

Ejemplo: Los naturales con la suma

¿Cómo transformar cualquier suma de naturales a un natural puro?

$$\text{succ}(\text{succ}(\text{zero})) \text{ plus } \text{succ}(\text{zero}) \rightsquigarrow \text{succ}(\text{succ}(\text{succ}(\text{zero})))$$

Con dos **reglas de inferencia**:

Ejemplo: Los naturales con la suma

¿Cómo transformar cualquier suma de naturales a un natural puro?

$$\text{succ}(\text{succ}(\text{zero})) \text{ plus } \text{succ}(\text{zero}) \rightsquigarrow \text{succ}(\text{succ}(\text{succ}(\text{zero})))$$

Con dos **reglas de inferencia**:

- Sumar cero no cambia nada

$$\frac{\text{zero plus } x}{x}$$

Ejemplo: Los naturales con la suma

¿Cómo transformar cualquier suma de naturales a un natural puro?

$$\text{succ}(\text{succ}(\text{zero})) \text{ plus } \text{succ}(\text{zero}) \rightsquigarrow \text{succ}(\text{succ}(\text{succ}(\text{zero})))$$

Con dos **reglas de inferencia**:

- Sumar cero no cambia nada

$$\frac{\text{zero plus } x}{x}$$

- Mover uno a la derecha

$$\frac{\text{succ}(x) \text{ plus } y}{x \text{ plus } \text{succ}(y)}$$

Ejemplo: Los naturales con la suma

Ejemplo: Los naturales con la suma

- Partiendo de

$\text{succ}(\text{succ}(\text{zero}))$ plus $\text{succ}(\text{zero})$

Ejemplo: Los naturales con la suma

- Partiendo de

succ(succ(zero)) plus succ(zero)

- Podemos mover uno a la derecha

succ(zero) plus succ(succ(zero))

Ejemplo: Los naturales con la suma

- Partiendo de

$\text{succ}(\text{succ}(\text{zero})) \text{ plus } \text{succ}(\text{zero})$

- Podemos mover uno a la derecha

$\text{succ}(\text{zero}) \text{ plus } \text{succ}(\text{succ}(\text{zero}))$

- *Rinse and repeat*

$\text{zero} \text{ plus } \text{succ}(\text{succ}(\text{succ}(\text{zero})))$

Ejemplo: Los naturales con la suma

- Partiendo de

succ(succ(zero)) plus succ(zero)

- Podemos mover uno a la derecha

succ(zero) plus succ(succ(zero))

- *Rinse and repeat*

zero plus succ(succ(succ(zero)))

- Sumar cero no cambia nada

succ(succ(succ(zero)))

Ejemplo: Los naturales con la suma

Ejemplo: Los naturales con la suma

Ahora ustedes transformen

$\text{succ}(\text{zero})$ plus $\text{succ}(\text{succ}(\text{zero}))$

En conclusión. . .

- Un **lenguaje formal** es un conjunto de *simbolos* con una *sintaxis*.

En conclusión. . .

- Un **lenguaje formal** es un conjunto de *simbolos* con una *sintaxis*.
- Un **aparato deductivo** permite transformar las *fórmulas* de un **lenguaje** usando *reglas de inferencia*, este proceso se conoce como **derivación**.

En conclusión...

- Un **lenguaje formal** es un conjunto de *simbolos* con una *sintaxis*.
- Un **aparato deductivo** permite transformar las *fórmulas* de un **lenguaje** usando *reglas de inferencia*, este proceso se conoce como **derivación**.
- Cuando un **lenguaje formal** cuenta con un **aparato deductivo**, este pasa a ser un **sistema formal**.