

Cuantificadores

Matemática estructural y lógica

ISIS-1104

Operadores binarios

Un operador binario sobre elementos de tipo T es una función
 $T \times T \rightarrow T$

$$+ : Int \times Int \rightarrow Int$$

. Decimos que un operador $\oplus : T \times T \rightarrow T$ es:

- Asociativo si $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$
- Conmutativo si $(a \oplus b) = (b \oplus a)$
- Con n como identidad si $(a \oplus n) = (n \oplus a) = a$

Algunos ejemplos

- $+$ en *Int*, es asociativo, conmutativo y con 0 como identidad.
- $/$ en *Real*, es no asociativo, no conmutativo y sin identidad.
- \vee en *Bool*, es asociativo, conmutativo y con *False* como identidad.
- \equiv en *Bool*, es asociativo, conmutativo y con *True* como identidad.

Ahora ustedes!

- $-$ en *Int*?
- $*$ en *Int*?
- \wedge en *Bool*?
- \Rightarrow en *Bool*?

Cuantificadores

Si $\oplus : T \rightarrow T \times T$ es conmutativo, asociativo y con identidad.
Definimos su cuantificación como

$$(\oplus t : T \mid Q : E)$$

Lo cual se interpreta como

*sobre todos los t que cumplan $Q(t)$,
agregar el resultado de $E(t)$ usando \oplus*

$Q : T \rightarrow \text{Bool}$ se conoce como el *rango*.

$E : T \rightarrow T$ se conoce como el *cuerpo*.

Cuantificadores vs. funciones de alto orden

En realidad un cuantificador es una combinación de funciones de alto orden

$$(\oplus t: T \mid Q: E)$$

es lo mismo que

```
static T quantifier( $\oplus$ , Q, E, list) {  
    List<T> filtered = filter(Q, list);  
    List<T> mapped = map(E, filtered);  
    T folded = fold( $\oplus$ , mapped);  
    return folded;  
}
```

Un cuantificador aplica sobre todos los elementos de tipo T mientras que `quantifier` no.

Un ejemplo

$$(+i : \text{Int} \mid i \geq 0 \wedge i < 6 : 2i)$$

Podemos pensarlo como

- Filtramos: Nos quedamos con los i que cumplan $i \geq 0 \wedge i < 6$.

$$[0, 1, 2, 3, 4, 5]$$

- Mapeamos: Transformamos estos i a $2i$

$$[0, 2, 4, 6, 8, 10]$$

- Reducimos: Operamos usando $+$

$$0 + 2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30$$

$(*i: \text{Int} \mid i > 0 \wedge i < 10 \wedge \text{esPar}(i) : i/2)$

Algunos casos particulares

- Si no queremos filtrar hacemos el rango siempre verdadero:

$$(\oplus t : T \mid \text{True} : E) \text{ o más corto } (\oplus t : T \mid : E)$$

- Las cuantificaciones pueden depender de otros valores:

$$(*i : \text{Int} \mid i > 0 \wedge i < n : i)$$

- Podemos operar infinitos elementos

$$(+i : \text{Int} \mid i > 0 : 1/2^i) = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = 2$$

- Pero no siempre tenemos que obtener un valor finito

$$(+i : \text{Int} \mid i > 0 : i) \text{ diverge}$$

¿Cómo evaluar cuantificadores? Axiomas

- Rango vacío:

$$(\oplus t \mid \text{False} : E) = \text{identidad de } \oplus$$

- Regla de un punto:

$$(\oplus t \mid t = s : E) = E(s)$$

- Distributividad*:

$$(\oplus t \mid Q : E_1) \oplus (\oplus t \mid Q : E_2) = (\oplus t \mid Q : E_1 \oplus E_2)$$

¿Cómo evaluar cuantificadores? Axiomas

- Partir rango disyunto*: Si $Q \wedge S \equiv \text{False}$ para todos los t

$$(\oplus t \mid Q \vee S : E) = (\oplus t \mid Q : E) \oplus (\oplus t \mid S : E)$$

- Partir rango idempotente*: Si $t \oplus t = t$ para todos los t

$$(\oplus t \mid Q \vee S : E) = (\oplus t \mid Q : E) \oplus (\oplus t \mid S : E)$$

- Partir rango general*:

$$(\oplus t \mid Q \vee S : E) \oplus (\oplus t \mid Q \wedge S : E) = (\oplus t \mid Q : E) \oplus (\oplus t \mid S : E)$$

¿Cómo evaluar cuantificadores? Axiomas

- Intercambio de variables*: Si Q no depende de v y S no depende de t

$$(\oplus t \mid Q : (\oplus v \mid S : E)) = (\oplus v \mid S : (\oplus t \mid Q : E))$$

- Anidamiento*: Si Q no depende de v

$$(\oplus t, v \mid Q \wedge S : E) = (\oplus t \mid Q : (\oplus v \mid S : E))$$

- Renombramiento de variables: Si Q y E no dependen de v

$$(\oplus t \mid Q : E) = (\oplus v \mid Q : E)$$