Cálculo de predicados

Matemática estructural y lógica

ISIS-1104

Axiomas de la lógica de predicados

Axiomas de la lógica de predicados

Trueque:

$$(\forall x \mid R : P) \equiv (\forall x \mid : R \Rightarrow P)$$

Axiomas de la lógica de predicados

Trueque:

$$(\forall x \mid R : P) \equiv (\forall x \mid : R \Rightarrow P)$$

En otras palabras

"Para todo x tal que R se tiene P"
es lo mismo que
"Para todo x se tiene que si R entonces P"

Axiomas de la lógica de predicados

Axiomas de la lógica de predicados

Distributividad entre $\vee$ y $\forall$:
Si P no depende de x

$$P \vee (\forall x \mid R : Q) \equiv (\forall x \mid R : P \vee Q)$$

Axiomas de la lógica de predicados

Axiomas de la lógica de predicados

Ley de De Morgan generalizada:

$$\neg(\exists x \mid Q : R) \equiv (\forall x \mid Q : \neg R)$$

Axiomas de la lógica de predicados

Ley de De Morgan generalizada:

$$\neg(\exists x \mid Q : R) \equiv (\forall x \mid Q : \neg R)$$

En otras palabras

"Negar la existencia de un x que cumple R

es lo mismo que

"Afirmar que para todo x se cumple que $\neg R$*"*

Axiomas de la lógica de predicados

Ley de De Morgan generalizada:

$$\neg(\exists x \mid Q : R) \equiv (\forall x \mid Q : \neg R)$$

En otras palabras

"Negar la existencia de un x que cumple R

es lo mismo que

"Afirmar que para todo x se cumple que $\neg R$*"*

Es mas útil escribir éste axioma como

$$(\exists x \mid Q : R) \equiv \neg(\forall x \mid Q : \neg R)$$

Una demostración en lógica de predicados

Una demostración en lógica de predicados

Teorema:

$$(\forall x \mid R : true) \equiv true$$

Una demostración en lógica de predicados

Teorema:

$$(\forall x \mid R : \mathit{true}) \equiv \mathit{true}$$

Demostración:

Una demostración en lógica de predicados

Teorema:

$$(\forall x \mid R : \mathit{true}) \equiv \mathit{true}$$

Demostración:

Por idempotencia $\mathit{true} \equiv \mathit{true} \vee \mathit{true}$, luego

$$(\forall x \mid R : \mathit{true}) \equiv (\forall x \mid R : \mathit{true} \vee \mathit{true})$$

Una demostración en lógica de predicados

Teorema:

$$(\forall x \mid R : \mathit{true}) \equiv \mathit{true}$$

Demostración:

Por idempotencia $\mathit{true} \equiv \mathit{true} \vee \mathit{true}$, luego

$$(\forall x \mid R : \mathit{true}) \equiv (\forall x \mid R : \mathit{true} \vee \mathit{true})$$

Usando distribución entre $\vee$ y $\forall$

$$(\forall x \mid R : \mathit{true} \vee \mathit{true}) \equiv \mathit{true} \vee (\forall x \mid R : \mathit{true})$$

Una demostración en lógica de predicados

Teorema:

$$(\forall x \mid R : \mathit{true}) \equiv \mathit{true}$$

Demostración:

Por idempotencia $\mathit{true} \equiv \mathit{true} \vee \mathit{true}$, luego

$$(\forall x \mid R : \mathit{true}) \equiv (\forall x \mid R : \mathit{true} \vee \mathit{true})$$

Usando distribución entre $\vee$ y $\forall$

$$(\forall x \mid R : \mathit{true} \vee \mathit{true}) \equiv \mathit{true} \vee (\forall x \mid R : \mathit{true})$$

Usando techo

$$\mathit{true} \vee (\forall x \mid R : \mathit{true}) \equiv \mathit{true}$$

Otra demostración en lógica de predicados

Otra demostración en lógica de predicados

Teorema (Trueque para $\exists$):

$$(\exists x \mid R : P) \equiv (\exists x \mid : R \wedge P)$$

Otra demostración en lógica de predicados

Teorema (Trueque para $\exists$):

$$(\exists x \mid R : P) \equiv (\exists x \mid : R \wedge P)$$

Demostración:

Otra demostración en lógica de predicados

Teorema (Trueque para $\exists$):

$$(\exists x \mid R : P) \equiv (\exists x \mid : R \wedge P)$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
(\exists x \mid R : P) &\equiv \neg(\forall x \mid R : \neg P) && \text{(De Morgan gen.)} \\
&\equiv \neg(\forall x \mid : R \Rightarrow \neg P) && \text{(trueque para } \forall\text{)} \\
&\equiv \neg(\forall x \mid : \neg R \vee \neg P) && \text{(definición } \Rightarrow\text{)} \\
&\equiv \neg(\forall x \mid : \neg(R \wedge P)) && \text{(De Morgan)} \\
&\equiv (\exists x \mid : R \wedge P) && \text{(De Morgan gen.)}
\end{aligned}$$

Ahora ustedes

Ahora ustedes

Teorema (Distribución entre $\wedge$ y $\exists$):

Si P no depende de x:

$$P \wedge (\exists x \mid R : Q) \equiv (\exists x \mid R : P \wedge Q)$$

Ahora ustedes

Ahora ustedes

Teorema:

$$(\exists x \mid R : \mathit{false}) \equiv \mathit{false}$$

Ahora ustedes

Ahora ustedes

Teorema:

Si P no depende de x:

$$Q \wedge (\exists x \mid : P) \equiv (\exists x \mid P : Q)$$

Reglas de inferencia: Eliminación

Cuando razonamos de forma intuitiva, recurrimos a los siguientes argumentos:

"Todos los perros son juiciosos, en particular Milou es juicioso."

"Existen números interesantes, luego sea k un número interesante."

En otras palabras estamos **eliminando** cuantificaciones.

Reglas de inferencia: Eliminación

Cuando razonamos de forma intuitiva, recurrimos a los siguientes argumentos:

$$(\forall p \mid : \mathit{juicioso}(p)) \Rightarrow \mathit{juicioso}(\text{milou})$$

$$(\exists n \mid : \mathit{interesante}(n)) \Rightarrow \mathit{interesante}(k)$$

En otras palabras estamos **eliminando** cuantificaciones.

Reglas de inferencia: Eliminación

Eliminación $\forall$: Si tenemos que $\big(\forall x \,|: P(x)\big)$, podemos asegurar que **cualquier** constante cumple P

$$\frac{\big(\forall x \,|: P(x)\big)}{P(c) \text{ (cualquier } c\text{)}}$$

Eliminación $\exists$: Si tenemos que $\big(\exists x \,|: P(x)\big)$, podemos **introducir** una constante nueva que cumpla P

$$\frac{\big(\exists x \,|: P(x)\big)}{P(c) \text{ (nueva } c\text{)}}$$

Se ven muy parecidas, pero la diferencia es grande.

Reglas de inferencia: Introducción

Cuando razonamos de forma intuitiva, recurrimos a los siguientes argumentos:

"Messi es argentino. Por lo tanto, existen futbolistas argentinos."

"Un futbolista es rápido. Luego cualquier futbolista es rápido."

En otras palabras estamos **introduciendo** cuantificaciones.

Reglas de inferencia: Introducción

Cuando razonamos de forma intuitiva, recurrimos a los siguientes argumentos:

$$\mathit{argentino}(\text{messi}) \Rightarrow \big(\exists j \mid: \mathit{argentino}(j)\big)$$

$$\mathit{rapido}(j) \Rightarrow \big(\forall j \mid: \mathit{rapido}(j)\big)$$

En otras palabras estamos **introduciendo** cuantificaciones.

Reglas de inferencia: Eliminación

Introducción $\exists$: Si tenemos que $P(c)$, donde c es una constante que **ya habíamos introducido**:

$$\frac{P(c) \text{ (} c \text{ ya introducida)}}{\big(\exists x \mid: P(x)\big)}$$

Introducción $\forall$: Si demostramos $P(c)$, donde c es una constante **arbitraria**:

$$\frac{P(c) \text{ (} c \text{ arbitraria)}}{\big(\forall x \mid: P(x)\big)}$$

Se ven muy parecidas, pero la diferencia es grande.

Reglas de inferencia: Ejemplo

Teorema (súper Modus Ponens):

$$\frac{\big(\forall x \mid P(x) : Q(x)\big) \wedge P(c)}{Q(c)}$$

Demostración:

Usando trueque

$$\frac{\big(\forall x \mid P(x) : Q(x)\big)}{\big(\forall x \mid : P(x) \Rightarrow Q(x)\big)}$$

Usando eliminación

$$\frac{\big(\forall x \mid : P(x) \Rightarrow Q(x)\big)}{P(c) \Rightarrow Q(c)}$$

Usando Modus Ponens

$$\frac{P(c) \wedge (P(c) \Rightarrow Q(c))}{Q(c)}$$

Reglas de inferencia: Ejercicio

Teorema (súper Silogismo Hipotético):

$$\frac{\big(\forall x \mid P(x) : Q(x)\big) \land (Q(c) \Rightarrow R(c))}{P(c) \Rightarrow R(c)}$$

Reglas de inferencia: Ejemplo

Teorema (debilitamiento del rango):

$$\frac{(\forall x \mid P(x) \lor Q(x) : R(x))}{(\forall x \mid P(x) : R(x))} \qquad \frac{(\exists x \mid P(x) : R(x))}{(\forall x \mid P(x) \lor Q(x) : R(x))}$$

Reglas de inferencia: Ejemplo

Teorema (debilitamiento del cuerpo):

$$\frac{(\forall x \mid P(x) : Q(x) \wedge R(x))}{(\forall x \mid P(x) : Q(x))} \qquad \frac{(\exists x \mid P(x) : R(x))}{(\exists x \mid P(x) : Q(x) \vee R(x))}$$