Lógica de predicados

Matemática estructural y lógica

ISIS-1104

¿Por qué las proposiciones no bastan?

¿Por qué las proposiciones no bastan?

Si tenemos el siguiente enunciado

¿Por qué las proposiciones no bastan?

Si tenemos el siguiente enunciado

Toda la comida italiana es deliciosa.
La pizza es comida italiana
Luego la pizza es deliciosa

¿Por qué las proposiciones no bastan?

Si tenemos el siguiente enunciado

Toda la comida italiana es deliciosa.
La pizza es comida italiana
Luego la pizza es deliciosa

La lógica proposicional es insuficiente para expresar casos particulares y generalizaciones.

Predicados

Predicados

Un predicado sobre T es una función $T \to Bool$.

Predicados

Un predicado sobre T es una función $T \rightarrow Bool$.

T puede ser cualquier conjunto (tipo) de elementos. Por ejemplo:

Predicados

Un predicado sobre T es una función $T \to Bool$.

T puede ser cualquier conjunto (tipo) de elementos. Por ejemplo:

- Si tenemos $k : Int$, entonces

$$P(k) = k > 0$$

  es un predicado sobre Int.

Predicados

Un predicado sobre T es una función $T \to Bool$.

T puede ser cualquier conjunto (tipo) de elementos. Por ejemplo:

- Si tenemos $k : Int$, entonces

$$P(k) = k > 0$$

  es un predicado sobre Int.
- Si tenemos $s : Persona$, entonces

$$esAdulto(s) = s \text{ es un adulto}$$

  es un predicado sobre $Persona$.

Predicados

Un predicado sobre T es una función $T \to Bool$.

T puede ser cualquier conjunto (tipo) de elementos. Por ejemplo:

- Si tenemos $k : Int$, entonces

  $$P(k) = k > 0$$

  es un predicado sobre Int.
- Si tenemos $s : Persona$, entonces

  $$esAdulto(s) = s \text{ es un adulto}$$

  es un predicado sobre $Persona$.

Como son funciones, los predicados no tienen un valor de verdad definido hasta que se evalúan en algún $t : T$.

Predicados

Predicados

Los predicados pueden combinarse usando las operaciones lógicas que ya conocemos.

Predicados

Los predicados pueden combinarse usando las operaciones lógicas que ya conocemos.

Por ejemplo si tenemos los predicados

Predicados

Los predicados pueden combinarse usando las operaciones lógicas que ya conocemos.

Por ejemplo si tenemos los predicados

$$esAdulto(k) = k \text{ es un adulto}$$

Predicados

Los predicados pueden combinarse usando las operaciones lógicas que ya conocemos.

Por ejemplo si tenemos los predicados

$$esAdulto(k) = k \text{ es un adulto}$$

$$sabeConducir(k) = k \text{ sabe conducir}$$

Predicados

Los predicados pueden combinarse usando las operaciones lógicas que ya conocemos.

Por ejemplo si tenemos los predicados

$$esAdulto(k) = k \text{ es un adulto}$$

$$sabeConducir(k) = k \text{ sabe conducir}$$

Podemos definir un nuevo predicado

Predicados

Los predicados pueden combinarse usando las operaciones lógicas que ya conocemos.

Por ejemplo si tenemos los predicados

$$esAdulto(k) = k \text{ es un adulto}$$

$$sabeConducir(k) = k \text{ sabe conducir}$$

Podemos definir un nuevo predicado

$$esAdulto(k) \land \neg sabeConducir(k)$$

Predicados

Predicados

Todos los axiomas y reglas de inferencia de lógica proposicional siguen siendo válidos.

Predicados

Todos los axiomas y reglas de inferencia de lógica proposicional siguen siendo válidos.

Por ejemplo

Predicados

Todos los axiomas y reglas de inferencia de lógica proposicional siguen siendo válidos.

Por ejemplo

- $P(x) \wedge P(x) \equiv P(x)$

Predicados

Todos los axiomas y reglas de inferencia de lógica proposicional siguen siendo válidos.

Por ejemplo

- $P(x) \wedge P(x) \equiv P(x)$
- $P(x) \Rightarrow Q(y) \equiv \neg P(x) \vee Q(y)$

Predicados

Todos los axiomas y reglas de inferencia de lógica proposicional siguen siendo válidos.

Por ejemplo

- $P(x) \land P(x) \equiv P(x)$
- $P(x) \Rightarrow Q(y) \equiv \neg P(x) \lor Q(y)$
- $\neg(P(x) \lor Q(x)) \equiv \neg P(x) \land \neg Q(x)$

Predicados

Todos los axiomas y reglas de inferencia de lógica proposicional siguen siendo válidos.

Por ejemplo

- $P(x) \wedge P(x) \equiv P(x)$
- $P(x) \Rightarrow Q(y) \equiv \neg P(x) \vee Q(y)$
- $\neg(P(x) \vee Q(x)) \equiv \neg P(x) \wedge \neg Q(x)$
- $P(x) \wedge (P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow Q(x)$

Predicados

Todos los axiomas y reglas de inferencia de lógica proposicional siguen siendo válidos.

Por ejemplo

- $P(x) \land P(x) \equiv P(x)$
- $P(x) \Rightarrow Q(y) \equiv \neg P(x) \lor Q(y)$
- $\neg(P(x) \lor Q(x)) \equiv \neg P(x) \land \neg Q(x)$
- $P(x) \land (P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow Q(x)$

Sin embargo hay que ser cuidadosos con las variables de los predicados

Predicados

Todos los axiomas y reglas de inferencia de lógica proposicional siguen siendo válidos.

Por ejemplo

- $P(x) \wedge P(x) \equiv P(x)$
- $P(x) \Rightarrow Q(y) \equiv \neg P(x) \vee Q(y)$
- $\neg(P(x) \vee Q(x)) \equiv \neg P(x) \wedge \neg Q(x)$
- $P(x) \wedge (P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow Q(x)$

Sin embargo hay que ser cuidadosos con las variables de los predicados

$$P(x) \Rightarrow Q(y) \not\equiv P(y) \Rightarrow Q(x)$$

Constantes

Constantes

En ocasiones, queremos hacer referencia a algún elemento de T, para esto usamos constantes.

Constantes

En ocasiones, queremos hacer referencia a algún elemento de T, para esto usamos constantes.

Por ejemplo si tenemos el tipo *Animal* y el predicado

Constantes

En ocasiones, queremos hacer referencia a algún elemento de T, para esto usamos constantes.

Por ejemplo si tenemos el tipo *Animal* y el predicado

$$esGato(k) = k \text{ es un gato}$$

Constantes

En ocasiones, queremos hacer referencia a algún elemento de T, para esto usamos constantes.

Por ejemplo si tenemos el tipo *Animal* y el predicado

$$\mathit{esGato}(k) = k \text{ es un gato}$$

podemos definir una constante $\mathit{garfield} : \mathit{Animal}$ y escribir

Constantes

En ocasiones, queremos hacer referencia a algún elemento de T, para esto usamos constantes.

Por ejemplo si tenemos el tipo *Animal* y el predicado

$$esGato(k) = k \text{ es un gato}$$

podemos definir una constante $garfield : Animal$ y escribir

$$esGato(garfield)$$

Constantes

En ocasiones, queremos hacer referencia a algún elemento de T, para esto usamos constantes.

Por ejemplo si tenemos el tipo *Animal* y el predicado

$$esGato(k) = k \text{ es un gato}$$

podemos definir una constante $garfield : Animal$ y escribir

$$esGato(garfield)$$

para afirmar que la constante *garfield* cumple el predicado *esGato*

Constantes

Constantes

En *Bool* las constantes que solemos usar *True* y *False*

Constantes

En *Bool* las constantes que solemos usar *True* y *False*

En *Int* las constantes que solemos usar son 0, 1, -1, 2, -2, ...

Constantes

En *Bool* las constantes que solemos usar *True* y *False*

En *Int* las constantes que solemos usar son 0, 1, -1, 2, -2, ...

Cuando evaluamos una proposición en una constante, pasa a tener un valor de verdad.

Constantes

En *Bool* las constantes que solemos usar *True* y *False*

En *Int* las constantes que solemos usar son 0, 1, -1, 2, -2, ...

Cuando evaluamos una proposición en una constante, pasa a tener un valor de verdad.

Por ejemplo

$$P(z) = z > 0$$

Constantes

En *Bool* las constantes que solemos usar *True* y *False*

En *Int* las constantes que solemos usar son 0, 1, -1, 2, -2, ...

Cuando evaluamos una proposición en una constante, pasa a tener un valor de verdad.

Por ejemplo

$$P(z) = z > 0$$

pasa a tener un valor de verdad si la evaluamos en alguna constante de *Int*:

$$P(5) = \mathit{True}$$

$$P(0) = \mathit{False}$$

Cuantificador universal

Cuantificador universal

Si tenemos el cuantificador

$$(\wedge x : T \mid P(x) : Q(x))$$

Cuantificador universal

Si tenemos el cuantificador

$$(\wedge x : T \mid P(x) : Q(x))$$

Con P y Q predicados sobre T, podemos darle la interpretación

Cuantificador universal

Si tenemos el cuantificador

$$(\wedge x : T \mid P(x) : Q(x))$$

Con P y Q predicados sobre T, podemos darle la interpretación

Para todos los x tales que $P(x)$, se cumple $Q(x)$.

Cuantificador universal

Si tenemos el cuantificador

$$(\wedge x : T \mid P(x) : Q(x))$$

Con P y Q predicados sobre T, podemos darle la interpretación

Para todos los x tales que $P(x)$, se cumple $Q(x)$.

Usualmente cambiamos el símbolo $\wedge$

$$(\forall x : T \mid P(x) : Q(x))$$

Cuantificador universal

Si tenemos el cuantificador

$$(\wedge x : T \mid P(x) : Q(x))$$

Con P y Q predicados sobre T, podemos darle la interpretación

Para todos los x tales que $P(x)$, se cumple $Q(x)$.

Usualmente cambiamos el símbolo $\wedge$

$$(\forall x : T \mid P(x) : Q(x))$$

Por ejemplo

Cuantificador universal

Si tenemos el cuantificador

$$(\wedge x : T \mid P(x) : Q(x))$$

Con P y Q predicados sobre T, podemos darle la interpretación

Para todos los x tales que $P(x)$, se cumple $Q(x)$.

Usualmente cambiamos el símbolo $\wedge$

$$(\forall x : T \mid P(x) : Q(x))$$

Por ejemplo

$$(\forall x : Animal \mid esGato(x) : tieneBigotes(x))$$

Cuantificador universal

Si tenemos el cuantificador

$$(\wedge x : T \mid P(x) : Q(x))$$

Con P y Q predicados sobre T, podemos darle la interpretación

Para todos los x tales que $P(x)$, se cumple $Q(x)$.

Usualmente cambiamos el símbolo $\wedge$

$$(\forall x : T \mid P(x) : Q(x))$$

Por ejemplo

$$(\forall x : \mathit{Animal} \mid \mathit{esGato}(x) : \mathit{tieneBigotes}(x))$$

$$(\forall x : \mathit{Animal} \mid \mathit{esGato}(x) : \mathit{sabeVolar}(x))$$

Cuantificador existencial

Cuantificador existencial

Si tenemos el cuantificador

$$(\vee x : T \mid P(x) : Q(x))$$

Cuantificador existencial

Si tenemos el cuantificador

$$(\vee x : T \mid P(x) : Q(x))$$

Con P y Q predicados sobre T, podemos darle la interpretación

Cuantificador existencial

Si tenemos el cuantificador

$$(\vee x : T \mid P(x) : Q(x))$$

Con P y Q predicados sobre T, podemos darle la interpretación

> Existen x tales que $P(x)$, para los cuales se cumple $Q(x)$.

Cuantificador existencial

Si tenemos el cuantificador

$$(\vee x : T \mid P(x) : Q(x))$$

Con P y Q predicados sobre T, podemos darle la interpretación

> Existen x tales que $P(x)$, para los cuales se cumple $Q(x)$.

Usualmente cambiamos el símbolo $\wedge$

$$(\exists x : T \mid P(x) : Q(x))$$

Cuantificador existencial

Si tenemos el cuantificador

$$(\vee x : T \mid P(x) : Q(x))$$

Con P y Q predicados sobre T, podemos darle la interpretación

Existen x tales que $P(x)$, para los cuales se cumple $Q(x)$.

Usualmente cambiamos el símbolo $\wedge$

$$(\exists x : T \mid P(x) : Q(x))$$

Por ejemplo

Cuantificador existencial

Si tenemos el cuantificador

$$(\vee x : T \mid P(x) : Q(x))$$

Con P y Q predicados sobre T, podemos darle la interpretación

Existen x tales que $P(x)$, para los cuales se cumple $Q(x)$.

Usualmente cambiamos el símbolo $\wedge$

$$(\exists x : T \mid P(x) : Q(x))$$

Por ejemplo

$$(\exists x : \mathit{Animal} \mid \mathit{esGato}(x) : \mathit{comeLasagna}(x))$$

Cuantificador existencial

Si tenemos el cuantificador

$$(\vee x : T \mid P(x) : Q(x))$$

Con P y Q predicados sobre T, podemos darle la interpretación

Existen x tales que $P(x)$, para los cuales se cumple $Q(x)$.

Usualmente cambiamos el símbolo $\wedge$

$$(\exists x : T \mid P(x) : Q(x))$$

Por ejemplo

$$(\exists x : Animal \mid esGato(x) : comeLasagna(x))$$

$$(\exists x : Animal \mid esGato(x) : esPerro(x))$$

De vuelta a la pizza

De vuelta a la pizza

Si tomamos C como el tipo de la comida. Y $pizza : C$ como una constante.

De vuelta a la pizza

Si tomamos C como el tipo de la comida. Y $pizza : C$ como una constante.

Toda la comida italiana es deliciosa.
La pizza es comida italiana.
Luego la pizza es deliciosa.

De vuelta a la pizza

Si tomamos C como el tipo de la comida. Y $pizza : C$ como una constante.

Toda la comida italiana es deliciosa.
La pizza es comida italiana.
Luego la pizza es deliciosa.

Puede escribirse como

$$\frac{(\forall c : C \mid esItaliana(c) : esDeliciosa(c)),\ \ esItaliana(pizza)}{esDeliciosa(pizza)}$$

Variables acotadas

Variables acotadas

Es necesario distinguir que variables están libres y cuales están acotadas en éste nuevo lenguaje.

Variables acotadas

Es necesario distinguir que variables están libres y cuales están acotadas en éste nuevo lenguaje.

Por ejemplo:

Variables acotadas

Es necesario distinguir que variables están libres y cuales están acotadas en éste nuevo lenguaje.

Por ejemplo:

- x es libre en $x > 5$.

Variables acotadas

Es necesario distinguir que variables están libres y cuales están acotadas en éste nuevo lenguaje.

Por ejemplo:

- x es libre en $x > 5$.
- x es libre en $esGato(x)$.

Variables acotadas

Es necesario distinguir que variables están libres y cuales están acotadas en éste nuevo lenguaje.

Por ejemplo:

- x es libre en $x > 5$.
- x es libre en $esGato(x)$.
- n está acotada en $(\exists n : Int \mid esPar(n) : n > 0)$.

Variables acotadas

Es necesario distinguir que variables están libres y cuales están acotadas en éste nuevo lenguaje.

Por ejemplo:

- x es libre en $x > 5$.
- x es libre en $esGato(x)$.
- n está acotada en $(\exists n : Int \mid esPar(n) : n > 0)$.
- k es libre en $(\forall n : Int \mid esPrimo(n) : n < k)$.

Variables acotadas

Es necesario distinguir que variables están libres y cuales están acotadas en éste nuevo lenguaje.

Por ejemplo:

- x es libre en $x > 5$.
- x es libre en $esGato(x)$.
- n está acotada en $(\exists n : Int \mid esPar(n) : n > 0)$.
- k es libre en $(\forall n : Int \mid esPrimo(n) : n < k)$.

Entonces

Variables acotadas

Es necesario distinguir que variables están libres y cuales están acotadas en éste nuevo lenguaje.

Por ejemplo:

- x es libre en $x > 5$.
- x es libre en $esGato(x)$.
- n está acotada en $(\exists n : Int \mid esPar(n) : n > 0)$.
- k es libre en $(\forall n : Int \mid esPrimo(n) : n < k)$.

Entonces

- x está ligada si es la variable sobre la que estoy cuantificando.

Variables acotadas

Es necesario distinguir que variables están libres y cuales están acotadas en éste nuevo lenguaje.

Por ejemplo:

- x es libre en $x > 5$.
- x es libre en $esGato(x)$.
- n está acotada en $(\exists n : Int \mid esPar(n) : n > 0)$.
- k es libre en $(\forall n : Int \mid esPrimo(n) : n < k)$.

Entonces

- x está ligada si es la variable sobre la que estoy cuantificando.
- x es libre si no estoy cuantificando sobre ella.

Variables acotadas

Variables acotadas

Si x es libre en una cuantificación, decimos que la cuantificación depende de x.

Variables acotadas

Si x es libre en una cuantificación, decimos que la cuantificación depende de x.

- $esGato(a)$ depende de a.

Variables acotadas

Si x es libre en una cuantificación, decimos que la cuantificación depende de x.

- $esGato(a)$ depende de a.
- $(\exists n : Int \mid: n > k)$ depende de k.

Variables acotadas

Si x es libre en una cuantificación, decimos que la cuantificación depende de x.

- $esGato(a)$ depende de a.
- $(\exists n : Int \mid: n > k)$ depende de k.
- $(\exists n : Int \mid: n > 0)$ no depende de n.

Variables acotadas

Si x es libre en una cuantificación, decimos que la cuantificación depende de x.

- $esGato(a)$ depende de a.
- $(\exists n : Int \mid: n > k)$ depende de k.
- $(\exists n : Int \mid: n > 0)$ no depende de n.

Cuando una cuantificación depende de alguna variable podemos usarla como un predicado

Variables acotadas

Si x es libre en una cuantificación, decimos que la cuantificación depende de x.

- $esGato(a)$ depende de a.
- $(\exists n : Int \mid: n > k)$ depende de k.
- $(\exists n : Int \mid: n > 0)$ no depende de n.

Cuando una cuantificación depende de alguna variable podemos usarla como un predicado

$$Q(k) = (\exists n : Int \mid: k = 2n)$$

Variables acotadas

Si x es libre en una cuantificación, decimos que la cuantificación depende de x.

- $esGato(a)$ depende de a.
- $(\exists n : Int \mid: n > k)$ depende de k.
- $(\exists n : Int \mid: n > 0)$ no depende de n.

Cuando una cuantificación depende de alguna variable podemos usarla como un predicado

$$Q(k) = (\exists n : Int \mid: k = 2n)$$

entonces

Variables acotadas

Si x es libre en una cuantificación, decimos que la cuantificación depende de x.

- $esGato(a)$ depende de a.
- $(\exists n : Int \mid: n > k)$ depende de k.
- $(\exists n : Int \mid: n > 0)$ no depende de n.

Cuando una cuantificación depende de alguna variable podemos usarla como un predicado

$$Q(k) = (\exists n : Int \mid: k = 2n)$$

entonces

$$(\forall z : Int \mid esPar(z) : Q(z))$$

Variables acotadas

Si x es libre en una cuantificación, decimos que la cuantificación depende de x.

- $esGato(a)$ depende de a.
- $(\exists n : Int \mid: n > k)$ depende de k.
- $(\exists n : Int \mid: n > 0)$ no depende de n.

Cuando una cuantificación depende de alguna variable podemos usarla como un predicado

$$Q(k) = (\exists n : Int \mid: k = 2n)$$

entonces

$$(\forall z : Int \mid esPar(z) : Q(z))$$

es lo mismo que

Variables acotadas

Si x es libre en una cuantificación, decimos que la cuantificación depende de x.

- $esGato(a)$ depende de a.
- $(\exists n : Int \mid: n > k)$ depende de k.
- $(\exists n : Int \mid: n > 0)$ no depende de n.

Cuando una cuantificación depende de alguna variable podemos usarla como un predicado

$$Q(k) = (\exists n : Int \mid: k = 2n)$$

entonces

$$(\forall z : Int \mid esPar(z) : Q(z))$$

es lo mismo que

$$(\forall z : Int \mid esPar(z) : (\exists n : Int \mid: z = 2n))$$

Ahora ustedes

Ahora ustedes

¿Cuáles de las siguientes variables son libres?

Ahora ustedes

¿Cuáles de las siguientes variables son libres?

- x en

$$x + 1 = 5$$

Ahora ustedes

¿Cuáles de las siguientes variables son libres?

- x en

$$x + 1 = 5$$

- a, b en

$$(\exists a : Animal \mid esGato(n) : sonAmigos(a, b))$$

Ahora ustedes

¿Cuáles de las siguientes variables son libres?

- x en

$$x + 1 = 5$$

- a, b en

$$(\exists a : \mathit{Animal} \mid \mathit{esGato}(n) : \mathit{sonAmigos}(a, b))$$

- x, y, z en

$$(\forall z : \mathit{Int} \mid z > 0 : (\exists y : \mathit{Int} \mid y > 0 : x^2 + y^2 = z^2))$$