

Relaciones entre conjuntos

Matemática estructural y lógica

ISIS-1104

¿Qué es una relación?

- Si A y B son conjuntos, definimos el conjunto de relaciones entre A y B como:

$$A \leftrightarrow B = \mathcal{P}(A \times B)$$

- Es decir, todo elemento de $A \leftrightarrow B$ es un subconjunto de $A \times B$.
- Decimos que R es una relación entre A y B si $R \in A \leftrightarrow B$.

¿Qué es una relación?

- Si $R \subseteq A \times B$, sabemos que R debe estar conformado por algunos elementos de $A \times B$.
- Es decir, R es un conjunto de parejas ordenadas de A y B .
- En ese orden de ideas, introducimos la siguiente notación

$$aRb \equiv (a, b) \in R$$

- Usualmente aRb se lee " a está relacionado con b por R ".

Un par de ejemplos

Sea $R \in \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ la relación definida por el siguiente enunciado:

$$aRb \equiv "a" \text{ es igual a el valor absoluto de } "b"$$

¿Qué elementos de \mathbb{Z} están relacionados por R ?

Sea $S \in \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ la relación definida por el siguiente enunciado:

$$aSb \equiv a - b \text{ es par}$$

¿Qué elementos de \mathbb{Z} están relacionados por R ?

Algunas definiciones

Si $R \in A \leftrightarrow B$:

- A es el dominio de R .
- B es el codominio de R .
- $\text{dom}(R) = \{a : A \mid (\exists b : B \mid aRb)\}$ es el dominio de definición de R
- $\text{ran}(R) = \{b : B \mid (\exists a : A \mid aRb)\}$ es el rango de R
- $R^T = \{(b, a) : (B \times A) \mid aRb\}$ es la inversa (o transpuesta) de R

¿Cuáles son los dominios, codommonios, dominios de definición, rangos e inversas de nuestros ejemplos?

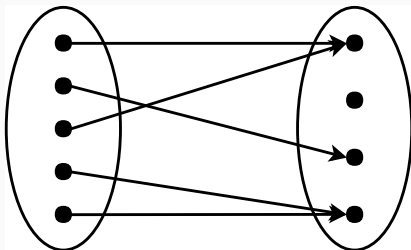
Tipos de relaciones: Total

Decimos que $R \in A \leftrightarrow B$ es total si

$$(\forall a : A \mid : (\exists b : B \mid : aRb))$$

Equivalentemente, podemos decir que R es total si

$$\text{dom}(R) = A$$



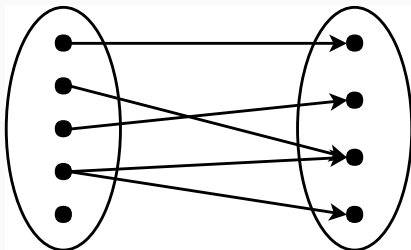
Tipos de relaciones: Sobreyectiva

Decimos que $R \in A \leftrightarrow B$ es sobreyectiva si

$$(\forall b : B \mid : (\exists a : A \mid : aRb))$$

Equivalentemente, podemos decir que R es sobreyectiva si

$$\text{ran}(R) = B$$



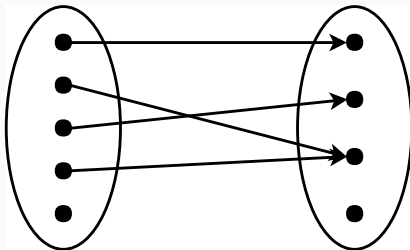
Tipos de relaciones: Función

Decimos que $R \in A \leftrightarrow B$ es función si

$$(\forall a : A \mid aRb_1 \wedge aRb_2 : b_1 = b_2)$$

Equivalentemente, podemos decir que

$$R \text{ es función} \equiv R^T \text{ es inyectiva}$$



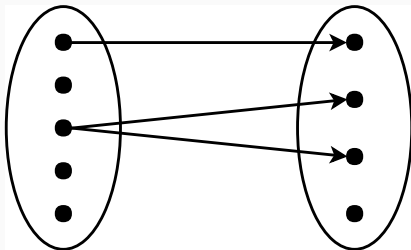
Tipos de relaciones: Inyectiva

Decimos que $R \in A \leftrightarrow B$ es inyectiva si

$$(\forall b : B \mid a_1 R b \wedge a_2 R b : a_1 = a_2)$$

Equivalentemente, podemos decir que

$$R \text{ es inyectiva} \equiv R^T \text{ es función}$$



Tipos de relaciones: Función total y Biyección

- Decimos que $R \in A \leftrightarrow B$ es función total si es función y es total
- Decimos que $R \in A \leftrightarrow B$ es biyectiva si es función, inyectiva y sobreyectiva.
- R es biyectiva $\equiv R^T$ es biyectiva