

Teoría de conjuntos

Matemática estructural y lógica

ISIS-1104

- Un conjunto es una colección de elementos no repetidos.

- Un conjunto es una colección de elementos no repetidos.
- Dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos.

- Un conjunto es una colección de elementos no repetidos.
- Dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos.
- Un conjunto puede pertenecer a otro conjunto.

- Un conjunto es una colección de elementos no repetidos.
- Dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos.
- Un conjunto puede pertenecer a otro conjunto.
- Ningún conjunto pertenece a si mismo.

¿Cómo denotar conjuntos?

¿Cómo denotar conjuntos?

Notación extensional: Simplemente escribimos todos los elementos dentro de llaves

¿Cómo denotar conjuntos?

Notación extensional: Simplemente escribimos todos los elementos dentro de llaves

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

¿Cómo denotar conjuntos?

Notación extensional: Simplemente escribimos todos los elementos dentro de llaves

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$$

¿Cómo denotar conjuntos?

Notación extensional: Simplemente escribimos todos los elementos dentro de llaves

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$$

Notación intensional: Escribimos algun predicado que los elementos del conjunto deben cumplir

¿Cómo denotar conjuntos?

Notación extensional: Simplemente escribimos todos los elementos dentro de llaves

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$$

Notación intensional: Escribimos algun predicado que los elementos del conjunto deben cumplir

$$A = \{x : \text{int} \mid x \geq 0 \wedge x < 5\}$$

¿Cómo denotar conjuntos?

Notación extensional: Simplemente escribimos todos los elementos dentro de llaves

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$$

Notación intensional: Escribimos algun predicado que los elementos del conjunto deben cumplir

$$A = \{x : \text{int} \mid x \geq 0 \wedge x < 5\}$$

$$B = \{x : \text{int} \mid x > 0 \wedge x \text{ es par}\}$$

Pertenencia

Para afirmar que un elemento x pertenece al conjunto A , escribimos el predicado

Pertenencia

Para afirmar que un elemento x pertenece al conjunto A , escribimos el predicado

$$x \in A \text{ o } x : A$$

Pertenencia

Para afirmar que un elemento x pertenece al conjunto A , escribimos el predicado

$$x \in A \text{ o } x : A$$

Para negar pertenencia escribimos

Pertenencia

Para afirmar que un elemento x pertenece al conjunto A , escribimos el predicado

$$x \in A \text{ o } x : A$$

Para negar pertenencia escribimos

$$\neg(x \in A) \text{ o } x \notin A$$

Pertenencia

Para afirmar que un elemento x pertenece al conjunto A , escribimos el predicado

$$x \in A \text{ o } x : A$$

Para negar pertenencia escribimos

$$\neg(x \in A) \text{ o } x \notin A$$

Dado que la notación intensional es de la forma

Pertenencia

Para afirmar que un elemento x pertenece al conjunto A , escribimos el predicado

$$x \in A \text{ o } x : A$$

Para negar pertenencia escribimos

$$\neg(x \in A) \text{ o } x \notin A$$

Dado que la notación intensional es de la forma

$$\{x \mid P(x)\}$$

Pertenencia

Para afirmar que un elemento x pertenece al conjunto A , escribimos el predicado

$$x \in A \text{ o } x : A$$

Para negar pertenencia escribimos

$$\neg(x \in A) \text{ o } x \notin A$$

Dado que la notación intensional es de la forma

$$\{x \mid P(x)\}$$

Es natural afirmar que

Pertenencia

Para afirmar que un elemento x pertenece al conjunto A , escribimos el predicado

$$x \in A \text{ o } x : A$$

Para negar pertenencia escribimos

$$\neg(x \in A) \text{ o } x \notin A$$

Dado que la notación intensional es de la forma

$$\{x \mid P(x)\}$$

Es natural afirmar que

$$(y \in \{x \mid P(x)\}) \equiv P(y)$$

Podemos definir la igualdad de conjuntos utilizando pertenencia

Podemos definir la igualdad de conjuntos utilizando pertenencia

$$(A = B) \equiv (\forall x \mid x \in A \equiv x \in B)$$

Podemos definir la igualdad de conjuntos utilizando pertenencia

$$(A = B) \equiv (\forall x \mid x \in A \equiv x \in B)$$

También podemos definir la contención de conjuntos

Podemos definir la igualdad de conjuntos utilizando pertenencia

$$(A = B) \equiv (\forall x \mid x \in A \equiv x \in B)$$

También podemos definir la contención de conjuntos

$$(A \subseteq B) \equiv (\forall x \mid x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Podemos definir la igualdad de conjuntos utilizando pertenencia

$$(A = B) \equiv (\forall x \mid x \in A \equiv x \in B)$$

También podemos definir la contención de conjuntos

$$(A \subseteq B) \equiv (\forall x \mid x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Teorema: $(A = B) \equiv (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$

El universo y el vacío

El universo y el vacío

Conjunto vacío: Lo denotamos con el símbolo \emptyset , es el conjunto que no tiene elementos

Conjunto vacío: Lo denotamos con el símbolo \emptyset , es el conjunto que no tiene elementos

$$(\forall x \mid x \notin \emptyset)$$

El universo y el vacío

Conjunto vacío: Lo denotamos con el símbolo \emptyset , es el conjunto que no tiene elementos

$$(\forall x \mid x \notin \emptyset)$$

Conjunto universo: Lo denotamos con la letra \mathcal{U} , es el conjunto que contiene "todos" los elementos

El universo y el vacío

Conjunto vacío: Lo denotamos con el símbolo \emptyset , es el conjunto que no tiene elementos

$$(\forall x \mid x \notin \emptyset)$$

Conjunto universo: Lo denotamos con la letra \mathcal{U} , es el conjunto que contiene "todos" los elementos

$$(\forall x \mid x \in \mathcal{U} : x \in \mathcal{U})$$

El universo y el vacío

Conjunto vacío: Lo denotamos con el símbolo \emptyset , es el conjunto que no tiene elementos

$$(\forall x \mid x \notin \emptyset)$$

Conjunto universo: Lo denotamos con la letra \mathcal{U} , es el conjunto que contiene "todos" los elementos

$$(\forall x \mid x \neq \mathcal{U} : x \in \mathcal{U})$$

Teorema: Para cualquier conjunto A se tiene que

El universo y el vacío

Conjunto vacío: Lo denotamos con el símbolo \emptyset , es el conjunto que no tiene elementos

$$(\forall x \mid x \notin \emptyset)$$

Conjunto universo: Lo denotamos con la letra \mathcal{U} , es el conjunto que contiene "todos" los elementos

$$(\forall x \mid x \in \mathcal{U} : x \in \mathcal{U})$$

Teorema: Para cualquier conjunto A se tiene que

$$\emptyset \subseteq A$$

$$A \subseteq \mathcal{U} \quad (\text{cuando } A \neq \mathcal{U})$$

Operaciones entre conjuntos

Definimos las siguientes operaciones

- Unión de conjuntos

$$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

- Intersección de conjuntos

$$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

- Complemento de un conjunto

$$A^c = \{x \mid \neg(x \in A)\}$$

O equivalentemente

- Unión de conjuntos

$$(x \in A \cup B) \equiv (x \in A) \vee (x \in B)$$

- Intersección de conjuntos

$$(x \in A \cap B) \equiv (x \in A) \wedge (x \in B)$$

- Complemento de un conjunto

$$(x \in A^c) \equiv \neg(x \in A)$$

Teoría de conjuntos y lógica

En teoría de conjuntos son válidos los siguientes teoremas

$$A \cap B = B \cap A \quad A \cup B = B \cup A$$

Teoría de conjuntos y lógica

En teoría de conjuntos son válidos los siguientes teoremas

$$A \cap B = B \cap A \quad A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

Teoría de conjuntos y lógica

En teoría de conjuntos son válidos los siguientes teoremas

$$A \cap B = B \cap A \quad A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (A \cup B) = A \quad A \cup (A \cap B) = A$$

Teoría de conjuntos y lógica

En teoría de conjuntos son válidos los siguientes teoremas

$$A \cap B = B \cap A \qquad A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \qquad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (A \cup B) = A \qquad A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Teoría de conjuntos y lógica

En teoría de conjuntos son válidos los siguientes teoremas

$$A \cap B = B \cap A \qquad A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \qquad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (A \cup B) = A \qquad A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap A^c = \emptyset \qquad A \cup A^c = \mathcal{U}$$

Teoría de conjuntos y lógica

En teoría de conjuntos son válidos los siguientes teoremas

$$A \cap B = B \cap A \qquad A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \qquad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (A \cup B) = A \qquad A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap A^c = \emptyset \qquad A \cup A^c = \mathcal{U}$$

$$A \cap \mathcal{U} = A \qquad A \cup \emptyset = A$$

Teoría de conjuntos y lógica

En teoría de conjuntos son válidos los siguientes teoremas

$$A \cap B = B \cap A \qquad A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \qquad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (A \cup B) = A \qquad A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap A^c = \emptyset \qquad A \cup A^c = \mathcal{U}$$

$$A \cap \mathcal{U} = A \qquad A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset \qquad A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$$

Teoría de conjuntos y lógica

En teoría de conjuntos son válidos los siguientes teoremas

$$A \cap B = B \cap A \quad A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (A \cup B) = A \quad A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap A^c = \emptyset \quad A \cup A^c = \mathcal{U}$$

$$A \cap \mathcal{U} = A \quad A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset \quad A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$$

$$A \cap A = A \quad A \cup A = A$$

Teoría de conjuntos y lógica

En teoría de conjuntos son válidos los siguientes teoremas

$$A \cap B = B \cap A \quad A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (A \cup B) = A \quad A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap A^c = \emptyset \quad A \cup A^c = \mathcal{U}$$

$$A \cap \mathcal{U} = A \quad A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset \quad A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$$

$$A \cap A = A \quad A \cup A = A$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \quad (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

Teoría de conjuntos y lógica

En teoría de conjuntos son válidos los siguientes teoremas

$$A \cap B = B \cap A \qquad A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \qquad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (A \cup B) = A \qquad A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap A^c = \emptyset \qquad A \cup A^c = \mathcal{U}$$

$$A \cap \mathcal{U} = A \qquad A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset \qquad A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$$

$$A \cap A = A \qquad A \cup A = A$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \qquad (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A^c)^c = A$$

Teoría de conjuntos y lógica

Porque en realidad son los mismos axiomas de lógica proposicional

$$p \wedge q \equiv q \wedge p \qquad p \vee q \equiv q \vee p$$

$$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r \qquad p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$$

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p \qquad p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \qquad p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$p \wedge p^c \equiv \text{False} \qquad p \vee p^c \equiv \text{True}$$

$$p \wedge \text{True} \equiv p \qquad p \vee \text{False} \equiv p$$

$$p \wedge \text{False} \equiv \text{False} \qquad p \vee \text{True} \equiv \text{True}$$

$$p \wedge p \equiv p \qquad p \vee p \equiv p$$

$$\neg(\neg p) \equiv p$$

Un ejemplo

Un ejemplo

Demostremos que para cualquier conjunto A se tiene que

$$A \cap A^C = \emptyset$$

Un ejemplo

Demostremos que para cualquier conjunto A se tiene que

$$A \cap A^C = \emptyset$$

Por definición de igualdad

$$(\forall x | : (x \in A \cap A^C) \equiv (x \in \emptyset))$$

Un ejemplo

Demostremos que para cualquier conjunto A se tiene que

$$A \cap A^c = \emptyset$$

Por definición de igualdad

$$(\forall x | : (x \in A \cap A^c) \equiv (x \in \emptyset))$$

Por \forall -eliminación

$$(x \in A \cap A^c) \equiv (x \in \emptyset)$$

Un ejemplo

Demostremos que para cualquier conjunto A se tiene que

$$A \cap A^C = \emptyset$$

Por definición de igualdad

$$(\forall x \mid: (x \in A \cap A^C) \equiv (x \in \emptyset))$$

Por \forall -eliminación

$$(x \in A \cap A^C) \equiv (x \in \emptyset)$$

Entonces partimos de $x \in A \cap A^C$ e intentamos llegar a $x \in \emptyset$

Un ejemplo

Un ejemplo

Por definición de \cap

$$(x \in A \cap A^c) \equiv (x \in A) \wedge (x \in A^c)$$

Un ejemplo

Por definición de \cap

$$(x \in A \cap A^c) \equiv (x \in A) \wedge (x \in A^c)$$

Por definición de complemento

$$(x \in A) \wedge (x \in A^c) \equiv (x \in A) \wedge \neg(x \in A)$$

Un ejemplo

Por definición de \cap

$$(x \in A \cap A^c) \equiv (x \in A) \wedge (x \in A^c)$$

Por definición de complemento

$$(x \in A) \wedge (x \in A^c) \equiv (x \in A) \wedge \neg(x \in A)$$

Por **Piso**

$$(x \in A) \wedge \neg(x \in A) \equiv \textit{False}$$

Un ejemplo

Por definición de \cap

$$(x \in A \cap A^c) \equiv (x \in A) \wedge (x \in A^c)$$

Por definición de complemento

$$(x \in A) \wedge (x \in A^c) \equiv (x \in A) \wedge \neg(x \in A)$$

Por **Piso**

$$(x \in A) \wedge \neg(x \in A) \equiv \textit{False}$$

Sin embargo, por definición de vacío tenemos que $\neg(x \in \emptyset)$, o equivalentemente

$$\textit{False} \equiv (x \in \emptyset)$$

Un ejemplo

Por definición de \cap

$$(x \in A \cap A^c) \equiv (x \in A) \wedge (x \in A^c)$$

Por definición de complemento

$$(x \in A) \wedge (x \in A^c) \equiv (x \in A) \wedge \neg(x \in A)$$

Por **Piso**

$$(x \in A) \wedge \neg(x \in A) \equiv \textit{False}$$

Sin embargo, por definición de vacío tenemos que $\neg(x \in \emptyset)$, o equivalentemente

$$\textit{False} \equiv (x \in \emptyset)$$

Luego

$$(x \in A \cap A^c) \equiv (x \in \emptyset)$$

Ahora ustedes

Ahora ustedes

Demuestren que para cualquier conjunto A

$$A \cup \emptyset = A$$

¿Por qué esto funciona?

¿Por qué esto funciona?

Nuestras demostraciones consistieron en mostrar que

¿Por qué esto funciona?

Nuestras demostraciones consistieron en mostrar que

$A \cap A^c = \emptyset$ se podía convertir a $(x \in A) \wedge \neg(x \in A) \equiv \textit{False}$

¿Por qué esto funciona?

Nuestras demostraciones consistieron en mostrar que

$A \cap A^c = \emptyset$ se podía convertir a $(x \in A) \wedge \neg(x \in A) \equiv \text{False}$

$A \cup \emptyset = A$ se podía convertir a $(x \in A) \vee \text{False} \equiv (x \in A)$

¿Por qué esto funciona?

Nuestras demostraciones consistieron en mostrar que

$A \cap A^c = \emptyset$ se podía convertir a $(x \in A) \wedge \neg(x \in A) \equiv \text{False}$

$A \cup \emptyset = A$ se podía convertir a $(x \in A) \vee \text{False} \equiv (x \in A)$

Esto **siempre** puede hacerse para cualquier afirmación sobre conjuntos y se conoce con el nombre de **teorema de representación**.

El teorema de representación

El teorema de representación

No tenemos el lenguaje adecuado para describir este teorema con exactitud, pero su enunciado sería algo así:

El teorema de representación

No tenemos el lenguaje adecuado para describir este teorema con exactitud, pero su enunciado sería algo así:

Cualquier afirmación sobre conjuntos puede transformarse a un predicado sustituyendo

El teorema de representación

No tenemos el lenguaje adecuado para describir este teorema con exactitud, pero su enunciado sería algo así:

Cualquier afirmación sobre conjuntos puede transformarse a un predicado sustituyendo

- " \cap " por " \wedge "

El teorema de representación

No tenemos el lenguaje adecuado para describir este teorema con exactitud, pero su enunciado sería algo así:

Cualquier afirmación sobre conjuntos puede transformarse a un predicado sustituyendo

- " \cap " por " \wedge "
- " \cup " por " \vee "

El teorema de representación

No tenemos el lenguaje adecuado para describir este teorema con exactitud, pero su enunciado sería algo así:

Cualquier afirmación sobre conjuntos puede transformarse a un predicado sustituyendo

- " \cap " por " \wedge "
- " \cup " por " \vee "
- " c " por " \neg "

El teorema de representación

No tenemos el lenguaje adecuado para describir este teorema con exactitud, pero su enunciado sería algo así:

Cualquier afirmación sobre conjuntos puede transformarse a un predicado sustituyendo

- " \cap " por " \wedge "
- " \cup " por " \vee "
- " c " por " \neg "
- " $=$ " por " \equiv "

El teorema de representación

No tenemos el lenguaje adecuado para describir este teorema con exactitud, pero su enunciado sería algo así:

Cualquier afirmación sobre conjuntos puede transformarse a un predicado sustituyendo

- " \cap " por " \wedge "
- " \cup " por " \vee "
- " c " por " \neg "
- " $=$ " por " \equiv "
- " \emptyset " por "*False*"

El teorema de representación

No tenemos el lenguaje adecuado para describir este teorema con exactitud, pero su enunciado sería algo así:

Cualquier afirmación sobre conjuntos puede transformarse a un predicado sustituyendo

- " \cap " por " \wedge "
- " \cup " por " \vee "
- " c " por " \neg "
- " $=$ " por " \equiv "
- " \emptyset " por "*False*"
- " \mathcal{U} " por "*True*"

El teorema de representación

No tenemos el lenguaje adecuado para describir este teorema con exactitud, pero su enunciado sería algo así:

Cualquier afirmación sobre conjuntos puede transformarse a un predicado sustituyendo

- " \cap " por " \wedge "
- " \cup " por " \vee "
- " c " por " \neg "
- " $=$ " por " \equiv "
- " \emptyset " por "*False*"
- " \mathcal{U} " por "*True*"
- Cada conjunto " A " por el predicado " $x \in A$ "

Un ejemplo: De Morgan para conjuntos

Un ejemplo: De Morgan para conjuntos

Teorema:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

Un ejemplo: De Morgan para conjuntos

Teorema:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

Demostración:

Un ejemplo: De Morgan para conjuntos

Teorema:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

Demostración:

Usando el teorema de representación

Un ejemplo: De Morgan para conjuntos

Teorema:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

Demostración:

Usando el teorema de representación

$$\neg((x \in A) \vee (x \in B)) \equiv \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B)$$

Un ejemplo: De Morgan para conjuntos

Teorema:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

Demostración:

Usando el teorema de representación

$$\neg((x \in A) \vee (x \in B)) \equiv \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B)$$

Lo cual es trivial de demostrar usando De Morgan para proposiciones.

Ahora ustedes

Teorema:

$$A \cap (A \cup B) = A$$