

# Sistemas formales

---

Matemática estructural y lógica  
ISIS-1104

¿Para qué?

# ¿Para qué?

Para razonar sobre la correctitud de las cosas

## ¿Para qué?

Para razonar sobre la correctitud de las cosas

```
int public signo(int x) {  
    if (x != 0) {  
        return 1  
    } else {  
        return -1;  
    }  
}
```

## ¿Para qué?

Para razonar sobre la correctitud de las cosas

```
int public signo(int x) {  
    if (x != 0) {  
        return 1  
    } else {  
        return -1;  
    }  
}
```

¿Qué está mal con este código?

# Lenguajes formales

## Ejemplo: El lenguaje de los decimales

## Ejemplo: El lenguaje de los decimales

- Cosas que son decimales
  - 1.46
  - 32.04
  - 1234.0



## Ejemplo: El lenguaje de los decimales

- Cosas que son decimales
  - 1.46
  - 32.04
  - 1234.0
- Cosas que **no** son decimales:
  - 12341
  - 132.432.23
  - .123

## Ejemplo: El lenguaje de los decimales

## Ejemplo: El lenguaje de los decimales

- Un decimal es un número, seguido por un punto, seguido por otro número.

`decimal`  $\rightarrow$  `numero . numero`

## Ejemplo: El lenguaje de los decimales

- Un decimal es un número, seguido por un punto, seguido por otro número.

`decimal`  $\rightarrow$  `numero . numero`

- A su vez, un número puede ser, o un dígito

`numero`  $\rightarrow$  `digito`

## Ejemplo: El lenguaje de los decimales

- Un decimal es un número, seguido por un punto, seguido por otro número.

$\text{decimal} \rightarrow \text{numero} . \text{numero}$

- A su vez, un número puede ser, o un dígito

$\text{numero} \rightarrow \text{digito}$

- O un dígito seguido de otro número

$\text{numero} \rightarrow \text{digito numero}$

## Ejemplo: El lenguaje de los decimales

- Un decimal es un número, seguido por un punto, seguido por otro número.

$\text{decimal} \rightarrow \text{numero} . \text{numero}$

- A su vez, un número puede ser, o un dígito

$\text{numero} \rightarrow \text{digito}$

- O un dígito seguido de otro número

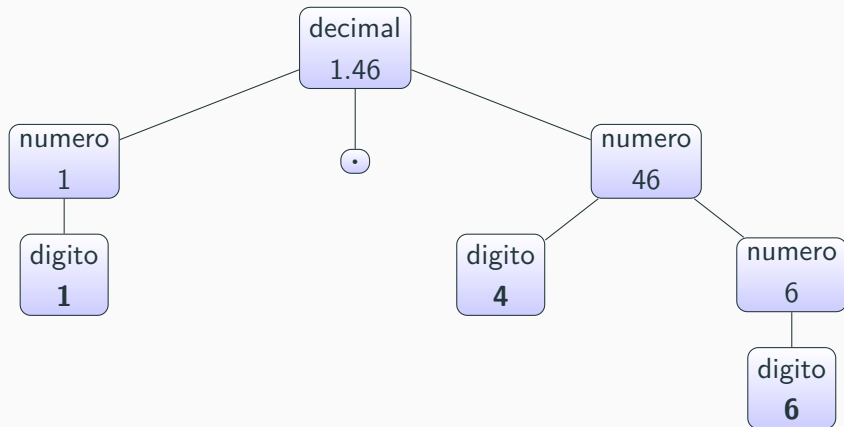
$\text{numero} \rightarrow \text{digito numero}$

- Finalmente, un dígito es un caracter entre 0 y 9

$\text{digito} \rightarrow 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9$

## Ejemplo: El lenguaje de los decimales

¿Es 1.46 un decimal?



## Ejemplo: El lenguaje de los decimales

Ahora ustedes ¿Es 32.5.1 un decimal?



## Ejemplo: El lenguaje de los decimales

- $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, .\}$  son los **símbolos terminales**.

## Ejemplo: El lenguaje de los decimales

- $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, .\}$  son los **símbolos terminales**.
- $\{\text{decimal}, \text{numero}, \text{digito}\}$  son los **símbolos auxiliares**.

## Ejemplo: El lenguaje de los decimales

- $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, .\}$  son los **símbolos terminales**.
- $\{\text{decimal}, \text{numero}, \text{digito}\}$  son los **símbolos auxiliares**.
- decimal es el **símbolo inicial**.

## Ejemplo: El lenguaje de los decimales

- $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, .\}$  son los **símbolos terminales**.
- $\{\text{decimal}, \text{numero}, \text{digito}\}$  son los **símbolos auxiliares**.
- decimal es el **símbolo inicial**.
- Y estas son **producciones**:

`decimal`  $\rightarrow$  `numero . numero`

`numero`  $\rightarrow$  `digito`

`numero`  $\rightarrow$  `digito numero`

`digito`  $\rightarrow$  **0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9**

## Ejemplo: El lenguaje de los decimales

- $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, .\}$  son los **símbolos terminales**.
- $\{\text{decimal}, \text{numero}, \text{digito}\}$  son los **símbolos auxiliares**.
- decimal es el **símbolo inicial**.
- Y estas son **producciones**:

decimal  $\rightarrow$  numero . numero

numero  $\rightarrow$  digito

numero  $\rightarrow$  digito numero

digito  $\rightarrow 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9$

- Este conjunto de conceptos conforman una **forma normal**.

- Un lenguaje formal esta constituido por:

- Un lenguaje formal esta constituido por:
  - Una colección de *simbolos*, el **alfabeto** (usualmente denotado por  $A$ ).

- Un lenguaje formal esta constituido por:
  - Una colección de *simbolos*, el **alfabeto** (usualmente denotado por  $A$ ).
  - Una serie de reglas que nos indican como combinar simbolos (usualmente una *forma normal*), la **sintaxis**.



- Un lenguaje formal esta constituido por:
  - Una colección de *simbolos*, el **alfabeto** (usualmente denotado por  $A$ ).
  - Una serie de reglas que nos indican como combinar simbolos (usualmente una *forma normal*), la **sintaxis**.
- Una sucesión de símbolos del alfabeto es una **fórmula**.

- Un lenguaje formal esta constituido por:
  - Una colección de *simbolos*, el **alfabeto** (usualmente denotado por  $A$ ).
  - Una serie de reglas que nos indican como combinar simbolos (usualmente una *forma normal*), la **sintaxis**.
- Una sucesión de símbolos del alfabeto es una **fórmula**.
- Una fórmula que sigue la **sintaxis** es una **fórmula bien formada**.

# **Semántica**

## Ejemplo: Los números naturales

- El alfabeto:

$$A = \{zero, succ, (, )\}$$

## Ejemplo: Los números naturales

- El alfabeto:

$$A = \{zero, succ, (, )\}$$

- La sintaxis:

$$\text{natural} \rightarrow \text{zero} \mid \text{succ}(\text{natural})$$

## Ejemplo: Los números naturales

- El alfabeto:

$$A = \{zero, succ, (, )\}$$

- La sintaxis:

$$\text{natural} \rightarrow \textbf{zero} \mid \textbf{succ}(\text{natural})$$

- Algunas fbf:

## Ejemplo: Los números naturales

- El alfabeto:

$$A = \{zero, succ, (, )\}$$

- La sintaxis:

$$\text{natural} \rightarrow \text{zero} \mid \text{succ}(\text{natural})$$

- Algunas fbf:

- *zero*

## Ejemplo: Los números naturales

- El alfabeto:

$$A = \{zero, succ, (, )\}$$

- La sintaxis:

$$\text{natural} \rightarrow \text{zero} \mid \text{succ}(\text{natural})$$

- Algunas fbf:
  - *zero*
  - *succ(zero)*



## Ejemplo: Los números naturales

- El alfabeto:

$$A = \{zero, succ, (, )\}$$

- La sintaxis:

$$\text{natural} \rightarrow \text{zero} \mid \text{succ}(\text{natural})$$

- Algunas fbf:
  - *zero*
  - *succ(zero)*
  - *succ(succ(zero))*

## Ejemplo: Los números naturales

- El alfabeto:

$$A = \{zero, succ, (, )\}$$

- La sintaxis:

$$\text{natural} \rightarrow \text{zero} \mid \text{succ}(\text{natural})$$

- Algunas fbf:

- *zero*
- *succ(zero)*
- *succ(succ(zero))*
- ...

## Ejemplo: Los números naturales

- Sabemos que *zero* representa al número 0.

$$I(\text{zero}) = 0$$

## Ejemplo: Los números naturales

- Sabemos que *zero* representa al número 0.

$$I(\text{zero}) = 0$$

- Sabemos que *succ(zero)* representa al siguiente número, 1.

$$I(\text{succ}(\text{zero})) = 1$$

## Ejemplo: Los números naturales

- Sabemos que *zero* representa al número 0.

$$I(\text{zero}) = 0$$

- Sabemos que *succ(zero)* representa al siguiente número, 1.

$$I(\text{succ}(\text{zero})) = 1$$

- Sabemos que *succ natural* representa al sucesor de *natural*.

$$I(\text{succ}(\text{natural})) = 1 + I(\text{natural})$$

## Ejemplo: Los números naturales

- Sabemos que *zero* representa al número 0.

$$I(\text{zero}) = 0$$

- Sabemos que *succ(zero)* representa al siguiente número, 1.

$$I(\text{succ}(\text{zero})) = 1$$

- Sabemos que *succ natural* representa al sucesor de *natural*.

$$I(\text{succ}(\text{natural})) = 1 + I(\text{natural})$$

- Esto es una **semántica** para este lenguaje, le dá un significado.

## Ejercicio: Los números binarios

Escriba una semántica para el siguiente lenguaje

- El alfabeto:

$$A = \{0, 1\}$$

- La sintaxis:

binario  $\rightarrow$  digito

binario  $\rightarrow$  digito binario

digito  $\rightarrow$  **0** | **1**

Para que se pueda interpretar como números, es decir:

$$I(110) = 6$$

## **Aparato deductivo**



## Ejemplo: Los naturales con la suma

- El alfabeto:

$$A = \{zero, succ, (, ), plus\}$$

## Ejemplo: Los naturales con la suma

- El alfabeto:

$$A = \{zero, succ, (, ), plus\}$$

- La sintaxis:

`nat_sum`  $\rightarrow$  `natural`

`nat_sum`  $\rightarrow$  `natural` ***plus*** `natural`

`natural`  $\rightarrow$  ***zero*** | ***succ***(`natural`)

## Ejemplo: Los naturales con la suma

¿Cómo transformar cualquier suma de naturales a un natural puro?

## Ejemplo: Los naturales con la suma

¿Cómo transformar cualquier suma de naturales a un natural puro?

$$\text{succ}(\text{succ}(\text{zero})) \text{ plus } \text{succ}(\text{zero}) \rightsquigarrow \text{succ}(\text{succ}(\text{succ}(\text{zero})))$$

## Ejemplo: Los naturales con la suma

¿Cómo transformar cualquier suma de naturales a un natural puro?

$$\text{succ}(\text{succ}(\text{zero})) \text{ plus } \text{succ}(\text{zero}) \rightsquigarrow \text{succ}(\text{succ}(\text{succ}(\text{zero})))$$

Con dos **reglas de inferencia**:

## Ejemplo: Los naturales con la suma

¿Cómo transformar cualquier suma de naturales a un natural puro?

$$\text{succ}(\text{succ}(\text{zero})) \text{ plus } \text{succ}(\text{zero}) \rightsquigarrow \text{succ}(\text{succ}(\text{succ}(\text{zero})))$$

Con dos **reglas de inferencia**:

- Sumar cero no cambia nada

$$\frac{\text{zero plus } x}{x}$$

## Ejemplo: Los naturales con la suma

¿Cómo transformar cualquier suma de naturales a un natural puro?

$$\text{succ}(\text{succ}(\text{zero})) \text{ plus } \text{succ}(\text{zero}) \rightsquigarrow \text{succ}(\text{succ}(\text{succ}(\text{zero})))$$

Con dos **reglas de inferencia**:

- Sumar cero no cambia nada

$$\frac{\text{zero plus } x}{x}$$

- Mover uno a la derecha

$$\frac{\text{succ}(x) \text{ plus } y}{x \text{ plus } \text{succ}(y)}$$

## Ejemplo: Los naturales con la suma

- Partiendo de

*$\text{succ}(\text{succ}(\text{zero}))$  plus  $\text{succ}(\text{zero})$*



## Ejemplo: Los naturales con la suma

- Partiendo de

*$\text{succ}(\text{succ}(\text{zero})) \text{ plus } \text{succ}(\text{zero})$*

- Podemos mover uno a la derecha

*$\text{succ}(\text{zero}) \text{ plus } \text{succ}(\text{succ}(\text{zero}))$*

## Ejemplo: Los naturales con la suma

- Partiendo de

*succ(succ(zero)) plus succ(zero)*

- Podemos mover uno a la derecha

*succ(zero) plus succ(succ(zero))*

- *Rinse and repeat*

*zero plus succ(succ(succ(zero)))*

## Ejemplo: Los naturales con la suma

- Partiendo de

*succ(succ(zero)) plus succ(zero)*

- Podemos mover uno a la derecha

*succ(zero) plus succ(succ(zero))*

- *Rinse and repeat*

*zero plus succ(succ(succ(zero)))*

- Sumar cero no cambia nada

*succ(succ(succ(zero)))*

## Ejemplo: Los naturales con la suma

Ahora ustedes transformen

*succ(zero) plus succ(succ(zero)) plus zero*

- Un **lenguaje formal** es un conjunto de *simbolos* con una *sintaxis*.

## En conclusión. . .

- Un **lenguaje formal** es un conjunto de *simbolos* con una *sintaxis*.
- Un **aparato deductivo** permite transformar las *fórmulas* de un **lenguaje** usando *reglas de inferencia*.

## En conclusión. . .

- Un **lenguaje formal** es un conjunto de *simbolos* con una *sintaxis*.
- Un **aparato deductivo** permite transformar las *fórmulas* de un **lenguaje** usando *reglas de inferencia*.
- Cuando un **lenguaje formal** cuenta con un **aparato deductivo**, este pasa a ser un **sistema formal**.