



DEPARTAMENTO
DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Métodos Numéricos

Trabajo práctico 3

Hay que poner un poquito más de esfuerzo. . .

Resumen

Integrante	LU	Correo electrónico
Danós, Alejandro	381/10	adp007@gmail.com
Gandini, Luciano	207/10	gl.gandini@gmail.com
Russo, Christian Sebastián	679/10	christian.russo@gmail.com

Palabras claves:

Cuadrados Minimos, Factorizacion QR, Heuristica, Futbol de Robots

Índice

1. Introduccion Teorica

1.1. Factorizacion QR

Definicion: Se dice que una matriz tiene **factorizacion QR** si puede ser expresada de la forma

$$A = Q^*R$$

El algoritmo para llevar a una matriz a su forma QR tiene costo $O(n^3)$. Tiene la misma ventaja que la factorizacion LU de permitir resolver un sistema de ecuaciones en orden $O(n^2)$, pero con la ventaja que **toda matriz tiene factorizacion QR**

$$Ax = b$$

$$QRx = b$$

$$Q^t Q R x = Q^t b$$

$$R x = Q^t b$$

con Rx un **sistema triangular superior**

Para poder calcular la matriz R se pueden aplicar los metodos de **Givens o Householder**

1.1.1. Given

Para eliminar el elemento en la posicion (i,j) aplicamos la siguiente matriz:

$$G(i, j, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & c & \cdots & -s & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & s & \cdots & c & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Figura 1: Matriz de Givens

con $c = \cos(\theta)$ y $s = \sin(\theta)$. Luego aplicando $G(i,j,\theta) * A$ queda en 0 el elemento (i,j). Entonces aplicamos sucesivamente este procedimiento para todos los elementos que queremos poner en 0 obteniendo así nuestra matriz R. Luego $Q^t = \prod_{i=n}^1 G_i$

1.1.2. Householder

Con este metodo vamos eliminando los 0 de abajo de la diagonal columna a columna. Sea $x = col_i(A)$, $y = (\|x\|_2, 0, \dots, 0)$ y sea $u = x - y$. Definimos $H_i = I - \frac{2uu^t}{u^t u}$. Luego aplicando $H_i * A$ queda triangulada la columna i de A. Aplicamos este procedimiento iterativamente sobre $A^{(i)}$ hasta dejar triangulada la matriz. Quedando $Q^t = \prod_{i=n}^1 H_i$

2. Desarrollo

En esta sección describiremos los métodos usados para resolver el problema, cada uno con sus ventajas y desventajas.

2.1. Archivo de entrada

2.1.1. Explicacion

El ejecutable toma tres parámetros por línea de comando, que serán el *path* del archivo de entrada, el *path* del archivo de salida y la estrategia que utilizaremos con el arquero.

El archivo de entrada seguirá el siguiente formato:

- La primera línea contendrá la posición inicial del arquero en y , luego las coordenadas que definen los límites del arco, también sobre el eje y . Se asume que la posición en x del arquero y de la línea de gol son las mismas: $x = 125$. Finalmente estará μ , la cota sobre el máximo desplazamiento que puede realizar el arquero en un instante de tiempo.
- Luego se muestra la secuencia de posiciones en \mathbb{R}^2 , una por línea, que toma la pelota para los instantes de tiempo $0, 1, \dots, T$, siendo T el tiempo final.

En un primer lugar, leeremos la primera línea del archivo de entrada para *setear* los valores correctos de la posición en y del arquero, las posiciones de los palos y el μ . Luego, dado que se asume que no podemos saber qué pasará más allá del tiempo actual, iremos leyendo la entrada a medida que hagamos hecho los cálculos para el tiempo anterior.

2.2. Archivo de salida

2.2.1. Explicacion

El archivo de salida especificado como parámetro será creado en caso de que no exista y reemplazado por uno nuevo en caso de que ya exista. Este nuevo archivo contendrá una instrucción por línea, correspondiente a la acción que realiza el arquero en el instante $0 \leq t \leq T$, siendo T el instante final.

Este archivo luego podrá ser usado junto con el archivo de entrada para analizar qué sucede con el visualizador proporcionado por la cátedra.

2.3. Método Uno: Usando Cuadrados Mínimos

Nuestro primer enfoque fue mirar al problema como si fuera uno de analizar los datos obtenidos en un experimento y tratásemos de describir la distribución de estos mediante una función.

En esta perspectiva, nuestra entrada sería el tiempo y la salida la posición en la cancha de la pelota. Además, como las variaciones en las coordenadas x e y de la pelota son independientes podemos dividir al problema en una entrada y dos salidas. De esta forma, deberíamos resolver dos problemas de cuadrados mínimos.

2.3.1. Cuadrados Mínimos: General

El estudio de Cuadrados Mínimos nació al querer describir el comportamiento de datos con funciones polinómicas. Normalmente, las mediciones traen inherentemente una cuota de ruido y si

se sospecha que éstas siguen un crecimiento de un polinomio de grado como máximo n , es difícil encontrar los coeficientes de este polinomio dado que el ruido afecta a los puntos. Cuadrados Mínimos trata de solucionar este problema.

Más formalmente, si se tiene m entradas y para cada una de ellas una salida asociada, x_i e y_i respectivamente, y se los quiere describir con un polinomio $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ de grado máximo fijo n , entonces la técnica de Cuadrados Mínimos busca a los $n + 1$ coeficientes $a_i \forall i = 0 \dots n$ resolviendo el problema buscar el vector a tal que minimice a la norma de $A \times a - b$ al cuadrado, con $A \in \mathbb{R}^{m \times (n+1)}$, $a \in \mathbb{R}^m$ y $b \in \mathbb{R}^n$ los siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_m^n & x_m^{n-1} & \dots & x_m & 1 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} y_m \\ y_{m-1} \\ \vdots \\ y_1 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

La diferencia entre resolver directamente el sistema $A \times a = b$ y minimizar a $\|A \times a - b\|$ consta en que el primero busca a los coeficientes tal que el polinomio pasa exactamente por los puntos y_i , es decir, $P(x_i) = y_i \forall i = 0..m$, mientras que el segundo trata de buscar los coeficientes que minimicen a $\sum_{i=0}^m (P(x_i) - y_i)^2$, o la suma de los errores al cuadrado.

2.3.2. Cuadrados Mínimos: Específico a nuestro trabajo

En nuestro caso, deberíamos resolver dos problemas de Cuadrados Mínimos dado que para cada tiempo t_i tenemos dos coordenadas independientes: x_i e y_i . Si seguimos la notación anterior, la matriz A no cambiaría entre una coordenada y otra aunque sí el vector b sí tendría dos casos a parte, que llamaremos b_x y b_y .

Para resolver esta minimización se pueden usar por lo menos 3 métodos distintos: resolver mediante una factorización QR, mediante funciones normales o también factorizando usando descomposición en valores singulares. En las siguientes secciones explicaremos los métodos de QR y de funciones normales.

2.3.3. Resolver Cuadrados Mínimos usando QR

Sea $A = Q^*R$ la factorización QR de la matriz A mencionada en las secciones anteriores. Entonces,

$$\min_{x \in \mathbb{R}^{(n+1)}} \|Ax - b\|^2 = \min_{x \in \mathbb{R}^{(n+1)}} \|Q^t Ax - Q^t b\|^2 = \min_{x \in \mathbb{R}^{(n+1)}} \|Rx - Q^t b\|^2$$

Como A tiene columnas independientes¹, entonces $R_{i,i} \neq 0 \forall i = 1, \dots, n+1$ y además $R_{i,j} = 0 \forall i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, i-1$. La multiplicación matriz-vector Rx entonces sería:

$$Rx = \begin{pmatrix} R_1 x \\ 0 \end{pmatrix} \text{ con } R_1 \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)} \text{ la parte por arriba de la diagonal de } R.$$

Además, si reescribimos a $Q^t b$ como:

$$Q^t b = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \text{ con } c \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)} \text{ y } d \in \mathbb{R}^{m-(n+1)}, \text{ problema se reduce a:}$$

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^{(n+1)}} \|Rx - Q^t b\|^2 &= \|(R_1 x, 0)^t - (c, d)^t\|^2 = \min_{x \in \mathbb{R}^{(n+1)}} \|R_1 x - c\|^2 + \|d\|^2 \\ &\rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^{(n+1)}} \|R_1 x - c\|^2 \rightarrow x/R_1 x = c \end{aligned}$$

¹Para más información, referirse a la sección demostraciones

$$R = \begin{bmatrix} \hat{R} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{r}_{11} & \hat{r}_{12} & \hat{r}_{13} \\ 0 & \hat{r}_{22} & \hat{r}_{23} \\ 0 & 0 & \hat{r}_{33} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} \hat{c} \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \\ \hat{c}_3 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

Figura 7: Ejemplo de rango completo.

El sistema $R_1 x = b$ tiene solución dado que R_1 es triangular superior con elementos no nulos en la diagonal. Si encontramos el x que sea solución para ese sistema, será el mismo x solución para el problema de Cuadrados Mínimos.

2.3.4. Pseudocodigo

Algorithm 1 FactorizacionQR(Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$)

```

Matriz  $R \leftarrow A$ 
Matriz  $Q \leftarrow$  Matriz Identidad  $\in \mathbb{R}^{n \times n}$ 
Matriz  $Qt \leftarrow$  Matriz Identidad  $\in \mathbb{R}^{n \times n}$ 
for  $i = 0$  hasta  $m$  do
  if  $(n - i) > 1$  then
    Matriz  $tmp \leftarrow$  Matriz Identidad  $\in \mathbb{R}^{n \times n}$ 
    Matriz  $subQt \leftarrow$  Matriz Identidad  $\in \mathbb{R}^{(n-i) \times (n-i)}$ 
    Matriz  $subR \leftarrow generarSubMatriz(R, i) \in \mathbb{R}^{(n-i) \times (m-i)}$ 
     $(subR, subQt) \leftarrow triangularColumna(subR, subQt)$ 
     $R \leftarrow agregarSubMatrix(subR, R, i)$ 
     $tmp \leftarrow agregarSubMatrix(subQt, tmp, i)$ 
  end if
   $Qt \leftarrow tmp * Qt$ 
end for
return  $(Qt, R)$ 

```

Algorithm 2 generarSubMatrix(Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, int i)

```

Matriz  $res \leftarrow$  Matriz  $\in \mathbb{R}^{(n-i) \times (m-i)}$ 
 $res_{k,l} \leftarrow A_{i+k,i+l} \quad \forall k = 0, \dots, (n-i) \text{ y } l = 0, \dots, (m-i)$ 
return  $res$ 

```

Algorithm 3 triangularColumna(Matrix $sub \in \mathbb{R}^{n \times m}$, Matrix $subQt \in \mathbb{R}^{n \times m}$)

Vector $x \leftarrow$ Vector de Ceros $\in \mathbb{R}^n$
 Vector $y \leftarrow$ Vector de Ceros $\in \mathbb{R}^n$
 Vector $u \leftarrow$ Vector de Ceros $\in \mathbb{R}^n$
for $i = 0$ hasta $x.n$ **do**
 $x_i \leftarrow sub_i$
end for
 $y_0 \leftarrow \|x\|$
 $u \leftarrow x - y$
 Vector $uTranspuesto \leftarrow u^t \in \mathbb{R}^{1 \times n}$
 Vector $aux \leftarrow$ Vector $uTranspuesto * sub \in \mathbb{R}^n$
 Matriz $aux2 \leftarrow$ Matriz $u * aux \in \mathbb{R}^{n \times m}$
 int $coeficiente \leftarrow 2/\|u\|^2$
 $sub \leftarrow sub - (aux2 * coeficiente)$
 $aux \leftarrow uTranspuesto * subQt$
 $aux2 \leftarrow u * aux$
 $subQt \leftarrow subQt - (aux2 * coeficiente)$
return (sub, subQt)

Algorithm 4 agregarSubMatrix(Matrix $sub \in \mathbb{R}^{(n-i) \times (m-i)}$, Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, int i)

$A_{i+k, i+l} \leftarrow sub_{k,l} \quad \forall k = 0, \dots, (n-i) \text{ y } l = 0, \dots, (m-i)$
return Matriz A modificada

2.4. Demostraciones

En esta sección daremos demostraciones de los supuestos considerados en los algoritmos usados en el trabajo.

Sean $A \in \mathbb{R}^{m \times (n+1)}$ con:

$$A = \begin{pmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \cdots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_m^n & x_m^{n-1} & \cdots & x_m^1 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} y_m \\ y_{m-1} \\ \vdots \\ y_1 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Lema Si $m > n+1$, entonces A tiene rango de columnas máximo.

Prueba: $A = (C_1, C_2, \dots, C_n, C_{n+1})$ si la miramos como columnas. Asumamos que no tiene rango máximo. Eso es equivalente a que:

$\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \dots + \alpha_n C_n + \alpha_{n+1} C_{n+1} = 0$ con $\alpha_i \in R$ y $\alpha_i \neq 0$ para algún i , que es equivalente a que $A * \alpha = 0$. O sea, que el polinomio $P(x)$ de grado n tendría $m > n+1$ raíces dado que cada fila sería una evaluación en un punto distinta del polinomio dado que los x_i son distintos. Absurdo.

3. Experimentación

El objetivo del trabajo era encontrar el *mejor* arquero usando técnicas de métodos numéricos. Qué dice qué arquero es mejor que otro es difícil de decidir cuando existen arqueros que atajan tiros distintos pero en total la misma cantidad. En esta sección trataremos de decidir utilizando los siguientes criterios:

- Diferencia en posición final: este criterio mide la distancia final entre la pelota y nuestro arquero. Si es menor a 7 entonces nuestro arquero la atajó. Además, nos sirve para ir analizando en el tiempo cómo es el comportamiento de nuestro arquero.

Los archivos de tests correspondientes son los que contienen al substring ".movsgol".

- Diferencia en coordenada y a lo largo del tiempo: en este caso iremos viendo sólo la información del eje y para cada momento de tiempo y comparándola en el caso de la pelota y nuestro arquero. Nos sirve para ver cómo es el movimiento de nuestro arquero según se va moviendo la pelota. Una estrategia *ingenua* que no consideramos en nuestro trabajo sería ir acercando el arquero a cada coordenada y de la pelota a lo largo del tiempo, sin considerar que pueda cambiar bruscamente y nos alejemos demasiado del destino final.

Los archivos de tests correspondientes son los que contienen al substring ".movstodos".

- Error en estimación: compara la posición de gol de la pelota contra la estimación de nuestros métodos. Es decir, en cada momento qué tan errada está la estimación de por dónde va a entrar la pelota. Sirve para ver cómo va cambiando la estimación con más información o mientras más se acerca al arco.

Los archivos de tests correspondientes son los que contienen al substring ".movsestimacion".

4. Resultados

4.1. Experimentación con Lineales