**Algorithm 0.1** Deflación(Matriz $A$, vector $v$, valor $\lambda$)

**Require:** $\lambda$ autovalor de módulo máximo y $v$ su autovector asociado
**Require:** $\|v\|$=1 y ortogonal al resto de los autovectores
**Require:** $A \in \mathbb{R}^{nxn}$

```
Sea B ∈ R^{nxn}
for i = 1 hasta n do
   for j = 1 hasta n do
      B_ij ← A_ij − λ v_i v_j
   end for
end for
return B
```

**Ensure:** $v$ autovector de B con autovalor asociado 0
**Ensure:** Si $v'$ autovector de A con autovalor asociado $\lambda'$, también lo es para B

## 0.1 Correctitud de Método de la Potencia y Deflación simultáneamente

El método de la potencia asume que tenemos un autovalor dominante y que todos los autovalores son mayores o iguales a 0. $A^tA$ es simétrica por lo, que tenemos una base ortonormal de autovectores, y además es semi-defininda positiva, por lo que sus autovalores son positivos o 0.

Queremos ver que al aplicar el método de la potencia para obtener el autovector del autovalor dominante y luego deflación la matriz sigue cumpliendo con estas propiedades.

**Lema:** la matriz $A^tA$ sigue siendo simétrica y semi definida positva después de apicar el algoritmo de deflación.

Prueba: Sean $\lambda$ el autovalor dominante, $v$ su autovalor asociado y $B = A^tA - \lambda_1 vv^t$.

Simétrica:

$$B_{ij} = (A^tA)_{ij} - \lambda v_i(v^t)_j = (A^tA)_{ij} - \lambda v_i v_j =^{(1)} (A^tA)_{ji} - \lambda v_j(v^t)_i = B_{ji}$$

(1) $A$ simétrica y $v$ vector.

Semi definida positiva:

**Lema:** Los valores singulares de $A$ son los mismos que los valores singulares de $A^t$.

Prueba: Los valores singulares de la matriz $\Sigma$ son las raices de los autovalores en orden decreciente por la diagonal. Los autovalores están definidos como los valores que anulan a la función $\psi(\lambda) = det(\lambda I - A)$. En el caso de la traspuesta, sus autovalores son los que anulan a la función $\psi(\lambda) = det(\lambda I - A^t)$, pero $(\lambda I - A)^t = (\lambda I - A^t)$ y el determinante es invariante al trasponer una matriz. Entonces los autovalores son los mismos y, por ende, los valores singulares también.

**Lema:** Si $A \in \mathbb{R}^{nxm}, \Sigma \in \mathbb{R}^{mxn}, U \in \mathbb{C}^{mxm}, V \in \mathbb{C}^{nxn}, A = U\Sigma V^t$, entonces:

- $A^t = V\Sigma U^t$
- $AA^t = U\Lambda U^t$ con $\Lambda$ la matriz con los autovalores de $A$ y $A^t$ en la diagonal.
- $A^tA = V\Lambda V^t$ con $\Lambda$ la matriz con los autovalores de $A$ y $A^t$ en la diagonal.

Prueba: El primero es inmediato de trasponer a y del hecho de que $\Sigma$ es diagonal. Para el segundo y el tercero:

$$AA^t = U\Sigma V^t V\Sigma U^t =^{(1)} U\Sigma\Sigma U^t =^{(2)} U\Lambda U^t$$

$$A^tA = V\Sigma U^t U\Sigma V^t =^{(1)} V\Sigma\Sigma V^t =^{(2)} V\Lambda V^t$$

(1) $U$ y $V$ matrices ortogonales
(2) $\lambda$ diagonal con valores singulares en la diagonal.