



DEPARTAMENTO  
DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

## Métodos Numéricos

### Trabajo práctico 3

Hay que poner un poquito más de esfuerzo. . .

#### *Resumen*

Integrante	LU	Correo electrónico
Danós, Alejandro	381/10	adp007@gmail.com
Gandini, Luciano	207/10	gl.gandini@gmail.com
Russo, Christian Sebastián	679/10	christian.russo@gmail.com

Palabras claves:

Cuadrados Minimos, Factorizacion QR, Heuristica, Ecuaciones Normales, Futbol de Robots

# Índice

<b>1. Introduccion Teorica</b>	<b>3</b>
1.1. Factorizacion QR . . . . .	3
1.1.1. Given . . . . .	3
1.1.2. Householder . . . . .	3
1.2. Ecuaciones Normales?? . . . . .	3
<b>2. Desarrollo</b>	<b>4</b>
2.1. Archivo de entrada . . . . .	4
2.1.1. Explicacion . . . . .	4
2.2. Archivo de salida . . . . .	4
2.2.1. Explicacion . . . . .	4
2.3. Método Uno: Usando Cuadrados Mínimos . . . . .	4
2.3.1. Cuadrados Mínimos: General . . . . .	4
2.3.2. Cuadrados Mínimos: Específico a nuestro trabajo . . . . .	5
2.3.3. Resolver Cuadrados Mínimos usando QR . . . . .	5
2.3.4. Pseudocodigo . . . . .	6
2.4. Demostraciones . . . . .	7
<b>3. Experimentacion</b>	<b>8</b>
3.1. Generador de Tests . . . . .	8
<b>4. Resultados</b>	<b>8</b>
<b>5. Apendice</b>	<b>9</b>
5.1. Método de compilación . . . . .	9
5.1.1. Método 1 . . . . .	9
5.1.2. Método 2 . . . . .	9
5.2. Equipo de pruebas . . . . .	9
5.3. Referencias bibliográficas . . . . .	9

# 1. Introduccion Teorica

## 1.1. Factorizacion QR

**Definicion:** Se dice que una matriz tiene **factorizacion QR** si puede ser expresada de la forma

$$A = Q^t R$$

El algoritmo para llevar a una matriz a su forma QR tiene costo  $O(n^3)$ . Tiene la misma ventaja que la factorizacion LU de permitir resolver un sistema de ecuaciones en orden  $O(n^2)$ , pero con la ventaja que **toda matriz tiene factorizacion QR**

$$Ax = b$$

$$QR^t x = b$$

$$Q^t Q^t R^t x = Q^t b$$

$$R^t x = Q^t b$$

con  $R^t x$  un **sistema triangular superior**

Para poder calcular la matriz R se pueden aplicar los metodos de **Givens o Householder**

### 1.1.1. Given

Para eliminar el elemento en la posicion (i,j) aplicamos la siguiente matriz:

$$G(i, j, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & c & \dots & -s & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & s & \dots & c & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Figura 1: Matriz de Givens

con  $c = \cos(\theta)$  y  $s = \sin(\theta)$ . Luego aplicando  $G(i, j, \theta) * A$  queda en 0 el elemento (i,j). Entonces aplicamos sucesivamente este procedimiento para todos los elementos que queremos poner en 0 obteniendo asi nuestra matriz R. Luego  $Q^t = \prod_{i=n}^1 G_i$

### 1.1.2. Householder

Con este metodo vamos a limando los 0 de abajo de la diagonal columna a columna. Sea  $x = col_i(A)$ ,  $y = (||x||_2, 0, \dots, 0)$  y sea  $u = x - y$ . Definimos  $H_i = I - \frac{2uu^t}{u^t u}$ . Luego aplicando  $H_i * A$  queda triangulada la columna i de A. Aplicamos este procedimiento iterativamente sobre  $A^{(i)}$  hasta dejar triangulada la matriz. Quedando  $Q^t = \prod_{i=n}^1 H_i$

## 1.2. Ecuaciones Normales??

## 2. Desarrollo

En esta sección describiremos los métodos usados para resolver el problema, cada uno con sus ventajas y desventajas.

### 2.1. Archivo de entrada

#### 2.1.1. Explicacion

El ejecutable toma tres parámetros por línea de comando, que serán el *path* del archivo de entrada, el *path* del archivo de salida y la estrategia que utilizaremos con el arquero.

El archivo de entrada seguirá el siguiente formato:

- La primera línea contendrá la posición inicial del arquero en  $y$ , luego las coordenadas que definen los límites del arco, también sobre el eje  $y$ . Se asume que la posición en  $x$  del arquero y de la línea de gol son las mismas:  $x = 125$ . Finalmente estará  $\mu$ , la cota sobre el máximo desplazamiento que puede realizar el arquero en un instante de tiempo.
- Luego se muestra la secuencia de posiciones en  $\mathbb{R}^2$ , una por línea, que toma la pelota para los instantes de tiempo  $0, 1, \dots, T$ , siendo  $T$  el tiempo final.

En un primer lugar, leeremos la primera línea del archivo de entrada para *setear* los valores correctos de la posición en  $y$  del arquero, las posiciones de los palos y el  $\mu$ . Luego, dado que se asume que no podemos saber qué pasará más allá del tiempo actual, iremos leyendo la entrada a medida que hagamos hecho los cálculos para el tiempo anterior.

### 2.2. Archivo de salida

#### 2.2.1. Explicacion

El archivo de salida especificado como parámetro será creado en caso de que no exista y reemplazado por uno nuevo en caso de que ya exista. Este nuevo archivo contendrá una instrucción por línea, correspondiente a la acción que realiza el arquero en el instante  $0 \leq t \leq T$ , siendo  $T$  el instante final.

Este archivo luego podrá ser usado junto con el archivo de entrada para analizar qué sucede con el visualizador proporcionado por la cátedra.

### 2.3. Método Uno: Usando Cuadrados Mínimos

Nuestro primer enfoque fue mirar al problema como si fuera uno de analizar los datos obtenidos en un experimento y tratásemos de describir la distribución de estos mediante una función.

En esta perspectiva, nuestra entrada sería el tiempo y la salida la posición en la cancha de la pelota. Además, como las variaciones en las coordenadas  $x$  e  $y$  de la pelota son independientes podemos dividir al problema en una entrada y dos salidas. De esta forma, deberíamos resolver dos problemas de cuadrados mínimos.

#### 2.3.1. Cuadrados Mínimos: General

El estudio de Cuadrados Mínimos nació al querer describir el comportamiento de datos con funciones polinómicas. Normalmente, las mediciones traen inherentemente una cuota de ruido y si

se sospecha que éstas siguen un crecimiento de un polinomio de grado como máximo  $n$ , es difícil encontrar los coeficientes de este polinomio dado que el ruido afecta a los puntos. Cuadrados Mínimos trata de solucionar este problema.

Más formalmente, si se tiene  $m$  entradas y para cada una de ellas una salida asociada,  $x_i$  e  $y_i$  respectivamente, y se los quiere describir con un polinomio  $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  de grado máximo fijo  $n$ , entonces la técnica de Cuadrados Mínimos busca a los  $n+1$  coeficientes  $a_i \forall i = 0 \dots n$  resolviendo el problema buscar el vector  $a$  tal que minimice a la norma de  $A \times a - b$  al cuadrado, con  $A \in \mathbb{R}^{m \times (n+1)}$ ,  $a \in \mathbb{R}^m$  y  $b \in \mathbb{R}^n$  los siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_m^n & x_m^{n-1} & \dots & x_m & 1 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \quad y \quad b = \begin{pmatrix} y_m \\ y_{m-1} \\ \vdots \\ y_1 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

La diferencia entre resolver directamente el sistema  $A \times a = b$  y minimizar a  $\|A \times a - b\|$  consta en que el primero busca a los coeficientes tal que el polinomio pasa exactamente por los puntos  $y_i$ , es decir,  $P(x_i) = y_i \forall i = 0..m$ , mientras que el segundo trata de buscar los coeficientes que minimicen a  $\sum_{i=0}^m (P(x_i) - y_i)^2$ , o la suma de los errores al cuadrado.

### 2.3.2. Cuadrados Mínimos: Específico a nuestro trabajo

En nuestro caso, deberíamos resolver dos problemas de Cuadrados Mínimos dado que para cada tiempo  $t_i$  tenemos dos coordenadas independientes:  $x_i$  e  $y_i$ . Si seguimos la notación anterior, la matriz  $A$  no cambiaría entre una coordenada y otra aunque sí el vector  $b$  sí tendría dos casos a parte, que llamaremos  $b_x$  y  $b_y$ .

Para resolver esta minimización se pueden usar por lo menos 3 métodos distintos: resolver mediante una factorización QR, mediante funciones normales o también factorizando usando descomposición en valores singulares. En las siguientes secciones explicaremos los métodos de QR y de funciones normales.

### 2.3.3. Resolver Cuadrados Mínimos usando QR

Sea  $A = Q^*R$  la factorización QR de la matriz  $A$  mencionada en las secciones anteriores. Entonces,

$$\min_{x \in \mathbb{R}^{(n+1)}} \|Ax - b\|^2 = \min_{x \in \mathbb{R}^{(n+1)}} \|Q^t Ax - Q^t b\|^2 = \min_{x \in \mathbb{R}^{(n+1)}} \|Rx - Q^t b\|^2$$

Como  $A$  tiene columnas independientes<sup>1</sup>, entonces  $R_{i,i} \neq 0 \forall i = 1, \dots, n+1$  y además  $R_{i,j} = 0 \forall i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, i-1$ . La multiplicación matriz-vector  $Rx$  entonces sería:

$$Rx = \begin{pmatrix} R_1 x \\ 0 \end{pmatrix} \text{ con } R_1 \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)} \text{ la parte por arriba de la diagonal de } R.$$

Además, si reescribimos a  $Q^t b$  como:

$$Q^t b = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \text{ con } c \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)} \text{ y } d \in \mathbb{R}^{m-(n+1)}, \text{ problema se reduce a:}$$

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^{(n+1)}} \|Rx - Q^t b\|^2 &= \|(R_1 x, 0)^t - (c, d)^t\|^2 = \min_{x \in \mathbb{R}^{(n+1)}} \|R_1 x - c\|^2 + \|d\|^2 \\ &\rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^{(n+1)}} \|R_1 x - c\|^2 \rightarrow x/R_1 x = c \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Para más información, referirse a la sección demostraciones

$$R = \begin{bmatrix} \hat{R} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{r}_{11} & \hat{r}_{12} & \hat{r}_{13} \\ 0 & \hat{r}_{22} & \hat{r}_{23} \\ 0 & 0 & \hat{r}_{33} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} \hat{c} \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \\ \hat{c}_3 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

**Figura 7:** Ejemplo de rango completo.

El sistema  $R_1 x = b$  tiene solución dado que  $R_1$  es triangular superior con elementos no nulos en la diagonal. Si encontramos el  $x$  que sea solución para ese sistema, será el mismo  $x$  solución para el problema de Cuadrados Mínimos.

### 2.3.4. Pseudocodigo

---

**Algorithm 1** FactorizacionQR(Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ )

---

```

Matriz  $R \leftarrow A$ 
Matriz  $Q \leftarrow$  Matriz Identidad  $\in \mathbb{R}^{n \times n}$ 
Matriz  $Qt \leftarrow$  Matriz Identidad  $\in \mathbb{R}^{n \times n}$ 
for  $i = 0$  hasta  $m$  do
  if  $(n - i) > 1$  then
    Matriz  $tmp \leftarrow$  Matriz Identidad  $\in \mathbb{R}^{n \times n}$ 
    Matriz  $subQt \leftarrow$  Matriz Identidad  $\in \mathbb{R}^{(n-i) \times (n-i)}$ 
    Matriz  $subR \leftarrow generarSubMatriz(R, i) \in \mathbb{R}^{(n-i) \times (m-i)}$ 
     $(subR, subQt) \leftarrow triangularColumna(subR, subQt)$ 
     $R \leftarrow agregarSubMatrix(subR, R, i)$ 
     $tmp \leftarrow agregarSubMatrix(subQt, tmp, i)$ 
  end if
   $Qt \leftarrow tmp * Qt$ 
end for
return  $(Qt, R)$ 

```

---



---

**Algorithm 2** generarSubMatrix(Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , int  $i$ )

---

```

Matriz  $res \leftarrow$  Matriz  $\in \mathbb{R}^{(n-i) \times (m-i)}$ 
 $res_{k,l} \leftarrow A_{i+k,i+l} \quad \forall k = 0, \dots, (n-i) \text{ y } l = 0, \dots, (m-i)$ 
return  $res$ 

```

---

---

**Algorithm 3** triangularColumna(Matrix  $sub \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , Matrix  $subQt \in \mathbb{R}^{n \times m}$ )
 

---

Vector  $x \leftarrow$  Vector de Ceros  $\in \mathbb{R}^n$   
 Vector  $y \leftarrow$  Vector de Ceros  $\in \mathbb{R}^n$   
 Vector  $u \leftarrow$  Vector de Ceros  $\in \mathbb{R}^n$   
**for**  $i = 0$  hasta  $x.n$  **do**  
      $x_i \leftarrow sub_i$   
**end for**  
 $y_0 \leftarrow \|x\|$   
 $u \leftarrow x - y$   
 Vector  $uTranspuesto \leftarrow u^t \in \mathbb{R}^{1 \times n}$   
 Vector  $aux \leftarrow$  Vector  $uTranspuesto * sub \in \mathbb{R}^n$   
 Matriz  $aux2 \leftarrow$  Matriz  $u * aux \in \mathbb{R}^{n \times m}$   
 int  $coeficiente \leftarrow 2/\|u\|^2$   
 $sub \leftarrow sub - (aux2 * coeficiente)$   
 $aux \leftarrow uTranspuesto * subQt$   
 $aux2 \leftarrow u * aux$   
 $subQt \leftarrow subQt - (aux2 * coeficiente)$   
**return** (sub, subQt)

---



---

**Algorithm 4** agregarSubMatrix(Matrix  $sub \in \mathbb{R}^{(n-i) \times (m-i)}$ , Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , int  $i$ )
 

---

$A_{i+k, i+l} \leftarrow sub_{k,l} \quad \forall k = 0, \dots, (n-i) \text{ y } l = 0, \dots, (m-i)$   
**return** Matriz A modificada

---

## 2.4. Demostraciones

En esta sección daremos demostraciones de los supuestos considerados en los algoritmos usados en el trabajo.

Sean  $A \in \mathbb{R}^{m \times (n+1)}$  con:

$$A = \begin{pmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \cdots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_m^n & x_m^{n-1} & \cdots & x_m^1 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} y_m \\ y_{m-1} \\ \vdots \\ y_1 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

**Lema** Si  $m > n+1$ , entonces A tiene rango de columnas máximo.

Prueba:  $A = (C_1, C_2, \dots, C_n, C_{n+1})$  si la miramos como columnas. Asumamos que no tiene rango máximo. Eso es equivalente a que:

$\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \dots + \alpha_n C_n + \alpha_{n+1} C_{n+1} = 0$  con  $\alpha_i \in R$  y  $\alpha_i \neq 0$  para algún  $i$ , que es equivalente a que  $A * \alpha = 0$ . O sea, que el polinomio  $P(x)$  de grado  $n$  tendría  $m > n+1$  raíces dado que cada fila sería una evaluación en un punto distinta del polinomio dado que los  $x_i$  son distintos. Absurdo.

### 3. Experimentacion

#### 3.1. Generador de Tests

Para generar Tests realizamos un algoritmo en Python en el cual generamos instancias lineales tomando como parametros el  $\mu$ , la posicion del arquero y la ubicacion de los arcos. De la misma forma generamos instancias polinomicas. Para ambos casos tuvimos en cuenta el punto inicial, es decir donde empieza la trayectoria de la pelota y el punto final, es decir la posicion de la pelota dentro del arco. Para tests mas complejos utilizamos un script en C++ en donde para generar las curvas utilizamos la funcion spline de la libreria boots con la cual le agregamos los puntos por donde queriamos que pase la pelota e interpolatebamos para conseguir una curva que pase por ese lugar tomando esa curva como el tests.

### 4. Resultados



## 5. Apendice

### 5.1. Método de compilación

#### 5.1.1. Método 1

Parados en la carpeta /src del proyecto ejecutar

```
$ make
```

De esta forma se limpia y compila. Para compilar por separado se puede hacer: **make data.o**, **make functions.o**, **make Matrix.o**, **make main.o**. O tambien se puede borrar haciendo **make clean**. Por defecto al ejecutar **make** el nombre del ejecutable es **yoAtajo**

#### 5.1.2. Método 2

Parados en la carpeta donde se encuentra el tp (donde se encuentra el archivo run.py)

```
$ python run.py < input tiro > < metodo > < velocidad >
```

Donde METODO puede ser

- 0:
- 1:

Donde INPUT TIRO puede ser

- Path a una carpeta: ejecuta todos los tests que contiene dicha carpeta.
- Path a un archivo: ejecuta el tests que corresponde a esta ruta.

Donde VELOCIDAD puede ser

- 0: Para correr el visualizador rapido (no se muestra el tiro)
- 1: Para correr el visualziador en modo lento (se muestra el tiro)

### 5.2. Equipo de pruebas

### 5.3. Referencias bibliográficas

## Referencias

- [1] Richard L. Burden and J. Douglas Faires *Numerical Analysis*. 2005.